Πίνακας περιεχομένων

Τυπολόγιο

Στο τελευταίο μέρος του βιβλίου παραθέτουμε από την Τριγωνομετρία, τους Μιγαδικούς, τα Ολοκληρώματα και άλλες ενότητες των Μαθηματικών βασικές ταυτότητες και τύπους, που δε χρειάζεται να τους θυμάται κανείς απέξω, αλλά να τους έχει συγκεντρωμένους για άμεση πρόσβαση. Η Τριγωνομετρία, που θεωρείται το πιο χρήσιμο εργαλείο σ’ όλες ανεξαιρέτως τις θετικές επιστήμες, περιέχει πολλούς βασικότατους τύπους που είναι χρήσιμοι για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ιδιαίτερα στην Τοπογραφία και πολλές άλλες εφαρμοσμένες επιστήμες.

Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Σχέση που μετατρέπει μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα

$\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ (όπου μ είναι οι μοίρες και α τα ακτίνια)

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1,\ \varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta},\ \sigma\varphi\theta=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta},\ \varepsilon\varphi\theta\cdot\sigma\varphi\theta=1 \text{ ή}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \tan\theta\cdot\cot\theta=1,$$

$$\tau\varepsilon\mu\theta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta},\ \sigma\tau\varepsilon\mu\theta=\frac{1}{\eta\mu\theta},\ \text{ή } \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\ \csc=\frac{1}{\sin\theta},\ \text{όπου:}$$

sin (sine) = ημίτονο, cos (cosine) = συνημίτονο, tan (tangent) = εφαπτομένη, cot (cotangent) = συνεφαπτομένη, sec (secant) = τέμνουσα, csc (cosecant) = συντέμνουσα.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αντίθετων τόξων

$$\eta\mu(-\theta)=-\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta,\ \varepsilon\varphi(-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta,\ \sigma\varphi(-\theta)=-\sigma\varphi\theta\,.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί συμπληρωματικών τόξων

$$\eta\mu(\pi/2-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta,\ \sigma\upsilon\nu(\pi/2-\theta)=\eta\mu\theta,\ \varepsilon\varphi(\pi/2-\theta)=\sigma\varphi\theta,\ \sigma\varphi(\pi/2-\theta)=\varepsilon\varphi\theta\,.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων που διαφέρουν κατά $\pi/2$

$$\eta\mu(\pi/2+\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta,\ \sigma\upsilon\nu(\pi/2+\theta)=-\eta\mu\theta,\ \varepsilon\varphi(\pi/2+\theta)=-\sigma\varphi\theta\,.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών τόξων

$$\eta\mu(\pi-\theta)=\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta,\ \varepsilon\varphi(\pi-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta,\ \sigma\varphi(\pi-\theta)=-\sigma\varphi\theta\,.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων που διαφέρουν κατά π

$$\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta,\ \varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta,\ \sigma\varphi(\pi+\theta)=\sigma\varphi\theta\,.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος ή διαφοράς τόξων

$$\eta\mu(\alpha\pm\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\pm\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta,\ \sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\mp\eta\mu\alpha\eta\mu\beta,$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha\pm\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\pm\varepsilon\varphi\beta}{1\mp\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta},\ \sigma\varphi(\alpha\pm\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta\mp1}{\sigma\varphi\beta\pm\sigma\varphi\alpha}.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου ή τριπλάσιου τόξου

$$\eta\mu(2\theta)=2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta,\ \sigma\upsilon\nu(2\theta)=\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1=1-2\eta\mu^2\theta,$$

$$\varepsilon\varphi(2\theta)=\frac{2\varepsilon\varphi\theta}{1-\varepsilon\varphi^2\theta},\ \sigma\varphi(2\theta)=\frac{\sigma\varphi^2\theta-1}{2\sigma\varphi\theta},$$

$$\eta\mu(3\theta)=3\eta\mu\theta-4\eta\mu^3\theta,\ \sigma\upsilon\nu(3\theta)=4\sigma\upsilon\nu^3\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\varepsilon\varphi(3\theta)=\frac{3\varepsilon\varphi\theta-\varepsilon\varphi^3\theta}{1-3\varepsilon\varphi^2\theta},\ \sigma\varphi(3\theta)=\frac{\sigma\varphi^3\theta-3\sigma\varphi\theta}{3\sigma\varphi^2\theta-1}.$$

Έκφραση των ημθ, συνθ, εφθ συναρτήσει της εφθ/2

$$\eta\mu\theta=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}},\quad \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}},\quad \varepsilon\varphi\theta=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}$$

Δυνάμεις ημιτόνων και συνημιτόνων με πολλαπλάσια τόξα

$$\eta\mu^2\theta=\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\theta)}{2},\ \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\theta)}{2},$$

$$\eta\mu^3\theta=\frac{3}{4}\eta\mu\theta-\frac{1}{4}\eta\mu(3\theta),\ \sigma\upsilon\nu^3\theta=\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu(3\theta),$$

$$\eta\mu^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2\theta) + \frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu(4\theta),\ \sigma\upsilon\nu^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2\theta) + \frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu(4\theta)$$

Μετασχηματισμοί αθροισμάτων σε γινόμενα και αντίστροφα

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2},\ \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2},\ \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\right],\ \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\right],$$

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2}\left[\eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta)\right].$$

Σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha, \beta, \gamma,$ και απέναντι γωνίες Α, Β, Γ, είναι:

1) *Νόμος ημιτόνων*: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\alpha} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\beta} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\gamma} = 2R$,

(όπου R ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, δηλαδή του κύκλου που περνάει από τις τρεις κορυφές και έχει κέντρο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών).

2) *Νόμος συνημιτόνων*: $\begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{A} \\ \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{B} \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\,\Gamma. \end{cases}$

3) *Νόμος εφαπτομένων*:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\right)},\quad \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}\right)},\quad \frac{\gamma+\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\Gamma+\mathrm{A}}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\Gamma-\mathrm{A}}{2}\right)}.$$

4) *Εμβαδόν τριγώνου*: $E = \dfrac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\,\Gamma = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\,\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu\,\mathrm{B}$.

Λύσεις βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων

Αν $\eta\mu x = \alpha = \eta\mu\theta$, τότε $x = \begin{cases} 2k\pi + \theta, \text{ ή} \\ 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases}$, όπου $\begin{cases} k \in Z, \ (Z \text{ σύνολο ακεραίων}) \\ -1 \le \alpha \le 1 \ \text{ και } \theta \text{ σε ακτίνια.} \end{cases}$

Αν $\sigma\upsilon\nu x = \alpha = \sigma\upsilon\nu\theta$, τότε $x = 2k\pi \pm \theta$, $k \in Z$, $-1 \le \alpha \le 1$ και θ σε ακτίνια.

Αν $\varepsilon\varphi x = \alpha = \varepsilon\varphi\theta$, τότε $x = k\pi + \theta$, $k \in Z$, $\alpha \in R$ και θ σε ακτίνια.

Αν $\sigma\varphi x = \alpha = \sigma\varphi\theta$, τότε $x = k\pi + \theta$, $k \in Z$, $\alpha \in R$ και θ σε ακτίνια.

Ειδικές περιπτώσεις:

$\eta\mu x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ \eta\mu x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi/2,\ \eta\mu x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \pi/2$.

$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \pi/2,\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ \sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

Βασικές ταυτότητες υπερβολικών συναρτήσεων

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

- *Υπερβολικό ημίτονο* του *x*: (Sine Hyperbolic) $\sin hx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- *Υπερβολικό συνημίτονο* του *x*: (Cosine Hyperbolic) $\cos hx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- *Υπερβολική εφαπτομένη* του *x*: (Tangent Hyperbolic) $\tan hx = \dfrac{\sin hx}{\cos hx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
- *Υπερβολική συνεφαπτομένη* του *x*: (Cotangent Hyperbolic) $\cot hx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

$(\sin hx)' = \cos hx,\ (\cos hx)' = \sin hx,\ (\tan hx)' = \dfrac{1}{\cos h^2 x},\ (\cot hx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

Στις υπερβολικές συναρτήσεις υπάρχουν σχέσεις ανάλογες, ή περίπου ανάλογες με τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές. Π. χ.

$\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1,\ \sin h(x \pm y) = \sin hx \cdot \cos hy \pm \cos hx \cdot \sin hy$,

$\sin h(2x) = 2\sin hx \cdot \cos hx$, $\sin hA + \sin hB = 2\sin h\dfrac{A+B}{2}\cos h\dfrac{A-B}{2}$, και άλλες.

Όλες οι σχέσεις αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού των υπερβολικών συναρτήσεων. Ονομάζονται υπερβολικές συναρτήσεις γιατί προκύπτουν από την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, όπως ακριβώς προκύπτουν και οι κυκλικές (τριγωνομετρικές) συναρτήσεις από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ (μοναδιαίο κύκλο).

Επίσης, $(\cos hx \pm \sin hx)^{\nu} = \cos h(\nu x) \pm \sin h(\nu x)$ (τύπος του De Moivre)

Ακόμη οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

$y = \tau o\xi \sin hx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $y = \tau o\xi \cos hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ με $x \geq 1$,

$y = \tau o\xi \tan hx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ με $|x| < 1$, $y = \tau o\xi \cot hx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ με $|x| > 1$.

Β. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΣΕΙΡΕΣ

$i = \sqrt{-1}$ (φανταστική μονάδα), με $i^2 = -1$ και $i^n = \begin{cases} 1, & \text{για } n = 4k \\ i, & \text{για } n = 4k+1 \\ -1, & \text{για } n = 4k+2 \\ -i, & \text{για } n = 4k+3 \end{cases}$, $k \in Z$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

$z = x + yi = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$, όπου $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, $\bar{z} = x - yi$ (συζυγής του z),

$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (μέτρο του z), $\varphi = \tau o\xi\varepsilon\varphi(y/x)$ (όρισμα του z), $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1),\ z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2), \ldots, z_n = \rho_n(\sigma\upsilon\nu\varphi_n + i\eta\mu\varphi_n)$, τότε

$z_1 z_2 \cdots z_n = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n\left[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)\right]$,

και για $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$z^n = \left[\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)\right]^n = \rho^n\left[\sigma\upsilon\nu(n\varphi) + \mathrm{i}\eta\mu(n\varphi)\right]$ (Θεώρημα De Moivre).

Επίσης είναι, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$.

Θεώρημα ύπαρξης ν – στών ριζών μιγαδικού

Αν $\alpha = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ τυχαίος μιγαδικός, τότε η εξίσωση $z^{\nu} = \alpha$ έχει ν ακριβώς διάφορες μεταξύ τους ρίζες του z, που δίνονται απ' τον τύπο του De Moivre

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{\nu}\right)\right], \text{ όπου } k = 0, 1, 2, ..., \nu - 1.$$

Επειδή τα μέτρα των ριζών z_k είναι όλα ίδια, ίσα με $\sqrt[\nu]{\rho}$, ενώ τα ορίσματά τους τέτοια ώστε από μια αρχική τιμή $\frac{\varphi}{\nu}$ (k = 0) αυξάνουν διαρκώς κατά $\frac{2\pi}{\nu}$, αν παραστήσουμε γεωμετρικά τις ν – στές αυτές ρίζες του α, οι εικόνες αυτών M_0, M_1, M_2, ..., $\mathrm{M}_{\nu-1}$ στο μιγαδικό επίπεδο θα βρίσκονται πάνω σε κύκλο με κέντρο O την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$, θα είναι δε κορυφές κανονικού ν – γώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτό.

Ρίζες πολυωνύμου $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$

Κάθε πολυώνυμο *n* βαθμού έχει *n* ακριβώς ρίζες (θεώρημα D' Alembert) και

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) = 0,$$

όπου x_1, x_2, ..., x_n είναι οι ρίζες του πολυωνύμου.

Επίσης, αν έχει και μιγαδικές ρίζες, τότε αυτές θα είναι συζυγείς ανά ζεύγη.

Λύση πολυωνυμικών εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού

Ως γνωστό, πλήρεις πολυωνυμικές εξισώσεις μέχρι και 4^{ου} βαθμού μπορούν να λυθούν με στοιχειώδεις πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, ύψωση σε δύναμη, εξαγωγή ν – στής δύναμης). Αποδεικνύεται ότι πολυωνυμικές εξισώσεις 5^{ου} και άνω βαθμού δεν λύνονται. Είναι όμως δυνατόν, εφαρμόζοντας διάφορες επαναληπτικές ή άλλες μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης να υπολογίσουμε τις ρίζες με όση ακρίβεια θέλουμε. (Το βασικό αντικείμενο της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι η επίλυση προβλημάτων που δεν λύνονται με στοιχειώδη Μαθηματικά. Σήμερα με την τεράστια πρόοδο στον τομέα της Πληροφορικής, η Αριθμητική Ανάλυση αποτελεί έναν από τους πιο ενδιαφέροντες τομείς των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών).

Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού

Η γενική μορφή της τριτοβάθμιας εξίσωσης είναι $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

(Υποτίθεται ότι οι προς εύρεση ρίζες, δεν είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, για να εφαρμοστεί το γνωστό σχήμα Horner).

Θέτοντας $x = y - \dfrac{\alpha}{3}$, χάνεται ο δευτεροβάθμιος όρος και παίρνει τη μορφή

$y^3 + py + q = 0$, **(1)** όπου $p = -\dfrac{\alpha^2 - 3\beta}{3}$ και $q = \dfrac{27\gamma - 9\alpha\beta + 2\alpha^3}{27}$.

•Αν $p,$ ή $q = 0$ η (1) γίνεται διώνυμη και λύνεται κατά τα γνωστά.

•Αν $p,\ q \neq 0$, θέτουμε $y = u + v$ και θα προσδιορίσουμε τα u και v. Είναι

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \text{ ή } u^3 + v^3 + q + 3uv(u+v) + p(u+v) = 0 \text{ ή}$$

$$(u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv + p) = 0 .$$

Επομένως θα πρέπει να είναι

$$u^3 + v^3 + q = 0 \text{ και } 3uv + p = 0 .$$

(Ο όρος $u + v$ δεν είναι δυνατόν να είναι μηδέν, γιατί τότε θα ήταν και $y = 0$ και θα προέκυπτε από την (1) ότι και $q = 0$, άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $q \neq 0$).

Απ' τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει $u^3 + v^3 = -q$ **(2)** και $uv = -\dfrac{p}{3}$ **(3).**

Η (3) δίνει $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$. **(4)**

Από τις (2) και (4) φαίνεται ότι τα u^3 και v^3 είναι ρίζες της εξίσωσης

$k^2 + qk - \dfrac{p^3}{27} = 0$ (γνωστό άθροισμα $S = -q$ και γινόμενο $P = -\dfrac{p^3}{27}$ των ριζών)

με ρίζες $u^3 = k_1$ και $v^3 = k_2$:

$k_{1,2} = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4 \cdot \dfrac{p^3}{27}}}{2} = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$. Δηλαδή είναι

$$u^3 = k_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ και } v^3 = k_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} .$$

Έτσι προκύπτει

$u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$, **(5)** οπότε η (3) λόγω της (5) δίνει αμέσως $v = -\dfrac{p}{3u}$ (αποφεύγοντας έτσι την εύρεση των κυβικών ριζών της k_2). Άρα $y = u - \dfrac{p}{3u}$.

Η (5) δίνει τρεις ρίζες για το *u*, άρα τρεις για το *y* και τελικά για το $x = y - \dfrac{\alpha}{3}$.

Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης 4ου βαθμού

Η γενική μορφή της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης είναι $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$.

Θέτοντας $x = y - \dfrac{\alpha}{4}$, χάνεται ο τριτοβάθμιος όρος και παίρνει τη μορφή

$$y^4 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\mathrm{A} = \dfrac{16\beta - 6\alpha^2}{16}$, $\mathrm{B} = \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha\beta + 8\gamma}{8}$ και $\Gamma = \dfrac{16\alpha^2\beta + 256\delta - 64\alpha\gamma - 3\alpha^4}{256}$

- Αν Β = 0, η (1) γίνεται διτετράγωνη και λύνεται με αντικατάσταση $y^2 = z$ ως δευτεροβάθμια.
- Αν Γ = 0, η (1) λύνεται ως τριτοβάθμια γιατί θα είναι $y(y^3 + \mathrm{A}y + B) = 0$ και λύνεται κατά τα γνωστά.
- Αν Α = 0, Β = 0, τότε η (1) γίνεται $y^4 + \Gamma = 0$ και λύνεται ως διώνυμη.
- Αν $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Gamma \neq 0$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $y^4 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma = (y^2 + \lambda y + \mu)(y^2 - \lambda y + v)$, **(2)**

και θα ζητήσουμε να προσδιορίσουμε τα $\lambda,\ \mu,\ v$, ώστε η (2) να είναι ταυτότητα ως προς *y*, οπότε η λύση της (1) ανάγεται στη λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων

$$y^2 + \lambda y + \mu = 0, \quad y^2 - \lambda y + v = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο 2ο μέλος της (2) και εξισώσουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων του *y* θα πάρουμε το σύστημα

$$v + \mu - \lambda^2 = \mathrm{A}, \quad \lambda v - \lambda\mu = \mathrm{B}, \quad \mu v = \Gamma \text{ ή ακόμη}$$

$$v + \mu = \lambda^2 + \mathrm{A}, \quad v - \mu = \frac{\mathrm{B}}{\lambda}, \quad \mu v = \Gamma. \qquad \textbf{(4)}$$

Από τις δύο πρώτες των (4) βρίσκουμε τα $v,\ \mu$ συναρτήσει των $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \lambda$. Είναι

$$v = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{\lambda}\right), \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{\lambda}\right).$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των $\nu,\ \mu$ στην τρίτη σχέση των (4), έχουμε

$$(\lambda^2)^3 + 2\mathrm{A}(\lambda^2)^2 + (\mathrm{A}^2 - 4\Gamma)\lambda^2 - \mathrm{B}^2 = 0\,, \qquad \mathbf{(5)}$$

δηλαδή μια εξίσωση πλήρης τρίτου βαθμού ως προς λ^2. Αν λυθεί αυτή, θα δώσει τρεις τιμές για το λ^2, απ' τις οποίες η μία τουλάχιστον θα είναι πραγματική (γιατί οι μιγαδικές ρίζες είναι πάντα συζυγείς ανά ζεύγη). Κάθε τιμή του λ^2 δίνει δύο τιμές για το λ τις $\pm\sqrt{\lambda^2} = \pm|\lambda|$. Έτσι, για το λ έχουμε συνολικά έξι τιμές. Οι έξι όμως αυτές λύσεις μόνο κατά τρεις τρόπους δίνουν ανάλυση της μορφής (2), γιατί όπως φαίνεται στη (2), τα λ εμφανίζονται με αντίθετα πρόσημα και επομένως οι αναλύσεις θα συμπίπτουν ανά δύο.

Συνεπώς, η λύση της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης ανάγεται στη λύση μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, της (5) και δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων των (3), απ' τις οποίες παίρνουμε για κάθε ζεύγος τιμών $+\sqrt{\lambda^2}$ και $-\sqrt{\lambda^2}$ τέσσερις τιμές για το y και επομένως τέσσερις τιμές και για το x, απ' την $x = y - \dfrac{\alpha}{4}$.

Τύπος του Mac – Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots \quad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$$

Με τον τύπο του Mac – Laurin μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της, συνεχούς και παραγωγίσιμης, με ένα πολυώνυμο. Π. χ.

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},\ \sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \ldots \Rightarrow e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\ldots,$$

$$\sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},\ \cos hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

Τύποι του Euler

$e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x,\quad e^{-ix} = \sigma\upsilon\nu x - i\eta\mu x$, απ' τους οποίους προκύπτουν:

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \eta\mu x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\quad e^{\pi i}=e^{-\pi i}=-1,\quad e^{2\pi i}=1,\quad i^{\,i}=e^{-\pi/2}.$$

Γ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Παραθέτουμε ορισμένα χρήσιμα σε εφαρμογές ολοκληρώματα, που όλα μπορούν εύκολα να λυθούν με τις μεθόδους επίλυσης που έχουν αναφερθεί στη παράγραφο 8.5.

1) $\int \varepsilon\varphi(kx)dx=-\frac{1}{k}\ln\left|\sigma\upsilon\nu(kx)\right|+c,\ k\in R$, **2)** $\int \sigma\varphi(kx)dx=\frac{1}{k}\ln\left|\eta\mu(kx)\right|+c$,

3) $\int \varepsilon\varphi^2(kx)dx=\frac{1}{k}\varepsilon\varphi(kx)-x+c$, **4)** $\int \sigma\varphi^2(kx)dx=-\frac{1}{k}\sigma\varphi(kx)-x+c$,

5) $\int \frac{dx}{\eta\mu^2(kx)}=-\frac{1}{k}\sigma\varphi(kx)+c$, **6)** $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2(kx)}=\frac{1}{k}\varepsilon\varphi(kx)+c$,

7) $\int \frac{dx}{k^2+x^2}=\frac{1}{k}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{k}+c$, **8)** $\int \frac{xdx}{k^2+x^2}=\frac{1}{2}\ln(k^2+x^2)+c$,

9) $\int \frac{x^2dx}{k^2+x^2}=x-k\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{k}+c$, **10)** $\int \frac{dx}{x(k^2+x^2)}=\frac{1}{2k^2}\ln\left(\frac{x^2}{k^2+x^2}\right)+c$,

11) $\int \frac{dx}{x^2(k^2+x^2)}=-\frac{1}{k^2x}-\frac{1}{k^3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{k}+c$, **12)** $\int \frac{xdx}{(k^2+x^2)^2}=-\frac{1}{2(k^2+x^2)}+c$,

13) $\int \frac{dx}{(k^2+x^2)^2}=\frac{x}{2k^2(k^2+x^2)}+\frac{1}{2k^3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{k}+c$, **14)** $\int \frac{dx}{k^2-x^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{x+k}{x-k}\right|+c$,

15) $\int \frac{x^2dx}{(k^2+x^2)^2}=-\frac{x}{2(k^2+x^2)}+\frac{1}{2k}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{k}+c$, **16)** $\int \frac{xdx}{k^2-x^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|k^2-x^2\right|+c$,

17) $\int \frac{x^2dx}{k^2-x^2}=-x+\frac{k}{2}\ln\left|\frac{x+k}{x-k}\right|+c=-x+k\cdot\tau o\xi\tan h\frac{x}{k}+c$,

18) $\int \frac{dx}{x(k^2+x^2)^2}=\frac{1}{2k^2(k^2+x^2)}+\frac{1}{2k^4}\ln\left(\frac{x^2}{k^2+x^2}\right)+c$,

19) $\int \frac{dx}{x^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{x-k}{x+k}\right|+c$, **20)** $\int \frac{xdx}{x^2-k^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-k^2\right|+c$,

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{k^2+x^2}) = \tau o\xi \sin h\frac{x}{k}+c,$ **22)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{k^2+x^2}} = \sqrt{k^2+x^2}+c,$

23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-k^2})+c,$ **24)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-k^2}} = \sqrt{x^2-k^2}+c,$

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu\frac{x}{k}+c,$ **26)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{k^2-x^2}} = -\sqrt{k^2-x^2}+c,$

27) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = -\frac{x\sqrt{k^2-x^2}}{2}+\frac{k^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{k}+c.$

Βιβλιογραφία

Α: Ξένη

[1] *Apostol Tom*

Mathematical Analysis, Addison Wesley, 1981

[2] *Ayres Frank*

Differential and Integral Calculus, New York ,1964

[3] *Ayres Frank Jr.*

Differential Equations, Schaum's Outline Series, New York, 1952

[4] *Böhme Gert*

Mathematik Vorlesungen für Ingenieurschulen, Springer Verlag, 1968

[5] *Bronson Richard*

Differential Equations, Schaum's Outline Series, McGraw – Hill, 2007

[6] *Bronstein I. - Semendjajew K.*

Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch, 1976

[7] *Courant R.*

Introduction to Calculus and Analysis II, 1965

[8] *Grauert H., Lieb I., Fischer W.*

Differential und Integralrechnung II, Berlin – Heidelberg – New York, 1978

[9] *Kreyszig Erwin*

Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, 1967

[10] *Lipschutz M. M.*

Differential Geometry, McGraw – Hill, 1969

[11] *Munroe M. E.*

Calculus, W. B. Sawnders, 1970

[12] *Smirnov V.*

A Course of Higher Mathematics Vol. II, Pergamon Press, Oxford, 1964

[13] *Spiegel Murray* (μετάφραση: *Ιωάννου Σχοινά*)

Ανώτερα Μαθηματικά, Αθήνα 1978

B: Ελληνική

[14] *Αθανασιάδη Α.*

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Ζήτη 2003

[15] *Αθανασιάδη Α., Φράγκου Β.*

Ασκήσεις Διαφορικού & Ολοκληρωτικού Λογισμού Συναρτήσεων Περισσοτέρων Μεταβλητών, Ζήτη, 2002

[16] *Αναστασιάδη Ι., Γεωργανόπουλου Γ.*

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ, Θεσσαλονίκη 1967

[17] *Γαγαλή Ν., Θεοδώρου Ι., Κικίλια Π., Κομισόπουλου Φ., Λαμπίρη Μ.*

Μετασχηματισμοί Laplace, Fourier, Ζήτα, Δηρός, 2001

[18] *Γεωργούδη Γ., Παλιατσού Α., Πρεζεράκου Ν.*

Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, 1995

[19] *Κατωπόδη Κ.*

Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, Θεσσαλονίκη 1985

[20] *Κωνσταντινίδου Μαρία*

Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, Θεσσαλονίκη 2005

[21] *Λόκκα Γ. Θεοδώρου*

Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά, Λάρισα 1978

Μαθηματικά Ι, Λάρισα 1994

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Λάρισα 1997

Derive for Windows, Λάρισα 1999

[22] *Μυλωνά Νίκου*

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών, Αθήνα 2010

[23] *Παπαδάκη Κωνσταντίνου*

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά & Mathematica, Αθήνα 2013

[24] *Σεραφειμίδη Καρόλου*

Διαφορικές Εξισώσεις, Σοφία, 2009

[25] *Στεφανίδη Ν. Κ.*

Διαφορική Γεωμετρία, Θεσσαλονίκη 1982

[26] *Τζιβανίδη Γεωργίου*

Σημειώσεις Ανωτέρων Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη 1963.

[27] *Τραχανά, Στέφανου*

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Ηράκλειο 2005

[28] *Χατζόπουλου Δ., Καρατάσιου Γ., Αγά Κ.*

Διαφορικές Εξισώσεις Θεωρία & Ασκήσεις, Βιβλιοεκδοτική, 2004