Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας

Κυρίως για τους φοιτητές της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών των ΤΕΙ

Θεόδωρος Γ. Λόκκας
Μαθηματικός, MSc.
Αν. Καθηγητής Τ.Ε.Ι. Λάρισας

Περιεχόμενα

Πρόλογος ... xiii

Εισαγωγή ... xv

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ... 1

1.1 Θεμελιώδεις γεωμετρικοί σχηματισμοί ... 1

1.2 Οι πράξεις της προβολής και τομής ... 3

1.3 Αρχή του δυασμού ... 5

1.4 Μετρικές, προβολικές και μικτές ιδιότητες ... 9

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ... 15

2.1 Κεντρική προβολή στο επίπεδο ... 15

2.2 Παράλληλη προβολή στο επίπεδο ... 20

2.3 Αξονομετρική προβολή ... 21

3. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗ (ΟΡΘΗ) (Παραστατική ενός επιπέδου) ... 27

3.1 Παράσταση σημείου - Κλίμακες ... 27

3.2 Παράσταση ευθείας ... 29

3.3 Υψομετρική κλίμακα ευθείας ... 32

3.4 Παράσταση επιπέδου ... 38

3.5 Τομή δύο επιπέδων ... 44

3.6 Τομή ευθείας και επιπέδου ... 46

3.7 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο ... 47

3.8 Κατάκλιση επιπέδου σχήματος στο *e* ... 49

3.9 Γωνία δύο ευθειών, γωνία ευθείας και επιπέδου, γωνία δύο επιπέδων 52
3.10 Τομή πολυέδρου με επίπεδο 57
3.11 Στέγες 60
3.12 Εφαρμογές στο κεφάλαιο 3 66
Ασκήσεις 71

4. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΟΒΟΛΕΣ (ΟΡΘΕΣ) (Παραστατική δύο επιπέδων) 75

4.1 Παράσταση σημείου 76
4.2 Ορατά και καλυπτόμενα μέρη 78
4.3 Επίπεδα συμμετρίας και συμπτώσεως 79
4.4 Παράσταση ευθείας 79
4.5 Ίχνη ευθείας με τα e_{13} και e_{24} 81
4.6 Χαρακτηριστικές θέσεις ευθειών ως προς τα επίπεδα e_1 και e_2 82
4.7 Ευθείες τεμνόμενες, ασύμβατες και παράλληλες 84
4.8 Ευθείες παράλληλες προς τα e_{13} και e_{24} 85
4.9 Απόσταση δύο σημείων (κατάκλιση ευθύγραμμου τμήματος) 86
4.10 Γωνίες κλίσης ευθείας ως προς τα e_1, e_2 87
4.11 Παράσταση επιπέδου 88
4.12 Ιχνοπαράλληλες και ιχνοκάθετες επιπέδου 91
4.13 Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων ως προς τα επίπεδα προβολής 94
4.14 Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων ως προς τα e_{13} και e_{24} 98
4.15 Τομή δύο επιπέδων 100
4.16 Παράλληλα επίπεδα 106
4.17 Τομή ευθείας και επιπέδου 107
4.18 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο 110
4.19 Γωνία δύο τεμνόμενων ευθειών 113
4.20 Κατάκλιση σημείου γύρω από ευθεία ξ του επιπέδου e_1, πάνω στο e_1 115

4.21 Κατάκλιση επιπέδου $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ πάνω στο επίπεδο προβολής e_1 117
4.22 Τομή πολυέδρου με επίπεδο 121
4.23 Εφαρμογές στο κεφάλαιο 4 123
Ασκήσεις 136

Βιβλιογραφία 139

[illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]

4. [illegible]
[illegible] [illegible]

4.1 [illegible] [illegible]
4.2 [illegible] [illegible]
4.3 [illegible] [illegible]
4.4 [illegible] [illegible]
4.5 [illegible] [illegible]
4.6 [illegible] [illegible]
4.7 [illegible] [illegible]
4.8 [illegible] [illegible]
4.9 [illegible] [illegible]
4.10 [illegible] [illegible]
4.11 [illegible] [illegible]
4.12 [illegible] [illegible]
4.13 [illegible] [illegible]
4.14 [illegible] [illegible]
4.15 [illegible] [illegible]
4.16 [illegible] [illegible]
4.17 [illegible] [illegible]
4.18 [illegible] [illegible]
4.19 [illegible] [illegible]
4.20 [illegible] [illegible]

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό *«Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας»*, όπως φαίνεται και απ' τον τίτλο του, είναι ένα πολύ μικρό μέρος από τον τεράστιο όγκο γνώσεων που θα μπορούσε κανείς να αποκτήσει από την εμβάθυνση στις διάφορες περιοχές της Παραστατικής Γεωμετρίας. Επειδή όμως προορίζεται κυρίως για φοιτητές των ΤΕΙ και διδάσκεται μόνο για ένα εξάμηνο, είναι απλό να συμπεράνει κανείς ότι οι γνώσεις που μπορούν να αποκτήσουν στο μάθημα αυτό, είναι πολύ περιορισμένες.

Ως εκ τούτου καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια να συμπεριληφθούν, αποσπασματικά μεν, αλλά με πλήρες περιεχόμενο, μόνον δύο μέθοδοι παράστασης των σχημάτων του χώρου: η μέθοδος της ορθής προβολής σε **ένα επίπεδο** και σε **δύο επίπεδα** αντίστοιχα. Έτσι, η ύλη του βιβλίου αυτού έχει ταξινομηθεί ως ακολούθως:

Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσονται μερικές βασικές έννοιες της **Προβολικής Γεωμετρίας**, όπως θεμελιώδεις γεωμετρικοί σχηματισμοί, πράξεις της προβολής και της τομής και αρχή του δυασμού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται συνοπτικά διάφορες μέθοδοι παράστασης των σχημάτων του χώρου, όπως η μέθοδος της **κεντρικής προβολής**, της **παράλληλης προβολής** και της **αξονομετρικής προβολής**.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται αναλυτικά στην παράσταση των σχημάτων του χώρου με την μέθοδο της ορθής προβολής σε **ένα επίπεδο**, όπου εξετάζονται οι παραστάσεις απλών σχημάτων (σημείου, ευθείας, επιπέδου), καθώς και πολλά απλά προβλήματα που σχετίζονται μ' αυτά, όπως παραλληλία δύο ευθειών, τομή δύο επιπέδων, μέθοδος κατάκλισης επιπέδου σχήματος, γωνία τεμνομένων ευθειών κλπ., που καταλήγουν σε πλήρεις εφαρμογές, όπως τομή πολυέδρων με επίπεδο και στέγες. Στο τέλος του κεφαλαίου λύνονται ορισμένες ασκήσεις που βοηθούν σημαντικά τους φοιτητές στην κατανόηση του ιδιαίτερου τρόπου σκέψης για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων της Παραστατικής ενός επιπέδου. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια σειρά άλυτων ασκήσεων που δίνονται για εξάσκηση και αυτενέργεια των φοιτητών.

Ιδιαίτερο βάρος δίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο του βιβλίου αυτού, που αφορά στη μέθοδο της ορθής προβολής σε **δύο επίπεδα** (οριζόντιο και κατακόρυφο) ή μέθοδο *Monge*. Εδώ εξετάζονται παρόμοια προβλήματα και ίσως πολυπλοκότερα. Οι δυσκολίες είναι σαφώς μεγαλύτερες, αλλά παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον. Οι διάφορες εφαρμογές και τα προβλήματα, από τα απλούστερα μέχρι τα πιο σύνθετα, απαιτούν καλή «παραστατική σκέψη» και προπαντός σωστό σχήμα για να επιλυθούν. Είναι σημαντικό ο φοιτητής να μάθει να «βλέπει» κατόψεις και προσόψεις. Η Παραστατική δύο επιπέδων θα τον βοηθήσει αρκετά σ' αυτό, αρκεί λίγη προσπάθεια και επιμονή.

Και εδώ αναφέρονται λυμένες εφαρμογές που καλύπτουν αφ' ενός το βασικό μέρος της θεωρίας, αφ' ετέρου «εμπλουτίζουν» τον τρόπο σκέψης για καλύτερη εμπέδωση του μαθήματος. Στο τέλος του κεφαλαίου υπάρχει επίσης πληθώρα άλυτων ασκήσεων, μερικές δε με υπόδειξη.

Πρέπει να τονιστεί ότι καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, για το περιεχόμενο της ύλης, ώστε να ανταποκρίνεται πλήρως στις ανάγκες των φοιτητών στο σύντομο διάστημα ενασχόλησής τους με το μάθημα. Έτσι, δεν εξετάστηκαν διάφορες μέθοδοι, όπως η μέθοδος της περιστροφής, ή αλλαγής των επιπέδων προβολής, αλλά η εξέταση περιορίσθηκε στη μέθοδο της κατάκλισης, η οποία εξάλλου αναφέρεται και στο 3° κεφάλαιο. Κατ' αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται σύγκριση λύσεων παρόμοιων προβλημάτων τόσο σε ένα, όσο και σε δύο επίπεδα για καλύτερη εμπέδωση του μαθήματος.

Ακόμα, για την καλύτερη εμφάνιση του βιβλίου, όλα τα σχήματα έγιναν με το χέρι, με ιδιαίτερη ακρίβεια και καθαρότητα, χωρίς χρήση κάποιου σχεδιαστικού προγράμματος, ώστε να είναι ευχερέστερη και πιο κατανοητή η παρακολούθησή τους.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον εκδότη μου και τα εξαίρετα στελέχη και συνεργάτες της "Β. Γκιούρδας Εκδοτική" για την κατανόηση και προσπάθεια που επέδειξαν για να εκδοθεί το εγχειρίδιο αυτό. Θα έχει εκπληρώσει τον προορισμό του το παρόν βιβλίο, αν θα αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα σ' αυτούς πού απευθύνεται. Το εύχομαι πραγματικά!

Οποιεσδήποτε υποδείξεις ή παρατηρήσεις που αφορούν στη βελτίωση ή διόρθωση του βιβλίου αυτού θα είναι ευπρόσδεκτες και θα τύχουν ιδιαίτερης προσοχής.

Θεόδωρος Γ. Λόκκας, MSc.
Αν. Καθηγητής Τ.Ε.Ι. Λάρισας
Λάρισα, Ιανουάριος 2006

Εισαγωγή

Για τις γεωμετρικές κατασκευές που αναφέρονται στην Επιπεδομετρία χρησιμοποιούνται, όπως είναι γνωστό απ' τη Γεωμετρία, ο κανόνας και ο διαβήτης. Με τα όργανα αυτά επιτυγχάνονται: η κατασκευή ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία, η κατασκευή του σημείου τομής δύο ευθειών, η κατασκευή κύκλου γνωστού κέντρου και ακτίνας, η κατασκευή των σημείων τομής κύκλου και ευθείας, καθώς και δύο κύκλων. Επιπρόσθετα χρησιμοποιείται και ο γνώμονας (το κοινό τρίγωνο), το οποίο βοηθάει πολύ σε ποικίλες απλές κατασκευές (κυρίως στην κάθετη από σημείο σε ευθεία, στη χάραξη παραλλήλων ευθειών, κ.τ.λ.).

Για να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες ενός επιπέδου σχήματος, κατασκευάζουμε σ' ένα επίπεδο χαρτί ένα σχήμα όμοιο προς αυτό, για να έχουμε μια εποπτική εικόνα του. Η σχεδίαση αυτή αποτελεί την ***παράσταση*** όπως λέμε του αρχικού επιπέδου σχήματος.

Προκειμένου όμως για τις γεωμετρικές κατασκευές που αναφέρονται στη Στερεομετρία (δηλαδή στο χώρο), για να μπορέσουμε με τα ίδια αυτά όργανα (κανόνα και διαβήτη) να πετύχουμε την παράσταση των σχημάτων στο χαρτί σχεδίασης, είναι απαραίτητη η γνώση ορισμένων συστηματικών μεθόδων, έτσι ώστε να είναι δυνατόν να καθοριστεί η πραγματική μορφή του σχήματος του χώρου από την επίπεδη εικόνα του στο χαρτί. Αυτές ακριβώς τις μεθόδους για την επίπεδη παράσταση των σχημάτων του χώρου και τη γραφική επίλυση των προβλημάτων της Στερεομετρίας διδάσκει η ***Παραστατική Γεωμετρία.***

Με τις μεθόδους αυτές διευκολύνεται πολύ η γεωμετρική έρευνα και λύνονται πολλές χρήσιμες και πρακτικές εφαρμογές. Ο κλάδος αυτός ενδιαφέρει κυρίως το Μηχανικό, επειδή όλα τα γεωμετρικά προβλήματα των τεχνικών εφαρμογών ανήκουν κατά κανόνα στη Στερεομετρία. Παραδείγματα τέτοιων τεχνικών εφαρμογών είναι η γραφική μελέτη ενός δομικού έργου (π.χ. οικοδομής, θόλων, στεγών, σκαλοπατιών, κ.τ.λ.), μιας γέφυρας, λίθινων και ξύλινων κατασκευών, η μελέτη και απεικόνιση στο χαρτί σχεδίασης μιας μηχανής, ελασμάτων για σύνθεση λεβήτων, σωληνώσεων, η χάραξη οδών και τεχνικών έργων σε τοπογραφικά σχέδια, η κατασκευή γεωγραφικών χαρτών και άλλα.

Η συστηματική διαμόρφωση του κλάδου της Παραστατικής Γεωμετρίας χρονολογείται κατά τις αρχές του 19ου αιώνα και οφείλεται κατά κύριο λόγο στις απαιτήσεις της μεθοδικής και ευχερούς επίλυσης των γεωμετρικών προβλημάτων που σχετίζονται με τεχνικές εφαρμογές, για τα οποία δεν θεωρείται γενικά πρόσφορη η χρησιμοποίηση του λογισμού των αναλυτικών μεθόδων. Στην ανάπτυξη της Παραστατικής Γεωμετρίας συνετέλεσε πάρα πολύ και η ***Προοπτική*** που δίνει τα μέσα στον Αρχιτέκτονα και τον Τοπογράφο για να επιλύσει διάφορα προβλήματα της ειδικότητάς του και χρησιμοποιείται ευρύτατα στις Εικαστικές Τέχνες.

Όπως στην Αναλυτική Γεωμετρία, για τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων μεταχειριζόμαστε κατάλληλα συστήματα συντεταγμένων τα οποία διευκολύνουν την επίλυσή τους, έτσι και στην Παραστατική Γεωμετρία χρησιμοποιούμε για την παράσταση των σχημάτων διάφορα συστήματα ***προβολών***.

Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι προβολών είναι:

- ***Η μέθοδος της Κεντρικής Προβολής,***
- ***Η μέθοδος της Παράλληλης και Ορθής Προβολής,***
- ***Η μέθοδος του Ενός Επιπέδου Προβολής με Υψόμετρα,***
- ***Η μέθοδος των Δύο Επιπέδων Προβολής (μέθοδος Monge),***
- ***Η μέθοδος της Αξονομετρικής Προβολής (Ορθή και Πλάγια).***

Σε ειδικές περιπτώσεις, ως επιφάνειες προβολής χρησιμοποιούνται εκτός από το επίπεδο και άλλες. Π.χ. στη Χαρτογραφία γίνεται χρήση σφαιρικών, κωνικών ή κυλινδρικών επιφανειών. Επίσης, στην Αρχιτεκτονική χρησιμοποιούνται μη επίπεδες επιφάνειες προβολής για πανοραμικές απεικονίσεις.

Η εικόνα της παράστασης ενός σχήματος του χώρου με τις διάφορες μεθόδους προβολών που αναφέραμε, πρέπει να ικανοποιεί ορισμένους όρους, όπως:

i) να δημιουργεί μια οπτική εικόνα του σχήματος στο χώρο από έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε κατάλληλη θέση ως προς το σχήμα,

ii) να έχει μια αντιστοιχία των διάφορων μερών του με το σχήμα του χώρου,

iii) να δίνει τη δυνατότητα επανακατασκευής του σχήματος στο χώρο.

Η κεντρική, παράλληλη και ορθή προβολή ικανοποιούν τον πρώτο όρο, λιγότερο τον δεύτερο και καθόλου τον τρίτο. Η μέθοδος παράστασης με ένα επίπεδο και δύο επίπεδα ικανοποιούν πολύ καλά τον δεύτερο και τρίτο όρο και εν μέρει τον πρώτο, ενώ η μέθοδος της αξονομετρικής προβολής (κυρίως της ορθής) ικανοποιεί σε μεγάλο βαθμό και τους τρεις όρους.

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με την επίπεδη παράσταση των σχημάτων χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Ορθής Προβολής (σε ένα και δύο επίπεδα). Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σχεδόν γενικά σε όλες τις τεχνικές σχεδιάσεις. Η Πλάγια Προβολή έχει μικρότερη εφαρμογή, ενώ η Κεντρική Προβολή (ή Προοπτική) χρησιμοποιείται ειδικότερα στην Αρχιτεκτονική και στη Ζωγραφική.

Την Παραστατική Γεωμετρία, όπως αυτή παρουσιάζεται σήμερα μεθοδικά διατυπωμένη, μελέτησε και ανέπτυξε κυρίως ο γάλλος μαθηματικός *Gaspard Monge* (1746 - 1818), ενώ ο μαθητής του *Jean – Victor Poncelet* (1788 - 1867) είναι ο συνεχιστής του έργου του *Monge* και ο ιδρυτής της ***Προβολικής Γεωμετρίας*** που τη θεμελίωσε κατά τις μέρες της αιχμαλωσίας του στη Ρωσία.

Βασικά η Προβολική Γεωμετρία άρχισε να δημιουργείται κατά τον 17^{o} αιώνα, όταν οι Μαθηματικοί πήραν αφορμή από τις πετυχημένες προσπάθειες των μεγάλων ζωγράφων να δώσουν την εντύπωση του τρισδιάστατου χώρου σ' έναν επίπεδο πίνακα. Άρα μπορούμε να πούμε ότι, όπως η Ευκλείδεια Γεωμετρία προέκυψε απ' τις προσπάθειες καταμέτρησης μηκών και εμβαδών, έτσι και η Προβολική Γεωμετρία προέκυψε από τις προσπάθειες της γραφικής παράστασης τρισδιάστατων σχημάτων όταν αυτά προβληθούν σε επίπεδο πίνακα.

Επομένως οι δύο αυτές Γεωμετρίες, η Ευκλείδεια και η Προβολική, έχουν ως αντικείμενο η μεν πρώτη την μελέτη των ***μετρικών*** ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, ενώ η δεύτερη την μελέτη των ***προβολικών*** (ή ***οπτικών***) ιδιοτήτων αυτών.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη σκιαγράφηση εισαγωγικών εννοιών της Προβολικής Γεωμετρίας, για να δοθεί μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των εννοιών της προβολής και της τομής.

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1.1 Θεμελιώδεις γεωμετρικοί σχηματισμοί

Τα απλά γεωμετρικά στοιχεία του χώρου είναι το ***σημείο***, η ***ευθεία*** και το ***επίπεδο*** και λέγονται ***θεμελιώδη γεωμετρικά στοιχεία***. Τα σημεία θα τα παριστάνουμε με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφάβητου Α, Β, Γ, ..., τις ευθείες με μικρά α, β, $\gamma, \ldots$, ενώ τα επίπεδα με μικρά γράμματα του λατινικού αλφάβητου p, q, r, s, e, ...

Γεωμετρικό σχήμα ονομάζουμε ένα σύνολο που αποτελείται από σημεία, ευθείες και επίπεδα. Κάθε θεμελιώδες στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί ως φορέας ενός συνόλου, που τα στοιχεία του απαρτίζονται από θεμελιώδη στοιχεία ενός από τα άλλα δύο είδη και βρίσκονται σ' αυτό ή περνούν απ' αυτό. Π. χ. η ευθεία μπορεί να θεωρηθεί ως φορέας, είτε του συνόλου των σημείων που βρίσκονται σ' αυτή, είτε του συνόλου των επιπέδων που περνούν απ' αυτή.

Το σχήμα που συνθέτουν ένα θεμελιώδες στοιχείο, το οποίο θεωρείται ως φορέας και το σύνολο των θεμελιωδών στοιχείων που βρίσκονται ή περνούν απ' αυτό, ενός από τα δύο άλλα είδη θεμελιωδών στοιχείων ονομάζουμε ***θεμελιώδη γεωμετρικό σχηματισμό.***

Οι θεμελιώδεις γεωμετρικοί σχηματισμοί είναι οι παρακάτω:

1) ***Σημειοσειρά.*** Είναι το σύνολο των σημείων μιας ευθείας α. Η ευθεία α λέγεται ***φορέας*** της σημειοσειράς.

2) ***Επίπεδη δέσμη ευθειών.*** Είναι το σύνολο των ευθειών ενός επιπέδου p, που διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο. Το Ο λέγεται ***κέντρο*** της δέσμης.

3) ***Αξονική δέσμη επιπέδων.*** Είναι το σύνολο των επιπέδων που περνούν από μια ευθεία α. Η ευθεία αυτή λέγεται ***άξονας*** της δέσμης.

4) ***Επίπεδο σύστημα.*** Είναι το σύνολο των σημείων και ευθειών του ιδίου επιπέδου *p*. Το επίπεδο αυτό αποτελεί τον φορέα του μετασχηματισμού αυτού. Το επίπεδο σύστημα περιέχει άπειρες σημειοσειρές και άπειρες επίπεδες δέσμες. Κάθε ευθεία του *p* αποτελεί φορέα σημειοσειράς και κάθε σημείο του *p* αποτελεί κέντρο επίπεδης δέσμης. Αν θεωρήσουμε μόνο τα σημεία ή μόνο τις ευθείες του επιπέδου συστήματος, τότε το διακρίνουμε σε ***σημειογενές*** ή ***ευθειογενές επίπεδο σύστημα*** αντίστοιχα.

5) ***Στερεά δέσμη ευθειών και επιπέδων.*** Είναι το σύνολο των ευθειών και επιπέδων που διέρχονται απ' το ίδιο σημείο Ο. Το σημείο Ο λέγεται ***κέντρο*** του σχηματισμού αυτού. Η στερεά δέσμη περιέχει άπειρες επίπεδες και αξονικές δέσμες. Κάθε επίπεδό της αποτελεί αξονική δέσμη επιπέδων. Αν θεωρήσουμε μόνο τις ευθείες, ή μόνο τα επίπεδα της στερεάς δέσμης, τότε την διακρίνουμε σε ***ευθειογενή*** ή ***επιπεδογενή δέσμη*** αντίστοιχα.

6) ***Σύστημα χώρου.*** Είναι ο μετασχηματισμός που αποτελείται από τα άπειρα απλά στοιχεία του χώρου. Περιέχει άπειρους από τους παραπάνω μετασχηματισμούς. Π.χ. μια ευθεία του χώρου μπορεί να θεωρηθεί ως φορέας σημειοσειράς, ή ως άξονας αξονικής δέσμης επιπέδων. Αν θεωρήσουμε μόνο τα ομοειδή απλά στοιχεία του σχηματισμού αυτού, τότε τον διακρίνουμε σε ***σημειογενή, ευθειογενή*** και ***επιπεδογενή*** χώρο.

Τους παραπάνω σχηματισμούς τους χωρίζουμε σε ***4*** κατηγορίες ή ***βαθμίδες***:

Στην ***1η βαθμίδα*** ανήκουν οι σχηματισμοί:

- *Η ευθύγραμμη σημειοσειρά*
- *Η επίπεδη δέσμη ακτινών*
- *Η αξονική δέσμη επιπέδων.*

Οι σχηματισμοί 1^{ης} βαθμίδας περιλαμβάνουν μια απλή απειρία στοιχείων, επειδή η εξίσωση στην Αναλυτική Γεωμετρία, που καθορίζει τη θέση ενός στοιχείου σε καθένα από τους παραπάνω σχηματισμούς περιέχει μια παράμετρο.

Στην ***2η βαθμίδα*** ανήκουν οι σχηματισμοί:

- *Το σημειογενές επίπεδο*
- *Το ευθειογενές επίπεδο*

- *Η κεντρική δέσμη επιπέδων*
- *Η κεντρική δέσμη ευθειών.*

Οι σχηματισμοί $2^{ης}$ βαθμίδας περιλαμβάνουν μια διπλή απειρία στοιχείων, επειδή η εξίσωση στην Αναλυτική Γεωμετρία, που καθορίζει τη θέση ενός στοιχείου σε καθένα από τους τελευταίους σχηματισμούς περιέχει δύο παραμέτρους.

Στην ***3η βαθμίδα*** ανήκουν οι σχηματισμοί:

- *Ο σημειογενής χώρος*
- *Ο επιπεδογενής χώρος.*

Οι σχηματισμοί $3^{ης}$ βαθμίδας περιλαμβάνουν μια τριπλή απειρία στοιχείων, επειδή η εξίσωση στην Αναλυτική Γεωμετρία, που καθορίζει τους δύο αυτούς σχηματισμούς περιέχει τρεις παραμέτρους.

Στην ***4η βαθμίδα*** ανήκει ο σχηματισμός

- *Ο ευθειογενής χώρος.*

1.2 Οι πράξεις της προβολής και τομής

Στην Προβολική Γεωμετρία για τη δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων και την απόδειξη θεωρημάτων, χρησιμοποιούνται δύο κυρίως πράξεις: *η προβολή και η τομή.*

Προβολή είναι η πράξη με την οποία πραγματοποιούμε την κατασκευή θεμελιωδών στοιχείων που ορίζονται από ***σημείο ή ευθεία***, καθώς και των θεμελιωδών στοιχείων που απαρτίζεται γεωμετρικό σχήμα επίπεδο ή τρισδιάστατο.

Τομή είναι η πράξη με την οποία πραγματοποιούμε την κατασκευή θεμελιωδών στοιχείων που ορίζονται από ***ευθεία ή επίπεδο***, καθώς και των θεμελιωδών στοιχείων που απαρτίζεται γεωμετρικό σχήμα επίπεδο ή τρισδιάστατο.

Η προβολή και τομή εκτός από πράξεις όπως ορίζονται, αναφέρονται επίσης και στο πραγματοποιούμενο σχήμα. Έτσι, αν τα σχήματα είναι γεωμετρικοί σχηματισμοί, προκύπτουν οι παρακάτω προτάσεις προβολής και τομής:

Αν προβάλλουμε:

- Μια σημειοσειρά από ένα σημείο του χώρου, που δεν βρίσκεται στο φορέα της, προκύπτει επίπεδη δέσμη ακτινών.

- Μια σημειοσειρά από μια ευθεία ασύμβατη προς τον φορέα της σημειοσειράς, προκύπτει μια αξονική δέσμη επιπέδων.
- Μια επίπεδη δέσμη ακτινών από ένα σημείο του χώρου, που δεν βρίσκεται στο επίπεδο της δέσμης, προκύπτει μια αξονική δέσμη επιπέδων.
- Ένα σημειογενές επίπεδο από ένα σημείο, που δεν βρίσκεται στο φορέα του, προκύπτει μια κεντρική δέσμη ευθειών.
- Ένα ευθειογενές επίπεδο από ένα σημείο, που δεν βρίσκεται στο φορέα του, προκύπτει μια κεντρική δέσμη επιπέδων.

Αν τμήσουμε:

- Μια αξονική δέσμη επιπέδων με μια ευθεία του χώρου, που είναι ασύμβατη προς το φορέα της δέσμης, προκύπτει μια σημειοσειρά.
- Μια επίπεδη δέσμη ακτινών με ένα επίπεδο, που δε διέρχεται από το κέντρο της δέσμης, προκύπτει μια σημειοσειρά.
- Μια αξονική δέσμη επιπέδων με ένα επίπεδο, που δεν διέρχεται απ΄ το φορέα της δέσμης, προκύπτει μια επίπεδη δέσμη ακτινών.
- Μια κεντρική δέσμη επιπέδων με ένα επίπεδο, που δεν διέρχεται απ' το φορέα της, προκύπτει ένα ευθειογενές επίπεδο.
- Μια κεντρική δέσμη ευθειών με ένα επίπεδο, που δεν διέρχεται απ' το φορέα της προκύπτει ένα σημειογενές επίπεδο.

Παρατηρούμε ότι οι πράξεις της προβολής και της τομής επιτρέπουν την μετάβαση από σχηματισμό 1^{ης} βαθμίδας ενός είδους, σε σχηματισμό 1^{ης} βαθμίδας άλλου είδους (οι τρεις πρώτες προτάσεις της προβολής και τομής), καθώς και τη μετάβαση από σχηματισμό 2^{ης} βαθμίδας ενός είδους, σε σχηματισμό 2^{ης} βαθμίδας άλλου είδους (οι δύο τελευταίες προτάσεις της προβολής και τομής).

Οι παραπάνω προτάσεις εισήχθησαν στην Προβολική Γεωμετρία από τον *J. V. Poncelet* και απετέλεσαν τη βάση μιας μεθόδου με την οποία οδηγούμαστε από γνωστές ειδικές ιδιότητες σχημάτων, σε ιδιότητες άλλων γενικότερων σχημάτων που συνδέονται με τα πρώτα με τις πράξεις της προβολής και τομής.

1.3 Αρχή του δυασμού

Ο όρος «*δυασμός*» οφείλεται στον *J. D. Gergonne* (1771 - 1849) ο οποίος διατύπωσε την αρχή του δυασμού, τόσο στο επίπεδο όσο και στο χώρο, στηριζόμενος σε θεμελιακά θεωρήματα της Γεωμετρίας. Σ' αυτόν οφείλεται και το σύστημα αναγραφής σε δύο στήλες των δυαστικά αντίστοιχων θεωρημάτων.

Η αρχή του δυασμού όμως, όπως διατυπώνεται σήμερα, οφείλεται στον Γερμανό *J. Plücker* (1801 - 1868), ο οποίος το 1830 στηριζόμενος στην έννοια των συντεταγμένων των γεωμετρικών στοιχείων, τα οποία εισήγαγε πρώτος, διατύπωσε την αρχή του δυασμού ως νόμο πλήρους συμμετρίας:

1) **Στο χώρο** μεταξύ σημείων και επιπέδων,

2) **Στο επίπεδο** μεταξύ σημείων και ευθειών,

3) **Στην κεντρική δέσμη** μεταξύ ευθειών και επιπέδων.

Με την γενίκευση των συντεταγμένων ο *Plücker* οδηγήθηκε στην ιδέα να θεωρήσει την ευθεία στη θέση του σημείου ως γενεσιουργό στοιχείο των σχημάτων του επιπέδου και το επίπεδο στη θέση του σημείου ως γενεσιουργό στοιχείο των σχημάτων του χώρου. Η έννοια του δυασμού βρήκε τη θέση της αργότερα και σ' άλλες περιοχές των Μαθηματικών όπως στην Άλγεβρα Boole, Άλγεβρα Συνόλων κ.τ.λ.

Έτσι, η αρχή του δυασμού διατυπώνεται ως εξής:

Α) Στο χώρο:

Σε κάθε γραφική πρόταση που αναφέρεται στο χώρο, αντιστοιχεί μια άλλη γραφική πρόταση, η οποία προκύπτει απ' την πρώτη αν αλλάξουμε τη λέξη *«σημείο»* σε *«επίπεδο»* και αντίστροφα, αφήνοντας τη λέξη *«ευθεία»* όπως είναι. Εννοείται ότι πέρα από την εναλλαγή των λέξεων *«σημείο»* και *«επίπεδο»* θα χρειαστεί να επιφέρουμε και άλλες λεκτικές μεταβολές, όπως αντιμετάθεση των λέξεων *«βρίσκεται»* και *«περιέχει»* ή *«διέρχεται»,* έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στον τρόπο διατύπωσης της αντίστοιχης δυαστικής πρότασης.

Παραδείγματα αρχής δυασμού στο χώρο:

1) Δίδονται δύο ευθείες α και β ασύμβατες. Από ένα σημείο Μ που δεν βρίσκεται σ' αυτές διέρχεται μία και μόνο μία ευθεία γ, που τις συναντάει.

2) Αν ν σε πλήθος ευθείες τέμνονται ανά δύο, χωρίς να διέρχονται όλες απ' το ίδιο σημείο, τότε βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο.

1)΄ Δίδονται δύο ευθείες α και β α-σύμβατες. Από ένα επίπεδο p που δεν διέρχεται απ' αυτές βρίσκεται μία και μόνο μία ευθεία γ, που τις συναντάει.

2)΄ Αν ν σε πλήθος ευθείες τέμνονται ανά δύο, χωρίς να βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο, τότε διέρχονται όλες απ' το ίδιο σημείο.

Β) Στο επίπεδο:

Σε κάθε πρόταση που αναφέρεται στο επίπεδο, αντιστοιχεί μια άλλη πρόταση, η οποία προκύπτει απ' την πρώτη αν αλλάξουμε τη λέξη *«σημείο»* σε *«ευθεία»* και αντίστροφα, αφήνοντας τη λέξη *«επίπεδο»* όπως είναι. Εδώ, τα στοιχεία των γεωμετρικών σχημάτων με τα οποία ασχολούμαστε βρίσκονται σε ένα και μόνο επίπεδο, δηλαδή έχουμε την περίπτωση της Επίπεδης Προβολικής Γεωμετρίας. Στη Γεωμετρία αυτή το σημείο και η ευθεία δεν νοούνται έξω από το επίπεδο αυτό, που θεωρείται και ως φορέας όλων των σημείων και ευθειών.

Παραδείγματα αρχής δυασμού στο επίπεδο:

1) Τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζουν ένα ***τρικόρυφο*** δηλ. σχήμα που αποτελείται από τρία σημεία (τις κορυφές) και από τις τρεις ευθείες που τα ενώνουν ανά δύο (τις πλευρές).

1)΄ Τρεις ευθείες που δεν διέρχονται απ' το ίδιο σημείο, ορίζουν ένα ***τρίπλευρο*** δηλ. σχήμα που αποτελείται από τρεις ευθείες (τις πλευρές) και από τα τρία σημεία τομής αυτών ανά δύο (τις κορυφές).

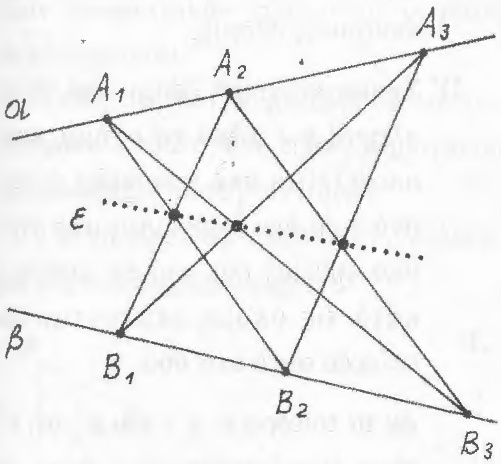
2) Έστω δύο ευθείες α και β επιπέδου και ανά τρία σημεία A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2, B_3 σε καθεμιά απ' αυτές. Τότε τα σημεία τομής των ευθειών:

A_1B_2 και A_2B_1,

A_2B_3 και A_3B_2,

A_3B_1 και A_1B_3

βρίσκονται πάντοτε σε μια ευθεία ε (σχήμα 1) (θεώρημα *Πάππου*).



Σχήμα 1

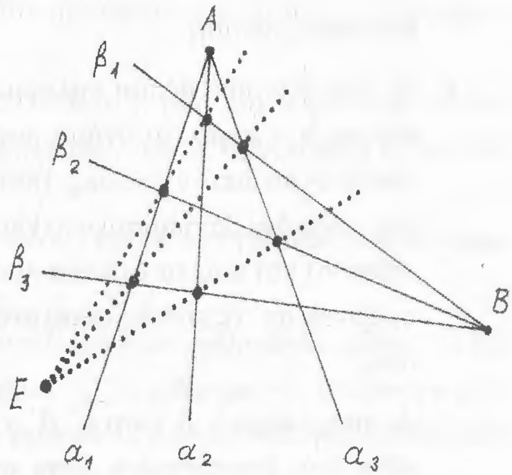
2)΄ Έστω δύο σημεία Α και Β επιπέδου και ανά τρεις ευθείες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ που διέρχονται απ' αυτά. Τότε οι ευθείες που ορίζουν τα σημεία:

$\alpha_1\beta_2$ και $\alpha_2\beta_1$,

$\alpha_2\beta_3$ και $\alpha_3\beta_2$,

$\alpha_3\beta_1$ και $\alpha_1\beta_3$,

διέρχονται πάντοτε από ένα σημείο Ε (σχήμα 2) (θεώρημα *Πάππου*).



Σχήμα 2

Γ) Στην κεντρική δέσμη:

Σε κάθε πρόταση γραφική που αναφέρεται σε κεντρική δέσμη (ευθειών ή επιπέδων) αντιστοιχεί μια άλλη πρόταση επίσης γραφική, που προκύπτει απ' την πρώτη αν αλλάξουμε τη λέξη *«ευθεία»* σε *«επίπεδο»* και αντίστροφα, αφήνοντας τη λέξη *«σημείο»* όπως είναι. Εδώ, τα στοιχεία των γεωμετρικών σχημάτων με τα οποία ασχολούμαστε διέρχονται από ένα ορισμένο σημείο του χώρου, δηλαδή έχουμε την περίπτωση της Προβολικής Γεωμετρίας της κεντρικής δέσμης. Στη γεωμετρία αυτή θεωρούμε ένα μόνο σημείο (το κέντρο της δέσμης), ενώ τα στοιχεία ευθεία και επίπεδο δεν εξετάζονται ως σημειογενή.

Παραδείγματα αρχής δυασμού στην κεντρική δέσμη:

1) Έστω δύο ευθείες α και β κεντρικής δέσμης και ανά τρία επίπεδα που περιέχουν καθεμιά απ' αυτές τα p_α, q_α, r_α και p_β, q_β, r_β. Τότε τα επίπεδα

$$(p_\alpha q_\beta \text{ και } p_\beta q_\alpha)$$

$$(q_\alpha r_\beta \text{ και } q_\beta r_\alpha)$$

$$(r_\alpha p_\beta \text{ και } r_\beta p_\alpha)$$

τέμνονται πάντα σε ευθεία της κεντρικής δέσμης.

2) Σε μια κεντρική δέσμη καλούμε πλήρες ***ν – ακμο,*** το σχήμα που αποτελείται από ν ευθείες, (που ανά τρεις δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο) και από τα επίπεδα που ορίζονται απ' τις ευθείες αυτές ανά δύο.

Αν τα τρίακμα α, β, γ και α', β', γ' είναι έτσι διατεταγμένα ώστε τα επίπεδα $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ να διέρχονται από μια ευθεία, τότε και οι ευθείες

$$(\alpha\beta \text{ και } \alpha'\beta')$$

$$(\beta\gamma \text{ και } \beta'\gamma')$$

$$(\alpha\gamma \text{ και } \alpha'\gamma')$$

βρίσκονται σε ένα επίπεδο (θεώρημα του *Desargues*).

1)´ Έστω δύο επίπεδα p και q κεντρικής δέσμης και ανά τρεις ευθείες που βρίσκονται σε καθένα απ' αυτά οι α_p, β_p, γ_p και α_q, β_q, γ_q. Τότε οι ευθείες

$$(\alpha_p\beta_q \text{ και } \alpha_q\beta_p)$$

$$(\beta_p\gamma_q \text{ και } \beta_q\gamma_p)$$

$$(\gamma_p\alpha_q \text{ και } \gamma_q\alpha_p)$$

τέμνονται πάντα σε επίπεδο της κεντρικής δέσμης.

2)´ Σε μια κεντρική δέσμη καλούμε πλήρες ***ν – εδρο*** το σχήμα που αποτελείται από ν επίπεδα, (που ανά τρία δεν διέρχονται από την ίδια ευθεία) και από τις ευθείες κατά τις οποίες τέμνονται τα επίπεδα αυτά ανά δύο.

Αν τα τρίεδρα p, q, r και p', q', r' είναι έτσι διατεταγμένα ώστε οι ευθείες pp', qq', rr' να βρίσκονται σε ένα επίπεδο, τότε και τα επίπεδα

$$(pq \text{ και } p'q')$$

$$(pr \text{ και } p'r')$$

$$(qr \text{ και } q'r')$$

διέρχονται από μια ευθεία (θεώρημα του *Desargues*).

Σ' όλα τα παραδείγματα που αναφέραμε, αν μια πρόταση είναι αληθής, τότε και η δυαστική της είναι επίσης αληθής.

1.4 Μετρικές, προβολικές και μικτές ιδιότητες

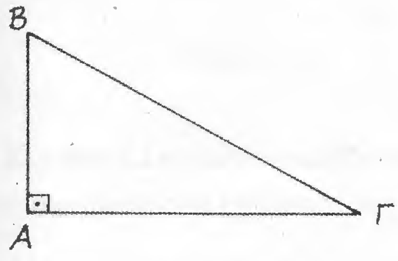
Όπως είδαμε, γεωμετρικά σχήματα είναι οι διάφοροι συνδυασμοί των απλών στοιχείων (σημείων, ευθειών και επιπέδων).

Η κλασσική Γεωμετρία του Ευκλείδη έχει ως αντικείμενο την μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, οι οποίες διατηρούνται αναλλοίωτες, όταν αυτά μετατοπισθούν στο χώρο ως στερεά σώματα, χωρίς δηλαδή να μεταβάλλεται η απόσταση δύο τυχαίων σημείων και η γωνία δύο τυχαίων ευθειών.

Η Προβολική Γεωμετρία αντίστοιχα έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων οι οποίες διατηρούνται αναλλοίωτες όταν αυτά προβάλλονται.

Έτσι, οι δύο γεωμετρίες έχουν ως αντικείμενο, η μεν Ευκλείδεια τη μελέτη ***μετρικών*** ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων, ενώ η Προβολική τη μελέτη ***προβολικών*** ιδιοτήτων αυτών.

Για να γίνει πιο κατανοητή η διάκριση των δύο αυτών κατηγοριών, αναφέρουμε τα παρακάτω παραδείγματα:



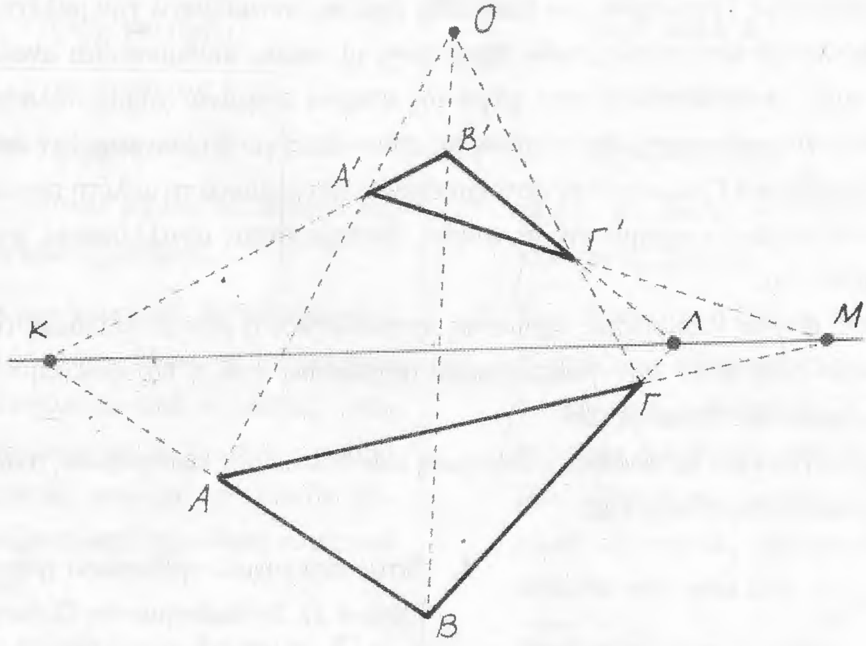
Σχήμα 3

1. Έστω ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 3). Το θεώρημα του Πυθαγόρα λέει ότι έχουμε πάντα την ισότητα μεταξύ των πλευρών:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2.$$

Πρόκειται για μια *μετρική* ιδιότητα που τα μήκη των πλευρών του τριγώνου δεν μεταβάλλονται, ανεξάρτητα από τη θέση του τριγώνου στο χώρο. Όμως η καθαρά μετρική αυτή ιδιότητα δεν διατηρείται γενικά όταν το τρίγωνο προβληθεί.

2. Έστω τώρα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ που βρίσκονται είτε στο ίδιο επίπεδο είτε σε διαφορετικά μη παράλληλα επίπεδα. Αν οι τρεις ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται από ένα σημείο Ο, τότε τα σημεία τομής των ευθειών που ορίζονται απ' τις ευθείες ΑΒ και Α΄Β΄, ΑΓ και Α΄Γ΄, ΒΓ και Β΄Γ΄ θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία (σχήμα 4).



Σχήμα 4

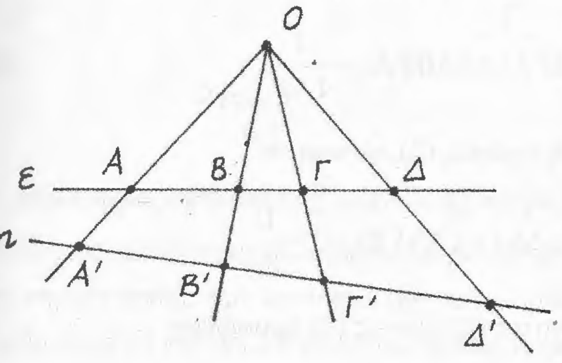
Η πρόταση αυτή (θεώρημα *Desargues*) αποτελεί καθαρά *προβολική* ιδιότητα που παραμένει αναλλοίωτη οπουδήποτε και αν προβληθούν οι κορυφές Α΄, Β΄, Γ΄ του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ στις ευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.

Πέρα όμως απ' τις καθαρά μετρικές ιδιότητες (οι οποίες παύουν να ισχύουν όταν το σχήμα προβληθεί) και τις καθαρά προβολικές ιδιότητες (οι οποίες δεν αντιστοιχούν σε καμία μετρική σχέση), υπάρχουν και άλλες *μετρικοπροβολικές* ιδιότητες που τις ονομάζουμε ***μικτές***. Αναφέρουμε δύο παραδείγματα τέτοιων ιδιοτήτων:

3. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Το άθροισμα των γωνιών του είναι, όπως ξέρουμε, δύο ορθές. Το άθροισμα αυτό δεν μεταβάλλεται όταν το τρίγωνο αυτό προβληθεί από ένα σημείο σε οποιοδήποτε επίπεδο.

4. Θεωρούμε σε μια σημειοσειρά ε τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Αν πάρουμε στη σημειοσειρά αυτή μια αρχή τετμημένων, μια μονάδα και μια θετική κατεύθυνση και καλέσουμε α, β, γ, δ τις καρτεσιανές τετμημένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, ονομάζουμε ***διπλό λόγο*** των τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ και τον συμβολίζουμε με (ΑΒΓΔ), την παράσταση:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(A\Gamma)}{(\Gamma B)} \Big/ \frac{(A\Delta)}{(\Delta B)} = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} \Big/ \frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta} = \lambda.$$



Σχήμα 5

Αποδεικνύεται ότι η τιμή του διπλού λόγου λ παραμένει αναλλοίωτη αν τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ προβληθούν από κάποιο σημείο Ο, που είναι έξω από τη σημειοσειρά ε, σε τυχαία ευθεία η (σχήμα 5). Δηλαδή (ΑΒΓΔ) = (Α΄Β΄Γ΄Δ΄) (θεώρημα *Πάππου*).

Στα δύο τελευταία παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι μια μετρική σχέση μεταξύ των στοιχείων ενός σχήματος διατηρείται και κατά τις προβολές του.

Άλλες ιδιότητες του διπλού λόγου

α) Η τιμή του διπλού λόγου δεν αλλάζει αν εναλλάξουμε συγχρόνως τα στοιχεία του πρώτου ζευγαριού και τα στοιχεία του δεύτερου ζευγαριού ή το πρώτο με το δεύτερο ζευγάρι. Δηλαδή:

$$(AB\Gamma\Delta) = (BA\Delta\Gamma) = (\Gamma\Delta AB) = (\Delta\Gamma BA) = \lambda \qquad (1)$$

β) Αν αλλάξουμε το πρώτο με το δεύτερο γράμμα ή το τρίτο με το τέταρτο, ο διπλός λόγος λ γίνεται $\frac{1}{\lambda}$, οπότε λόγω της πρώτης ιδιότητας θα έχουμε:

$$(AB\Delta\Gamma) = (BA\Gamma\Delta) = (\Gamma\Delta BA) = (\Delta\Gamma AB) = \frac{1}{\lambda}. \tag{2}$$

γ) Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τέταρτο γράμμα ή το δεύτερο με το τρίτο, ο διπλός λόγος γίνεται 1 – λ. Δηλαδή:

$$(A\Gamma B\Delta) = (B\Delta A\Gamma) = (\Delta B\Gamma A) = (\Gamma A\Delta B) = 1-\lambda \tag{3}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτουν άλλες τρεις ιδιότητες. Έτσι:

Εφαρμόζοντας την (β) ιδιότητα στις σχέσεις (3) προκύπτει:

δ) $$(A\Gamma\Delta B) = (\Gamma AB\Delta) = (B\Delta\Gamma A) = (\Delta B\Gamma A) = \frac{1}{1-\lambda} \tag{4}$$

Εφαρμόζοντας την (γ) ιδιότητα στις σχέσεις (2) προκύπτει:

ε) $$(A\Delta B\Gamma) = (B\Gamma A\Delta) = (\Gamma B\Delta A) = (\Delta A\Gamma B) = 1-\frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την (β) ιδιότητα στις σχέσεις (5) προκύπτει:

στ) $$(A\Delta\Gamma B) = (B\Gamma\Delta A) = (\Gamma BA\Delta) = (\Delta AB\Gamma) = \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda-1} \tag{6}$$

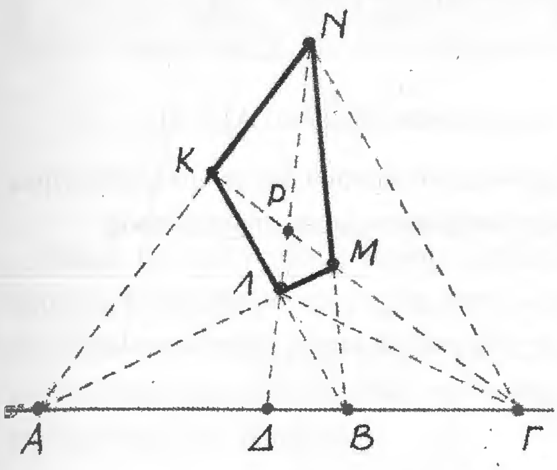
Απ' τον ορισμό του διπλού λόγου (ΑΒΓΔ) προκύπτει ότι:

i) Αν $\gamma = \delta$ ή $\alpha = \beta$, δηλαδή $\Gamma \equiv \Delta$ ή $A \equiv B$ τότε $\lambda = 1$

ii) Αν $\delta = \beta$ ή $\gamma = \alpha$, δηλαδή $\Delta \equiv B$ ή $\Gamma \equiv A$ τότε $\lambda = 0$

iii) Αν $\delta = \alpha$ ή $\gamma = \beta$, δηλαδή $\Delta \equiv A$ ή $\Gamma \equiv B$ τότε $\lambda = \infty$.

Υποθέτοντας τώρα ότι τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι *διακεκριμένα*, αν ισχύει η σχέση $\lambda = 1/\lambda$ ή $\lambda^2 = 1$, επειδή η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται όπως φαίνεται παραπάνω (**i** περίπτωση), προκύπτει $\lambda = -1$. Στην περίπτωση αυτή ($\lambda = -1$) λέμε ότι τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ αποτελούν ***αρμονική τετράδα.*** Τα Α, Γ λέγονται ***συζυγή αρμονικά*** των Β, Δ και αντίστροφα.



Σχήμα 6

Επειδή ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων παραμένει αναλλοίωτος κατά τις πράξεις της προβολής και τομής, που είναι πράξεις καθαρά γραφικές, – παρόλο που για το καθορισμό του απαιτούνται μετρικές έννοιες –, προκύπτει ότι ο διπλός αυτός λόγος είναι ένα γεωμετρικό μέγεθος που μπορεί να καθοριστεί με τη βοήθεια καθαρά γεωμετρικών εννοιών. Για τον καθορισμό αρμονικής τετράδας σημείων σε σημειοσειρά εργαζόμαστε ως εξής:

Θεώρημα κατασκευής αρμονικής τετράδας

Θεωρούμε ένα τυχαίο επίπεδο τετράπλευρο ΚΛΜΝ (σχήμα 6) και έστω Α και Β τα σημεία τομής των απέναντι (μη παραλλήλων) πλευρών ΝΚ, ΜΛ και ΚΛ, ΝΜ αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΒ τέμνεται από τις προεκτάσεις των διαγωνίων ΚΜ, ΝΛ στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. (σχήμα 6). Θα δείξουμε ότι μ' αυτή την κατασκευή τα Α, Β είναι συζυγή αρμονικά των Γ, Δ δηλαδή (ΑΒΓΔ) = – 1.

Απόδειξη

Η κεντρική δέσμη με κορυφή το Ν και ακτίνες ΝΑ, ΝΒ, ΝΓ, ΝΔ τεμνόμενη απ' τις ευθείες ΑΒ και ΚΜ δίνει:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΚΜΓΡ) \qquad (1)$$

Η κεντρική δέσμη με κορυφή το Λ και ακτίνες ΛΑ, ΛΒ, ΛΓ, ΛΔ τεμνόμενη απ' τις ευθείες ΑΒ και ΚΜ δίνει:

$$(ΒΑΓΔ) = (ΚΜΓΡ) \qquad (2)$$

Απ' τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$(ΑΒΓΔ) = (ΒΑΓΔ) = \frac{1}{(ΑΒΓΔ)} \quad \text{(ιδιότητα } (\boldsymbol{\beta}) \text{ διπλού λόγου).}$$

Άρα

$$(ΑΒΓΔ)^2 = 1 \text{ και επειδή } Γ \neq Δ \text{ προκύπτει ότι } (ΑΒΓΔ) = -1.$$

Έτσι, πετύχαμε να κατασκευάσουμε μόνο με τον κανόνα ένα γεωμετρικό σχήμα (τετράπλευρο) και την αρμονική τετράδα τεσσάρων σημείων σημειοσειράς.

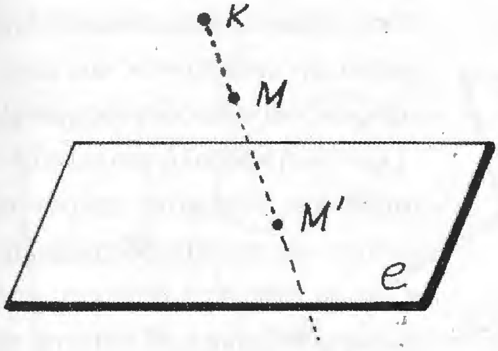
2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Μετά από μια γενική εισαγωγή στο αντικείμενο της Προβολικής Γεωμετρίας, που θεωρήθηκε απαραίτητη για τη συστηματοποίηση διαφόρων εννοιών και μεθόδων, θα εξετάσουμε τώρα μερικούς βασικούς τρόπους παράστασης των σχημάτων του χώρου πάνω στο επίπεδο, όπως την κεντρική και παράλληλη προβολή καθώς και την αξονομετρική προβολή.

2.1 Κεντρική προβολή στο επίπεδο

Θα αναφερθούμε κυρίως στην κεντρική προβολή των απλών γεωμετρικών στοιχείων (σημείου, ευθείας και επιπέδου), καθώς και στην κεντρική προβολή του κύκλου στο επίπεδο που θεωρούνται βασικά στοιχεία για την περαιτέρω μελέτη της Παραστατικής Γεωμετρίας.

Α΄) Κεντρική προβολή σημείου

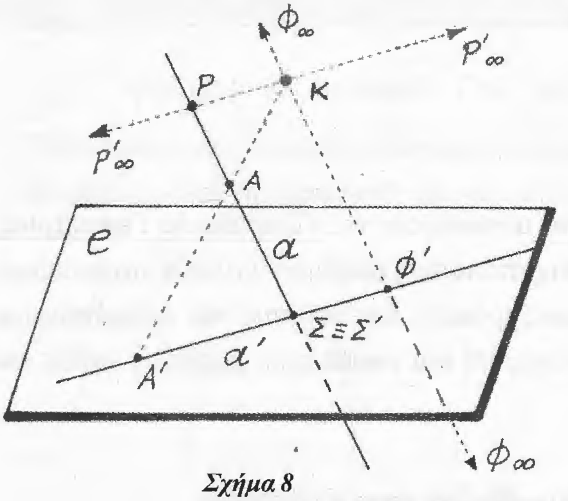


Σχήμα 7

Έστω επίπεδο *e* και σημείο Κ έξω απ' αυτό. (σχήμα 7). Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του χώρου (διάφορο του Κ) και φέρουμε την ΚΜ, αυτή τέμνει το *e* σε σημείο Μ΄ (εφόσον δεν είναι παράλληλη προς το *e*). Το Μ΄ λέγεται ***κεντρική προβολή*** του σημείου Μ. Το Κ λέγεται ***κέντρο προβολής*** και το ***e επίπεδο προβολής***. Η απέραντη ευθεία ΚΜ λέγεται ***προβάλλουσα*** ευθεία. Αν το Μ βρίσκεται στο *e*, τότε η προβολή του συμπίπτει μ' αυτό και γράφουμε Μ ≡ Μ΄.

Β΄) Κεντρική προβολή ευθείας

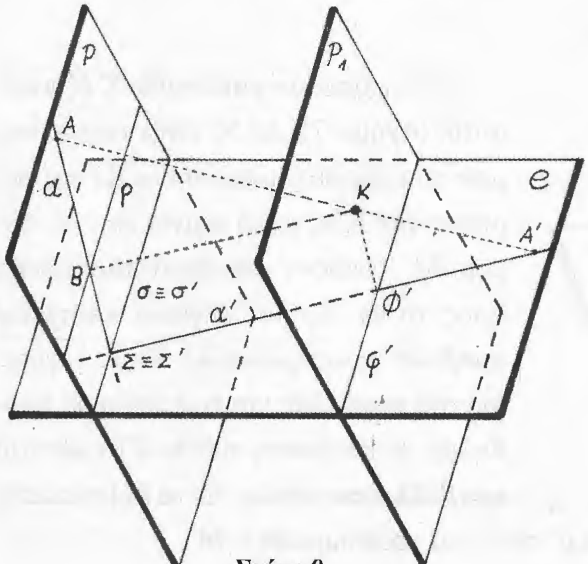
Έστω α τυχαία ευθεία που δεν διέρχεται απ' το κέντρο προβολής Κ και τέμνει το επίπεδο προβολής e στο σημείο $\Sigma \equiv \Sigma'$ που λέγεται ***ίχνος*** της ευθείας (σχήμα 8).



Σχήμα 8

Έστω ότι το επίπεδο που ορίζουν η ευθεία α και το σημείο Κ, το επίπεδο (Κ, α) τέμνει το e κατά την α' που περνάει απ' το ίχνος. Αν φέρουμε απ' το Κ την παράλληλη ευθεία προς την α, αυτή θα τμήσει την α' στο Φ΄ που είναι η προβολή του επ' άπειρο σημείου Φ_∞ της α και λέγεται ***σημείο φυγής***. Αν φέρουμε τώρα απ' το σημείο Κ το παράλληλο προς το e επίπεδο, αυτό θα τμήσει την α στο Ρ. Η προβολή του Ρ είναι το επ' άπειρο σημείο της α', το P'_∞. Αν η ευθεία α βρίσκεται στο e, τότε η προβολή της συμπίπτει μ' αυτή και γράφουμε $\alpha \equiv \alpha'$, ενώ αν είναι παράλληλη προς το e (και δεν περνάει απ το Κ), τότε η προβολή της είναι παράλληλη προς την α.

Γ΄) Κεντρική προβολή επιπέδου

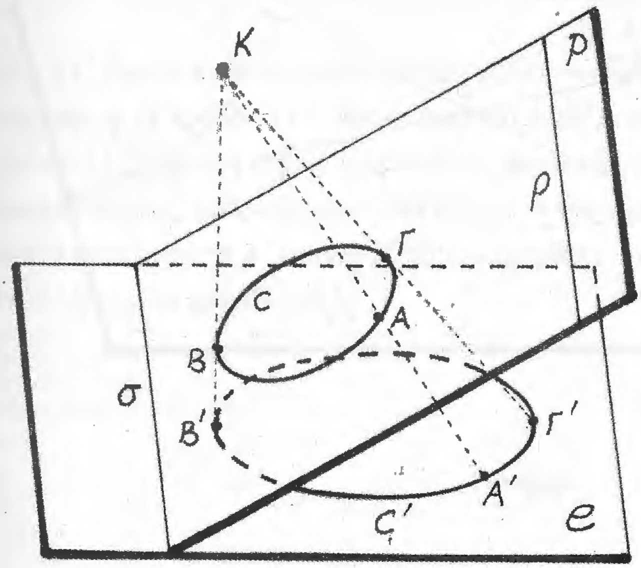


Σχήμα 9

Έστω p ένα τυχαίο επίπεδο που δεν περιέχει το κέντρο προβολής Κ και τέμνει το επίπεδο προβολής e κατά την ευθεία $\sigma \equiv \sigma'$ που λέγεται ***ίχνος*** του επιπέδου (σχήμα 9). Η κεντρική προβολή του επιπέδου αυτού που θεωρείται απέραντο, είναι το ίδιο το επίπεδο προβολής e. Αν το επίπεδο p διέρχεται από το κέντρο προβολής Κ και είναι το p_1, τότε προβολή αυτού είναι το ίχνος του στο e, η φ'. Αν θεωρήσουμε τυχαία ευθεία α του p, η κεντρική προβολή της είναι η α'. Παρατηρούμε ότι τα σημεία φυγής που αντιστοιχούν στις ευθείες του p (όπως το Φ' σημείο φυγής της α), βρίσκονται όλα στην ευθεία $\varphi' // \sigma$, η οποία είναι το ίχνος του επιπέδου p_1 που διέρχεται απ' το Κ και είναι παράλληλο προς το p. Η ευθεία αυτή φ' λέγεται ***ευθεία φυγής.*** Το επίπεδο που διέρχεται απ' το κέντρο προβολής Κ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο προβολής e τέμνει το p κατά την ευθεία ρ, της οποίας η κεντρική προβολή είναι η επ' άπειρο ευθεία του επιπέδου προβολής e. Οι ευθείες ρ και φ' λέγονται ***αντίζυγες***, τα σημεία Β, Φ' που βρίσκονται στις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΚΒΣ\Phi'$ λέγονται **αντίζυγα** σημεία, ενώ οι ακτίνες $Κ\Phi'$, ΚΒ λέγονται **αντίζυγες** ακτίνες. Έτσι, αν ένα σχήμα του επιπέδου p δεν τέμνεται από την ευθεία ρ, τότε όλα τα σημεία του προβάλλονται σε πεπερασμένη απόσταση. (Ως εφαρμογή, θα δούμε παρακάτω την κεντρική προβολή κύκλου).

Δ΄) Κεντρική προβολή κύκλου

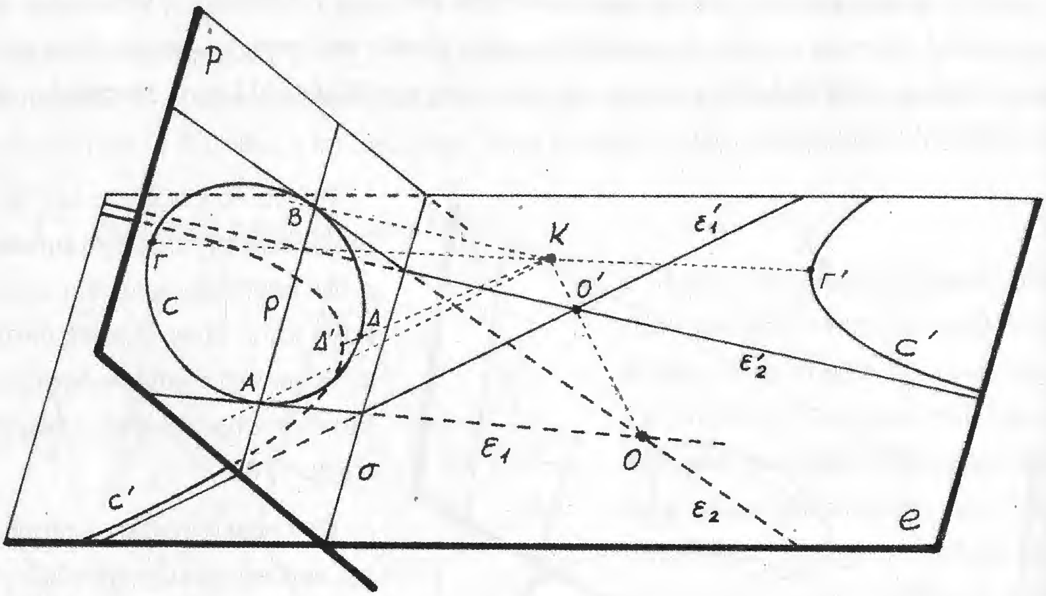
Η κεντρική προβολή κύκλου αποδεικνύεται ότι είναι ή έλλειψη, ή υπερβολή, ή παραβολή. Έστω e το επίπεδο προβολής, p το επίπεδο που περιέχει τον κύκλο c και Κ το κέντρο προβολής. Σχετικά με το γένος της προβολής (έλλειψη, υπερβολή, ή παραβολή) παρατηρούμε ότι:



Σχήμα 10

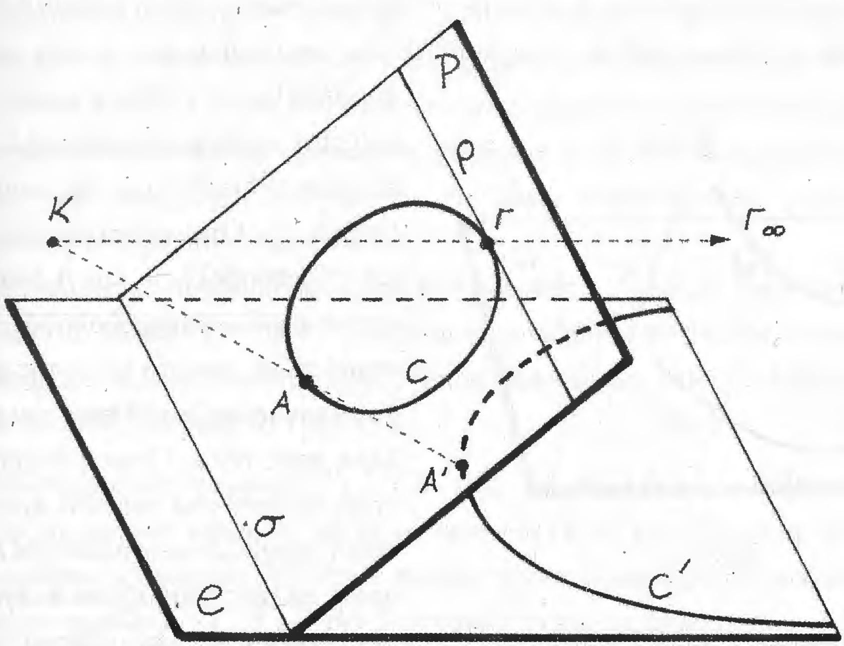
i) Όταν ο κύκλος c δεν τέμνεται από την αντίζυγη ευθεία ρ του επιπέδου p, τότε η προβολή του c' είναι ***έλλειψη*** διότι είναι κωνική τομή που δεν έχει κανένα σημείο στο άπειρο (σχήμα 10).

ii) Όταν ο κύκλος c τέμνεται από την αντίζυγη ευθεία ρ στα σημεία Α και Β (σχήμα 11), η καμπύλη c' έχει δύο σημεία στο άπειρο που ορίζονται απ' τις ευθείες ΚΑ και ΚΒ. Η προβολή c' είναι ***υπερβολή.*** Οι δύο κλάδοι αυτής θα είναι οι προβολές των δύο τόξων στα οποία χωρίζεται ο κύκλος c από την ευθεία ρ. Οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 στα άκρα Α και Β της ρ, οι οποίες τέμνονται στο Ο, προβάλλονται κατά τις ε'_1 και ε'_2 αντίστοιχα, όπου είναι $\varepsilon'_1 \,//\, KA$ και $\varepsilon'_2 \,//\, KB$. Οι ε'_1 και ε_2' τέμνονται στο Ο΄ και αποτελούν προφανώς τις δύο γνωστές ***ασύμπτωτες*** της υπερβολής c'. Το Ο΄ που είναι κεντρική προβολή του Ο, είναι το κέντρο της υπερβολής. Οι προβολές του ανώτερου σημείου Γ και του κατώτερου Δ, οι Γ΄ και Δ΄ αντίστοιχα, είναι οι κορυφές της υπερβολής. Η διάμετρος ΓΔ του κύκλου θα προβληθεί κατά δύο ημιευθείες που θα βρίσκονται στον φορέα της Γ΄Δ΄, αλλά η μία θα ξεκινάει απ' το Γ΄ και θα συνεχίζεται δεξιά του, ενώ η άλλη θα ξεκινάει απ' το Δ΄ και θα συνεχίζεται αριστερά του. Η τομή της διαμέτρου ΓΔ με την ευθεία ρ θα έχει ως προβολή το επ' άπειρο σημείο, εφόσον ανήκει στην αντίζυγη ευθεία ρ.



Σχήμα 11

iii) Αν τέλος ο κύκλος *c* εφάπτεται με την αντίζυγη ευθεία *ρ* στο Γ (σχήμα 12),

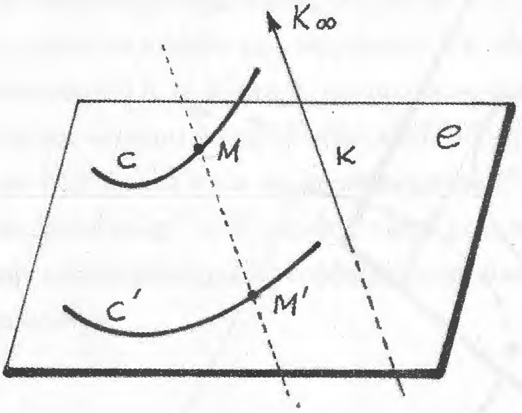


Σχήμα 12

τότε η *c*′ έχει ένα μόνο σημείο στο άπειρο που ορίζεται από την ΚΓ το $Γ_\infty$. Η *c*′ είναι ***παραβολή.*** Η προβολή του κατώτερου σημείου Α του κύκλου δίνει την κορυφή της παραβολής, την Α′, ενώ η προβολή της διαμέτρου ΓΑ του κύκλου δίνει τον άξονα της παραβολής. Η εφαπτομένη στο σημείο Α του κύκλου, θα προβληθεί κατά ευθεία που περνάει από το Α′ και είναι παράλληλη προς το ίχνος *σ* του επιπέδου *ρ* (κάθετη στον άξονα της παραβολής).

2.2 Παράλληλη προβολή στο επίπεδο

Όταν το κέντρο προβολής Κ είναι το επ' άπειρο σημείο, τότε η προβολή λέγεται ***παράλληλη*** επειδή οι ευθείες που προβάλλουν τα σημεία του χώρου γίνονται παράλληλες. Η ευθεία *κ* με την οποία ορίζεται το κέντρο προβολής K_∞ αποτελεί την διεύθυνση της προβολής (σχήμα 13). Όταν επομένως δοθούν το επίπεδο προβολής *e* και η διεύθυνση *κ*, τότε παράλληλη προβολή Μ΄ τυχαίου σημείου Μ, είναι το ίχνος της ευθείας που περνάει απ' το Μ και είναι παράλληλη προς την *κ*. Όταν η διεύθυνση *κ* είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής, τότε η προβολή του σημείου Μ λέγεται ***ορθή***, αλλιώς ονομάζεται ***πλάγια***.



Σχήμα 13

Η παράλληλη προβολή ευθείας *α* είναι επίσης ευθεία *α*΄, και μάλιστα είναι το ίχνος του επιπέδου που ορίζεται απ' την ευθεία *α* και την παράλληλη από τυχαίο σημείο της *α* προς την διεύθυνση *κ*. Όταν η ευθεία *α* έχει την ίδια διεύθυνση με την *κ*, τότε η προβολή της *α*΄ είναι σημείο, κι' αυτό είναι το ίχνος της με το επίπεδο προβολής.

Η παράλληλη προβολή καμπύλης που βρίσκεται σε επίπεδο *p* παράλληλο προς το επίπεδο προβολής *e*, είναι η ίδια καμπύλη που προκύπτει με μετάθεση της αρχικής κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ (Μ τυχαίο σημείο της καμπύλης και Μ΄ η παράλληλη προβολή του). Αν το επίπεδο *p* της καμπύλης είναι παράλληλο προς τη διεύθυνση *κ*, τότε η παράλληλη προβολή της καμπύλης είναι ευθεία και μάλιστα το ίχνος του *p*.

Επίσης, δύο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα μιας ευθείας προβάλλονται κατά τμήματα ανάλογα προς αυτά. Έτσι, το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στο μέσο της προβολής του.

2.3 Αξονομετρική προβολή

Η αξονομετρική προβολή είναι μια μέθοδος παράστασης που μπορεί να χρησιμεύσει για την αναπαράσταση (κατασκευή) στο χώρο ενός εικονιζόμενου σχήματος. Χρησιμοποιείται σε μεγάλη κλίμακα από τους αρχιτέκτονες και τους μηχανικούς για την κατασκευή σχεδίων οικοδομών, γεφυρών κ.τ.λ. που προορίζονται για τους τεχνίτες, από τους μηχανολόγους για την κατασκευή σχεδίων μηχανών, από ναυπηγούς για σχεδίαση σκαφών κ.τ.λ.

Η αξονομετρική προβολή βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα του Γερμανού Μαθηματικού ***K. Pohlke*** (1810 – 1876) που διατυπώθηκε το 1853 και αποδείχτηκε αργότερα από άλλους Μαθηματικούς (όπως *Schwarz* το 1863, *Schilling* το 1903, *Kruppa* το 1907, *Schmidt* το 1918 κ. ά.):

«Τρία συνεπίπεδα τμήματα Ο΄Α΄, Ο΄Β΄, Ο΄Γ΄ με κοινό άκρο Ο΄ αυθαίρετων διευθύνσεων και μηκών, μπορούν πάντα να θεωρηθούν ως παράλληλη προβολή τριών ίσων τμημάτων του χώρου ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ που αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα, εφόσον τα τέσσερα σημεία Ο΄, Α΄, Β΄, Γ΄ δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία».

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω θεώρημα, θεωρούμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz με κοινή μονάδα **μ** μέτρησης των μηκών στους τρεις άξονες Ox, Oy, Oz. Τότε, κατά την παράλληλη προβολή των Ox, Oy, Oz στους άξονες O΄x΄, O΄y΄, O΄z΄, οι προβολές της μονάδας μ θα είναι μ'_x, μ'_y, μ'_z.

Με βάση τα παραπάνω, η προβολή Μ΄ τυχαίου σημείου Μ(*x, y, z*) του χώρου έχει συντεταγμένες (σχήμα 14):

$$x' = x\mu'_x, \quad y' = y\mu'_y, \quad z' = z\mu'_z \tag{1}$$

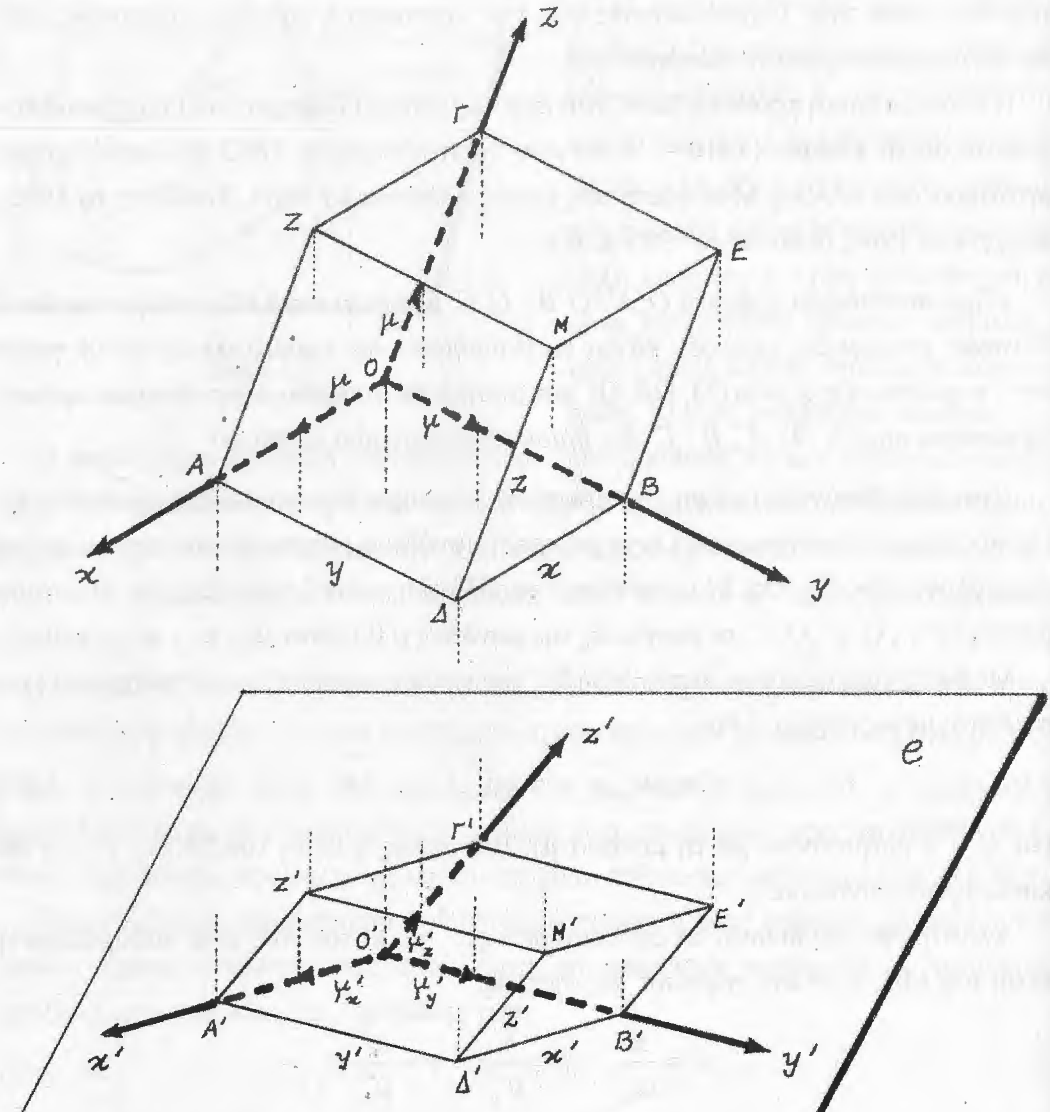
(τα *x, y, z* μετριούνται με τη μονάδα μ). Επομένως η θέση του Μ΄(*x΄, y΄, z΄*) θα καθορίζεται μονότιμα.

Αντίστροφα, αν δοθούν οι συντεταγμένες *x΄, y΄, z΄* του Μ΄, τότε καθορίζεται η θέση του Μ(*x, y, z*) στο χώρο απ' τις σχέσεις:

$$x = \frac{x'}{\mu'_x}, \quad y = \frac{y'}{\mu'_y}, \quad z = \frac{z'}{\mu'_z}. \tag{2}$$

(λύνουμε τις σχέσεις (1) ως προς *x, y,* και *z*).

Η παράλληλη προβολή S΄ ενός στερεού S που συνδέεται με το σύστημα αναφοράς O΄x΄y΄z΄ (προβολή του συστήματος Oxyz ως προς το οποίο αναφέρεται το στερεό S), ονομάζεται ***αξονομετρική προβολή***. Διακρίνεται σε ***ορθή*** ή ***πλάγια αξονομετρική προβολή***, εφόσον η διεύθυνση προβολής είναι κάθετη ή πλάγια αντίστοιχα ως προς το επίπεδο προβολής *e* (στο σχήμα 14 η αξονομετρική προβολή είναι ορθή).



Σχήμα 14

Ανάλογα με τις αξονομετρικές μονάδες μ'_x, μ'_y, μ'_z (εφόσον οι μονάδες μέτρησης μ_x, μ_y, μ_z έχουν όλες το ίδιο μήκος **μ**), έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αξονομετρικής προβολής:

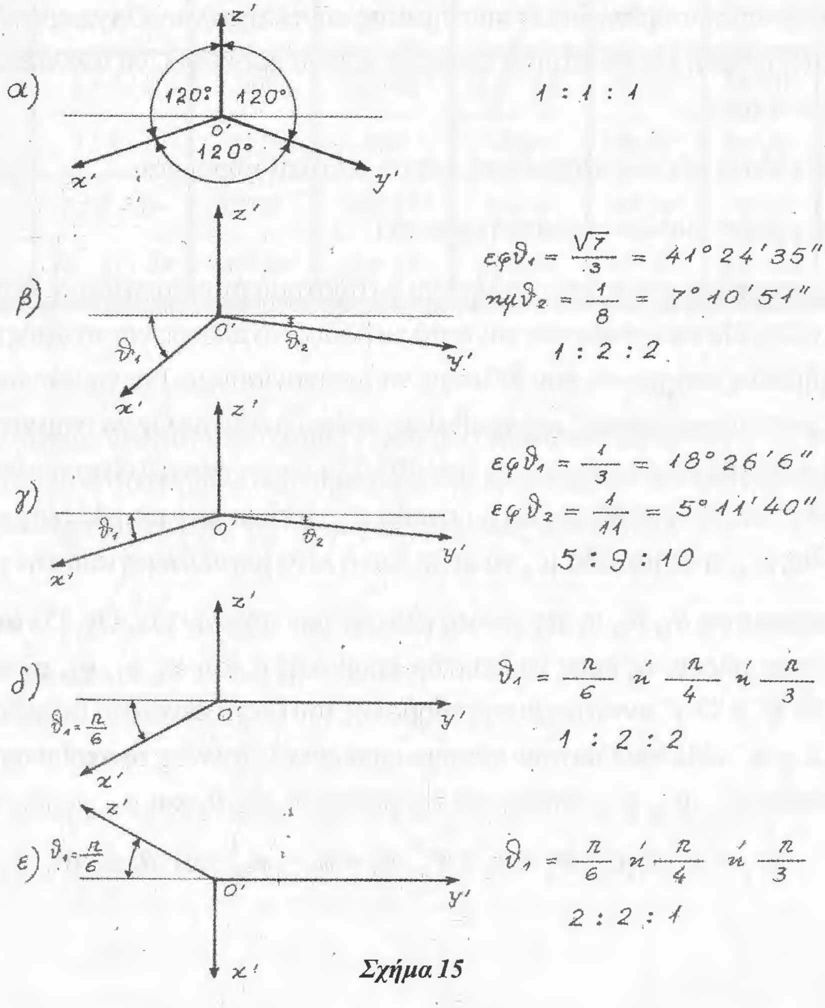
i) ***Μονομετρική*** (ή ***ισομετρική***) όταν $\mu'_x = \mu'_y = \mu'_z$,

ii) ***Διμετρική*** όταν $\mu'_x \neq \mu'_y = \mu'_z$,

iii) ***Τριμετρική*** όταν $\mu'_x \neq \mu'_y \neq \mu'_z$.

Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται οι παρακάτω προβολές:

1) Η ***ισομετρική*** ορθή αξονομετρική προβολή η οποία έχει ισομήκεις τις μονάδες μ'_x, μ'_y, μ'_z (σχήμα 15α).



Σχήμα 15

2) Η ***διμετρική*** ορθή αξονομετρική προβολή η οποία έχει λόγο μονάδων $\frac{\mu'_x}{1} = \frac{\mu'_y}{2} = \frac{\mu'_z}{2}$ ή $\mu'_x : \mu'_y : \mu'_z = 1:2:2$ (σχήμα 15β).

3) Η ***τριμετρική*** ορθή αξονομετρική προβολή η οποία έχει λόγο μονάδων $\mu'_x : \mu'_y : \mu'_z = 5:9:10$ (σχήμα 15γ).

4) Η ***μετωπική*** αξονομετρική προβολή με γων(O΄y΄, O΄z΄) = π/2 και λόγο μονάδων $\mu'_x : \mu'_y : \mu'_z = 1:2:2$, ενώ γων(O΄x΄, O΄y΄) = π/6 ή π/4 ή π/3 (15δ).

5) Η ***οριζόντια*** αξονομετρική προβολή με γων(O΄x΄, O΄y΄) = π/2 και λόγο μονάδων $\mu'_x : \mu'_y : \mu'_z = 2:2:1$, ενώ γων(O΄y΄, O΄z΄) = π/6 ή π/4 ή π/3 (15ε).

Η εκλογή του τρισορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων Oxyz πρέπει να είναι τέτοια ώστε, η ορθή αξονομετρική προβολή που θα προκύψει, να ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

i) Να γίνεται εύκολα κατανοητή η θέση του στο χώρο, και

ii) Να μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί.

Για τις παραπάνω απαιτήσεις εκλέγεται το σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε οι άξονες Ox, Oy, Oz να τοποθετούνται κατά το βάθος, το πλάτος και το ύψος αντίστοιχα του σχήματος του χώρου που θέλουμε να απεικονίσουμε. Για να ικανοποιείται η αίσθηση του "κατακόρυφου" της προβολής, πρέπει ο άξονας Oz να σχηματίζει με το επίπεδο προβολής γωνία μικρότερη των 20°. Για να μη προκαλείται η αίσθηση της "απόκλισης" της προβολής, πρέπει η μονάδα μ'_x να είναι λίγο μεγαλύτερη του μισού της μονάδας μ'_y, η δε μονάδα μ'_z να είναι ίση ή λίγο μεγαλύτερη από την μ'_y.

Αν ορίσουμε ως θ_1, θ_2, θ_3 τις γωνίες κλίσεις των αξόνων Ox, Oy, Oz αντίστοιχα του Oxyz του χώρου ως προς το επίπεδο προβολής *e*, και ως φ_1, φ_2, φ_3 τις γωνίες y΄O΄z΄, z΄O΄x΄, x΄O΄y΄ αντίστοιχα της προβολής του Oxyz πάνω στο επίπεδο *e*, δηλαδή του O΄x΄y΄z΄, τότε προκύπτουν κάποιοι εμπειρικοί κανόνες, οι οποίοι σχετίζονται με τις μονάδες μ'_x, μ'_y, μ'_z, καθώς και τις γωνίες θ_1, θ_2, θ_3 και φ_1, φ_2, φ_3. Έτσι:

$$\boldsymbol{\mu'_x < \mu'_y \le \mu'_z,\ \theta_1 > \theta_2 \ge \theta_3,\ \varphi_1 < \varphi_2 \le \varphi_3,\ \text{και}\ \theta_3 \le 20^\circ.}$$

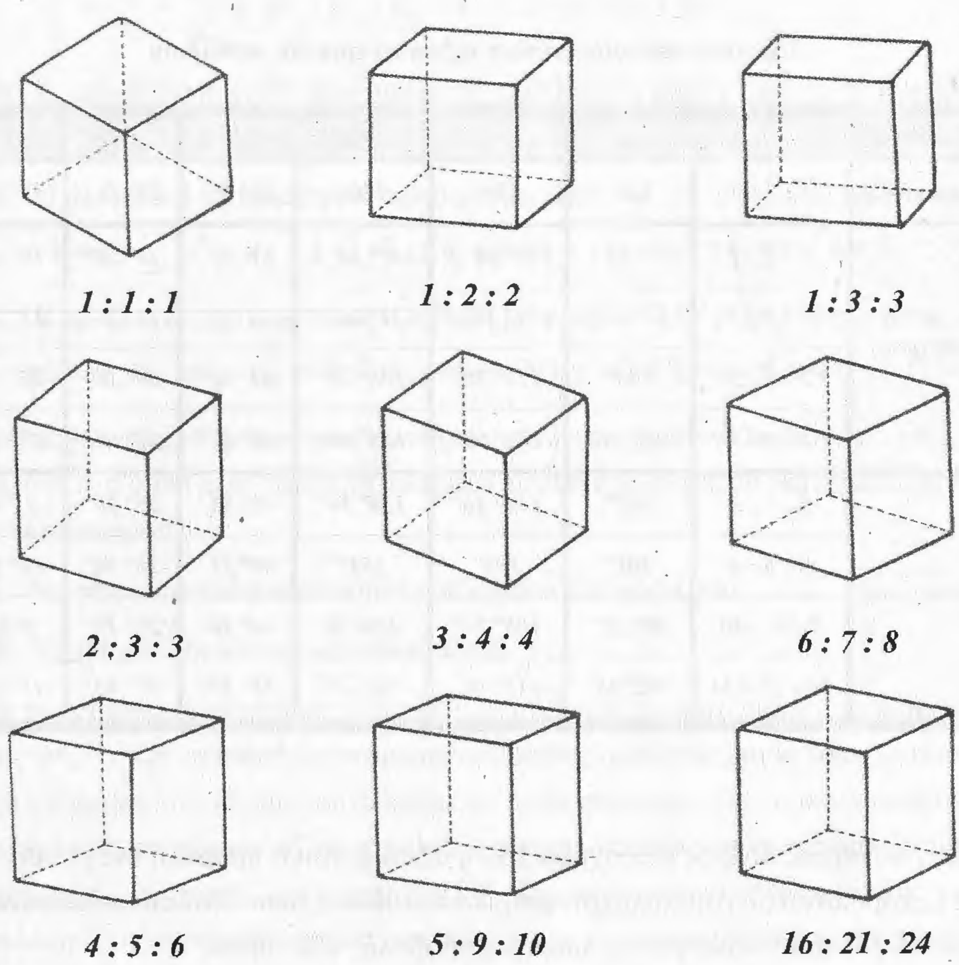
Ακολουθεί πίνακας των πιο συχνά χρησιμοποιούμενων αξονομετρικών μεθόδων:

Πίνακας συνηθισμένων αξονομετρικών μεθόδων

Προβολή	$\mu'_x:\mu'_y:\mu'_z$	φ_1	φ_2	φ_3	θ_1	θ_2	θ_3
Ισομετρική	1 : 1 : 1	120°	120°	120°	35° 15′	35° 15′	35° 15′
Διμετρική	1 : 2 : 2	97° 11′	131° 24′,5	131° 24′,5	61° 52′	19° 28′	19° 28′
	1 : 3 : 3	93° 11′	131° 24′,5	131° 24′,5	71° 4′	13° 16′	13° 16′
	2 : 3 : 3	103°	128° 30′	128° 30′	52° 52′	25° 16′	25° 16′
	3 : 4 : 4	106° 20′	126° 50′	126° 50′	48° 27′	27° 55′	27° 55′
Τριμετρική	6 : 7 : 8	107°	114° 46′	138° 14′	45° 55′	35° 20′	22° 6′
	4 : 5 : 6	101°	108°	151°	49° 51′	36° 20′	14° 55′
	5 : 9 : 10	95° 27′	108° 27′	156° 6′	60° 24′	27° 27′	9° 56′
	16 : 21 : 24	102° 28′	113° 16′	144° 16′	50° 37′	17° 53′	17° 57′

Στη συνέχεια, δίνεται στο σχήμα 15ζ η αξονομετρική προβολή ενός κύβου για όλα τα παραπάνω συστήματα αξονομετρικών μεθόδων, όπου γίνονται πιο κατανοητά τα δεδομένα του πίνακα για τις διάφορες προβολές του κύβου.

Αξονομετρική προβολή κύβου για τις αντίστοιχες περιπτώσεις του προηγούμενου πίνακα



Σχήμα 15 ζ

Γενικά όμως, προτιμούνται οι παρακάτω αξονομετρικές προβολές:

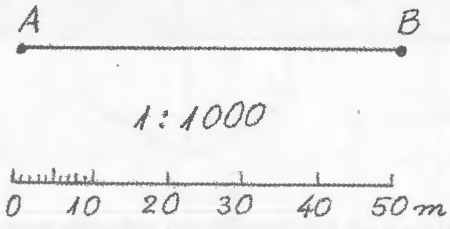
- απ' τις ***διμετρικές*** αυτή που έχει μονάδες *1 : 2 : 2*,
- απ' τις ***τριμετρικές*** αυτές που έχουν μονάδες *5 : 9 : 10* και *16 : 21 : 24*.

3. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗ (ΟΡΘΗ) (Παραστατική ενός επιπέδου)

Για την παράσταση ενός σχήματος (Σ) του χώρου σε ένα οριζόντιο επίπεδο προβολής *e* (κάθετο στη διεύθυνση της βαρύτητας), χρησιμοποιούμε, αφ' ενός την ορθή προβολή (Σ΄) του σχήματος (Σ) στο επίπεδο, αφ' ετέρου τις αποστάσεις διάφορων σημείων του (Σ) απ' το οριζόντιο επίπεδο *e*, δηλαδή τα υψόμετρα. Θα μελετήσουμε την παράσταση σημείου, ευθείας και επιπέδου, και θα λύσουμε στοιχειώδη προβλήματα που αναφέρονται σε απλές κατασκευές, οι οποίες βεβαίως επιτρέπουν την επίλυση συνθετότερων προβλημάτων της Παραστατικής ενός επιπέδου.

3.1 Παράσταση σημείου - Κλίμακες

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα οριζόντιο επίπεδο προβολής *e*. Το επίπεδο αυτό χωρίζει το χώρο σε δύο περιοχές. Τα υψόμετρα των σημείων που βρίσκονται πάνω απ' το επίπεδο *e* τα θεωρούμε θετικά και εκείνα που βρίσκονται κάτω απ' το *e* αρνητικά. Όλα τα σημεία που βρίσκονται στο επίπεδο *e* έχουν υψόμετρο μηδέν. Τα υψόμετρα των σημείων ενός σχήματος ορίζονται με μια καθορισμένη μονάδα μέτρησης των υψομέτρων, που από δω και πέρα θα θεωρείται το 1 εκατοστό (cm). Αν πρόκειται όμως να παραστήσουμε φυσικά ή τεχνητά αντικείμενα με μεγάλες διαστάσεις σε σχέση με τον πίνακα σχεδίασης, τότε αντί της προβολής (Σ΄) του σχήματος (Σ) του χώρου, σχεδιάζουμε ένα σχήμα (S΄) όμοιο με το (Σ΄) με ένα καθορισμένο εκ των προτέρων λόγο ομοιότητας λ. Αυτός ο λόγος ομοιότητας λ λέγεται ***αριθμητική κλίμακα*** και εκφράζεται συνήθως με μορφή κλάσματος όπως 1:2, 1:10, 1:50, 1:100 κ.λ.π. Τότε η σχετική προβολή λέγεται προβολή *«σε σμίκρυνση»*. Σε μερικές περιπτώσεις παίρνουμε $\lambda > 1$ οπότε τότε έχουμε προβολή *«σε μεγέθυνση»*, ενώ για $\lambda = 1$ έχουμε προβολή *«σε φυσικό μέγεθος»*. Πολλές φορές βάζουμε στο κάτω μέρος του σχεδίου – για διευκόλυνση των μετρήσεων – τη ***γραφική κλίμακα***, δηλαδή ευθύγραμμο τμήμα που διαιρούμε σε μήκη ίσα με τη μονάδα μέτρησης (ή πολλαπλάσια αυτής ή υποπολλαπλάσιά της) τα οποία έχουν αναχθεί με την αριθμητική κλίμακα.



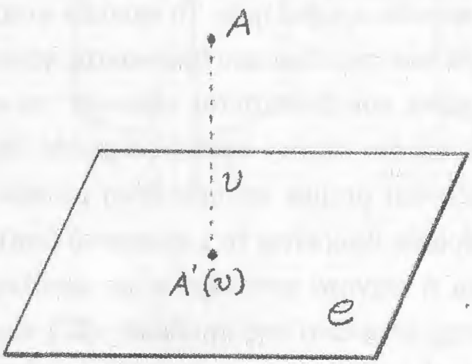
Σχήμα 16

Π.χ. στο σχήμα 16 τα σημεία Α και Β απέχουν μεταξύ τους 5 εκ. ενώ στη φυσική τους κατάσταση απέχουν 50 μέτρα. Άρα η αριθμητική τους κλίμακα είναι:

$$\lambda = \frac{5\text{εκ}}{5000\text{εκ}} = \frac{1}{1000} \quad \text{ή} \quad 1:1000,$$

ενώ η γραφική κλίμακα διαιρέθηκε σε μήκη τέτοια ώστε το 1 εκ. (μονάδα μέτρησης) να εκφράζει 10 μέτρα (m) ή 1000 εκατοστά.

Τόσο η αριθμητική όσο και η γραφική κλίμακα αναγράφονται απαραίτητα σε κάθε χάρτη για να υπολογίζονται κατά προσέγγιση οι διάφορες αποστάσεις. Στα επόμενα η μονάδα μέτρησης θα είναι το 1 εκ. και η κλίμακα σχεδίασης θα είναι κοινή για όλες τις οριζόντιες αποστάσεις και τα ύψη. Η αριθμητική κλίμακα σχεδίασης θα λαμβάνεται με λόγο $\lambda = 1$ για αποφυγή σμικρύνσεων ή μεγεθύνσεων.



Σχήμα 17

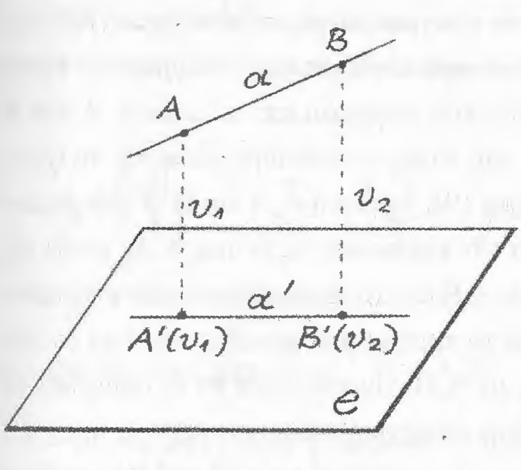
Έστω τώρα τυχαίο σημείο Α του χώρου. Η ορθή προβολή του πάνω στο οριζόντιο επίπεδο προβολής *e* είναι το σημείο Α΄ και το υψόμετρό του είναι υ το οποίο αναγράφουμε πάντα μέσα σε παρένθεση δίπλα απ' το σημείο Α΄ (σχήμα 17).

Έτσι, σε κάθε σημείο Α του χώρου θα αντιστοιχεί ένα σημείο Α΄(υ) του οποίου η προβολή στο επίπεδο *e* είναι το σημείο Α΄ η δε απόστασή του απ' το *e* είναι ίση με υ. Αντίστροφα, σε κάθε σημείο Α΄(υ) αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο του χώρου το Α, που βρίσκεται στην κάθετη στο επίπεδο *e* στο Α΄ και σε απόσταση απ' το επίπεδο *e* ίση με υ.

Επομένως, στην Παραστατική ενός επιπέδου, ένα σημείο ορίζεται πλήρως <u>*με την προβολή του μαζί με το υψόμετρό του*</u>, και έτσι επιτυγχάνεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των σημείων του χώρου με εκείνα του οριζοντίου επιπέδου προβολής *e*, το οποίο υποτίθεται ότι αποτελεί και τον πίνακα σχεδίασης. Όπως τονίστηκε στην αρχή, τα σημεία που βρίσκονται πάνω απ' το *e* έχουν θετικό υψόμετρο, αυτά που βρίσκονται κάτω απ' το *e* έχουν αρνητικό υψόμετρο και όσα βρίσκονται στο *e* έχουν υψόμετρο μηδέν.

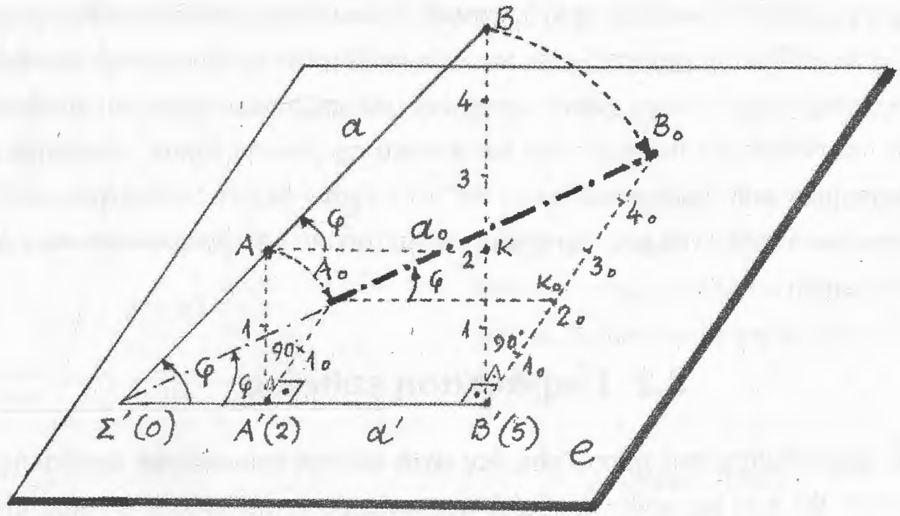
3.2 Παράσταση ευθείας

Έστω μια ευθεία *α* του χώρου που δεν είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής *e*. Η ευθεία αυτή θα έχει ως ορθή προβολή στο επίπεδο *e* μια ευθεία *α΄*, που είναι ο γεωμετρικός τόπος των ορθών προβολών των σημείων της (σχήμα 18). Αντίθετα όμως, μια ευθεία *α΄* στο *e* δεν ορίζει μόνο μία ευθεία *α* στο χώρο. Κάθε ευθεία του επιπέδου το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο προβολής *e* και διέρχεται απ' την *α΄* μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ως προβολή την ευθεία *α΄*.



Σχήμα 18

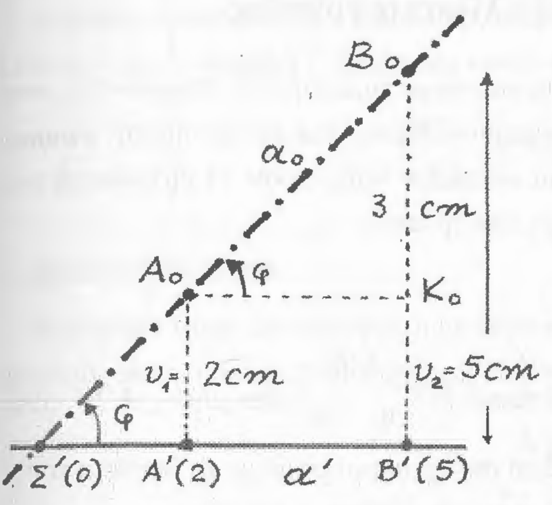
Για να οριστεί επομένως η ευθεία *α*, δεν αρκεί η *α΄*. Χρειάζεται να δοθούν και τα υψόμετρα δύο σημείων της. Άρα μια ευθεία στο χώρο ορίζεται πλήρως αν δοθούν οι προβολές <u>*δύο σημείων της με τα υψόμετρά τους*</u>. Αν τα υψόμετρα υ_1 και υ_2 των δύο σημείων της *α* είναι ίσα, τότε η ευθεία *α* είναι παράλληλη προς το *e* και λέγεται *οριζόντια*. Αν τέλος $A' \equiv B'$ ενώ $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$, τότε η *α* είναι κάθετη στο επίπεδο *e* και λέγεται *κατακόρυφη*. Η προβολή της είναι σημείο και παριστάνεται με μικρό γράμμα του ελληνικού αλφάβητου π.χ. *α΄*.



Σχήμα 19

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το χαρτί σχεδίασης παριστάνει το επίπεδο προβολής *e*. Έστω ότι μας δίνονται δύο σημεία Α και Β με τις προβολές τους και τα υψόμετρά τους, Α΄(2) και Β΄(5). Για να βρούμε στο *e* το πραγματικό μήκος που έχει το ΑΒ στο χώρο, εφαρμόζουμε τη μέθοδο της ***κατάκλισης ευθύγραμμου τμήματος.*** Προς τούτο, κατακλίνουμε πάνω στο *e*, το επίπεδο που διέρχεται απ' τα σημεία Α και Β και είναι κάθετο στο *e*, δηλαδή το ΑΒΒ΄Α΄ και το περιστρέφουμε γύρω απ' το ίχνος του Α΄Β΄ ώσπου να συμπέσει με το *e*. (σχήμα 19). Τα μήκη Α΄Α και Β΄Β του χώρου που είναι κάθετα στην Α΄Β΄, παίρνουν μετά την κατάκλιση τις θέσεις Α΄A_0 και Β΄B_0 και παραμένουν κάθετα στην Α΄Β΄. Έτσι, το ΑΒ αποτυπώνεται πάνω στο *e* κατά το ευθύγραμμο τμήμα A_0B_0, δηλαδή εκφράζει το πραγματικό μέγεθος που έχει το ΑΒ στο χώρο. Ο συμβολισμός της κατάκλισης με A_0B_0 γίνεται, γιατί το Α, όπως και το Β, εφόσον κατακλίνονται πάνω στο *e*, χάνουν το αρχικό τους υψόμετρο.

Η χάραξη της κατάκλισης γίνεται πάντα με αξονομετρική γραμμή (τελεία, παύλα), ενώ οι κάθετες που φέρνουμε απ' τα Α΄(2), Β΄(5) στην Α΄Β΄ γίνονται με ψιλή εστιγμένη γραμμή (βοηθητικές ευθείες) (σχήμα 20). Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν τα υψόμετρα των Α και Β είναι *ομόσημα* (θετικά ή αρνητικά) τότε τις κάθετες Α΄A_0 και Β΄B_0 θα τις φέρουμε προς το ίδιο μέρος της Α΄Β΄, ενώ αν είναι *ετερόσημα* θα τις φέρουμε εκατέρωθεν της Α΄Β΄. Τις κάθετες Α΄A_0 και Β΄B_0 τις φέρουμε όπου έχουμε αρκετό χώρο.



Σχήμα 20

Το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Β΄ λέγεται ***οριζόντια απόσταση*** των Α και Β στο χώρο, ενώ το K_oB_o υψομετρική διαφορά. Εδώ η οριζόντια απόσταση Α΄Β΄ = 2,9 cm ενώ η υψομετρική διαφορά $K_oB_o = 5 - 2 = 3$ cm.

Το σημείο Σ΄ τομής της ευθείας α' και της κατάκλισης α_0 της α του χώρου, λέγεται ***ίχνος*** της α στο επίπεδο e. Προφανώς το υψόμετρό του είναι μηδέν, δηλ. Σ΄(0).

Η μικρότερη γωνία που σχηματίζει η ευθεία α του χώρου με την προβολή της α' στο e, λέγεται ***γωνία κλίσης*** της α. Στο σχήμα 19 είναι η φ των α' και α του χώρου και ταυτίζεται με την φ που σχηματίζεται απ' την προβολή α' και την κατάκλιση α_0.

Η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας κλίσης φ λέγεται ***κλίση*** της α ενώ η συνεφαπτομένη της λέγεται ***βαθμίδα*** και συμβολίζεται με β. Απ' το σχήμα 20 έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{K_0B_0}{A_0K_0} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{A'B'} = \frac{5-2}{A'B'} = \frac{3}{2{,}9}, \quad \sigma\varphi\varphi = \beta = \frac{A'B'}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = \frac{A'B'}{5-2} = \frac{A'B'}{3} = \frac{2{,}9}{3}$$

Αν η υψομετρική διαφορά $\upsilon_2 - \upsilon_1$ γίνει ίση με 1, τότε η βαθμίδα β λέγεται ***βήμα.***

Δηλαδή, θα είναι τότε: $\beta = \dfrac{A'B'}{1} = A'B'$.

Επομένως *βήμα είναι η οριζόντια απόσταση δύο σημείων που τα υψόμετρά τους διαφέρουν κατά μονάδα.* Το βήμα μιας ευθείας παίζει σπουδαίο ρόλο στη Παραστατική Γεωμετρία ενός επιπέδου, όπως θα φανεί στα επόμενα.

Αν τα σημεία Α, Β βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο προβολής e και έχουν υψομετρική διαφορά ίση με 1, τότε το βήμα της ΑΒ είναι 0, εφόσον η οριζόντια απόσταση Α΄Β΄ μηδενίζεται. Αν όμως τα Α, Β βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς το e, τότε το βήμα αυτής της παραλλήλου απειρίζεται, ενώ γίνεται ίσο με 1 όταν η γωνία κλίσης φ της ΑΒ είναι 45°.

3.3 Υψομετρική κλίμακα ευθείας

Αν στην προβολή α' μιας ευθείας α σημειώσουμε τις προβολές σημείων της, των οποίων τα υψόμετρα είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί, λέμε ότι έχουμε την ***υψομετρική κλίμακα*** της ευθείας, ή τα σημεία ακέραιου υψόμετρου. Η κατασκευή της υψομετρικής κλίμακας μπορεί να γίνει με δύο τρόπόυς:

1ος τρόπος (αριθμητικά)

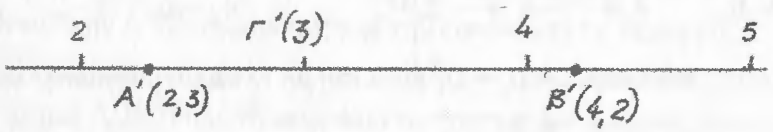
Υπολογίζουμε τη βαθμίδα β απ' τον τύπο: $\beta = \dfrac{A'B'}{\upsilon_2 - \upsilon_1}$. (το μήκος $A'B'$ είναι γνωστό, όπως και τα υψόμετρα υ_1, υ_2). Στη συνέχεια ορίζουμε με τη βοήθεια του β και ενός απ' τα σημεία $A'(\upsilon_1)$ ή $B'(\upsilon_2)$ ένα σημείο ακέραιου υψόμετρου.

Έτσι, αν θέλουμε να ορίσουμε στην α' τη θέση του σημείου Γ' ακέραιου υψόμετρου υ η απόστασή του απ' το A' θα είναι:

$A'\Gamma' = \beta\,(\upsilon - \upsilon_1)$ (όπου υ το γνωστό υψόμετρο)

Αφού ορίσουμε το Γ' χαράσσουμε κατόπιν την υψομετρική κλίμακα, γνωρίζοντας πλέον το β (βήμα).

Για να γίνουν τα παραπάνω πιο κατανοητά δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα χάραξης υψομετρικής κλίμακας ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ



Σχήμα 21

Έστω ότι θέλουμε να χαράξουμε την υψομετρική κλίμακα της ευθείας ΑΒ που μας δίνεται με τις προβολές δύο σημείων της $A'(2{,}3)$ και $B'(4{,}2)$ (σχήμα 21). Από τα παραπάνω έχουμε:

$$\beta = \frac{A'B'}{4{,}2 - 2{,}3} = \frac{5{,}7}{1{,}9} = 3$$

Δηλαδή το βήμα της ΑΒ είναι 3cm. Για να υπολογίσουμε τη θέση του επόμενου μετά το Α΄(2,3) σημείου Γ΄ ακέραιου υψόμετρου 3 (υ = 3), δηλ. το Γ΄(3) βρίσκουμε:

$$3 = \frac{A'\Gamma'}{3-2{,}3} \quad \acute{\eta} \quad A'\Gamma' = 2{,}1\,cm.$$

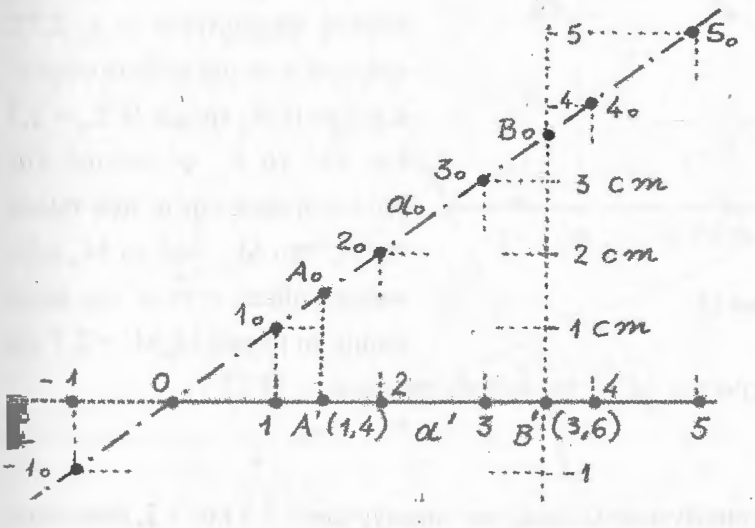
Βασική παρατήρηση:

Τον τρόπο αυτό τον εφαρμόζουμε κυρίως όταν τα υψόμετρα των Α και Β είναι ακέραια, οπότε υπολογίζουμε αμέσως το βήμα *β* απ' το γνωστό τύπο

$$\beta = \frac{A'B'}{\upsilon_2 - \upsilon_1}$$

2ος τρόπος (γραφικά)

Κάνουμε κατάκλιση της *α* όπως φαίνεται στο σχήμα 22, και σε τυχαία κάθετη στην *α΄* (συνήθως στη κάθετη προς την Α΄Β΄ στο σημείο μεγαλύτερου υψόμετρου) παίρνουμε τις υποδιαιρέσεις 1cm, 2cm, 3cm, κ.λ.π. Απ' τα σημεία αυτά φέρνουμε παράλληλες προς την *α΄* τις 11_o, 22_o, 33_o, κ.τ.λ. Αν τώρα απ' τα σημεία 1_o, 2_o, 3_o, φέρουμε κάθετες στην *α΄* παίρνουμε στην *α΄* τα σημεία 1, 2, 3, κ.τ.λ. της ζητούμενης υψομετρικής κλίμακας της ευθείας *α*. Όπως φαίνεται, το μέρος της ευθείας που βρίσκεται κάτω απ' το επίπεδο προβολής *e*, (με αρνητικά υψόμετρα), προβάλλεται κατά διακεκομμένη γραμμή.



Σχήμα 22

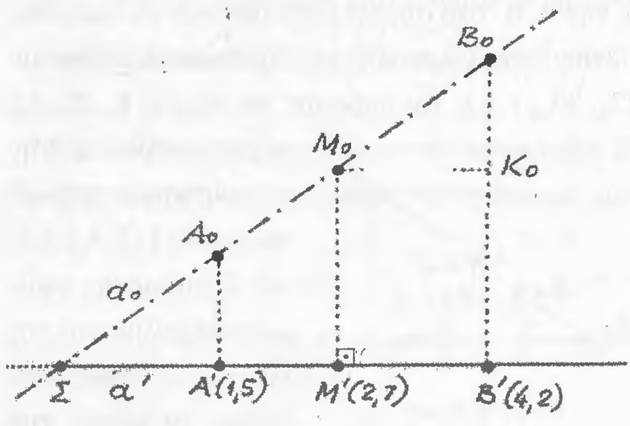
Η λύση των προβλημάτων της Παραστατικής ενός επιπέδου διευκολύνεται πολύ με τη χρησιμοποίηση υψομετρικών κλιμάκων των ευθειών που συνδυάζουν την κατάκλιση αυτών. Απλά προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια της κατάκλισης ευθείας είναι τα επόμενα τρία που ακολουθούν:

1$^{\text{ο}}$ πρόβλημα:

Να βρεθεί το υψόμετρο της προβολής Μ΄ σημείου Μ ευθείας *α* όταν αυτή δίνεται με την προβολή της *α΄* και αντίστροφα, να σημειωθεί η προβολή Μ΄ σημείου με δοσμένο υψόμετρο πάνω στη προβολή *α΄* δοσμένης ευθείας *α*.

Λύση

Κατακλίνουμε την ευθεία *α* πάνω στο επίπεδο *e* (σχήμα 23). (Εδώ η *α* δίνεται με τις προβολές και τα υψόμετρα δύο σημείων της Α΄(1,5), Β΄(4,2) και πάνω στην Α΄Β΄ δίνεται το Μ΄ του οποίου ζητάμε το υψόμετρο). Μετρώντας στη κατάκλιση την απόσταση Μ΄M_o (όπου η Μ΄M_o είναι κάθετη στην *α΄*) έχουμε το υψόμετρο του σημείου Μ της *α*. Αντίστροφα, για να σημειώσουμε πού θα βρεθεί η προβολή Μ΄ πάνω στην *α΄* ενός σημείου Μ της *α* δοθέντος υψόμετρου (π.χ. 2,7), παίρνουμε σε μια κάθετη στην *α΄* π.χ. την Β΄B_o τμήμα Β΄K_o = 2,7 και απ' το K_o φέρνουμε παράλληλη προς την *α΄* που τέμνει την $α_o$ στο M_o. Απ' το M_o φέρνουμε κάθετη στην *α΄* και παίρνουμε το μήκος M_oΜ΄ = 2,7 cm που εκφράζει το υψόμετρο του Μ΄. Έτσι προσδιορίζουμε το Μ΄(2,7).



Σχήμα 23

***Παρατήρηση*:**

Μετά από όλες τις παραπάνω αναλύσεις των παραγράφων 3.2 και 3.3, διαπιστώνουμε ότι με την κατάκλιση ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ επιτυγχάνουμε:

1) την εύρεση του *πραγματικού μεγέθους* A_oB_o της ΑΒ,

2) την εύρεση του *ίχνους* Ι΄(0) της ΑΒ (σημείο τομής της ΑΒ με το *e*),

3) την εύρεση της *γωνίας κλίσης* φ της ΑΒ,

4) την εύρεση του *βήματος* της ΑΒ (όταν τα υψόμετρα δεν είναι ακέραια),

5) την εύρεση *σημείων ακέραιου υψόμετρου* (υψομετρική κλίμακα) της ΑΒ και

6) την εύρεση *υψόμετρου τυχαίου σημείου* Μ΄ της Α΄Β΄, καθώς και την εύρεση προβολής Μ΄ σημείου Μ με συγκεκριμένο υψόμετρο.

2ο πρόβλημα:

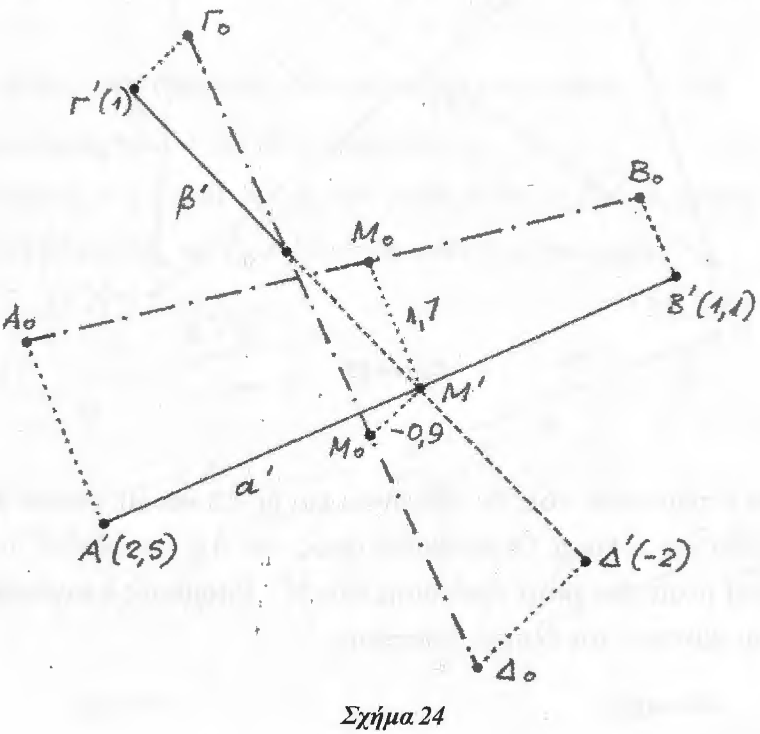
Δίνονται οι προβολές *α΄* και *β΄* δύο ευθειών *α* και *β* του χώρου. Να ελεγχθεί αν οι ευθείες αυτές τέμνονται ή όχι στο χώρο.

Λύση

1η περίπτωση:

Οι προβολές α΄ και β΄ τέμνονται μέσα στο χαρτί σχεδίασης.

Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ δύο ευθειών *α* και *β* του χώρου και Α΄Β΄, Γ΄Δ΄ οι προβολές τους με τα υψόμετρά τους που τέμνονται σε σημείο Μ΄.



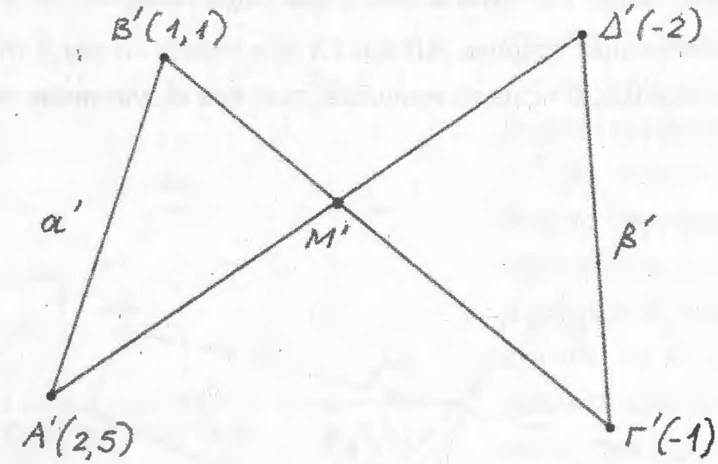
Σχήμα 24

Υπολογίζουμε γραφικά κάνοντας κατακλίσεις των ευθειών ΑΒ και ΓΔ (σχήμα 24) τα υψόμετρα του Μ΄ τόσο για την α΄ όσο και για την β΄. Έτσι βρίσκουμε ότι το Μ΄ για την α΄ έχει υψόμετρο 1,7 cm, ενώ για την β΄ έχει υψόμετρο -0,9 cm. Άρα οι α, β δεν τέμνονται στο χώρο, γιατί αν τέμνονταν τότε το Μ, επειδή θα ανήκε και στην α και στην β θα είχε το ίδιο υψόμετρο ως προς την α και ως προς την β.

2η περίπτωση:

Οι προβολές α΄ και β΄ τέμνονται έξω απ' το χαρτί σχεδίασης.

Αν οι προβολές των δύο ευθειών α και β τέμνονται έξω απ' το χαρτί σχεδίασης, τότε παίρνουμε δύο σημεία Α΄, Β΄ πάνω στην α΄ και δύο σημεία Γ΄, Δ΄ πάνω στη β΄ και ορίζουμε τις χιαστί ευθείες Α΄Δ΄ και Β΄Γ΄ που τέμνονται μέσα στο χαρτί σχεδίασης, όπως φαίνεται στο σχήμα 25.



Σχήμα 25

Αν οι α και β τέμνονται, τότε θα τέμνονται και οι ΑΔ και ΒΓ επειδή βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο των α και β. Οι προβολές όμως των ΑΔ και ΒΓ δηλ. οι Α΄Δ΄ και Β΄Γ΄ τέμνονται μέσα στο χαρτί σχεδίασης στο Μ΄. Επομένως αναγόμαστε την 1η περίπτωση και κάνουμε τον έλεγχο όπως πριν.

3ο πρόβλημα:

Να εξεταστεί πότε δύο ευθείες α και β του χώρου, που δίνονται με τις προβολές τους α' και β' είναι **παράλληλες.**

Λύση

Αν οι ευθείες α και β του χώρου είναι παράλληλες, τότε προφανώς και οι προβολές τους α' και β' θα είναι επίσης παράλληλες. Επίσης οι α και β θα σχηματίζουν την ίδια γωνία κλίσης φ με το επίπεδο προβολής *e*, επομένως οι βαθμίδες τους θα είναι ίσες, δηλαδή οι α και β θα έχουν ίδια βήματα, άρα $\beta_\alpha = \beta_\beta$. Ακόμα, τα υψόμετρα των α και β θα αυξάνονται (ή θα ελαττώνονται) κατά την ίδια φορά. Αντίστροφα, αν οι προβολές δύο ευθειών α και β πληρούν τις τρεις παραπάνω συνθήκες (δηλαδή οι α' και β' να είναι παράλληλες, οι α και β να έχουν το ίδιο βήμα το οποίο να αυξάνεται κατά την ίδια φορά), τότε οι α, β θα είναι παράλληλες. Έτσι:

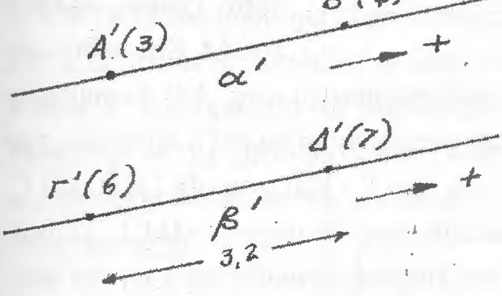
$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' // \beta' \\ \beta_\alpha = \beta_\beta \\ \underrightarrow{\beta_\alpha},\ \underrightarrow{\beta_\beta} \end{cases}$$

Π. χ. οι ευθείες του σχήματος 26 είναι παράλληλες διότι:

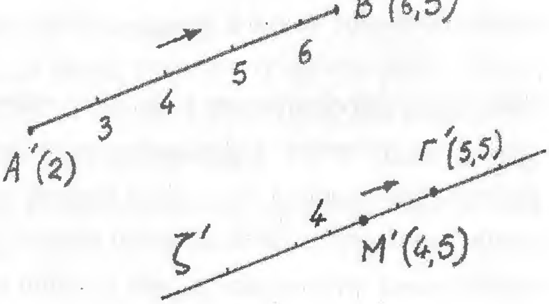
i) οι προβολές τους α', β' είναι παράλληλες,

ii) το βήμα β_α της α είναι 3,2 εκ. και το βήμα β_β της β είναι επίσης 3,2 εκ.,

iii) τα δύο βήματα β_α και β_β αυξάνονται κατά την ίδια φορά.



Σχήμα 26

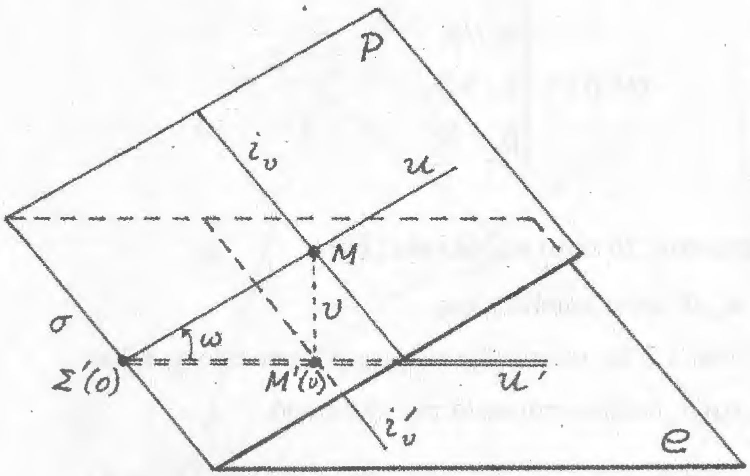


Σχήμα 26a

Έτσι, με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, για να φέρουμε από δεδομένο σημείο π.χ. Μ΄(4,5) παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ με προβολές των σημείων της π.χ. Α΄(2), Β΄(6,5), φέρουμε απ' το Μ΄ παράλληλη προς την Α΄Β΄, την ζ΄, βρίσκουμε το βήμα β_{AB} της ΑΒ και το μεταφέρουμε στην ζ΄ προσδιορίζοντας πάνω σ' αυτή το σημείο Γ΄(5,5) έτσι ώστε αφ' ενός $M'\Gamma' = \beta_{AB}$, αφ' ετέρου τα βήματα β_{AB} της ΑΒ και Μ΄Γ΄ της ζ να αυξάνονται κατά την ίδια φορά. Έτσι ορίζεται η ζ στο χώρο με τις προβολές δύο σημείων της Μ΄(4,5), Γ΄(5,5), παράλληλη προς την ΑΒ (σχήμα 26α).

3.4 Παράσταση επιπέδου

Έστω επίπεδο *p* του χώρου (τα επίπεδα ως γνωστό, συμβολίζονται με μικρό γράμμα του λατινικού αλφάβητου), το οποίο τέμνει το επίπεδο προβολής *e* κατά την ευθεία *σ*, η οποία λέγεται και *ίχνος* του επιπέδου *p* (σχήμα 27).

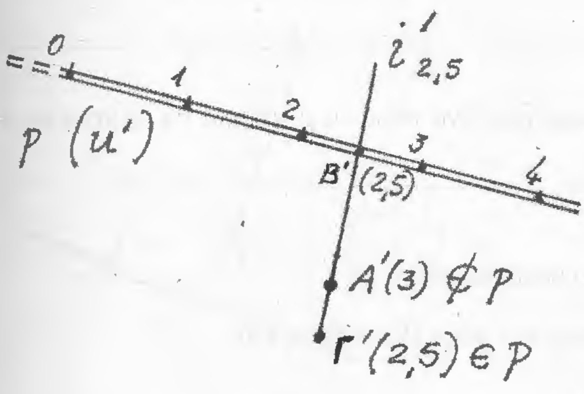


Σχήμα 27

Από το τυχαίο σημείο Μ του *p* περνούν δύο χαρακτηριστικές ευθείες. Η μία είναι η *u* και είναι κάθετη στο ίχνος *σ*, γι' αυτό και λέγεται ***ιχνοκάθετη*** του Μ, και η άλλη είναι η $i_υ$ που είναι παράλληλη προς το ίχνος *σ*, γι' αυτό και λέγεται ***ιχνοπαράλληλη*** του Μ. Και οι δύο ευθείες *u* και $i_υ$ ανήκουν στο *p* και είναι πάντα κάθετες μεταξύ τους. Απ' το συμβολισμό $i_υ$ της ιχνοπαράλληλης φαίνεται ότι το υψόμετρό της είναι υ. Οι προβολές των ευθειών αυτών πάνω στο *e* είναι αντίστοιχα οι *u*΄ και $i'_υ$. Και οι προβολές *u*΄ και $i'_υ$ έχουν την ιδιότητα να είναι πάντα κάθετες μεταξύ τους. Το τρίγωνο ΜΜ΄Σ΄ λέγεται *κλισιμετρικό τρίγωνο* του *p*, ενώ η γωνία ω της τυχαίας ιχνοκάθετης *u* με την προβολή της *u*΄ (οξεία) λέγεται *γωνία κλίσης* του *p*.

Επομένως, η *κλίση* και η *βαθμίδα* ενός επιπέδου *p* είναι αντίστοιχα η κλίση και η βαθμίδα τυχαίας ιχνοκάθετης *u* του *p*. Έτσι, ένα επίπεδο *p* μπορεί να οριστεί πλήρως με την *υψομετρική κλίμακα μιας τυχαίας ιχνοκάθετης αυτού*. Η υψομετρική κλίμακα μιας τυχαίας ιχνοκάθετης του *p* λέγεται υψομετρική κλίμακα του επιπέδου *p* και η *u*΄ θα παριστάνεται από δω και πέρα με *διπλή γραμμή*, για να ξεχωρίζει από άλλες ευθείες. Στο εξής, μπορούμε να παραστήσουμε το επίπεδο *p* με την προβολή μιας τυχαίας ιχνοκάθετης *u*΄ βαθμολογημένη και θα γράφουμε: το επίπεδο *p*(*u*΄).

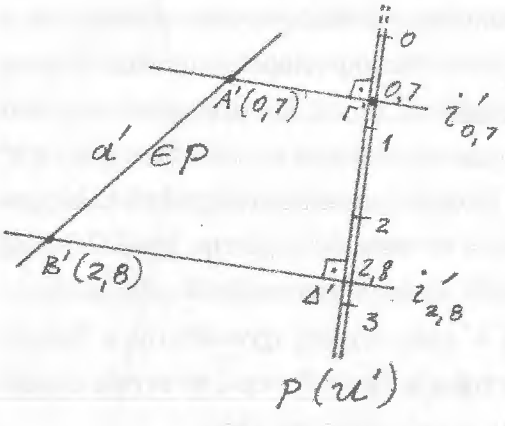
Αν δοθεί ένα επίπεδο *p* με την προβολή *u*΄ μιας τυχαίας ιχνοκάθετης *u* βαθμολογημένης (δηλ. με την υψομετρική κλίμακα της *u*΄), για να βρούμε, αν τυχαίο σημείο του χώρου Α΄(υ) ανήκει ή όχι στο επίπεδο *p*, εργαζόμαστε ως έξής:



Σχήμα 28

Φέρνουμε την κάθετη απ' το Α΄ στην *u*΄ που την τέμνει στο Β΄. Έστω ότι το Α΄ έχει υψόμετρο υ = 3 cm (σχήμα 28). Η ευθεία Α΄Β΄ ως κάθετη στην *u*΄ θα είναι προβολή της ιχνοπαράλληλης του επιπέδου *p* με υψόμετρο, όσο είναι το υψόμετρο του Β΄ δηλ. 2,5 cm επομένως θα είναι η $i'_{2,5}$. Άρα, κάθε σημείο που βρίσκεται σ' αυτή την ευθεία, πρέπει να έχει υψόμετρο 2,5 cm. Επειδή το Α΄ έχει υψόμετρο 3 cm σημαίνει ότι δεν ανήκει στο *p*, αλλά είναι πιο πάνω απ' το *p*. Αντίθετα το Γ΄(2,5) της $i'_{2,5}$ ανήκει στο *p* γιατί ανήκει στην ιχνοπαράλληλη $i'_{2,5}$.

Για να διαπιστώσουμε τώρα αν τυχαία ευθεία *α*΄ ανήκει ή όχι σε δοσμένο επίπεδο *p*(*u*΄), αρκεί να εξετάσουμε, αν δύο σημεία αυτής ανήκουν ή όχι στο *p*(*u*΄). Π.χ. η ευθεία *α*΄ που ορίζεται απ' τα σημεία Α΄(0,7) και Β΄(2,8) (σχήμα 29) ανήκει στο επίπεδο *p* που ορίζεται απ' την *u*΄, γιατί, αν φέρουμε απ' τα Α΄ και Β΄ κάθετες στην *u*΄, αυτές θα περάσουν απ' τα σημεία της βαθμολογημένης *u*΄, υψομέτρων 0,7 και 2,8 αντίστοιχα.



Σχήμα 29

Εννοείται ότι οι ευθείες Α΄Γ΄ και Β΄Δ΄ ως κάθετες στην u' θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. Η Α΄Γ΄ παριστάνει την ιχνοπαράλληλη υψόμετρου 0,7 δηλ. την $i'_{0,7}$ και η Β΄Δ΄ την $i'_{2,8}$. Επομένως, εφόσον τα σημεία Α΄(0,7) και Β΄(2,8) της ΑΒ ανήκουν στις ιχνοπαράλληλες $i'_{0,7}$ και $i'_{2,8}$ αντίστοιχα, δηλαδή στο επίπεδο *p*, άρα και ολόκληρη η ευθεία *α* θα ανήκει στο επίπεδο *p*.

Προσδιορισμός επιπέδου

Όπως είναι γνωστό απ' τη Στερεομετρία, ένα επίπεδο *p* μπορεί να οριστεί με 4 διαφορετικούς τρόπους:

α) από δύο τεμνόμενες ευθείες,

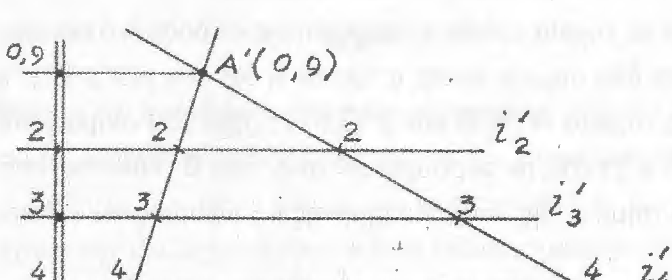
β) από μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής,

γ) από τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και

δ) από δύο παράλληλες ευθείες.

Στις παραπάνω περιπτώσεις είναι εύκολο να προσδιοριστεί το επίπεδο αυτών από την προβολή μιας ιχνοκάθετης βαθμολογημένης με βάση όσα αναφέρθηκαν πριν:

α) Από δύο τεμνόμενες ευθείες

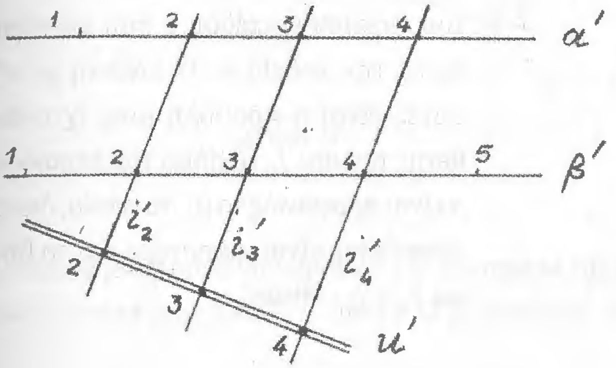


Σχήμα 30

Έστω δύο τεμνόμενες ευθείες *α* και *β* στο χώρο. Βρίσκουμε την υψομετρική κλίμακα των ευθειών αυτών με οποιοδήποτε τρόπο (γραφικά η αριθμητικά). Αν ενώσουμε σημεία ακέραιου υψόμετρου (ή και μη) των δύο ευθειών, ορίζουμε τις ιχνοπαράλληλες αντιστοίχων υψομέτρων. Στο σχήμα 30 φέραμε τις ιχνοπαράλληλες i'_2, i'_3, i'_4. Η κάθετη σ' αυτές σε οποιοδήποτε σημείο ορίζει την προβολή u' μίας τυχαίας ιχνοκάθετης του επιπέδου p που ορίζεται απ' τις τεμνόμενες ευθείες α και β.

β), γ). Οι περιπτώσεις αυτές προσδιορισμού ενός επιπέδου ανάγονται στην προηγούμενη, όπως εύκολα φαίνεται. Πράγματι, για την ***β)*** περίπτωση αρκεί να ενώσουμε το σημείο που μας δίνεται, με τυχαίο άλλο σημείο της ευθείας, ενώ για την ***γ)*** περίπτωση, αρκεί να σχηματίσουμε απ' τα τρία σημεία δύο τεμνόμενες ευθείες.

δ) Από δύο παράλληλες ευθείες



Σχήμα 31

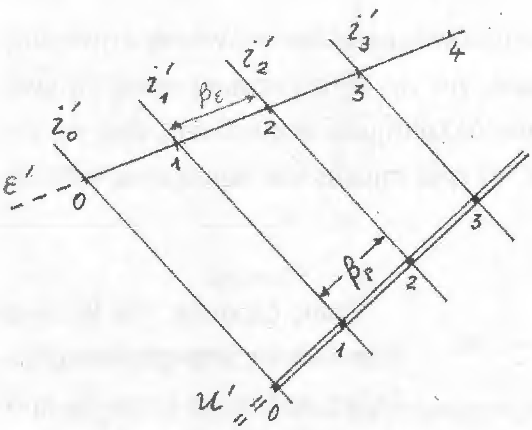
Όπως ξέρουμε, για να είναι δύο ευθείες στο χώρο παράλληλες, πρέπει να έχουν τις προβολές τους παράλληλες, τα βήματά τους ίσα και κατά την ίδια φορά αυξανόμενα. Έστω λοιπόν δύο παράλληλες ευθείες α και β. (σχήμα 31). Προσδιορίσουμε σημεία ακέραιου υψόμετρου, και ορίζουμε δύο ή και περισσότερες ιχνοπαράλληλες του επιπέδου αυτών, τις i'_2, i'_3, i'_4 κ.τ.λ. Αν φέρουμε τυχαία κάθετη σ' αυτές, αυτή θα ορίζει την προβολή u' μιας τυχαίας ιχνοκάθετης του επιπέδου των α και β και μάλιστα βαθμολογημένη με τα σημεία 2, 3, 4. Στην u' καθορίζεται ταυτόχρονα και το βήμα του επιπέδου p.

Μετά από όσα έχουμε αναφέρει ως εδώ, είναι εύκολο να λύσουμε δύο απλά χαρακτηριστικά προβλήματα:

1° Πρόβλημα:

Να κατασκευαστεί τυχαίο επίπεδο p το οποίο να περνάει από δοσμένη ευθεία $ε$.

Λύση



Σχήμα 32

Βρίσκουμε την υψομετρική κλίμακα της ευθείας $ε$. Αν από σημεία ακέραιου υψόμετρου τα 0, 1, 2, 3, κ.τ.λ. φέρουμε παράλληλες μεταξύ τους ευθείες σε τυχαία κατεύθυνση (σχήμα 32), αυτές μπορούν να θεωρηθούν οι ιχνοπαράλληλες i'_0, i'_1, i'_2, i'_3, κ.τ.λ. του τυχαίου επιπέδου p που περιέχει όμως την ευθεία $ε$. Η κάθετη u' σ' αυτές είναι η προβολή μιας ιχνοκάθετης του $p(u')$. Το βήμα του επιπέδου p είναι προφανώς το $β_p$, το οποίο, όπως προκύπτει, είναι μικρότερο απ' το βήμα $β_ε$ της ευθείας $ε$.

2° Πρόβλημα:

Να κατασκευαστεί επίπεδο p που να περνάει από δοσμένη ευθεία $ε$ και να έχει δοσμένη κλίση $λ$, δηλ. εφω = $λ$ (όπου ω είναι η γωνία κλίσης του επιπέδου).

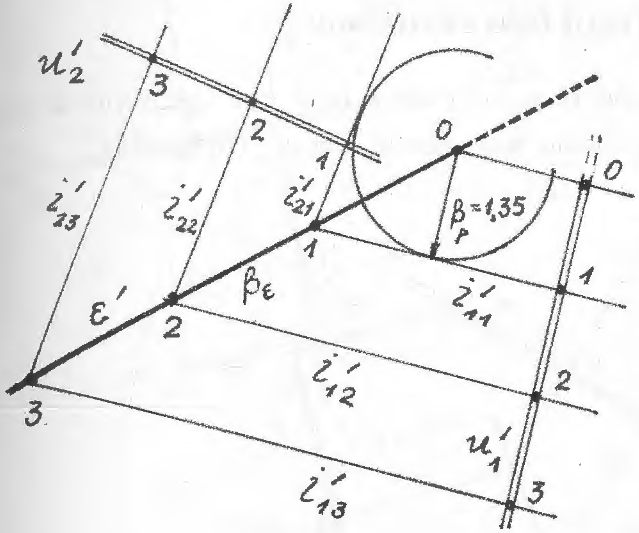
Λύση

Εδώ δίνεται η κλίση $λ$ του p, δηλ. η εφω, οπότε είναι γνωστό το βήμα του p

$$β_p = σφω = \frac{1}{εφω} = \frac{1}{λ}$$

Αν είναι π. χ. $λ = 0{,}74 =$ εφω όπου $ω = 36° 30'$, τότε είναι

$$β_p = \frac{1}{0{,}74} = 1{,}35$$



Σχήμα 33

Επομένως η κατασκευή της ιχνοκάθετης του p γίνεται ως εξής: Με κέντρο ένα σημείο της ε' ακέραιου υψόμετρου π.χ. το σημείο υψόμετρου 0, και ακτίνα $\beta_p = 1{,}35$ γράφουμε περιφέρεια κύκλου (σχήμα 33). Απ' το σημείο της ε' υψόμετρου 1, γράφουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Οι παράλληλες προς την εφαπτομένη αυτή που φέρνουμε απ' τα σημεία της ε' με υψόμετρα 1, 2, 3, κ.τ.λ. είναι οι ιχνοπαράλληλες του ζητούμενου επιπέδου p.

Για να μπορούμε να φέρουμε απ' το σημείο της ε' υψόμετρου 1 εφαπτομένη στον κύκλο πρέπει και αρκεί να είναι $\beta_\varepsilon \geq \beta_p$ (όπου β_ε είναι το βήμα της ε) ή

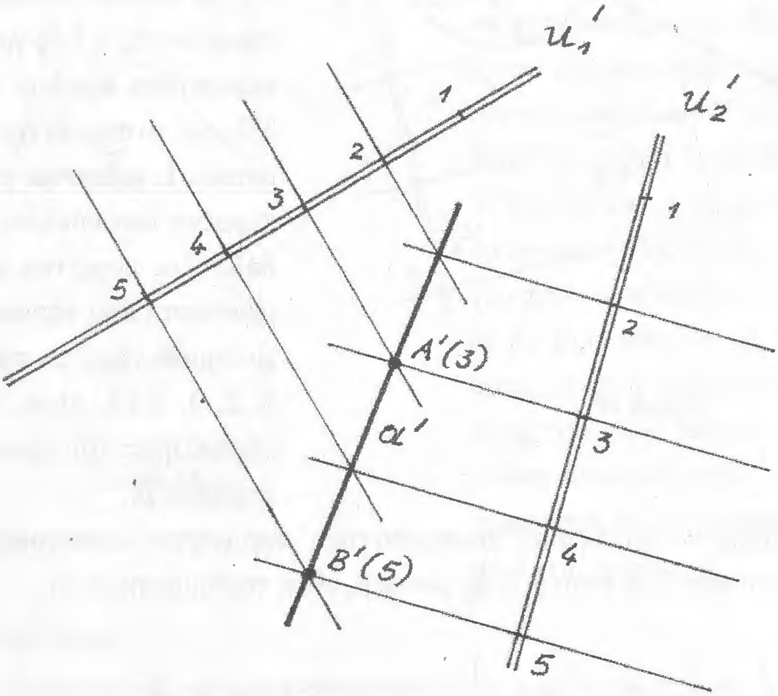
$$\frac{1}{\beta_\varepsilon} \leq \frac{1}{\beta_p} \quad ή \quad \frac{1}{\sigma\varphi\phi} \leq \frac{1}{\sigma\varphi\omega} \quad ή \quad \varepsilon\varphi\phi \leq \varepsilon\varphi\omega \quad ή \quad \lambda_\varepsilon \leq \lambda$$

όπου φ είναι η γωνία κλίσης της ε και λ_ε η κλίση της ε.

Επομένως, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις αν $\lambda > \lambda_\varepsilon$, μία λύση αν $\lambda = \lambda_\varepsilon$ και καμία λύση αν $\lambda < \lambda_\varepsilon$.

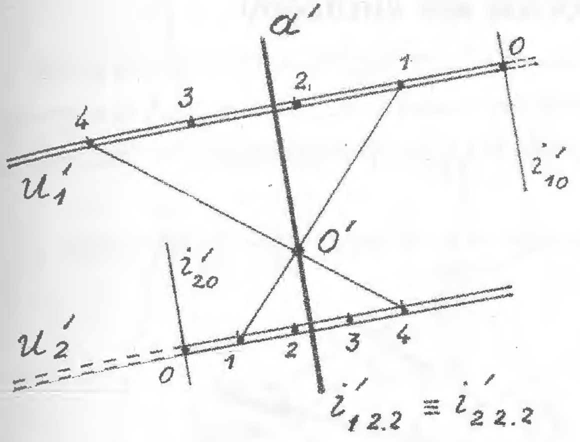
3.5 Τομή δύο επιπέδων

Έστω ότι έχουμε δύο επίπεδα τα $p_1(u'_1)$ και $p_2(u'_2)$ που ορίζονται με τις υψομετρικές κλίμακες δύο ιχνοκαθέτων τους, των u'_1 και u'_2. (σχήμα 34).



Σχήμα 34

Θεωρούμε τώρα δύο ιχνοπαράλληλες του επιπέδου p_1 υψομέτρων π.χ. 3 και 5, τις i'_{13} και i'_{15} και τις αντίστοιχες ιχνοπαράλληλες του p_2 υψομέτρων 3 και 5 τις i'_{23} και i'_{25} (ο πρώτος δείκτης της ιχνοπαραλλήλου δηλώνει το επίπεδο που ανήκει, ενώ ο δεύτερος δείκτης το υψόμετρό της). Η ιχνοπαράλληλη i'_{13} τέμνει την αντίστοιχή της i'_{23} στο σημείο Α΄(3), καθώς και η i'_{15} τέμνει την i'_{25} στο Β΄(5). Τα σημεία Α΄ και Β΄ προφανώς ανήκουν στη τομή $α'$ των δύο επιπέδων.



Σχήμα 35

Αν τώρα οι ιχνοκάθετες u'_1 και u'_2 είναι παράλληλες, τότε η ευθεία α της τομής των επιπέδων p_1, p_2 θα είναι οριζόντια (παράλληλη προς το e) και άρα θα είναι παράλληλη προς τα ίχνη των p_1 και p_2, τα i'_{10} και i'_{20} αντίστοιχα, επομένως η προβολή της η α', θα είναι κάθετη στις u'_1 και u'_2 (σχήμα 35). Όλες οι ευθείες που ενώνουν σημεία ιδίου υψόμετρου των u'_1 και u'_2 περνούν απ' το ίδιο σημείο, το κέντρο ομοιοθεσίας Ο΄. Εδώ το Θ΄ βρέθηκε ως τομή των 11 και 44. Απ' το Ο΄ φέρνουμε την α' κάθετη στις u'_1 και u'_2. (Η α' ταυτίζεται προφανώς με τις ιχνοπαράλληλες $i'_{12,2}$ και $i'_{22,2}$ των p_1 και p_2, με υ = 2,2).

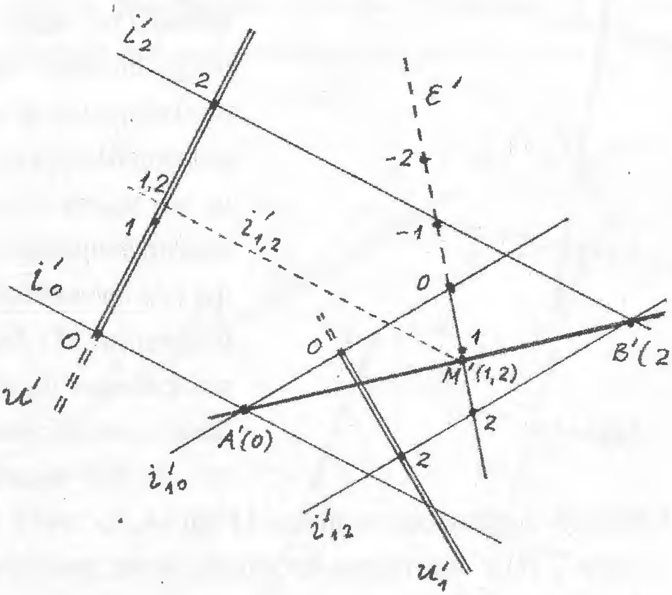
Παραλληλία επιπέδων

Όταν τα επίπεδα $p_1(u'_1)$ και $p_2(u'_2)$ είναι παράλληλα, τότε προφανώς δεν υπάρχει τομή αυτών. Είναι δε τα p_1 και p_2 παράλληλα, όταν οι δύο τυχαίες ιχνοκάθετες αυτών οι u_1, u_2 στο χώρο είναι παράλληλες. Δηλαδή:

$$p_1 // p_2 \Leftrightarrow u_1 // u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_1 // u'_2 \\ \beta_{p_1} = \beta_{p_2} \\ \underrightarrow{\beta_{p_1}}, \ \underrightarrow{\beta_{p_2}} \end{cases}$$

όπου β_{p_1}, β_{p_2} είναι τα βήματα των u'_1, u'_2 αντίστοιχα.

3.6 Τομή ευθείας και επιπέδου



Σχήμα 36

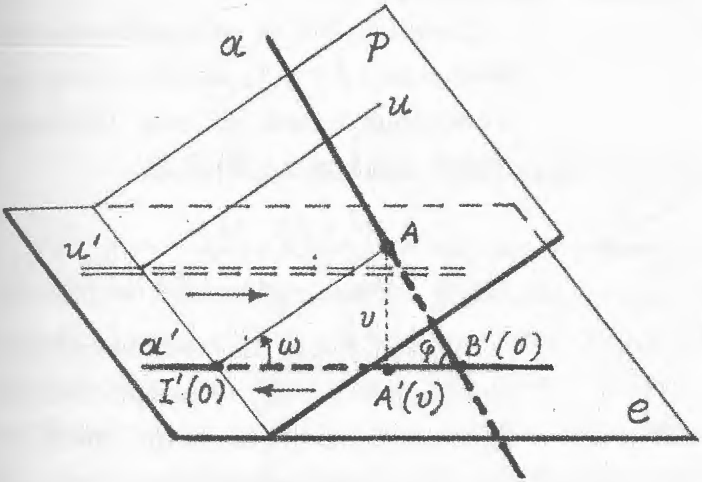
Έστω τώρα το επίπεδο $p(u')$ που ορίζεται με την προβολή μιας ιχνοκάθετης την u' βαθμολογημένη και ευθεία ε, με την υψομετρική της κλίμακα (σχήμα 36). Θα υπολογίσουμε το σημείο τομής της ε με το επίπεδο p (που είναι τελικά το Μ΄).

Το σημείο αυτό, επειδή θα ανήκει και στην ε και στο p θα έχει το ίδιο υψόμετρο και ως προς την ε και ως προς το p. Προς τούτο, κατασκευάζουμε ένα βοηθητικό επίπεδο $p_1(u'_1)$ που να περνάει απ' την ε, όπως στο 1° πρόβλημα της παρ. 3.4 σελ. 42. Το επίπεδο αυτό τέμνει το αρχικό $p(u')$ κατά την ευθεία Α΄Β΄. Η τομή των ευθειών ε' και Α΄Β΄ δίνει το σημείο Μ΄ που είναι η προβολή του ζητούμενου σημείου Μ με υψόμετρο 1,2 που βρίσκουμε απ' την υψομετρική κλίμακα της ε'. Το Μ ανήκει και στο p γιατί έχει το ίδιο υψόμετρο και ως προς το p, αφού η κάθετη απ' το Μ΄ στην u' είναι η προβολή της ιχνοπαράλληλης υψόμετρου 1,2 δηλαδή η $i'_{1,2}$.

3.7 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Έστω ότι έχουμε ένα επίπεδο $p(u')$ και μια ευθεία α κάθετη στο p που το τέμνει στο σημείο Α (σχήμα 37). Αν ω είναι η γωνία κλίσης του p και φ η γωνία κλίσης της α, τότε, απ' το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΙ΄Β΄ έχουμε ω + φ = 90° ή ω = 90° - φ, οπότε

$$\varepsilon\phi\omega = \varepsilon\phi(90° - \phi) = \sigma\phi\phi \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\phi\omega} = \sigma\phi\phi \Leftrightarrow \sigma\phi\omega \cdot \sigma\phi\phi = 1 \text{ ή } \beta_p \cdot \beta_\alpha = 1$$



Σχήμα 37

όπου β_p, β_α είναι τα βήματα των p και α αντίστοιχα. Ακόμα, η προβολή της κάθετης α, η α' είναι παράλληλη προς την προβολή u' τυχαίας ιχνοκάθετης του p. Τέλος, μια τρίτη ιδιότητα που έχει η κάθετη α στο p είναι ότι το βήμα της β_α αυξάνεται (ή ελαττώνεται) πάντα *αντίθετα* απ' ότι το βήμα β_p τυχαίας ιχνοκάθετης u του επιπέδου p.

Ανακεφαλαιώνοντας συμπεραίνουμε ότι για να είναι μια ευθεία α κάθετη σ' ένα επίπεδο p, πρέπει και αρκεί:

1) η προβολή της ευθείας α η α' να είναι παράλληλη με την u',

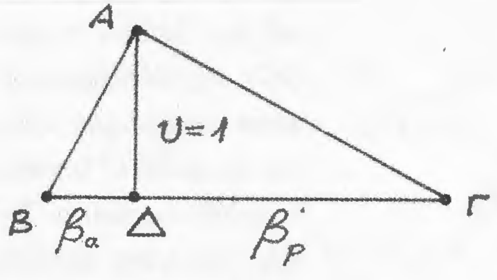
2) τα βήματα της α και του p να συνδέονται με τη σχέση $\beta_\alpha \cdot \beta_p = 1$,

3) τα βήματα αυτά να αυξάνονται (ή ελαττώνονται) κατά αντίθετη φορά.

Ώστε συνοπτικά, καταλήγουμε ότι:

$$\alpha \perp p \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha' // u' \\ \beta_\alpha \cdot \beta_p = 1 \\ \underrightarrow{\beta_\alpha},\ \underleftarrow{\beta_p} \end{cases}$$

Γραφικά το βήμα της κάθετης α στο p κατασκευάζεται πολύ εύκολα με τη βοήθεια μιας μετρικής σχέσης που ισχύει στα ορθογώνια τρίγωνα.



Σχήμα 38

Συγκεκριμένα, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$), αποδεικνύεται ότι, αν φέρουμε το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα ΒΓ, τότε ισχύει (σχήμα 38):

$$\upsilon^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΔΓ}.$$

Αν $\upsilon = 1$ τότε $1^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΔΓ}$ ή $\text{ΒΔ} \cdot \text{ΔΓ} = 1$.

Αν επομένως το ΔΓ παριστάνει το βήμα ενός επιπέδου, το β_p, υψώνουμε στο Δ κάθετη ΔΑ μήκους ίσου με μια μονάδα (1 cm), κατόπιν ενώνουμε το Α με το Γ και απ' το Α φέρουμε κάθετη στην ΑΓ. Βρίσκουμε το Β στη προέκταση της ΓΔ, οπότε το ΒΔ αποτελεί το βήμα της κάθετης α, το β_α.

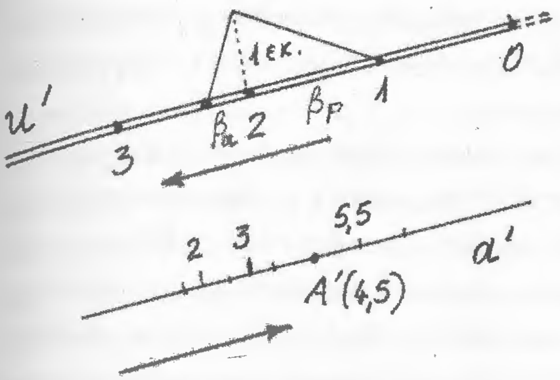
Έτσι, μετά την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε να λύσουμε το παρακάτω

Πρόβλημα:

Από τυχαίο σημείο Α του χώρου να αχθεί κάθετη σε επίπεδο p.

Λύση

Κατασκευάζουμε μια τυχαία u' προβολή ιχνοκάθετης του p με την υψομετρική της κλίμακα (σχήμα 39). Απ' το Α΄ φέρνουμε παράλληλη προς την u' που θα αποτελεί την προβολή της κάθετης a, την α'. Σε τυχαίο σημείο ακέραιου υψόμετρου της u' π.χ. το 2, υψώνουμε κάθετη μήκους 1cm και σχηματίζουμε με το γνωστό τριγωνάκι



Σχήμα 39

το βήμα της κάθετης στο *p* το $β_α$. Το σημείο Α έχει υψόμετρο 4,5. Επειδή το βήμα της *u´* αυξάνεται προς τα αριστερά, αντίθετα θα αυξάνεται το βήμα $β_α$ της κάθετης *α* στο *p*. Άρα, δεξιά του Α και σε απόσταση ίση με $β_α$ θα έλθει η θέση του σημείου με υψόμετρο αυξημένο κατά μονάδα (5,5). Στη συνέχεια, η βαθμολόγηση της *α´* είναι απλή.

3.8 Κατάκλιση επιπέδου σχήματος στο *e*

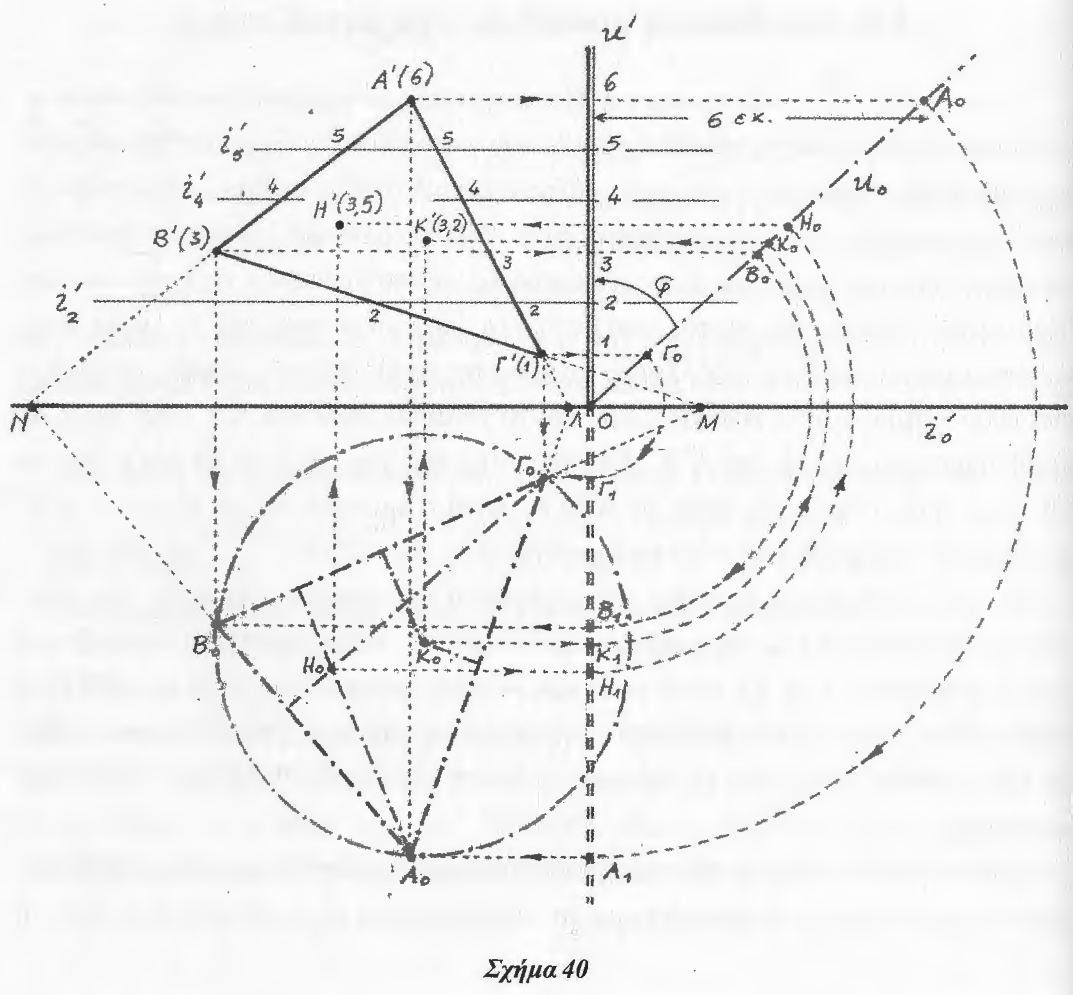
Υπάρχουν πολλά προβλήματα της Παραστατικής ενός επιπέδου τα οποία αναφέρονται σε επίπεδα σχήματα του χώρου, που για να λυθούν όμως, δεν αρκεί μόνο η προβολή των σχημάτων αυτών στο οριζόντιο επίπεδο *e*. Π.χ. αν έχουμε την προβολή ενός τριγώνου στο οριζόντιο επίπεδο *e*, είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις προβολές των διαμέσων του τριγώνου, όπως είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις προβολές των διχοτόμων επίσης. Κι' αυτό, γιατί εύκολα διαπιστώνεται ότι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στο μέσο της προβολής του. Δηλαδή, αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο χώρο και Μ είναι το μέσο του ΑΒ, τότε το Μ θα προβληθεί στο μέσο Μ´ της Α´Β´. Επίσης, αν έχουμε μια γωνία ΑΟΒ στο χώρο και ΟΓ είναι η διχοτόμος της, τότε, αν Α´Ο´Β´ είναι η προβολή της ΑΟΒ στο *e*, η διχοτόμος ΟΓ θα προβληθεί κατά τη διχοτόμο Ο´Γ´ της Α´Ο´Β´.

Αν όμως έχουμε την προβολή ενός τριγώνου στο οριζόντιο επίπεδο, δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις προβολές των υψών του, καθώς επίσης και τις προβολές των μεσοκαθέτων του. Κι' αυτό γιατί και στις δύο περιπτώσεις, ενώ το ύψος (ή η μεσοκάθετη) είναι κάθετο (κάθετη) στην αντίστοιχη πλευρά, δεν συμβαίνει το ίδιο με την προβολή του ύψους (ή της μεσοκάθετης) και την προβολή της αντίστοιχης πλευράς.

Είναι ανάγκη λοιπόν να έχουμε το πραγματικό μέγεθος του τριγώνου ΑΒΓ στο χαρτί σχεδίασης, για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις προβολές των υψών ή των μεσοκαθέτων. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάκλιση του επιπέδου του τριγώνου στο οριζόντιο επίπεδο *e*, περιστρέφοντάς το γύρω από το ίχνος του i'_0 (δηλαδή την ευθεία κατά την οποία τέμνεται με το *e*).

Με την κατάκλιση του επιπέδου του τριγώνου *p* αποτυπώνονται οι πραγματικές διαστάσεις πάνω στο χαρτί σχεδίασης, δηλαδή το επίπεδο *e* του τριγώνου που ήταν στο χώρο. Στην κατάκλιση μπορούμε να υπολογίσουμε ό,τι στοιχεία θέλουμε, π.χ. σημείο τομής των υψών (ορθόκεντρο) ή σημείο τομής μεσοκαθέτων (περίκεντρο), οπότε με μια ανάκλιση του *p* επαναφέρουμε πάλι το επίπεδο *p* στην αρχική του θέση και βρίσκουμε τις προβολές του ορθόκεντρου και περίκεντρου με τα υψόμετρά τους.

Η όλη διαδικασία γίνεται ως εξής:



Σχήμα 40

Έστω $A'(6)$, $B'(3)$, $\Gamma'(1)$ οι κορυφές της προβολής του επιπέδου *p* ενός τριγώνου ΑΒΓ στο χώρο. Παίρνοντας δύο απ' τις πλευρές του π.χ. τις Α΄Β΄ και Α΄Γ΄ βρίσκουμε τις υψομετρικές τους κλίμακες και φέρνουμε δύο (ή περισσότερες) ιχνοπαράλληλες τις i'_5, i'_4 κ.τ.λ. και προσδιορίζουμε την προβολή τυχαίας ιχνοκάθετης u' του *p*, που είναι κάθετη σ' αυτές, με την υψομετρική της κλίμακα (σχήμα 40). Μεταφέρουμε όλες τις κορυφές Α΄, Β΄, Γ΄ πάνω στη u' μέσω των ιχνοπαραλλήλων του *p* που περνούν απ' τα Α΄, Β΄, Γ΄, και στη συνέχεια κάνουμε κατάκλιση της u' που είναι η u_o, ενώ φ είναι η γωνία κλίσης του *p*. Τώρα οι κορυφές Α΄, Β΄, Γ΄ κατακλίθηκαν στα σημεία A_o, B_o, Γ_o αντίστοιχα της u_o.

Τα σημεία αυτά μεταφέρουμε πάνω στην προβολή u' διαγράφοντας κατά τη μεγαλύτερη γωνία 180° - φ τόξα με κέντρο το Ο της u' (σημείο μηδενικού υψόμετρου) και ακτίνες OA_o, OB_o, $O\Gamma_o$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 οι νέες τους θέσεις αντίστοιχα.

Οι τελικές θέσεις των κορυφών Α, Β, Γ του χώρου πάνω στο οριζόντιο επίπεδο *e*, μετά την περιστροφή του επιπέδου *p* γύρω από το ίχνος του i'_o κατά το τόξο A_oA_1 βρίσκονται, αν από τα A_1, B_1, Γ_1 φέρουμε κάθετες στην u', ενώ από τα Α΄, Β΄, Γ΄ παράλληλες στην u' όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα A_o, B_o, Γ_o θα είναι οι τελικές θέσεις των κορυφών μετά την κατάκλιση και προκύπτουν ως τομές των ομώνυμων αυτών ευθειών που είναι κάθετες μεταξύ των. (Η κατάκλιση έχει γίνει κατά τη μεγαλύτερη γωνία περιστροφής 180° - φ, για λόγους καθαρότητας σχεδίου του πραγματικού μεγέθους του τριγώνου ΑΒΓ. Αν η κατάκλιση γίνει κατά τη γωνία φ, προφανώς θα είναι η ίδια, αλλά θα συμπέσουν στον ίδιο χώρο προβολή και κατάκλιση μαζί). Έτσι έχουμε πάνω στο χαρτί σχεδίασης το πραγματικό μέγεθος $A_oB_o\Gamma_o$ του τριγώνου ΑΒΓ του χώρου. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ομόλογες πλευρές Α΄Γ΄ και $A_o\Gamma_o$ τέμνονται στο Λ που βρίσκεται πάνω στο ίχνος i'_o του *p*, όπως και οι Β΄Γ΄, $B_o\Gamma_o$ τέμνονται στο Μ και Α΄Β΄, A_oB_o τέμνονται στο Ν που βρίσκονται επίσης πάνω στο ίχνος i'_o (θεώρημα του *Desargues* σελ. 10).

Στο $A_oB_o\Gamma_o$ βρίσκουμε τώρα το ορθόκεντρο H_o ή το περίκεντρο K_o. Κάνοντας τώρα ανάκλιση των σημείων αυτών (αντίστροφη ακριβώς πορεία της αρχικής διαδικασίας), βρίσκουμε τις προβολές των σημείων αυτών με τα υψόμετρά τους. Δηλαδή για το H_o φέρνουμε απ' αυτό κάθετη στην u' που την τέμνει στο H_1 και με κέντρο το Ο και ακτίνα την OH_1 μεταφέρουμε το H_1 πάνω στην u_o στη θέση H_o. Από κει φέρνουμε κάθετη στην u', και απ' την αρχική θέση του H_o παράλληλη στην u'. Οι δύο αυτές ευθείες θα τμηθούν στο Η΄ (προβολή του Η) με υψόμετρο 3,5 που διαβάζουμε απ' την υψομετρική κλίμακα της u'. Ανάλογα βρίσκεται και η προβολή του περίκεντρου K, η K'(3,2).

Αν το επίπεδο σχήμα αποτελείται από περισσότερες κορυφές (τετράπλευρο, πεντάπλευρο, κ.τ.λ.) η εργασία δεν αλλάζει αφού πάλι μπορεί να οριστεί η προβολή μιας τυχαίας ιχνοκάθετης του επιπέδου αυτού σχήματος.

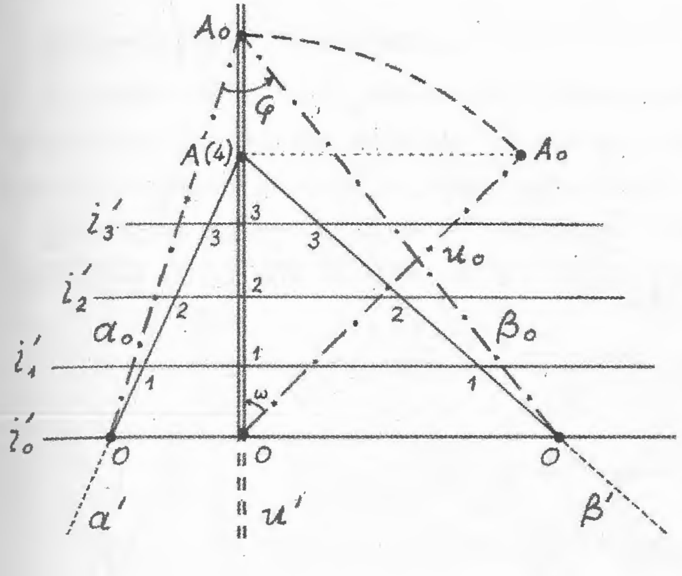
Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε την προβολή του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ΑΒΓ κύκλου που θα είναι έλλειψη, με μεγάλο άξονα κάθετο στην u' και μικρό άξονα παράλληλο στην u'. Αυτοί οι άξονες προσδιορίζονται ως εξής: Κατασκευάζουμε στη κατάκλιση του $A_0B_0\Gamma_0$ τον περιγεγραμμένο κύκλο με κέντρο το K_0 και ακτίνα την K_0A_0 και φέρνουμε δύο διαμέτρους κάθετες μεταξύ τους, έτσι ώστε η μία να είναι παράλληλη στην u' και η άλλη κάθετη σ' αυτή. Η ανάκλιση της παράλληλης προς την u' διαμέτρου θα δώσει τον μικρό άξονα της έλλειψης, ενώ η ανάκλιση της κάθετης προς την u' διαμέτρου θα δώσει τον μεγάλο άξονα αυτής που θα έχει μήκος όσο και η διάμετρος του κύκλου. Η ανάκλιση δύο καθέτων μεταξύ των διαμέτρων σε τυχαία θέση, δίνει τις αντίστοιχες *συζυγείς διαμέτρους* της έλλειψης.

3.9 Γωνία δύο ευθειών, γωνία ευθείας και επιπέδου, γωνία δύο επιπέδων

α) Γωνία δύο τεμνόμενων ευθειών

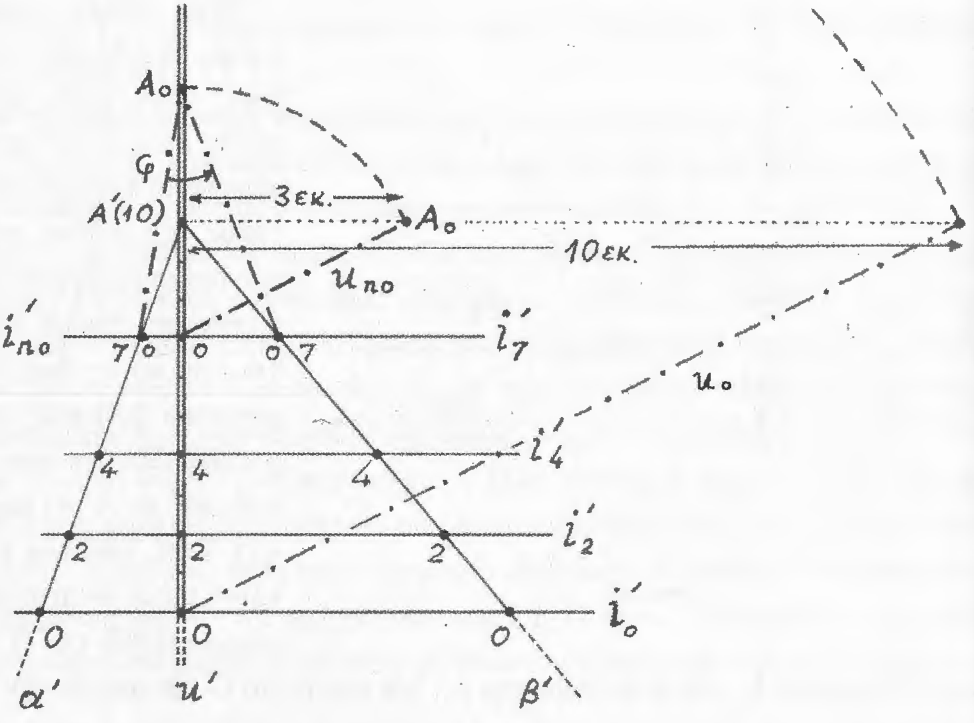
Μια άλλη εφαρμογή που βρίσκει η κατάκλιση ενός επιπέδου σχήματος, είναι η εύρεση του πραγματικού μεγέθους της γωνίας δύο τεμνόμενων ευθειών α και β του χώρου. Προφανώς η γωνία αυτή είναι πάντα μικρότερη ή ίση από την γωνία των προβολών τους. Ίση γίνεται όταν το επίπεδο των ευθειών είναι παράλληλο προς το επίπεδο προβολής e.

Έστω δύο τεμνόμενες ευθείες α κα β του χώρου που δίνονται με τις προβολές τους α' και β' βαθμολογημένες (δηλαδή με τις υψομετρικές τους κλίμακες). Θα υπολογίσουμε το πραγματικό μέγεθος της γωνίας των ευθειών α και β του χώρου.



Σχήμα 41

Προς τούτο, κατακλίνουμε το επίπεδό τους p γύρω από το ίχνος του i'_0, οπότε παίρνουμε αποτυπωμένο το πραγματικό μέγεθος της γωνίας αυτών στο οριζόντιο επίπεδο e. Η κατάκλιση γίνεται (όπως και στην προηγούμενη παράγραφο 3.8) φέρνοντας μια ιχνοκάθετη u' που περνάει απ' το Α΄(4) (σχήμα 41). Έτσι, κάνουμε κατάκλιση της u' παίρνοντας τα σημεία Α΄(4) και Ο (μηδενικού υψόμετρου) και βρίσκουμε την u_0. Με κέντρο το Ο και ακτίνα την OA_0 μεταφέρουμε το A_0 πάνω στην u'. Αν ενώσουμε την τελική θέση του A_0 πάνω στην u' με το 0 (σημείο μηδενικού υψόμετρου) της α' και το 0 της β' (δηλαδή τα ίχνη των α και β στο οριζόντιο επίπεδο e), βρίσκουμε τις α_0 και β_0 αντίστοιχα, που αποτελούν τις τελικές κατακλίσεις των α και β του χώρου και ταυτόχρονα ορίζουν το πραγματικό μέγεθος της γωνίας φ των α και β στο χώρο. (Προφανώς τα μήκη α_0 και β_0 θα είναι ίσα με τις χωριστές κατακλίσεις που θα κάναμε αν εφαρμόζαμε τη μέθοδο *κατάκλισης ευθύγραμμου τμήματος* στην παράγραφο 3.2, σελ. 29. Όμως, ***δεν*** θα είχαμε ταυτόχρονα και την πραγματική γωνία τους στο χώρο).



Σχήμα 42

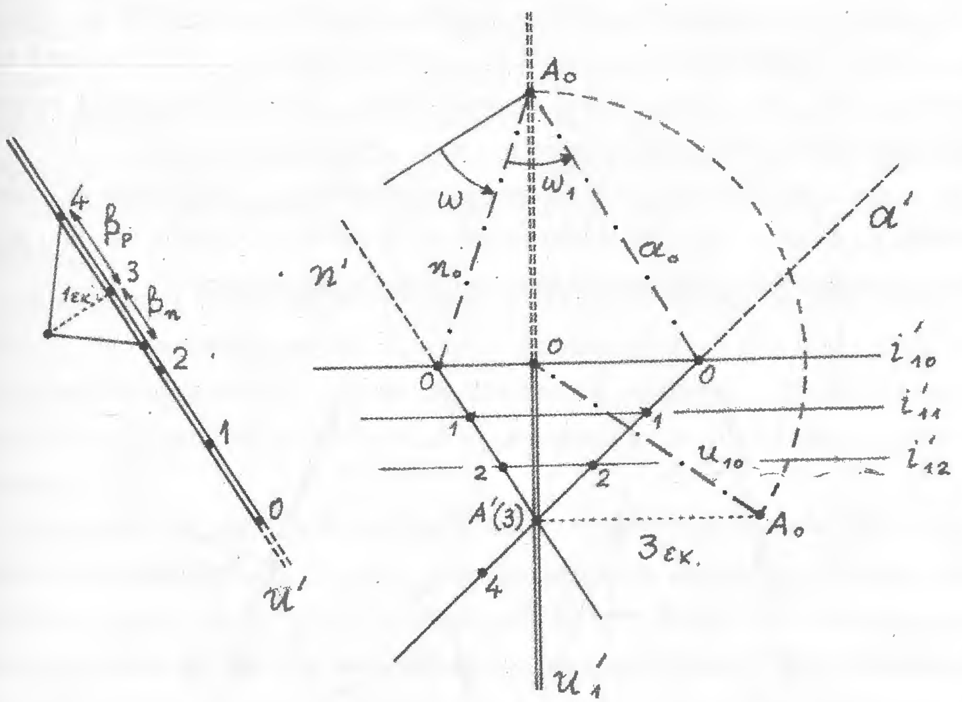
Αν όμως η τελική θέση της κατάκλισης του Α πάνω στην u' βγαίνει έξω απ' το χαρτί σχεδίασης (αυτό συμβαίνει όταν το υψόμετρο του Α είναι αρκετά μεγάλο, π.χ. 10), τότε θεωρούμε ένα επίπεδο παράλληλο προς το *e* υψόμετρου π.χ. 7 ως νέο οριζόντιο επίπεδο, πάνω στο οποίο θα κάνουμε την κατάκλιση των α και β. Το επίπεδο αυτό τέμνει τις α και β κατά την ιχνοπαράλληλη i'_7 η οποία θεωρείται το ίχνος $i'_{\pi o}$ ως προς το νέο παράλληλο επίπεδο, δηλαδή το υψόμετρό του θα είναι 0 ως προς το νέο οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 42).

Έτσι, το υψόμετρο του Α ως προς το νέο επίπεδο θα είναι 10 – 7 = 3 εκ. Η διαδικασία κατάκλισης γίνεται όπως και πριν. Ως αποτέλεσμα έχουμε την γωνία φ των α και β, όμως με την τελική κατάκλιση του A_o πάνω στην u' όχι μακριά απ' το Α΄(10) (δηλαδή μέσα στο χαρτί σχεδίασης).

β) Γωνία ευθείας και επιπέδου

Ως γωνία ευθείας *α* και επιπέδου *p* ορίζεται η μικρότερη γωνία που σχηματίζει η ευθεία *α* με την προβολή της πάνω στο επίπεδο *p*. Για να υπολογίσουμε τώρα τη γωνία που σχηματίζεται από μια ευθεία *α* και ένα επίπεδο *p* εργαζόμαστε ως εξής:

Από τυχαίο σημείο της *α* έστω το Α υψόμετρου 3, το Α΄(3), φέρνουμε μια κάθετη την *η* στο *p* (σχήμα 43). Ο τρόπος κατασκευής της είναι γνωστός.



Σχήμα 43

Έτσι προσδιορίζουμε όπως προηγουμένως την γωνία ω_1 των *α* και *η*. Η γωνία της ευθείας *α* και του επιπέδου *p* είναι προφανώς η συμπληρωματική της γωνίας ω_1 δηλαδή η $\omega = 90° - \omega_1$, που βρίσκεται αν φέρουμε κάθετη σε μια απ' τις δύο ευθείες στη κορυφή τους A_o έτσι ώστε $\omega + \omega_1 = 90°$.

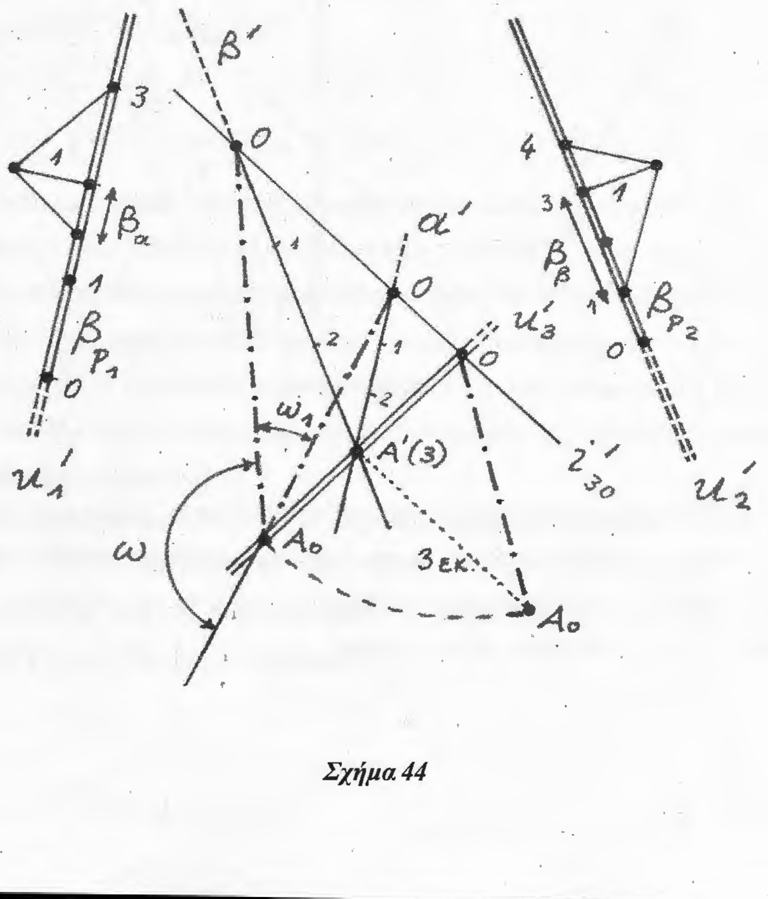
Παρατήρηση:

Επειδή η γωνία ευθείας και επιπέδου όπως ορίζεται είναι πάντα οξεία, αυτό σημαίνει ότι αν το πραγματικό μέγεθος της γωνίας ω_1 των α και η είναι αμβλεία, τότε θα πάρουμε την παραπληρωματική της, δηλαδή την $180° - \omega_1$ που θα είναι οξεία, ως γωνία των α και η οπότε η συμπληρωματική αυτής (της $180° - \omega_1$) θα είναι πάλι οξεία.

γ) Γωνία δύο τεμνόμενων επιπέδων

Ως γωνία δύο τεμνόμενων επιπέδων p_1 και p_2 ορίζεται η αντίστοιχη επίπεδη γωνία (οξεία ή αμβλεία), που προκύπτει αν τα επίπεδα p_1 και p_2 τμηθούν από τρίτο επίπεδο κάθετο στην τομή των δύο πρώτων. Έτσι, για να υπολογίσουμε τη γωνία που σχηματίζεται από τα δύο επίπεδα p_1 και p_2 εργαζόμαστε ως εξής:

Από τυχαίο σημείο του χώρου Α που έχει υψόμετρο π.χ. 3, φέρνουμε τις κάθετες στα επίπεδα p_1 και p_2 τις α και β αντίστοιχα και βρίσκουμε τη γωνία των δύο αυτών καθέτων (σχήμα 44), εργαζόμενοι όπως στην πρώτη περίπτωση (α).



Σχήμα 44

Αν ω_1 είναι η γωνία αυτών (οξεία ή αμβλεία), τότε η παραπληρωματική της ω_1, δηλαδή η $\omega = 180° - \omega_1$ (αμβλεία ή οξεία), θα είναι η γωνία των p_1 και p_2.

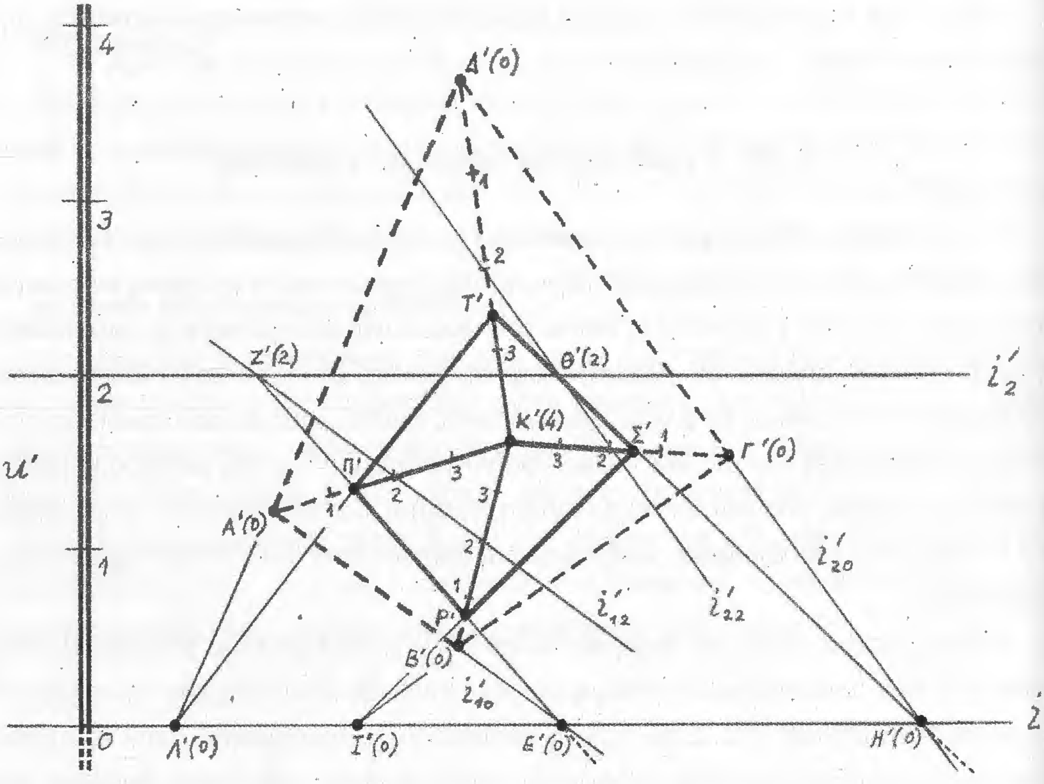
3.10 Τομή πολυέδρου με επίπεδο

Ένα πολύεδρο (Π) μπορεί να παρασταθεί με την ορθή προβολή του (Π΄) πάνω στο επίπεδο *e*, που αποτελείται απ' τις προβολές των κορυφών του με τα υψόμετρά τους, καθώς και απ' τις προβολές των ακμών του. Κατά τη σχεδίαση των προβολών των ακμών του πολυέδρου γίνεται διάκριση μεταξύ ορατών και καλυπτόμενων γραμμών του (Π), όπως το βλέπει παρατηρητής κοιτάζοντάς το από πάνω προς τα κάτω. Οι προβολές των ακμών που δεν φαίνονται συμβολίζονται με διακεκομμένη ευθεία, ενώ αυτές που φαίνονται με συνεχή γραμμή. Ως πολύεδρο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μια πυραμίδα, ένα πρίσμα, ή οποιοδήποτε άλλο στερεό με επίπεδες επιφάνειες.

Για να βρούμε τώρα την τομή πολυέδρου (Π) με ένα επίπεδο *p* (εφόσον αυτή υπάρχει), είτε υπολογίζουμε την τομή του *p* με κάθε έδρα του (Π), είτε την τομή του *p* με κάθε ακμή του (Π). Στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε στην τομή δύο επιπέδων, ενώ στην δεύτερη περίπτωση αναφερόμαστε στην τομή επιπέδου και ευθείας.

Ας θεωρήσουμε π.χ. μια πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ τετραπλευρική, που εδράζεται στο οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 45). Αυτό σημαίνει ότι κάθε κορυφή της βάσης της έχει υψόμετρο 0, ενώ η κορυφή Κ έχει υψόμετρο 4. Το επίπεδο *p* δίδεται με την προβολή *u΄* μιας ιχνοκάθετης και την υψομετρική της κλίμακα. Το επίπεδο *p* θα τμήσει (αν τμήσει) την πυραμίδα κατά ένα επίπεδο πολύγωνο που μπορεί να τέμνει μόνο τις παράπλευρες έδρες της Κ.ΑΒΓΔ ή και ένα μέρος της βάσης ΑΒΓΔ.

Τις κορυφές του πολύγωνου της τομής τις βρίσκουμε είτε ως τομές των παράπλευρων εδρών της πυραμίδας με το *p*, είτε ως τομές των ακμών ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ με το *p*. Υπάρχει και τρίτος τρόπος που θα αναφέρουμε στο τέλος της παραγράφου. Στο σχήμα 45 εφαρμόζεται ο πρώτος τρόπος.



Σχήμα 45

Με τη μέθοδο αυτή αρκεί να βρούμε τις τομές δύο μόνο απέναντι εδρών με το p. Θεωρούμε τις ιχνοπαράλληλες υψομέτρων 0 και 2 της έδρας ΚΑΒ, τις i'_{10} και i'_{12} που τέμνουν τις αντίστοιχες ιχνοπαράλληλες υψομέτρων 0 και 2 του $p(u')$ τις i'_0, i'_2 στα σημεία Ε΄(0) και Ζ΄(2) αντίστοιχα. Η ευθεία Ε΄Ζ΄ είναι η προβολή της τομής των ΚΑΒ και $p(u')$ και τέμνει τις ακμές Κ΄Α΄ και Κ΄Β΄ στα σημεία Π΄(1,4) και Ρ΄(0,6). Αν πάρουμε τώρα τις ίδιες ιχνοπαράλληλες υψόμετρου 0 και 2 της απέναντι έδρας ΚΓΔ, τις i'_{20} και i'_{22} αυτές θα τμήσουν τις i'_0 και i'_2 στα Η΄(0) και Θ΄(2). Η ευθεία Η΄Θ΄ είναι η προβολή της τομής των ΚΓΔ και $p(u')$ και τέμνει τις ακμές Κ΄Γ΄ και Κ΄Δ΄ στα σημεία Σ΄(1,6) και Τ΄(2,5). Έτσι, τα Π΄, Ρ΄, Σ΄, Τ΄, αποτελούν τις τομές του $p(u')$ με τις ακμές Κ΄Α΄, Κ΄Β΄, Κ΄Γ΄, Κ΄Δ΄ της πυραμίδας. Ό,τι μέρος της πυραμίδας βρίσκεται πάνω από το p δηλαδή το Κ.ΠΡΣΤ θα φαίνεται, ενώ το υπόλοιπο μέρος αυτής κάτω απ' το p, δηλαδή το υπόλοιπο των ακμών ΠΑ, ΡΒ, ΣΓ, ΤΔ, καθώς και ολόκληρη η βάση ΑΒΓΔ δεν θα φαίνονται, γι' αυτό και οι προβολές τους συμβολίζονται με διακεκομμένη γραμμή.

Για να βρούμε την τομή της πυραμίδας με το $p(u')$ ως τομή του p με κάθε ακμή της πυραμίδας (2^{ος} τρόπος), φέρνουμε από κάθε ακμή π.χ. την ΚΑ βοηθητικό επίπεδο και βρίσκουμε την τομή της με το p. Όμως ως βοηθητικό επίπεδο μπορούμε να θεωρήσουμε ήδη την έδρα ΚΑΒ, επομένως το πρόβλημα βασικά ανάγεται στην προηγούμενη λύση που δώσαμε.

Τέλος, με τον 3^{ο} τρόπο, υπολογίζουμε όπως και στην αρχή, την τομή της έδρας Κ΄Α΄Β΄ με το $p(u')$ που είναι η Ε΄Ζ΄. Αυτή τέμνει τις ακμές Κ΄Α΄ και Κ΄Β΄ στα σημεία Π΄ και Ρ΄ αντίστοιχα. Οι προβολές τώρα των υπολοίπων κορυφών μπορούν να κατασκευαστούν ως εξής: Προεκτείνουμε τις πλευρές της βάσης Γ΄Β΄ και Δ΄Α΄ μέχρι να τμήσουν το ίχνος i'_0 της u' στα σημεία Ι΄(0) και Λ΄(0) αντίστοιχα. Φέρνουμε τις Ι΄Ρ΄ και Λ΄Π΄ μέχρι να τμήσουν τις Κ΄Γ΄ και Κ΄Δ΄ στα σημεία Σ΄(1,6) και Τ΄(2,5) αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε ολόκληρη την τομή Π΄Ρ΄Σ΄Τ΄ της πυραμίδας.

Η μέθοδος αυτή του 3^{ου} τρόπου στηρίζεται στο παράδειγμα 2 των προβολικών ιδιοτήτων της παρ. 1.4 σελ. 10 (θεώρημα του *Desargues*). Το θεώρημα αυτό ισχύει όχι μόνο για δύο τρίγωνα, αλλά γενικά για δύο ν – κόρυφα ΑΒΓΔ... και Α΄Β΄Γ΄Δ΄... τέτοια ώστε οι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄, ... να διέρχονται απ' το ίδιο σημείο Ο. Τότε οι πλευρές ΑΒ και Α΄Β΄, ΒΓ και Β΄Γ΄, ΓΔ και Γ΄Δ΄, ... (ομόλογες πλευρές), τέμνονται σε σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία ε. Το σημείο Ο λέγεται *κέντρο ομολογίας* και η ευθεία *ε άξονας ομολογίας*. Στο σχήμα 45 έχουμε τα τετρακόρυφα Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και Π΄Ρ΄Σ΄Τ΄ που ξέρουμε ότι τέμνονται στο ίδιο σημείο Κ΄ (κέντρο ομολογίας, όπως το Ο). Άρα οι ομόλογες πλευρές τους Α΄Β΄ και Π΄Ρ΄, Β΄Γ΄ και Ρ΄Σ΄, Γ΄Δ΄ και Σ΄Τ΄, Δ΄Α΄ και Τ΄Π΄ θα τέμνονται στην ίδια ευθεία i'_0 (άξονας ομολογίας, όπως η ε).

Παρατήρηση:

Όπως αναφέρθηκε στην παράγρ. 3.8 σελ. 49 της κατάκλισης επιπέδου σχήματος, στο σχήμα 40 οι τομές των Α΄Β΄ και A_oB_o, Β΄Γ΄ και $B_o\Gamma_o$, Γ΄Α΄ και Γ_oA_o είναι τα σημεία Ν, Μ, Λ αντίστοιχα του ίχνους i'_0. Κι' εδώ ισχύει το θεώρημα του *Desargues* με τη διαφορά ότι, επειδή έχουμε παράλληλη προβολή (και όχι κεντρική), το κέντρο ομολογίας Ο απομακρύνεται στο άπειρο ενώ ο άξονας ομολογίας είναι το ίχνος i'_0.

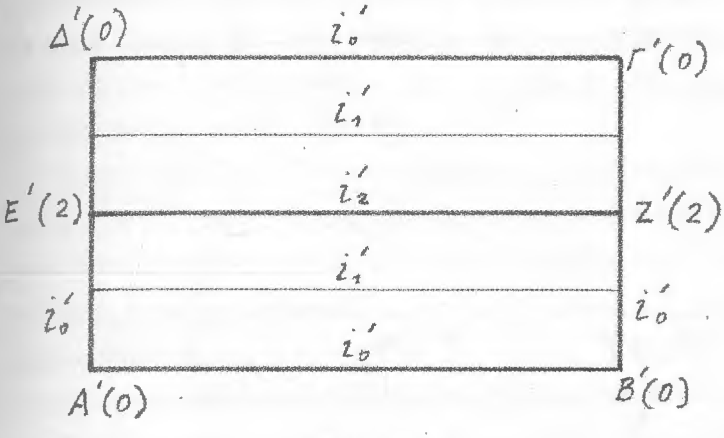
3.11 Στέγες

Η παραστατική ενός επιπέδου βρίσκει τεράστια εφαρμογή όχι μόνο στην Αρχιτεκτονική αλλά και στην Τοπογραφία για την απεικόνιση του εδάφους, τη χάραξη των οδών, την κατασκευή σηράγγων κ.τ.λ. Μια καθαρά αρχιτεκτονική εφαρμογή είναι και η κατασκευή της κάλυψης ενός κτιρίου που λέγεται ***στέγη***. Η επιφάνεια της στέγης μπορεί να είναι επίπεδη, καμπύλη, πολυεδρική ή μικτή. Η κλειστή γραμμή που τελειώνει η επιφάνεια της στέγης λέγεται ***περίγραμμα***. Εδώ θα εξετάσουμε τις οριζόντιες προβολές (κατόψεις) της εξωτερικής επιφάνειας μιας στέγης, όταν αυτή είναι πολυεδρική.

Τις ακμές πολυεδρικής επιφάνειας μιας στέγης τις διακρίνουμε σε γραμμές ***ράχης*** και γραμμές ***αύλακος***. Οι πρώτες διαχωρίζουν τα νερά της βροχής που πέφτουν στη στέγη, και γι' αυτό μπορούν να είναι οριζόντιες ή να έχουν κάποια κλίση. Οι δεύτερες συγκεντρώνουν μέρος της βροχής και τη στέλλουν σε μικρότερα υψόμετρα, γι' αυτό έχουν πάντα κάποια κλίση. Οι γραμμές ράχης ανήκουν σε δίεδρες γωνίες που η εσωτερική τους γωνία (η στραμμένη στο εσωτερικό του κτιρίου) είναι μικρότερη των 180° (κυρτή), ενώ οι γραμμές αύλακος ανήκουν σε δίεδρες γωνίες που η εσωτερική τους γωνία είναι μεγαλύτερη των 180° (μη κυρτή). Για να τις ξεχωρίζουμε απ' τις γραμμές ράχης, κατά τη σχεδίαση της κάτοψης μιας στέγης, θα τις σχεδιάζουμε με διπλή γραμμή (όπως τις προβολές ιχνοκαθέτων). Η γραμμή απ' την οποία τελικά φεύγουν τα νερά της βροχής λέγεται γραμμή ***εκροής*** και μπορεί να είναι όλο το περίγραμμα ή ένα μέρος του.

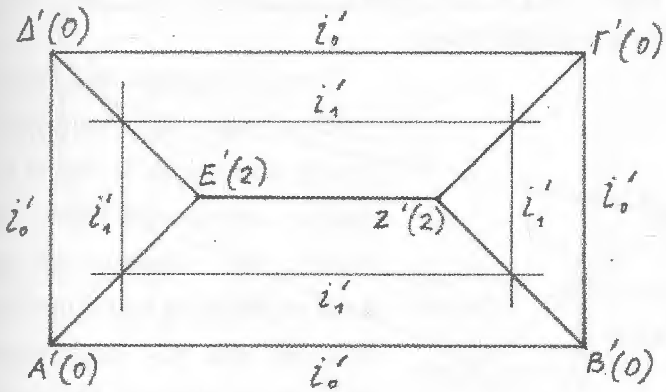
Τα επίπεδα των εδρών της πολυεδρικής επιφάνειας των στεγών είναι συνήθως ισοκλινή (δηλαδή έχουν την ίδια κλίση). Η κλίση των επιπέδων εξαρτάται απ' το κλίμα της περιοχής, καθώς και απ' το υλικό της επικάλυψης.

Στο πρόβλημα της σχεδίασης της κάτοψης της εξωτερικής επιφάνειας μιας στέγης, απαιτείται μόνο η εφαρμογή του προβλήματος της τομής δύο επιπέδων. Ειδικά στην περίπτωση των ισοκλινών στεγών, η προβολή της τομής δύο εδρών της επιφάνειας της στέγης, οι οποίες διέρχονται από δύο διαδοχικές πλευρές της γραμμής εκροής, είναι η διχοτόμος της γωνίας των πλευρών αυτών. Επομένως, για απλής μορφής περιγράμματα το πρόβλημα της σχεδίασης της κάτοψης της εξωτερικής επιφάνειας στέγης απ' το περίγραμμά της είναι σχετικά εύκολο. Όταν όμως το περίγραμμα είναι σύνθετο, τότε εμφανίζονται μερικές τεχνικές δυσκολίες. Παρακάτω θα δούμε μια μέθοδο που διευκολύνει την κατασκευή της κάτοψης σε περίπτωση οποιουδήποτε σύνθετου περιγράμματος.



Σχήμα 46

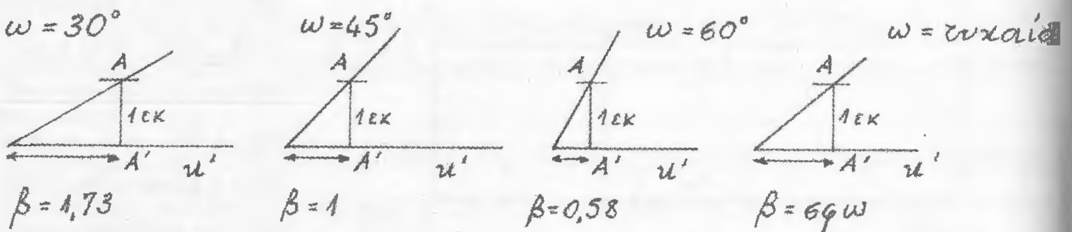
Αν το περίγραμμα είναι ορθογώνιο, έστω το Α΄Β΄Γ΄Δ΄, η γραμμή εκροής το ζεύγος των απέναντι πλευρών Α΄Β΄, Δ΄Γ΄, ενώ η κλίση των εδρών της στέγης Α΄Β΄, Δ΄Γ΄ η ίδια, τότε η κάτοψη της στέγης θα φαίνεται όπως στο σχήμα 46. Εδώ θα υπάρχει μια μόνο γραμμή ράχης η ΖΕ (που είναι προφανώς παράλληλη προς το οριζόντιο επίπεδο *e*).



Σχήμα 47

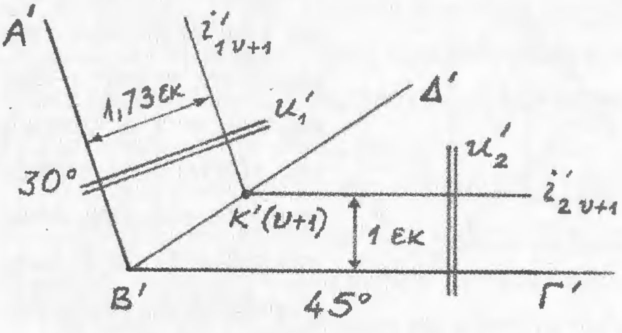
Αν η γραμμή εκροής είναι όλο το περίγραμμα του ορθογωνίου και η κλίση των επιπέδων των εδρών της στέγης η ίδια παντού, τότε η κάτοψη της εξωτερικής επιφάνειας θα φαίνεται όπως στο σχήμα 47. Το Ζ΄ είναι η προβολή της τομής των τριών επιπέδων των εδρών που περνούν απ' τις διαδοχικές πλευρές Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄ της γραμμής εκροής, οι Ζ΄Β΄ και Ζ΄Γ΄ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α΄Β΄Γ΄ και Β΄Γ΄Δ΄ αντίστοιχα, ενώ η Ε΄Ζ΄ είναι η προβολή της τομής των επιπέδων των εδρών που περνούν απ' τις πλευρές Α΄Β΄ και Γ΄Δ΄. Τα ίδια ισχύουν και για το Ε΄. Τα επίπεδα των εδρών που περνούν απ' τις πλευρές Α΄Δ΄ και Β΄Γ΄ τέμνονται κατά μία ευθεία (παράλληλη προς το *e*) που έχει υψόμετρο μεγαλύτερο απ' το υψόμετρο της Ε΄Ζ΄, γι' αυτό και βρίσκεται έξω από την επιφάνεια της στέγης και επομένως δεν σχεδιάζεται.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την προβολή της τομής δύο εδρών της στέγης που περνούν από δύο διαδοχικές πλευρές της γραμμής εκροής και έχουν διαφορετικές κλίσεις. Ως γνωστό, αν ω είναι η γωνία κλίσης μιας τέτοιας έδρας, τότε το βήμα της έδρας αυτής θα δίνεται απ' τη σχέση σφω = β_p όπου β_p είναι το βήμα μιας τυχαίας ιχνοκάθετης της έδρας p.



Σχήμα 48

Στο σχήμα 48 δίνονται τα βήματα εδρών των οποίων οι γωνίες κλίσης είναι 30°, 45°, 60° και ω° (οι έδρες φαίνονται σε πρόσοψη).



Σχήμα 49

Έτσι, αν έχουμε δύο διαδοχικές πλευρές της γραμμής εκροής, έστω τις Α΄Β΄ και Β΄Γ΄, ενώ οι αντίστοιχες έδρες της στέγης που περνούν απ' τις πλευρές αυτές σχηματίζουν γωνίες 30° και 45° αντίστοιχα (σχήμα 49), τότε η προβολή της τομής των δύο εδρών της στέγης θα βρεθεί απ' τις τομές δύο ιχνοπαραλλήλων των εδρών του ιδίου υψόμετρου. Αν υποθέσουμε ότι οι πλευρές της γραμμής εκροής Α΄Β΄, Β΄Γ΄ έχουν κάποιο υψόμετρο υ, τότε τα βήματα των εδρών θα είναι:

της έδρας $p_1(u_1')$: $\beta_{p_1} = \sigma\phi 30° = \sqrt{3} = 1{,}73$ και

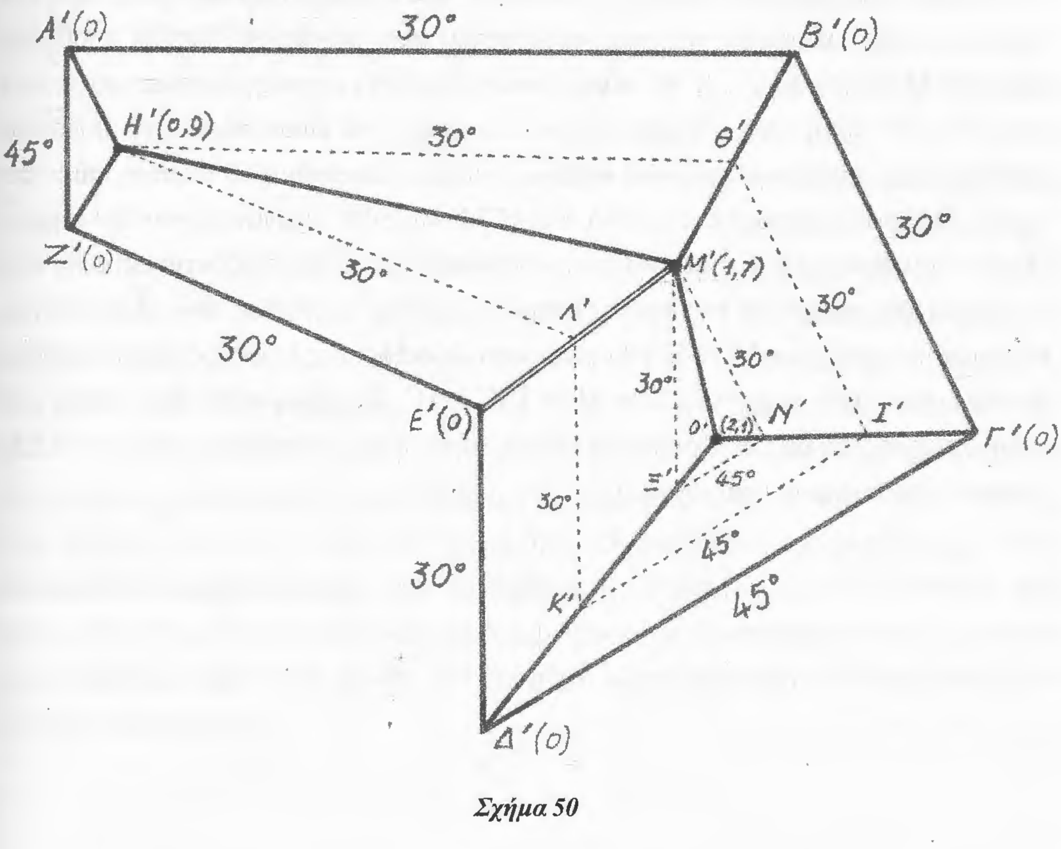
της έδρας $p_2(u_2')$: $\beta_{p_2} = \sigma\phi 45° = 1$

Έτσι υπολογίζουμε το σημείο τομής των ιχνοπαραλλήλων $i'_{1\upsilon+1}$, $i'_{2\upsilon+1}$ υψόμετρου υ+1 που είναι το Κ΄(υ+1) και χαράσσουμε την προβολή της τομής των διαδοχικών εδρών.

Θα εξετάσουμε τώρα την προβολή της επιφάνειας μιας στέγης όπου η γραμμή εκροής είναι ένα σύνθετο σχήμα και θα δώσουμε μια μέθοδο για την τελική κατασκευή της προβολής αυτής.

Έστω Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄Α΄ η γραμμή ροής της στέγης που θέλουμε να κατασκευάσουμε με τις γωνίες κλίσης των εδρών που περνούν απ' τις πλευρές του πολύγωνου. Θεωρούμε για απλούστευση ότι το οριζόντιο επίπεδο *e* διέρχεται από όλες τις γραμμές εκροής, που σημαίνει ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη το υψόμετρο όλων των τοιχοποιιών, άρα οι πλευρές Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, Δ΄Ε΄, Ε΄Ζ΄ και Ζ΄Α΄ θεωρούνται ιχνοπαράλληλες υψόμετρου 0, (δηλαδή ίχνη όλων των εδρών που διέρχονται απ' αυτές).

Προσδιορίζουμε κατ' αρχάς όλες τις προβολές τομών διαδοχικών εδρών σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα (σχήμα 50).

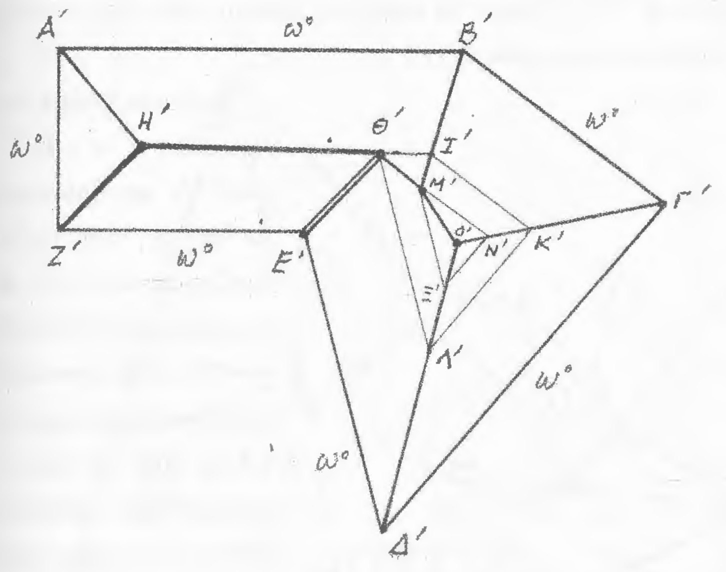


Σχήμα 50

Αυτές είναι οι Α΄Η΄, Β΄Μ΄, Γ΄Ο΄, Δ΄Ο΄, Ε΄Μ΄ (γραμμή αύλακος) και Ζ΄Η΄. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία τομής όλων των διαδοχικών τομών ανά δύο π.χ. της Α΄Η΄ με την Β΄Μ΄, της Β΄Μ΄ με την Γ΄Ο΄, ..., της Ζ΄Η΄με την Α΄Η΄ και μεταξύ αυτών παίρνουμε μόνο εκείνα τα σημεία τομής που βρίσκονται μέσα στη γραμμή εκροής. Απ' όλα τα σημεία αυτά επιλέγουμε εκείνο που έχει το μικρότερο υψόμετρο. Στο σχήμα 50 είναι το Η΄(0,9). Το σημείο αυτό Η΄ είναι η πρώτη κορυφή της στέγης (με το μικρότερο υψόμετρο). Απ' το σημείο Η φέρνουμε ένα οριζόντιο επίπεδο που θα τμήσει την επιφάνεια της στέγης κατά ένα πολύγωνο, του οποίου το πλήθος των πλευρών είναι κατά μονάδα <u>*τουλάχιστον*</u> μικρότερο απ' το πλήθος των πλευρών του πολύγωνου της γραμμής εκροής. Η προβολή του νέου αυτού πολύγωνου είναι η Η΄Θ΄Ι΄Κ΄Λ΄Η΄. (Οι πλευρές Η΄Θ΄, Θ΄Ι΄, Ι΄Κ΄, Κ΄Λ΄ και Λ΄Η΄ θεωρούνται ως οι ιχνοπαράλληλες υψόμετρου 0,9 των εδρών που περνούν απ' τις πλευρές Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, Δ΄Ε΄ και Ε΄Ζ΄ αντίστοιχα. Δηλαδή κατασκευάζουμε τις ιχνοπαράλληλες ξεκινώντας απ' το σημείο Η΄ και καταλήγουμε σ' αυτό). Το νέο αυτό πολύγωνο το θεωρούμε ως γραμμή εκροής μιας νέας στέγης και εργαζόμαστε ακριβώς όπως και προηγουμένως. Πρέπει να τονιστεί, ότι στο νέο αυτό πολύγωνο όλες οι προβολές τομών Θ΄Μ΄, Ι΄Ο΄, Κ΄Ο΄, Λ΄Μ΄ παραμένουν ίδιες με τις προηγούμενες εκτός από την Η΄Μ΄ (του σημείου με το χαμηλότερο υψόμετρο, απ' όπου φέραμε το οριζόντιο επίπεδο), την οποία υπολογίζουμε κατά τα γνωστά. Στο σχήμα 50 παρατηρούμε ότι οι τρεις διαδοχικές προβολές τομών Λ΄Μ΄, Η΄Μ΄ και Θ΄Μ΄ τέμνονται στο ίδιο σημείο Μ΄ με υψόμετρο 1,7 που σημαίνει ότι αν θεωρήσουμε το νέο οριζόντιο επίπεδο που θα τμήσει την επιφάνεια της στέγης (όπως και πριν), το πλήθος των πλευρών του πολύγωνου αυτού (του Μ΄Ν΄Ξ΄) θα είναι κατά δύο πλευρές λιγότερο από το πλήθος των πλευρών του προηγουμένου Η΄Θ΄Ι΄Κ΄Λ΄Η΄. Εργαζόμαστε πάλι όπως και προηγουμένως και υπολογίζουμε την τελική κορυφή της στέγης που είναι το Ο΄(2,1) (σημείο μεγαλύτερου υψόμετρου).

Παρατηρήσεις

i) Το τελευταίο πολύγωνο έχει πάντα θεωρητικά πλήθος πλευρών 3, δηλαδή είναι τρίγωνο (όπως το Μ΄Ν΄Ξ΄ στο παράδειγμα). (Στο δεύτερο παράδειγμα στέγης που αναφέραμε, με σχήμα 47, το τρίγωνο εκφυλίσθηκε στην πλευρά Ζ΄Ε΄). Στο Μ΄Ν΄Ξ΄ δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την προβολή της τομής των εδρών Μ΄Ν΄ και Μ΄Ξ΄ που είναι η Μ΄Ο΄. Αρκεί να ενώσουμε το Μ΄ με το Ο΄ (σημείο τομής των Ν΄Ο΄ και Ξ΄Ο΄) κι' αυτό γιατί τρία επίπεδα τέμνονται πάντα κατά ένα σημείο (εδώ τα επίπεδα των εδρών Μ΄Ν΄, Ν΄Ξ΄ και Ξ΄Ο΄ τέμνονται στο Ο΄(2,1)). Αν οι τελευταίες έδρες είναι ισοκλινείς, τότε το Ο΄ είναι προφανώς σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.



Σχήμα 51

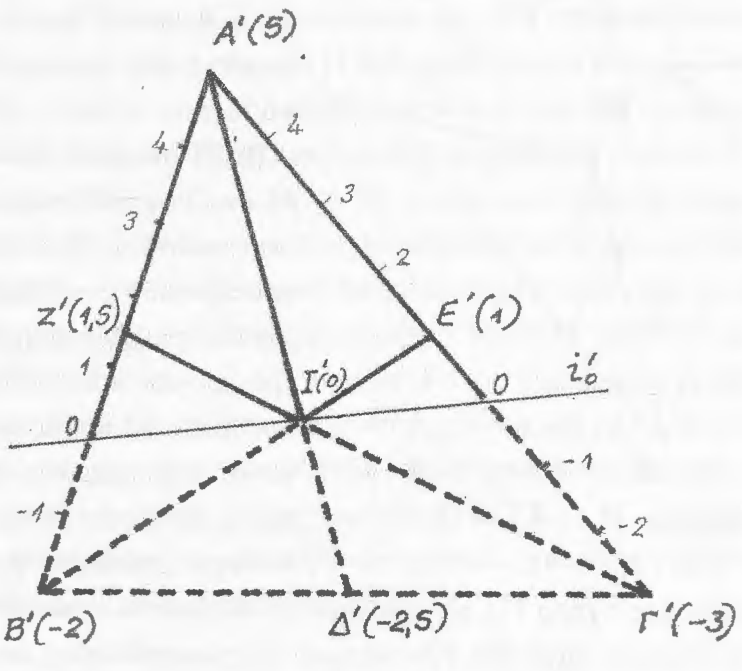
ii) Όπως αναφέραμε στο παραπάνω παράδειγμα, ξεκινώντας από το σημείο χαμηλότερου υψόμετρου (δηλ. το Η΄(0,9)) κατασκευάζουμε ένα νέο πολύγωνο, του οποίου το πλήθος των πλευρών είναι κατά μονάδα <u>*τουλάχιστον*</u> μικρότερο απ' το πλήθος των πλευρών του πολύγωνου της γραμμής εκροής. Αν συμβεί δύο μη διαδοχικές πλευρές του πολύγωνου να είναι παράλληλες (σχήμα 51), τότε προφανώς ελαττώνεται το πλήθος των πλευρών του νέου πολύγωνου κατά δύο. (Ουσιαστικά οι ιχνοπαράλληλες των παραλλήλων αυτών πλευρών της γραμμής ροής συμπίπτουν, όπως φαίνεται στο σχήμα 51). Έτσι, δεν καταλήγουμε πάλι στο σημείο που ξεκινήσαμε το Η΄, αλλά στο τελευταίο πριν απ' το Η΄, το Θ΄. Γι' αυτό και ελαττώνονται οι πλευρές του νέου πολύγωνου κατά δύο.

3.12 Εφαρμογές στο κεφάλαιο 3

1) Δίνονται τρία σημεία στο χαρτί σχεδίασης που είναι προβολές τριών σημείων Α, Β, Γ του χώρου με υψόμετρα Α΄(5), Β΄(-2), Γ΄(-3) και οι προβολές τους απέχουν μεταξύ τους Α΄Β΄ = 8 εκ., Β΄Γ΄ = 9 εκ. και Γ΄Α΄ = 10 εκ. Να γραφεί η προβολή του τριγώνου ΑΒΓ με τις διάμεσες αυτού και να γίνει διάκριση ορατών και καλυπτόμενων μερών της περιμέτρου του τριγώνου και των διαμέσων του. Τι υψόμετρο έχει το σημείο τομής των διαμέσων και τι υψόμετρο το σημείο τομής των διχοτόμων;

Λύση

Επειδή δεν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, παίρνουμε στο χαρτί σχεδίασης τρία σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ που να απέχουν μεταξύ τους τις γνωστές αποστάσεις και κατασκευάζουμε το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄.



Σχήμα 52

Βαθμολογούμε τις πλευρές Α΄Β΄, Β΄Γ΄ και Γ΄Α΄ και βρίσκουμε τα ίχνη τους με το οριζόντιο επίπεδο *e*, (σημεία υψόμετρου 0) για να διακρίνουμε ορατά και καλυμμένα μέρη του τριγώνου (σχήμα 52). Η βαθμολόγηση των πλευρών Α΄Β΄ και Α΄Γ΄ γίνεται αριθμητικά απ' τον τύπο:

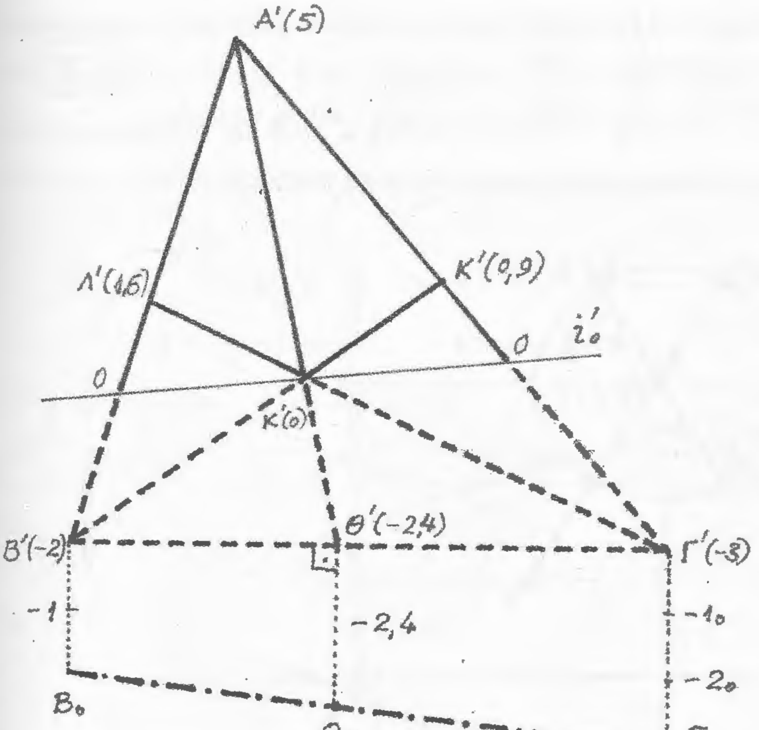
$$\beta_{AB} = \frac{A'B'}{5-(-2)} = \frac{A'B'}{7}.$$

Τα σημεία υψόμετρου 0 των Α΄Β΄ και Α΄Γ΄ είναι τα ίχνη των ΑΒ και ΑΓ με το *e*. Δηλαδή η ευθεία που τα ενώνει είναι η ιχνοπαράλληλη υψόμετρου 0, ή το ίχνος i'_0 του επιπέδου του τριγώνου ΑΒΓ. Κάτω απ' το ίχνος δεν φαίνεται καμία ευθεία. Τα

Δ΄, Ε΄ και Ζ΄ είναι τα μέσα των πλευρών Β΄Γ΄, Α΄Γ΄ και Α΄Β΄ αντίστοιχα, διότι το μέσο Δ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ του χώρου, προβάλλεται στο μέσο Δ΄ της προβολής του Β΄Γ΄. Τα υψόμετρα των Δ΄, Ε΄ και Ζ΄ είναι τα ημιαθροίσματα των υψομέτρων των άκρων που αντιστοιχούν. (Μπορούν να βρεθούν και με κατακλίσεις). Το υψόμετρο του σημείου τομής των διαμέσων βρίσκεται είτε κάνοντας κατάκλιση μιας από τις διάμεσους, είτε απ' το γνωστό τύπο της Αναλυτικής Γεωμετρίας (προτιμότερη φυσικά για την Παραστατική είναι η κατάκλιση).

$$\upsilon = \frac{\upsilon_{\mathrm{A}} + 2\upsilon_{\Delta}}{1+2} = \frac{5+2(-2{,}5)}{3} = 0 \text{ επειδή } \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{I\Delta}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Για τις διχοτόμους ξέρουμε ότι κι' αυτές προβάλλονται στις διχοτόμους των προβολών. Επομένως, (σχήμα 53), κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των προβολών Α΄Θ΄, Β΄Κ΄ και Λ΄Γ΄. Για να υπολογίσουμε τώρα το υψόμετρο του Θ κάνουμε κατάκλιση τη ΒΓ. Έτσι, απ' τα Β΄, Γ΄ υψώνουμε κάθετες στη Β΄Γ΄ και ορίζουμε μήκη $\mathrm{B'B_o} = 2$ εκ., $\Gamma'\Gamma_o = 3$ εκ. Η $\mathrm{B_o}\Gamma_o$ είναι η κατάκλιση της ΒΓ. Το υψόμετρο του Θ βρίσκεται αν φέρουμε απ' το Θ΄ κάθετη στη Β΄Γ΄. Με μια νέα κατάκλιση μπορούμε να



Σχήμα 53

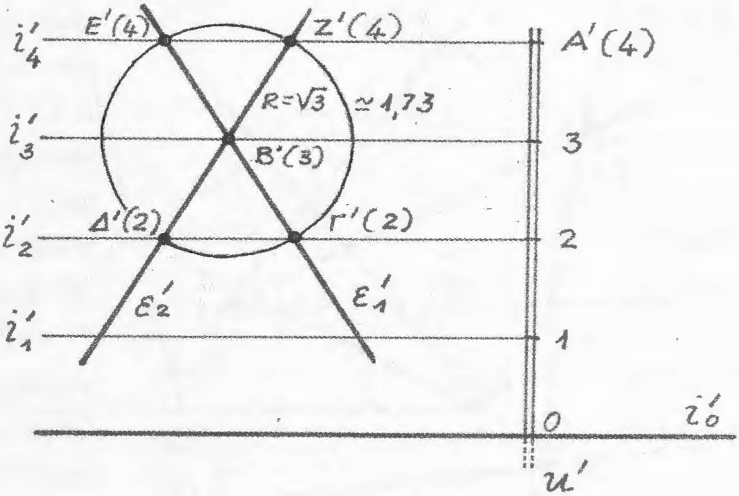
υπολογίσουμε το υψόμετρο της τομής των διχοτόμων Κ. Επειδή το Κ΄ πέφτει ακριβώς πάνω στο ίχνος i'_0, φαίνεται αμέσως ότι το υψόμετρό του θα είναι 0.

2) Δίνεται το επίπεδο *p* με το ίχνος του i'_0 και το σημείο του Α΄(4). Να κατασκευαστεί ευθεία η *ε* οποία να περνάει απ' το σημείο Β΄(3) του επιπέδου *p* και να έχει κλίση 30° με το επίπεδο προβολής *e* (να βρεθεί περιορισμός και να γίνει διερεύνηση).

Λύση

Το επίπεδο *p* ορίζεται απ' το ίχνος του i'_0 και το σημείο Α΄(4), συνεπώς αν φέρουμε απ' το Α κάθετη στο ίχνος του ορίζεται η προβολή μιας ιχνοκάθετης του *p*, την οποία και βαθμολογούμε με τον αριθμητικό τρόπο. Επειδή το Β έχει υψόμετρο 3, για να ανήκει στο *p, πρέπει* να βρίσκεται στην ιχνοπαράλληλή του i'_3, που συμβαίνει. Η γωνία κλίσης της ευθείας που θέλουμε να φέρουμε απ' το Β είναι 30° και επειδή το βήμα μιας ευθείας *ε* και η κλίση της συνδέονται με τη σχέση:

$$\beta_\varepsilon = \sigma\varphi\omega \text{ (ω η γωνία κλίσης) είναι: } \beta_\varepsilon = \sigma\varphi 30° = \sqrt{3} = 1{,}73\,.$$



Σχήμα 54

Αν λοιπόν με κέντρο το Β΄ και ακτίνα ίση με 1,73 γράψουμε περιφέρεια, αυτή θα τμήσει τις ιχνοπαράλληλες i'_2 και i'_4 στα τέσσερα σημεία Γ΄(2), Δ΄(2), Ε΄(4) και Ζ΄(4) (τα υψόμετρα των σημείων αυτών είναι τα σημειούμενα, επειδή η *ε* πρέπει να ανήκει στο επίπεδο *p*) (σχήμα 54).

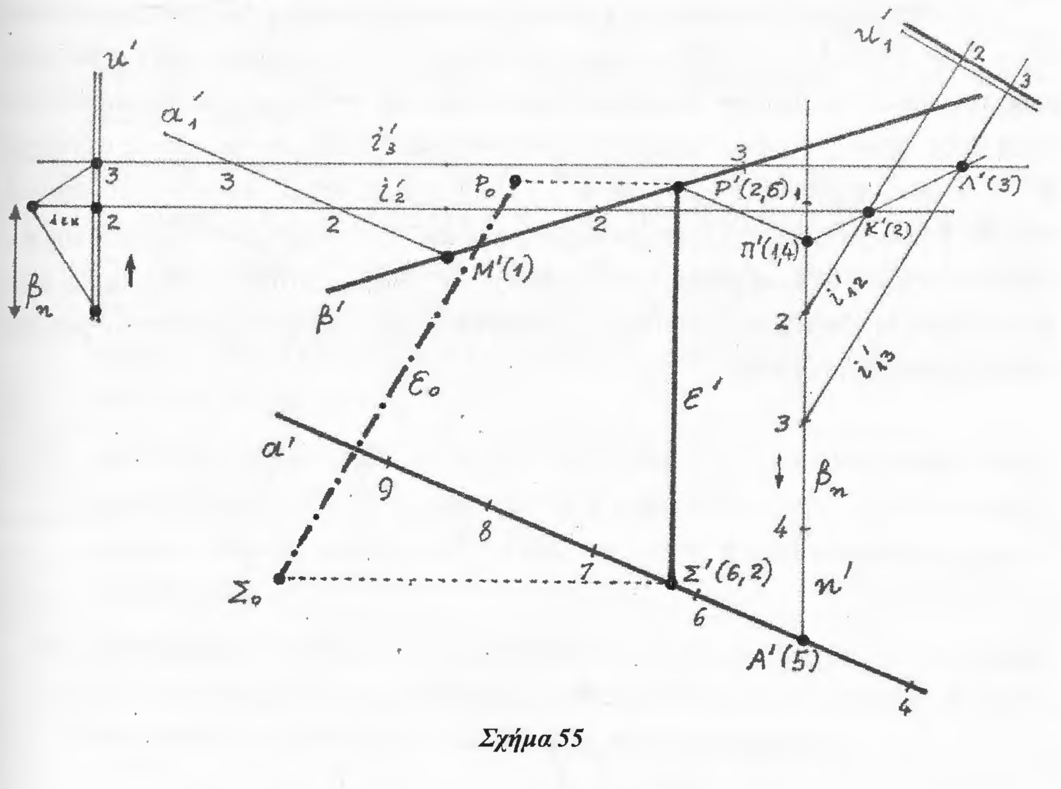
Το πρόβλημα έχει λύση όταν το βήμα της ε (1,73) είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το βήμα του επιπέδου p ($\beta_p = 1{,}5$), έτσι ώστε να υπάρχει τομή της περιφέρειας με τις ιχνοπαράλληλες i'_2 και i'_4. Αν είναι μεγαλύτερο, τότε έχουμε δύο λύσεις τις ευθείες ε_1 και ε_2, (όπως φαίνεται στο σχήμα), αν είναι ίσο με το βήμα του p έχουμε μία λύση την ευθεία ε που θα είναι κάθετη στο ίχνος i'_0, δηλαδή θα είναι μια ιχνοκάθετη u'_1 του επιπέδου. Τέλος, αν το βήμα της ε ($\beta_\varepsilon = 1{,}73$) είναι μικρότερο απ' το βήμα του επιπέδου τότε το πρόβλημα δεν θα έχει λύση.

3) Κοινή κάθετος δύο ασύμβατων ευθειών

Να βρεθεί η προβολή της κοινής κάθετης δύο ασύμβατων ευθειών και να βρεθεί το πραγματικό της μήκος (ελάχιστη απόσταση των ασύμβατων ευθειών).

Λύση

Αποδεικνύεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, ότι αν δύο ευθείες είναι ασύμβατες, τότε υπάρχει μία κάθετος που είναι κοινή σ' αυτές και το μήκος αυτής της κοινής κάθετης είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο ασύμβατων ευθειών.



Σχήμα 55

Έστω δύο ευθείες στο χαρτί σχεδίασης με τις προβολές τους τις α' και β' που είναι ασύμβατες, δηλαδή δεν τέμνονται, ούτε είναι παράλληλες (σχήμα 55). Η διαπίστωση γίνεται σύμφωνα με τη θεωρία της παραγράφου 3.3 σελ. 35 (2° πρόβλημα). Βαθμολογούμε τις α και β και θεωρούμε ένα επίπεδο που περνάει απ' τη β και είναι παράλληλο προς την α. Για το σκοπό αυτό, φέρνουμε απ' το τυχαίο σημείο Μ΄(1) της β παράλληλη προς την α, την α_1, σύμφωνα με τις γνωστές συνθήκες παραλληλίας, με προβολή την α'_1. Για να βρούμε τώρα το επίπεδο που αποτελούν η β και η α_1 βρίσκουμε δύο ιχνοπαράλληλες αυτών, τις i'_2, i'_3 και σχηματίζουμε την προβολή της ιχνοκάθετης u' που είναι κάθετη σ' αυτές, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Παίρνουμε τώρα ένα τυχαίο σημείο της α' (έστω το Α΄(5)) και φέρνουμε κάθετη στο επίπεδο των β και α_1, που είναι η ευθεία η, εφαρμόζοντας τη γνωστή θεωρία καθετότητας ευθείας και επιπέδου (παράγραφος 3.7 σελ. 47), καθώς επίσης υπολογίζουμε και το σημείο τομής της κάθετης αυτής με το p, που είναι το Π΄(1,4), επίσης με το γνωστό τρόπο τομής ευθείας και επιπέδου, θεωρώντας ως βοηθητικό επίπεδο που περιέχει την η το $p_1(u'_1)$ (παράγραφος 3.6 σελ. 46). Άρα το μήκος της κοινής κάθετης των δύο αυτών ευθειών α και β προβάλλεται κατά το μήκος Α΄Π΄.

Το τελευταίο μέρος της άσκησης είναι να μεταφέρουμε την ΑΠ του χώρου, έτσι ώστε η αρχή της Α να κινείται πάνω στην α, ενώ η ΑΠ να παραμένει παράλληλη προς τον εαυτό της, ώσπου να τμήσει την β. Έτσι, απ' το Π΄(1,4) φέρνουμε παράλληλη προς την α' μέχρι να τμήσει τη β' στο σημείο Ρ΄(2,6). Αν επομένως φέρουμε απ' Ρ΄ ευθεία παράλληλη προς την η', η τομή της με την α' θα δώσει το σημείο Σ΄(6,2). Το υψόμετρο του Σ΄ είτε το διαβάζουμε απ' την υψομετρική κλίμακα της α', είτε κάνουμε κατάκλιση αυτής και το βρίσκουμε. Τέλος, κατακλίνοντας τη ΡΣ βρίσκουμε το πραγματικό της μέγεθος $P_0\Sigma_0$ (που είναι και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των ασύμβατων ευθειών).

Ασκήσεις

Βασική παρατήρηση:

Σε όλες τις ασκήσεις που ακολουθούν απαιτείται για την ακριβή επίλυσή τους ένα σύστημα συντεταγμένων του χώρου Oxyz όπου ο κατακόρυφος άξονας Oz προβάλλεται στο σημείο O, δηλαδή τελικά προκύπτει επίπεδο σύστημα συντεταγμένων xOy. Έτσι, το τυχαίο σημείο του χώρου Α(α / β / γ), όπου είναι: τετμημένη x = α, τεταγμένη y = β και κατηγμένη z = γ, θα ορίζεται στο επίπεδο xOy με την προβολή του Α΄(γ), όπου γ το υψόμετρο του Α. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι <u>σε όλα τα προβλήματα της Παραστατικής ενός επιπέδου</u> θα δίνονται προβολές σημείων ευθειών ή επιπέδων και θα ζητείται η επίλυσή των.

1) Δίνονται τα σημεία Α΄(1,4) και Β΄(6,2) που απέχουν μεταξύ των 4 εκ. Να προσδιοριστούν: το ίχνος της ΑΒ, η γωνία κλίσης και το πραγματικό μέγεθος αυτής.

2) Δίνονται οι κορυφές Α΄(2,5), Β΄(6) και Γ΄(4) ενός τετραγώνου Α΄Β΄Γ΄Δ΄ πλευράς 10 εκ. το οποίο είναι προβολή ενός επιπέδου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στο χώρο. Να βρεθεί το υψόμετρο της κορυφής Δ, το υψόμετρο του σημείου τομής των διαγωνίων, καθώς και η γωνία κλίσης του επιπέδου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

3) Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, και Δ του χώρου με υψόμετρα Α΄(4,2), Β΄(8,5), Γ΄(-5) και Δ΄(-1). Αν οι προβολές Α΄Γ΄ και Β΄Δ΄ τέμνονται στο χαρτί σχεδίασης να βρεθεί αν και οι αντίστοιχες ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο χώρο. Πάνω στην ΑΒ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = 4εκ. και πάνω στη ΓΔ σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = 8 εκ. Να βρεθεί το πραγματικό μέγεθος της ΕΖ, καθώς και το ίχνος αυτής.

4) Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α΄(1), Β΄(4,5) και Γ΄(7,5), καθώς επίσης και το σημείο Κ με Κ΄(9,5). Να αχθεί απ' το Κ η παράλληλη προς την ΑΓ, καθώς και η κάθετη στο επίπεδο ΑΒΓ. Τέλος να βρεθεί η τομή της κάθετης με το επίπεδο ΑΒΓ.

5) Δίνονται οι ασύμβατες ευθείες ΑΒ και ΓΔ, καθώς και σημείο Κ του χώρου που δεν ανήκει σ' αυτές. Να κατασκευαστεί ευθεία που να περνάει απ' το Κ και να τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΓΔ ή τις προεκτάσεις τους.

Υπόδειξη: Να προσδιοριστούν τα επίπεδα του σημείου Κ με κάθε μια από τις ΑΒ και ΓΔ, και στη συνέχεια να βρεθεί η τομή των επιπέδων αυτών.

6) Δίνεται το επίπεδο ΑΒΓ που ορίζεται απ' τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ με Α΄(10), Β΄(0), Γ΄(-2) και το σημείο Δ΄(8). Να βρεθεί η τομή της κάθετης απ' το σημείο Δ στο επίπεδο ΑΒΓ, καθώς και το συμμετρικό του Δ ως προς το ΑΒΓ.

7) Από το σημείο Α του χώρου με Α΄(5) να αχθεί ευθεία κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ με Β΄(-1) και Γ΄(3).

Υπόδειξη: Να γίνει κατάκλιση του επιπέδου ΑΒΓ.

8) Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ του χώρου με Α΄(2), Β΄(6,5) και Γ΄(-3). Να βρεθεί στο επίπεδο προβολής η προβολή σημείου Κ του επιπέδου ΑΒΓ που να απέχει εξ' ίσου απ' τις κορυφές Α, Β, Γ, καθώς και η προβολή σημείου Λ του ΑΒΓ που να απέχει εξ' ίσου απ' τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. (Το Κ είναι σημείο τομής των μεσοκαθέτων του ΑΒΓ (περίκεντρο του ΑΒΓ), ενώ το Λ είναι σημείο τομής των διχοτόμων του (έκκεντρο του ΑΒΓ)).

9) Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με Α΄(5), Β΄(1), Γ΄(-1) και Δ΄(7). Να βρεθούν τα πραγματικά μεγέθη των παρακάτω γωνιών:

i. της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ,

ii. της γωνίας του ΑΒΓ με το επίπεδο προβολής *e*,

iii. της γωνίας που σχηματίζει η ΔΓ με το επίπεδο ΑΒΓ και

iv. της γωνίας που σχηματίζουν τα επίπεδα ΑΒΓ και ΔΒΓ.

10) Δίνεται η τριγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓ με Κ΄(6), Α΄(0), Β΄(0) και Γ΄(0), καθώς και το επίπεδο *p* που ορίζεται με την προβολή μιας ιχνοκάθετης αυτού βαθμολογημένη. Να κατασκευαστεί η προβολή της τομής της πυραμίδας με το επίπεδο *p*, καθώς και το πραγματικό μέγεθος της τομής αυτής.

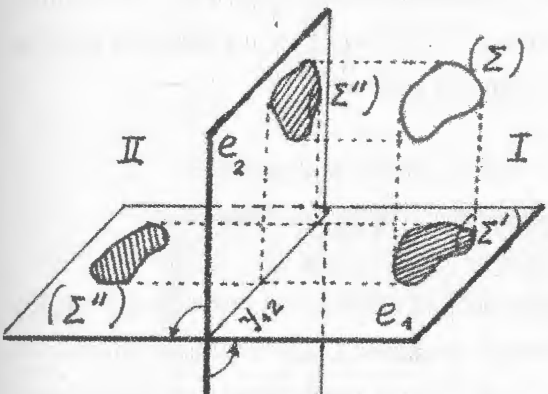
11) Δίνεται το περίγραμμα ροής στέγης ΑΒΓΔΕΑ με τις συντεταγμένες των σημείων Α(5 / -9 / 0), Β(22 / -29 / 0), Γ(34 / -18 / 0), Δ(28 / -1 / 0), Ε(10 / -3 / 0). Οι κλίσεις των κεκλιμένων επιπέδων είναι ΑΕ = 45°, ΑΒ = 60°, ΒΓ = 45°, ΓΔ = 60° και ΔΕ = 45°. Να βρεθεί η προβολή της στέγης.

12) Δίνεται επίπεδο p με την προβολή μιας ιχνοκάθετης u' βαθμολογημένη, μια ευθεία α' με την υψομετρική της κλίμακα και ένα σημείο Κ΄(υ). Να κατασκευαστεί επίπεδο q που να περνάει απ' το Κ και να είναι αφ' ενός παράλληλο στην α, αφ' ετέρου κάθετο στο p.

Υπόδειξη: Να κατασκευαστεί απ' το Κ η ευθεία $\beta // \alpha$, μετά απ' το Κ η κάθετη ζ στο p, οπότε το επίπεδο q θα οριστεί απ' τις ευθείες β και ζ.

4. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΟΒΟΛΕΣ (ΟΡΘΕΣ) (Παραστατική δύο επιπέδων)

Μια άλλη μέθοδος που εφαρμόζεται συχνά για την παράσταση ενός σχήματος (Σ) του χώρου είναι η προβολή του σε δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους (*μέθοδος Monge*). Το ένα είναι οριζόντιο και συμβολίζεται με e_1 και το άλλο είναι κατακόρυφο και συμβολίζεται με e_2. Το e_1 λέγεται και *πρώτο* επίπεδο, ενώ το e_2 λέγεται *δεύτερο* επίπεδο (σχήμα 56).



Σχήμα 56

Τα επίπεδα αυτά τέμνονται κατά την ευθεία y_{12} και ορίζουν 4 περιοχές του χώρου, τις I, II, III, IV όπου οι περιοχές I, II βρίσκονται πάνω απ' το οριζόντιο επίπεδο e_1, ενώ η περιοχή III είναι συμμετρική της II ως προς το e_1 και η IV συμμετρική της I ως προς το e_1. Ένα σχήμα (Σ) του χώρου θα έχει μια ορθή προβολή (Σ΄) πάνω στο e_1 και μια ορθή προβολή (Σ΄΄) πάνω στο e_2 (σχήμα 56). Την προβολή (Σ΄) τη λέμε ***οριζόντια ή πρώτη προβολή***, ενώ την (Σ΄΄) τη λέμε ***κατακόρυφη ή δεύτερη προβολή***. Ο παρατηρητής βλέπει ό,τι υπάρχει στην περιοχή I.

Για να πάρουμε τις δύο προβολές του σχήματος (Σ) στο ίδιο επίπεδο, στρέφουμε το επίπεδο e_2 γύρω από τον άξονα y_{12} μέσα στις περιοχές II και IV μέχρι να συμπέσει με το e_1. Θα προκύψουν τότε στο ίδιο επίπεδο e_1 (το οποίο είναι βασικά το χαρτί σχεδίασης), οι δύο προβολές του σχήματος (Σ) και ο άξονας y_{12}.

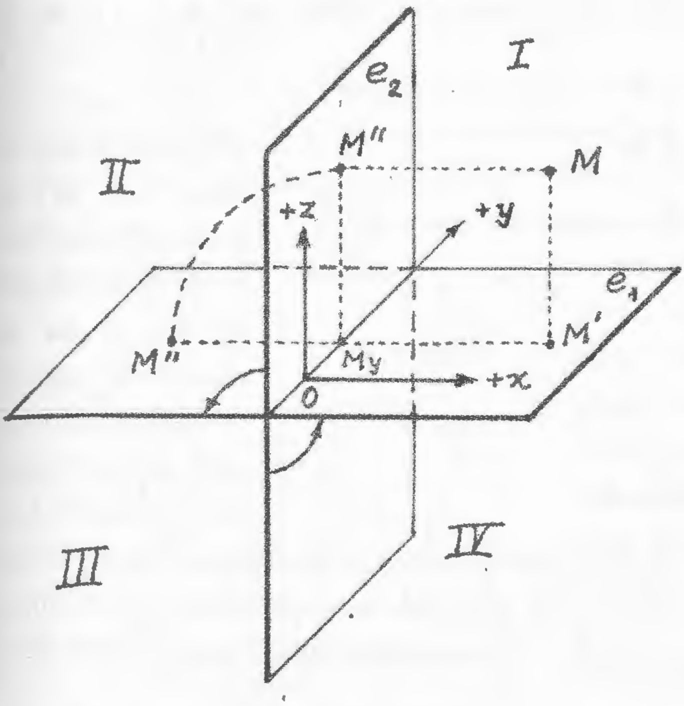
Έτσι, από δω και πέρα, όταν θα λέμε ότι το σχήμα (Σ) του χώρου έχει ως πρώτη προβολή (ή οριζόντια) το σχήμα (Σ΄) και ως δεύτερη προβολή (ή κατακόρυφη) το σχήμα (Σ΄΄) στο χαρτί σχεδίασης, θα εννοούμε ότι έγινε η προβολή του (Σ) πάνω στα δύο επίπεδα το e_1 και το e_2 όταν αυτά ήταν ήταν κάθετα το ένα στο άλλο και στη συνέχεια το e_2 κατακλίθηκε στο e_1. Αντίστροφα, όταν βλέπουμε στο χαρτί σχεδίασης την πρώτη προβολή (Σ΄) και τη δεύτερη (Σ΄΄) ενός σχήματος (Σ), θα εννοούμε ότι έχει περιστραφεί το e_2 γύρω από τον άξονα y_{12} ώστε να γίνει κάθετο στο e_1.

Η οριζόντια και η κατακόρυφη προβολή ενός σχήματος (Σ) αρκούν γενικά για να προσδιοριστεί. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που δεν ορίζεται με δύο προβολές το (Σ) και είναι αναγκαία άλλη μια προβολή. Π.χ. αν έχουμε ως πρώτη και δεύτερη προβολή δύο ίσους κύκλους που τα κέντρα τους βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στον άξονα y_{12}, αυτοί οι κύκλοι μπορούν να θεωρηθούν ως οι δύο προβολές μιας σφαίρας ή μιας έλλειψης που το επίπεδό της ισοκλίνει προς τα e_1 και e_2. Επομένως απαιτείται σε μερικές περιπτώσεις μια τρίτη προβολή του σχήματος (Σ). Ως τρίτο επίπεδο προβολής ορίζουμε συνήθως ένα επίπεδο κάθετο στο άξονα y_{12}. Η προβολή του (Σ) σ' ένα τέτοιο επίπεδο συμβολίζεται με (Σ΄΄΄) και λέγεται ***εγκάρσια ή τρίτη προβολή***. Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με τις τρίτες προβολές.

4.1 Παράσταση σημείου

Θεωρούμε ένα δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς Oxyz τέτοιο ώστε ο άξονας Oy να συμπίπτει με τον άξονα y_{12}, ενώ οι θετικοί ημιάξονες Ox, Oz να βρίσκονται στα επίπεδα e_1 και e_2 έτσι ώστε τα σημεία του χώρου με θετικές τετμημένες και κατηγμένες ως προς το σύστημα Oxyz να ανήκουν στην περιοχή I (σχήμα 57).

Το τυχαίο σημείο M του χώρου θα έχει δύο προβολές M΄, M΄΄ στα e_1 και e_2. Είναι προφανές ότι οι κάθετες απ' τα M΄, M΄΄ στον y_{12} τέμνονται στο M_y. Την τετμημένη



Σχήμα 57

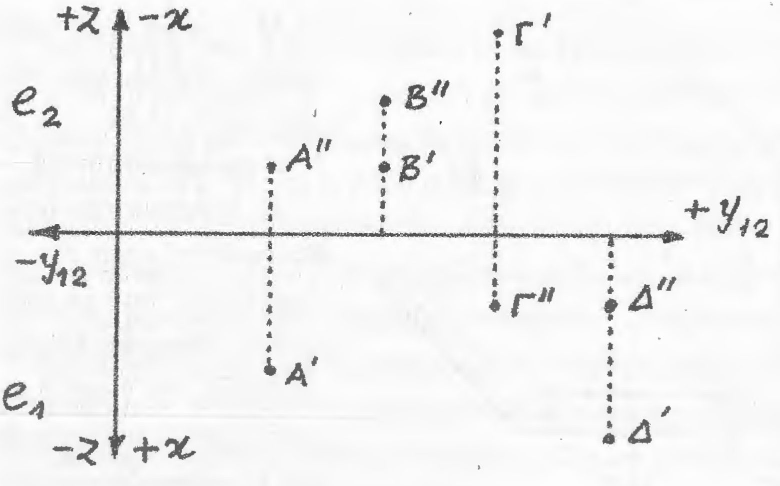
$M_yM' = x$ τη λέμε ***από-σταση*** του M, ενώ την κατηγμένη $M_yM'' = z$ τη λέμε ***υψόμετρο*** του M.

Τα πρόσημα των συντεταγμένων x και z ενός σημείου M που εκφράζουν τις θέσεις της πρώτης προβολής (M΄) και δεύτερης (M΄΄) αντίστοιχα του M, καθορίζονται ανάλογα με τις περιοχές, όπως προκύπτει απ' το σχήμα 57, και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Πρόσημα συντεταγμένων x και z σημείου στο χώρο

Τετμημένη (x)	*Κατηγμένη (z)*	*Περιοχή*
+	+	I
–	+	II
–	–	III
+	–	IV

Μετά τη στροφή του e_2 γύρω από τον άξονα y_{12} μέχρι να συμπέσει με το e_1, το σύστημα συντεταγμένων και οι προβολές ενός τυχαίου σημείου θα φαίνονται όπως στο σχήμα 58. Οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ, Δ του χώρου είναι:



Σχήμα 58

Α(2 / 2 / 1), Β(-1 / 3,5 / 2), Γ(-3 / 5 / -1) και Δ(3 / 6,5 / -1). Σύμφωνα με τον πίνακα, τα Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται στην περιοχή I, II, III, IV αντίστοιχα. Απ' τα παραπάνω προκύπτει ότι σε κάθε σημείο Α του χώρου αντιστοιχούν δύο σημεία Α΄, Α΄΄ (πρώτη και δεύτερη προβολή του Α) στο χαρτί σχεδίασης, τέτοια ώστε η Α΄Α΄΄ να είναι κάθετη στον άξονα y_{12}. Αλλά και αντίστροφα, σε κάθε ζεύγος σημείων Α΄, Α΄΄ τέτοιων ώστε η <u>Α΄Α΄΄ να είναι κάθετη στον άξονα y_{12}</u>, αντιστοιχεί ένα σημείο Α του χώρου.

4.2 Ορατά και καλυπτόμενα μέρη

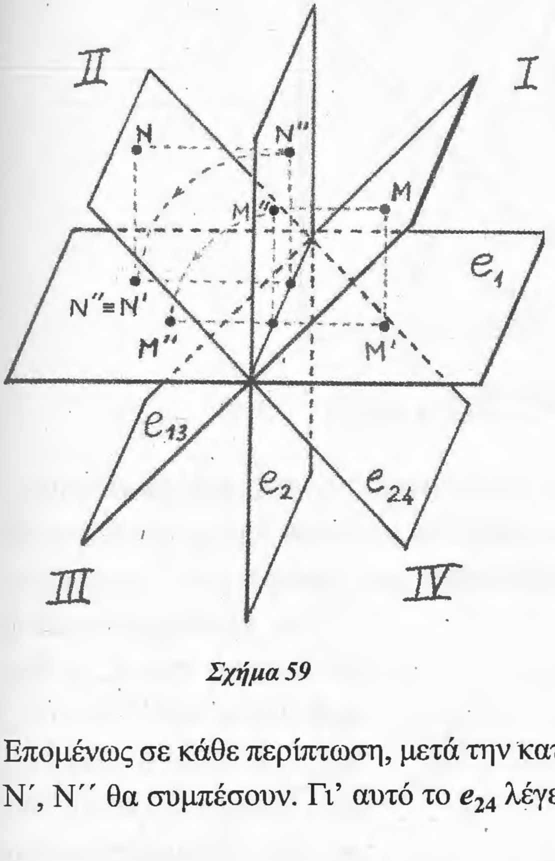
Τα επίπεδα προβολής e_1 και e_2 θεωρούνται συνήθως αδιαφανή. Η σχεδίαση των προβολών ενός σχήματος (Σ) στα επίπεδα προβολής e_1 και e_2 γίνονται έτσι ώστε να γίνεται διάκριση των μερών του (Σ) που φαίνονται και εκείνων που δεν φαίνονται.

Έτσι, κατά τη σχεδίαση της πρώτης προβολής (Σ΄) θεωρείται ότι ο παρατηρητής βρίσκεται σε άπειρη απόσταση κατά τη διεύθυνση των θετικών z και κοιτάζει από πάνω προς τα κάτω. Επομένως, από δύο σημεία ενός σχήματος που βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στο e_1 φαίνεται εκείνο που έχει το μεγαλύτερο υψόμετρο z. Κατά τη σχεδίαση της δεύτερης προβολής (Σ΄΄) θεωρείται ότι ο παρατηρητής βρίσκεται σε άπειρη απόσταση κατά τη διεύθυνση των θετικών x και κοιτάζει από τα θετικά x προς τα αρνητικά x. Επομένως, από δύο σημεία ενός σχήματος που βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στο e_2 φαίνεται εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση x.

Οι γραμμές που συνθέτουν τις προβολές (Σ΄) και (Σ΄΄) ενός σχήματος (Σ) κατασκευάζονται ως εξής: Η σχεδίαση των προβολών των γραμμών του σχήματος (Σ) που φαίνονται, γίνεται με συνεχή γραμμή, ενώ η σχεδίαση των προβολών των γραμμών του σχήματος (Σ) που καλύπτονται γίνεται με διακεκομμένη γραμμή.

4.3 Επίπεδα συμμετρίας και συμπτώσεως

Από τα επίπεδα του χώρου που περνούν απ' τον άξονα y_{12} υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά επίπεδα. Το πρώτο που συμβολίζεται με e_{13} είναι το επίπεδο που διχοτομεί την δίεδρη γωνία που περιλαμβάνει τις περιοχές I και III. Το δεύτερο που συμβολίζεται με e_{24} είναι το επίπεδο που διχοτομεί την δίεδρη γωνία που περιλαμβάνει τις περιοχές II και IV. Οι δείκτες των επιπέδων αναφέρονται στις περιοχές.



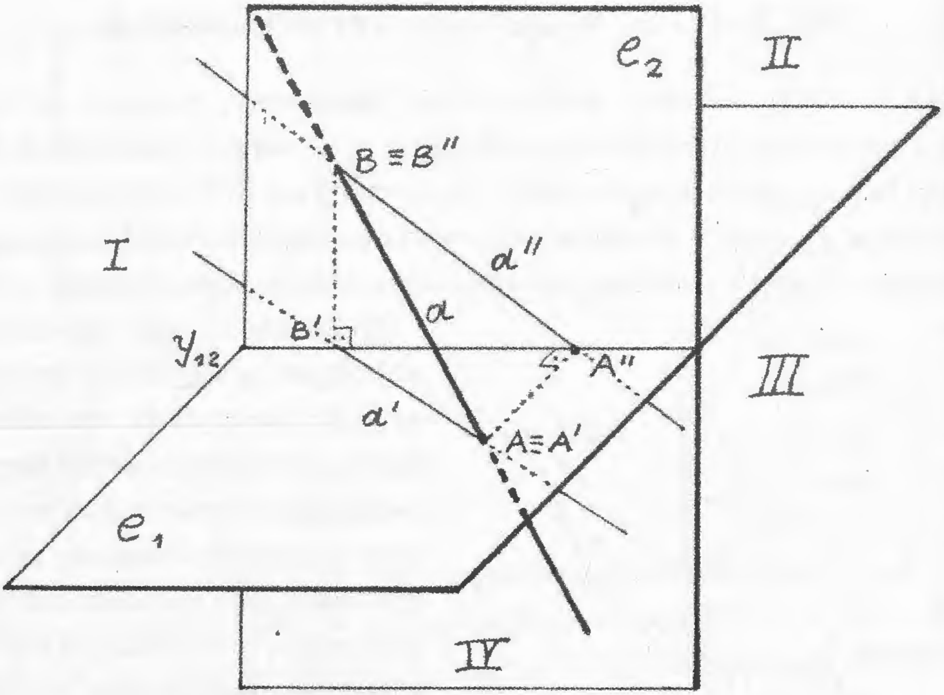
Σχήμα 59

Το επίπεδο e_{13} έχει την ιδιότητα: κάθε σημείο αυτού M έχει ίση τετμημένη και κατηγμένη και μάλιστα θετικές και τις δύο, αν ανήκει στην περιοχή I, αρνητικές και τις δύο, αν ανήκει στην περιοχή III. Επομένως σε κάθε περίπτωση, μετά την κατάκλιση του e_2 πάνω στο e_1 οι προβολές M΄, M΄΄ θα είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y_{12}. Γι' αυτό το e_{13} λέγεται ***επίπεδο συμμετρίας*** (σχήμα 59).

Το επίπεδο e_{24} έχει την ιδιότητα: κάθε σημείο αυτού N έχει ίσες και αντίθετες την τετμημένη και κατηγμένη του και μάλιστα $x < 0$, $z > 0$ αν το N ανήκει στην περιοχή II, αντίθετα $x > 0$, $z < 0$ αν το N ανήκει στην περιοχή IV. Επομένως σε κάθε περίπτωση, μετά την κατάκλιση του e_2 πάνω στο e_1 οι προβολές N΄, N΄΄ θα συμπέσουν. Γι' αυτό το e_{24} λέγεται ***επίπεδο συμπτώσεως***.

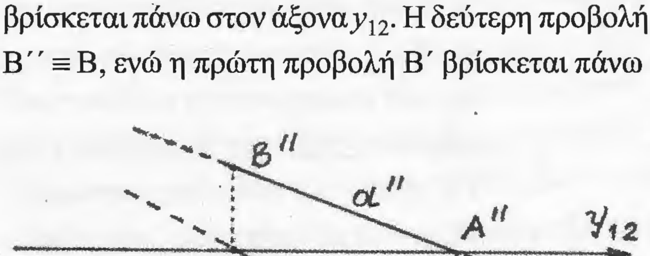
4.4 Παράσταση ευθείας

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία α του χώρου, που δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα y_{12}. Έστω A και B τα σημεία τομής της α με τα επίπεδα e_1 και e_2 αντίστοιχα (σχήμα 60).



Σχήμα 60

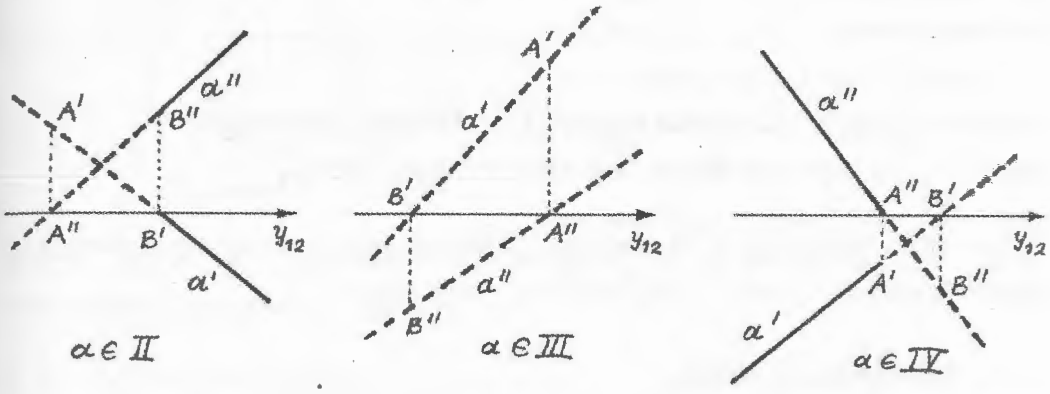
Η πρώτη προβολή του Α συμπίπτει με το Α, δηλαδή Α΄ ≡ Α, ενώ η δεύτερη Α΄΄ βρίσκεται πάνω στον άξονα y_{12}. Η δεύτερη προβολή του Β συμπίπτει με το Β, δηλαδή Β΄΄ ≡ Β, ενώ η πρώτη προβολή Β΄ βρίσκεται πάνω στον άξονα y_{12}.



Σχήμα 61

Έτσι, μετά την κατάκλιση του e_2 πάνω στο e_1, οι δύο προβολές a' και a'' της a θα φαίνονται όπως στο σχήμα 61, όπου γίνεται διάκριση των ορατών και καλυπτόμενων σημείων της a. Τα ίχνη Α(Α΄, Α΄΄) και Β(Β΄, Β΄΄) μιας ευθείας a με τα e_1 και e_2, την χωρίζουν γενικά σε τρία μέρη, απ' τα οποία μόνο το ένα (το ΑΒ) είναι πεπερασμένο. Στο σχήμα 61 το τμήμα ΑΒ βρίσκεται στην περιοχή Ι επομένως θα φαίνεται, ενώ οι ημιευθείες πίσω απ' το Β και κάτω απ' το Α βρίσκονται στις περιοχές ΙΙ και IV αντίστοιχα, επομένως δεν θα φαίνονται. Γι' αυτό οι προβολές αυτών των ημιευθειών γίνονται με διακεκομμένες γραμμές.

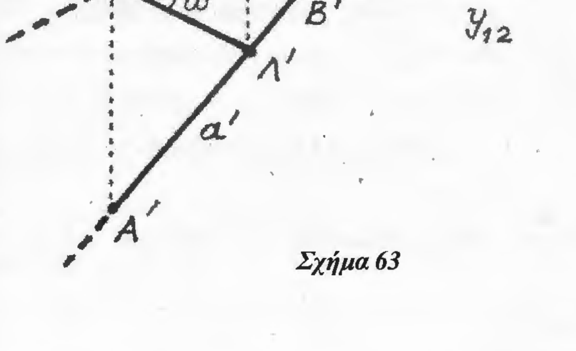
Στο σχήμα 62 είναι σχεδιασμένες οι προβολές τριών ευθειών που **τα τμήματά τους AB** βρίσκονται στις περιοχές II, III, και IV του χώρου.



Σχήμα 62

4.5 Ίχνη ευθείας με τα e_{13} και e_{24}

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3, κάθε σημείο που βρίσκεται στο επίπεδο συμπτώσεως e_{24} θα είναι τέτοιο ώστε η πρώτη και η δεύτερη προβολή του να συμπίπτουν. Αν επομένως μια ευθεία τέμνει το e_{24} σ' ένα σημείο K, θα πρέπει K′≡K′′ (σχήμα 63).



Σχήμα 63

Επίσης, κάθε σημείο που βρίσκεται στο επίπεδο συμμετρίας e_{13} θα είναι τέτοιο ώστε η πρώτη και η δεύτερη προβολή του να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y_{12}. Αν επομένως μια ευθεία τέμνει το e_{13} σ' ένα σημείο Λ, θα πρέπει η πρώτη και δεύτερη προβολή του Λ να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y_{12}. Επομένως, αρκεί στο A′′ να σχηματίσουμε μια γωνία ω ίση με την γωνία ω της α΄΄ με τον y_{12}, οπότε βρίσκουμε πάνω στην α΄ την πρώτη προβολή Λ΄ του Λ. Η δεύτερη Λ΄΄∈ α'' και Λ΄Λ΄΄ ⊥ y_{12} (σχήμα 63). Παρόμοια βρίσκουμε πάνω στην α΄΄ την δεύτερη προβολή Λ΄΄ του Λ, αν στο Β΄ σχηματίσουμε μια γωνία ω ίση με την γωνία της α΄ με τον y_{12}. Η πρώτη προβολή Λ' ∈ α' και Λ΄Λ΄΄ ⊥ y_{12}. Το Κ(Κ΄, Κ΄΄) με Κ΄ ≡ Κ΄΄ βρίσκεται εύκολα ως τομή των α΄ και α΄΄.

4.6 Χαρακτηριστικές θέσεις ευθειών ως προς τα επίπεδα e_1 και e_2

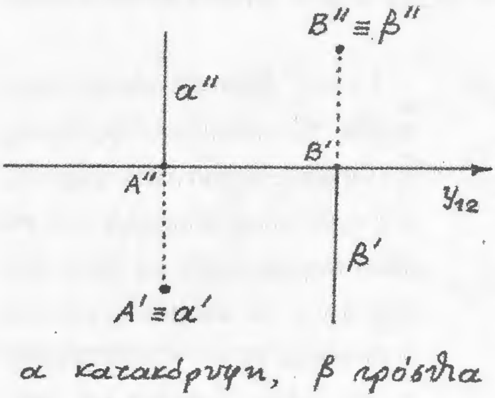
Τις ευθείες του χώρου τις διακρίνουμε, ανάλογα με τη θέση τους σε σχέση με τα επίπεδα προβολής e_1 και e_2, στις επόμενες κατηγορίες:

1) Κατακόρυφες ευθείες.

Είναι αυτές που είναι κάθετες στο επίπεδο e_1. Έτσι, η πρώτη προβολή α΄ μιας κατακόρυφης είναι ένα σημείο που συμπίπτει με το πρώτο ίχνος αυτής (τομή της α με το οριζόντιο ή πρώτο επίπεδο e_1), ενώ η δεύτερη προβολή είναι μια ευθεία α΄΄ κάθετη στον άξονα y_{12} (σχήμα 64α).

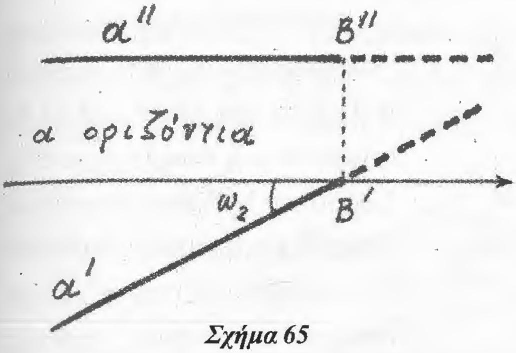
2) Πρόσθιες ευθείες

Είναι οι ευθείες οι κάθετες στο επίπεδο e_2. Η δεύτερη προβολή μιας πρόσθιας ευθείας β΄΄ είναι σημείο που συμπίπτει με το δεύτερο ίχνος αυτής (τομή της β με το κατακόρυφο ή δεύτερο επίπεδο e_2), ενώ η πρώτη προβολή είναι μια ευθεία β΄ κάθετη στον άξονα y_{12}. Στο σχήμα 64β φαίνονται οι προβολές μιας πρόσθιας ευθείας.



Σχήμα 64

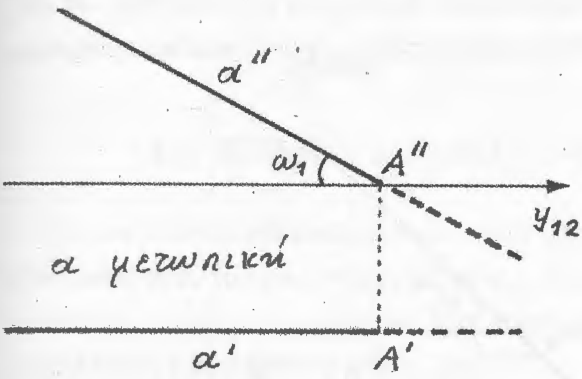
3) Οριζόντιες ευθείες



Σχήμα 65

Είναι οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το επίπεδο e_1. Η δεύτερη προβολή μιας οριζόντιας ευθείας α είναι παράλληλη προς τον y_{12}, ενώ η πρώτη προβολή σχηματίζει με τον y_{12} γωνία ω_2 ίση με τη γωνία κλίσης της α με το e_2 (σχήμα 65). Όταν $\omega_2 = 90°$, τότε η οριζόντια ευθεία γίνεται πρόσθια, επομένως η δεύτερη προβολή της α'' συμπίπτει με το δεύτερο ίχνος Β''. Αν η οριζόντια ευθεία α είναι παράλληλη προς τον y_{12}, τότε οι α' και α'' είναι παράλληλες προς τον y_{12}.

4) Μετωπικές ευθείες.



Σχήμα 66

Είναι οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το επίπεδο e_2. Η πρώτη προβολή μιας μετωπικής ευθείας α είναι παράλληλη προς τον y_{12}, ενώ η δεύτερη προβολή σχηματίζει με τον y_{12} γωνία ω_1 ίση με τη γωνία κλίσης της α με το e_1 (σχήμα 66). Όταν $\omega_1 = 90°$, τότε η μετωπική ευθεία γίνεται κατακόρυφη, επομένως η πρώτη προβολή της α' συμπίπτει με το πρώτο ίχνος Α'. Προφανώς μια ευθεία παράλληλη προς τον y_{12}, θεωρείται οριζόντια και μετωπική ταυτόχρονα.

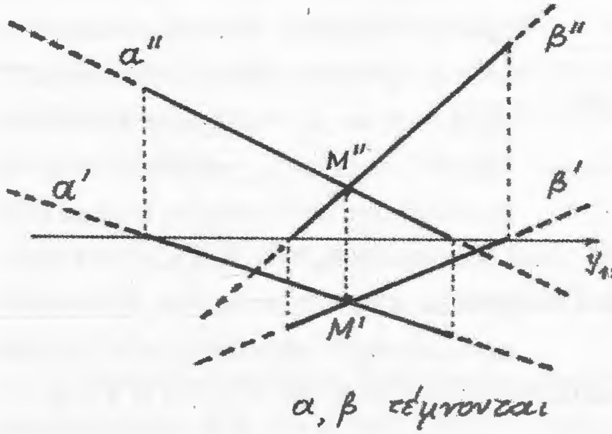
5) Εγκάρσιες ευθείες

Είναι οι ευθείες που είναι ασύμβατα κάθετες[1] στον άξονα y_{12}. Οι προβολές μιας εγκάρσιας ευθείας είναι κάθετες στον άξονα y_{12}. Είναι προφανές ότι οι κατακόρυφες και πρόσθιες ευθείες είναι εγκάρσιες.

---

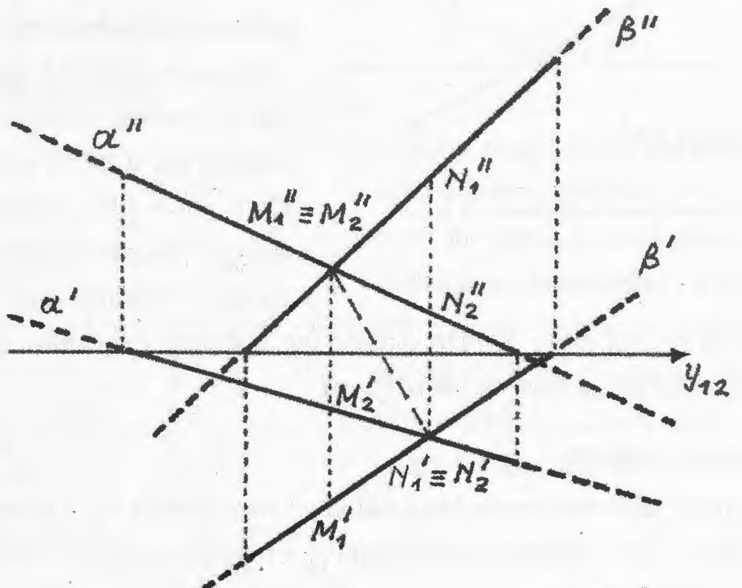
[1]Δύο ευθείες α και β του χώρου είναι ασύμβατα κάθετες, αν η παράλληλη από τυχαίο σημείο της α προς την β, είναι κάθετη στην α.

4.7 Ευθείες τεμνόμενες, ασύμβατες και παράλληλες



Σχήμα 67

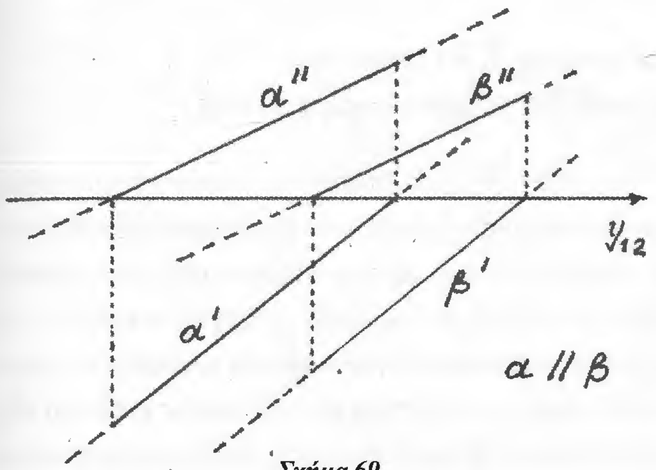
Έστω δύο τεμνόμενες μη εγκάρσιες ευθείες α(α΄, α΄΄) και β(β΄, β΄΄) και Μ(Μ΄, Μ΄΄) το σημείο τομής τους (σχήμα 67). Εφόσον το Μ βρίσκεται στην α, θα πρέπει η πρώτη προβολή του Μ΄ να βρίσκεται στην α΄, ενώ η δεύτερη Μ΄΄ στην α΄΄. Επίσης, επειδή το Μ βρίσκεται στη β, θα πρέπει η πρώτη προβολή του να βρίσκεται στην β΄, ενώ η δεύτερη Μ΄΄ στην β΄΄. Αντίστροφα, αν οι προβολές δύο ευθειών α και β τέμνονται σε δύο σημεία Μ΄ (οι α΄, β΄) και Μ΄΄ (οι α΄΄, β΄΄) τα οποία βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στον y_{12}, χωρίς να είναι εγκάρσιες, τότε κάθε μια τους περνάει απ' το Μ.



Σχήμα 68

Επομένως, για να τέμνονται δύο ευθείες α(α΄, α΄΄) και β(β΄, β΄΄), θα πρέπει το σημείο τομής Μ΄ των πρώτων προβολών α΄, β΄ και το σημείο τομής Μ΄΄ των δεύτερων προβολών α΄΄, β΄΄ να βρίσκονται σε ευθεία ***κάθετη*** στον άξονα y_{12}.

Αν το σημείο τομής των πρώτων προβολών δύο ευθειών α και β και το σημείο τομής των δεύτερων προβολών τους ***δεν*** αποτελούν ευθεία *κάθετη* στον άξονα y_{12}, τότε οι α και β είναι ***ασύμβατες*** (σχήμα 68).

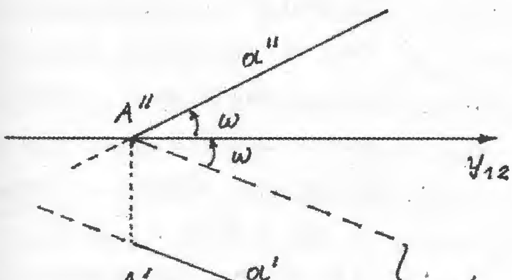


Σχήμα 69

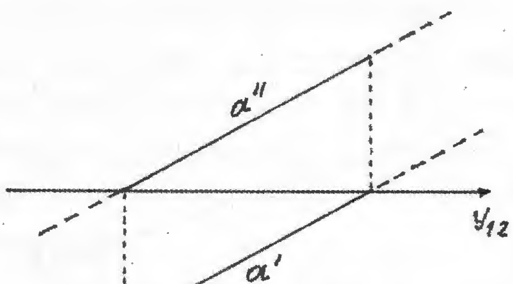
Αν τώρα δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε εύκολα προκύπτει ότι τόσο οι πρώτες προβολές τους, όσο και οι δεύτερες πρέπει να είναι παράλληλες. Άρα α΄ // β΄ και α΄΄ // β΄΄ (σχήμα 69). Οι ευθείες α και β θα πρέπει να μην είναι εγκάρσιες.

4.8 Ευθείες παράλληλες προς τα e_{13} και e_{24}

Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς το επίπεδο συμμετρίας e_{13} και δεν είναι εγκάρσια, τότε το ίχνος της Λ με το e_{13} απομακρύνεται στο άπειρο, επομένως οι προβολές α΄ και α΄΄ θα σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα y_{12}, χωρίς να είναι παράλληλες μεταξύ των (σχήμα 70).



Σχήμα 70

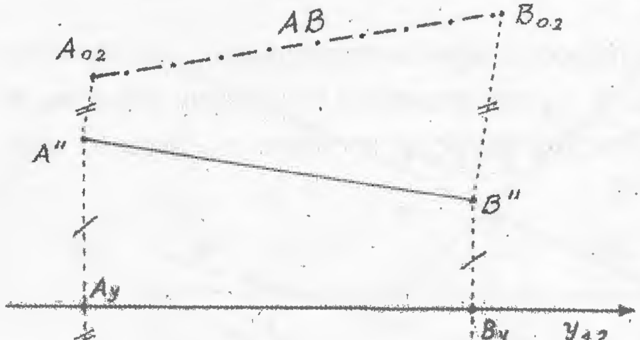


Σχήμα 71

Αν τώρα μια ευθεία είναι παράλληλη προς το επίπεδο συμπτώσεως e_{24}, χωρίς να είναι εγκάρσια, τότε το ίχνος της Λ με το e_{24} απομακρύνεται στο άπειρο. Επομένως οι προβολές της α΄ και α΄΄ θα τέμνονται στο άπειρο, δηλαδή θα είναι παράλληλες (σχήμα 71). Ο περιορισμός που βάζουμε "να μην είναι εγκάρσιες" γίνεται, επειδή οι προβολές μιας εγκάρσιας ευθείας είναι όπως είδαμε πάντα κάθετες στον άξονα y_{12}.

4.9 Απόσταση δύο σημείων (κατάκλιση ευθύγραμμου τμήματος)

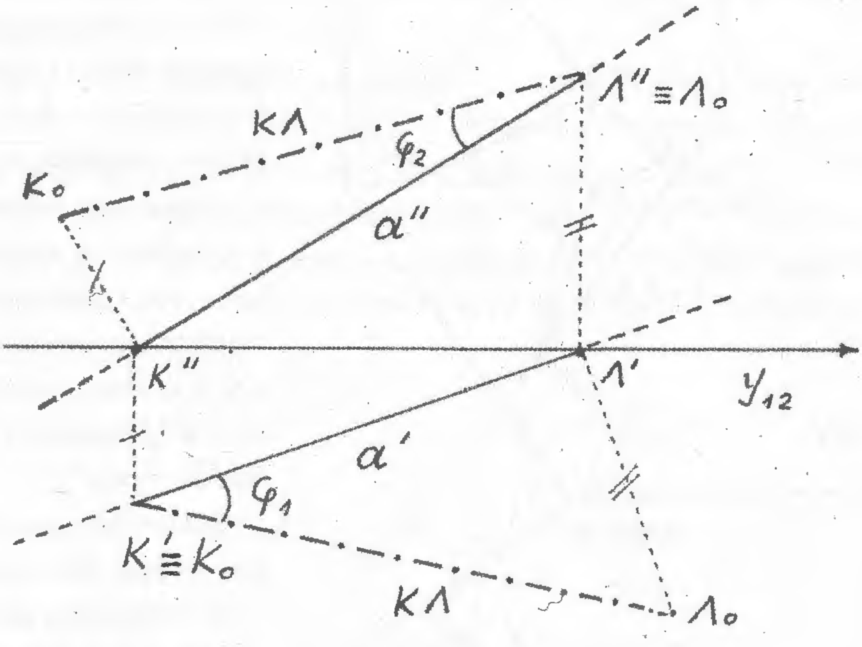
Δίνονται δύο σημεία Α(Α΄, Α΄΄) και Β(Β΄, Β΄΄) που αποτελούν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Για να βρούμε την απόσταση των σημείων Α και Β, ή το πραγματικό μέγεθος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σκεφτόμαστε όπως και στην Παραστατική ενός επιπέδου. Δηλαδή θεωρούμε το επίπεδο που διέρχεται από την ΑΒ και είναι κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο προβολής e_1, ή κάθετο στο κατακόρυφο επίπεδο προβολής e_2. Στην πρώτη περίπτωση περιστρέφουμε το επίπεδο αυτό γύρω απ' την πρώτη προβολή της ΑΒ, την Α΄Β΄, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το περιστρέφουμε γύρω από τη δεύτερη προβολή Α΄΄Β΄΄. Στην πρώτη περίπτωση φέρνουμε κάθετες στα σημεία Α΄ και Β΄ και ορίζουμε μήκη όσο τα υψόμετρα (κατηγμένες) των Α και Β, δηλαδή όσο οι αποστάσεις των Α΄΄ και Β΄΄ απ' τον άξονα y_{12}. Έτσι, $A'A_{01} = A''A_y$ και $B'B_{01} = B''B_y$ (σχήμα 72). Ανάλογα, στη δεύτερη περίπτωση φέρνουμε κάθετες στα Α΄΄ και Β΄΄ και ορίζουμε μήκη όσο οι αποστάσεις (τετμημένες) των Α και Β, δηλαδή όσο οι αποστάσεις των Α΄ και Β΄ απ' τον άξονα y_{12}. Έτσι, $A''A_{02} = A'A_y$ και $B''B_{02} = B'B_y$. Και στις δύο περιπτώσεις το πραγματικό μέγεθος του ΑΒ είναι το ίδιο, δηλαδή $A_{01}B_{01} = A_{02}B_{02} = AB$.



Σχήμα 72

4.10 Γωνίες κλίσης ευθείας ως προς τα e_1, e_2

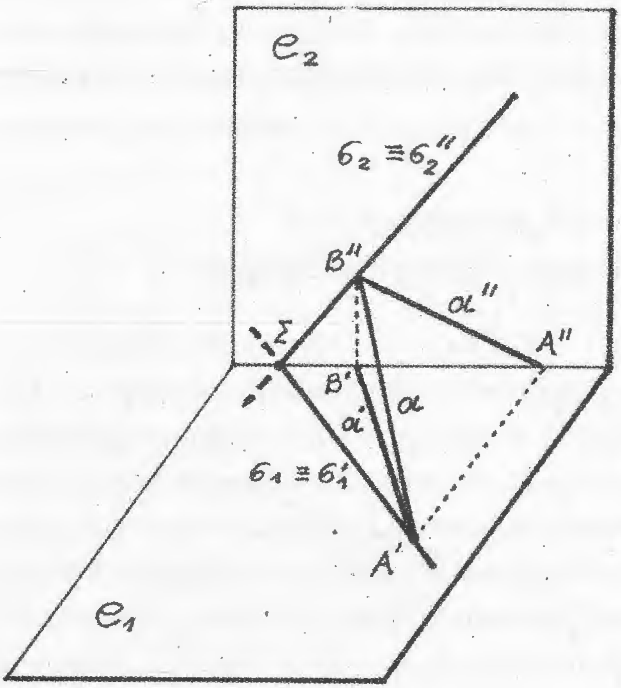
Ως γνωστό, γωνία ευθείας *α* με ένα επίπεδο *p* ορίζεται η οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία με *α* την προβολή της στο *p*. Η γωνία αυτή είναι η γωνία κλίσης της *α* με το επίπεδο *p*.



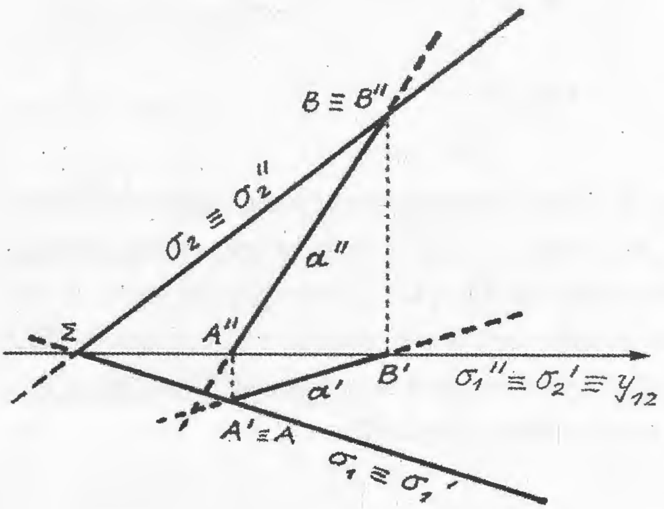
Σχήμα 73

Έστω ευθεία $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και φ_1, φ_2 οι γωνίες κλίσης αυτής με τα επίπεδα προβολής e_1 και e_2 αντίστοιχα. Αν Κ(Κ΄, Κ΄΄) και Λ(Λ΄, Λ΄΄) είναι τα ίχνη αυτής, η γωνία κλίσης φ_1 θα είναι η οξεία γωνία που σχηματίζει η ΚΛ με την προβολή της Κ΄Λ΄ στο e_1, ενώ η γωνία κλίσης φ_2 θα είναι η οξεία γωνία που σχηματίζει η ΚΛ με την προβολή της Κ΄΄Λ΄΄ στο e_2. Η κατάκλιση της ΚΛ στο e_1 κατά τα γνωστά θα δώσει την φ_1, ενώ η κατάκλιση της ΚΛ στο e_2 θα δώσει την φ_2 (σχήμα 73).

4.11 Παράσταση επιπέδου



Σχήμα 74



Σχήμα 75

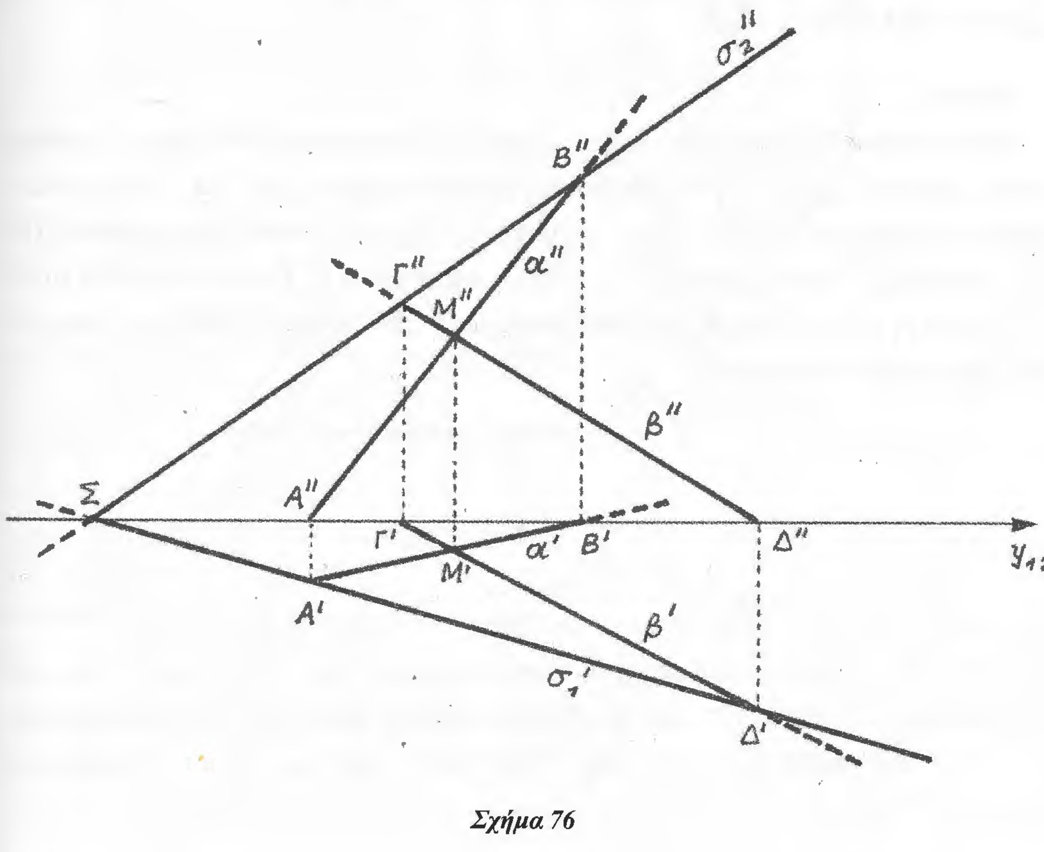
Έστω τα δύο επίπεδα e_1 και e_2 στο χώρο και ένα επίπεδο p που τα τέμνει κατά τις ευθείες-ίχνη σ_1 και σ_2 (σχήμα 74). Η πρώτη προβολή του ίχνους σ_1 (η σ'_1) συμπίπτει με το σ_1 δηλαδή $\sigma_1 \equiv \sigma'_1$, ενώ η δεύτερη προβολή του σ_1 (η σ''_1) συμπίπτει με τον άξονα y_{12}. Επίσης, η πρώτη προβολή του ίχνους σ_2 (η σ'_2) συμπίπτει με τον άξονα y_{12}, ενώ η δεύτερη προβολή του σ_2 (η σ''_2) συμπίπτει με το σ_2 δηλαδή $\sigma_2 \equiv \sigma''_2$.

Θεωρούμε μια ευθεία α που ανήκει στο επίπεδο p. Τότε το ίχνος της με το e_1 (το Α) θα έχει πρώτη προβολή Α΄ η οποία θα βρίσκεται πάνω στο σ'_1, ενώ η δεύτερη προβολή Α΄΄ θα βρίσκεται πάνω στον άξονα y_{12}. Επίσης, το ίχνος της α με το e_2 (το Β) θα έχει πρώτη προβολή Β΄ πάνω στον άξονα y_{12}, ενώ η δεύτερη προβολή Β΄΄ θα βρίσκεται πάνω στο σ''_2. Ώστε, <u>για να ανήκει μια ευθεία α σ' ένα επίπεδο p, πρέπει και αρκεί τα ίχνη της</u>

να βρίσκονται στα ομώνυμα ίχνη του επιπέδου. Το σχήμα 74 που παριστάνει το επίπεδο p στο χώρο, έχει τη μορφή του σχήματος 75 στο χαρτί σχεδίασης. Στο σχήμα αυτό φαίνεται ότι η α ανήκει στο p επειδή $A' \in \sigma'_1$ και $B'' \in \sigma''_2$.

Απ' την παράσταση του επιπέδου p γίνεται φανερό ότι στην Παραστατική δύο επιπέδων, το τυχαίο επίπεδο του χώρου παριστάνεται απ' τις προβολές σ'_1, σ''_2 των ιχνών του που τέμνονται πάντα στον άξονα y_{12}. Έτσι το επίπεδο p θα συμβολίζεται στο εξής με $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$.

Επειδή το τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου p μπορεί να θεωρηθεί ως τομή δύο ευθειών του p προκύπτει ότι για να ανήκει ένα σημείο Μ σ' ένα επίπεδο, πρέπει και αρκεί οι προβολές του να βρίσκονται στις ομώνυμες προβολές δύο ευθειών του επιπέδου. Έτσι, στο σχήμα 76 φαίνεται ότι το σημείο Μ(Μ', Μ'') βρίσκεται στο επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ επειδή οι προβολές του βρίσκονται στις ομώνυμες προβολές δύο ευθειών $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ που όπως φαίνεται σύμφωνα με τα παραπάνω, ανήκουν στο επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$.



Σχήμα 76

Με βάση τα παραπάνω κριτήρια λύνονται εύκολα τα παρακάτω προβλήματα:

1ο πρόβλημα

Δίνεται ένα επίπεδο p με τα ίχνη του σ'_1, σ''_2 και μια απ' τις προβολές σημείου Μ που ανήκει στο p. Να κατασκευαστεί η άλλη προβολή.

Λύση

Αν δίνεται π.χ. η πρώτη προβολή του Μ η Μ΄, για να βρούμε την άλλη προβολή Μ΄΄ φέρνουμε απ' το Μ΄ τυχαία ευθεία α' (σχήμα 76) της οποίας κατασκευάζουμε κατά τα γνωστά τη δεύτερη προβολή α'' έτσι ώστε να ανήκει στο p.

Μετά υψώνουμε απ' το Μ΄ κάθετη μέχρι να τμήσει την α'' στο Μ΄΄, που θα είναι η ζητούμενη δεύτερη προβολή.

2ο πρόβλημα

Να κατασκευαστούν τα ίχνη σ'_1, σ''_2 ενός επιπέδου p, όταν δοθούν δύο τεμνόμενες ευθείες α και β.

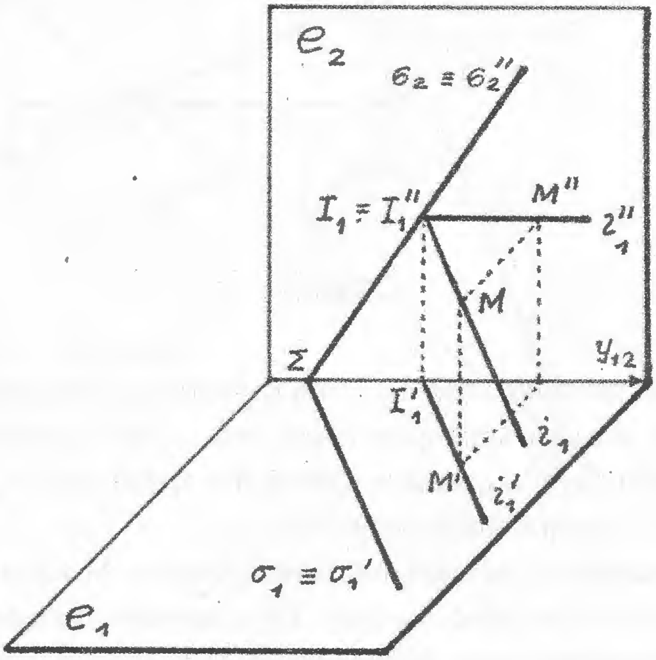
Λύση

Απ' το σχήμα 76 γίνεται φανερό ότι πρέπει να προσδιορίσουμε τα ίχνη των ευθειών α και β με τα e_1 και e_2. Προσδιορίζουμε λοιπόν το σημείο Α(Α΄, Α΄΄) που είναι το ίχνος της α με το e_1 και το Β(Β΄, Β΄΄) ίχνος της α με το e_2, καθώς επίσης και το Γ(Γ΄, Γ΄΄) ίχνος της β με το e_2 και Δ(Δ΄, Δ΄΄) ίχνος της β με το e_1. Ενώνοντας τώρα τα Α΄, Δ΄ έχουμε το πρώτο ίχνος σ'_1 και ενώνοντας τα Γ΄΄, Β΄΄ έχουμε το δεύτερο ίχνος σ''_2 του ζητούμενου επιπέδου p.

4.12 Ιχνοπαράλληλες και ιχνοκάθετες επιπέδου

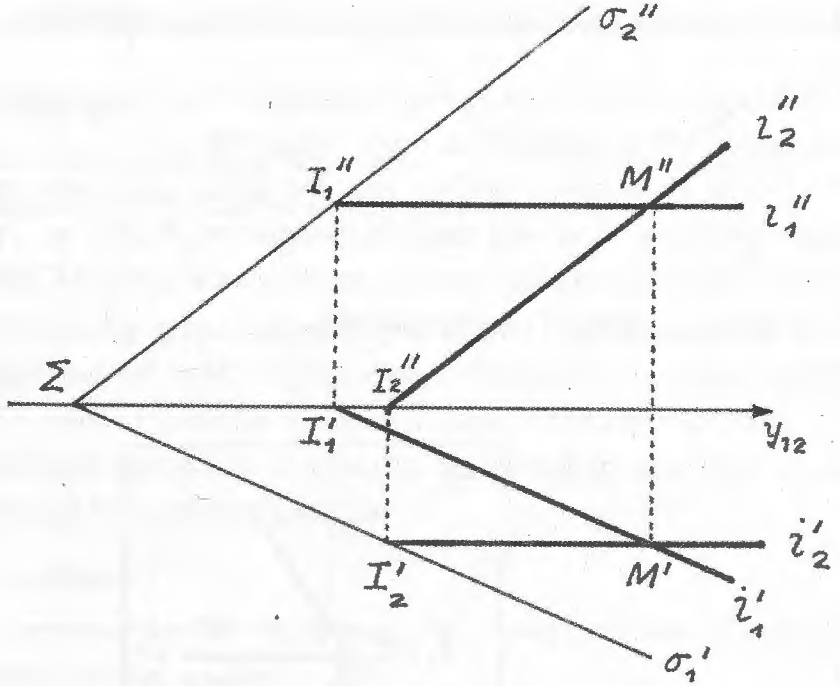
Έστω επίπεδο p στο χώρο που ορίζεται απ' τα ίχνη του σ'_1, σ''_2 και σημείο Μ με τις προβολές του Μ′, Μ′′ το οποίο ανήκει στο p (σχήμα 77).

Αν φέρουμε απ' το Μ μια παράλληλη προς το πρώτο ίχνος σ'_1 του p, τότε ορίζεται η i_1 που λέγεται *πρώτη ιχνοπαράλληλη* του p. Οι προβολές της θα είναι οι i'_1 και i''_1 τέτοιες ώστε η i'_1 θα είναι παράλληλη προς το πρώτο ίχνος σ'_1, ενώ η i''_1 θα είναι παράλληλη προς τον y_{12} (σχήμα 77 και σχήμα 78).



Σχήμα 77

Εντελώς ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και την *δεύτερη ιχνοπαράλληλη* του σημείου Μ, την i_2 που θα είναι παράλληλη προς το δεύτερο ίχνος σ''_2 του p. Οι προβολές της θα είναι, η μεν πρώτη i'_2 παράλληλη προς τον άξονα y_{12}, ενώ η δεύτερη προβολή της παράλληλη προς το δεύτερο ίχνος σ''_2 του p (σχήμα 78).

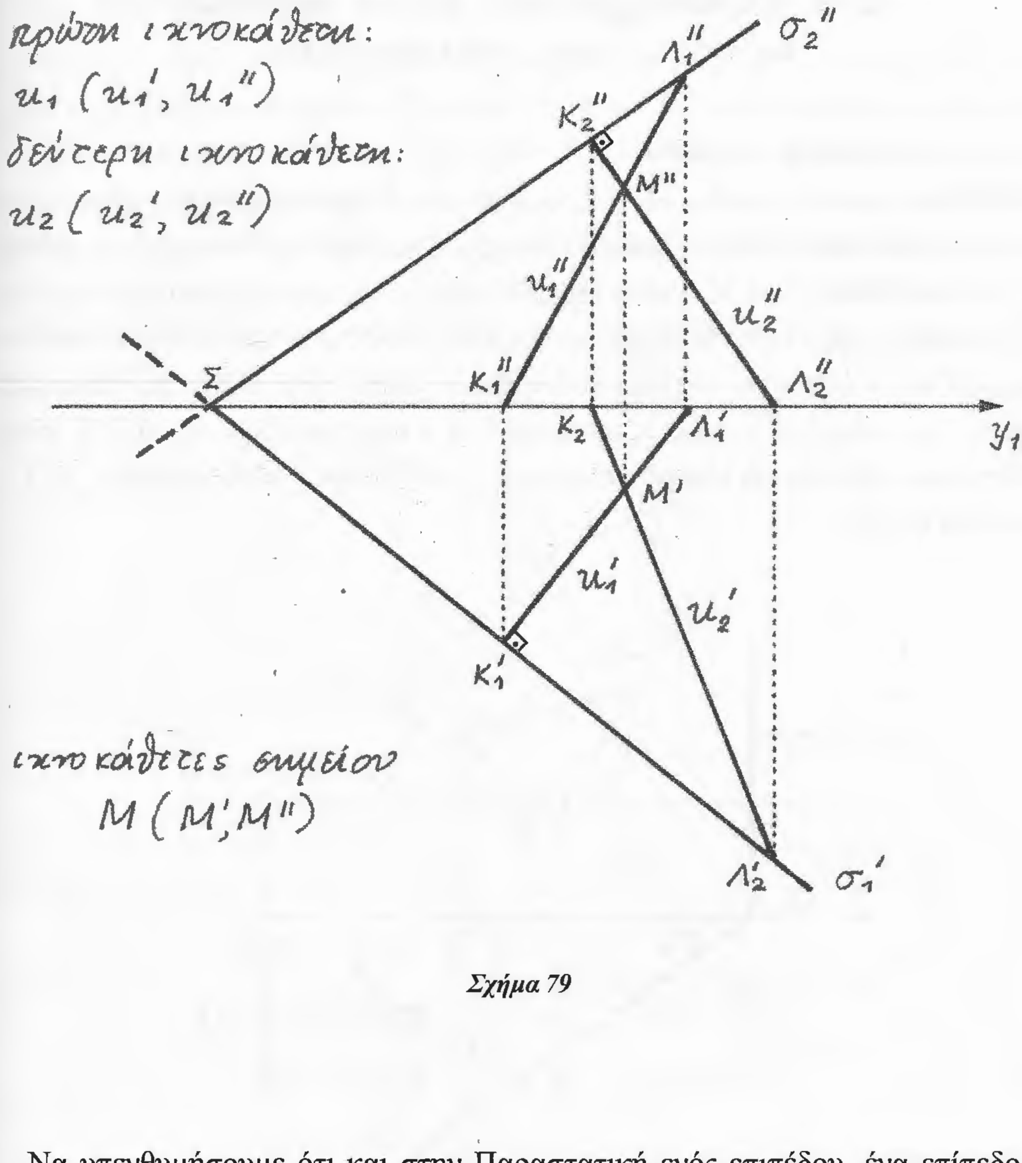


Σχήμα 78

Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζουμε ως *πρώτη ιχνοκάθετη* u_1 σημείου M που ανήκει στο p μια ευθεία που είναι κάθετη στο πρώτο ίχνος σ'_1 του p. Είναι προφανές ότι η πρώτη προβολή της u_1 η u'_1, θα είναι κάθετη στο πρώτο ίχνος σ'_1 και η δεύτερη τέτοια ώστε η u_1 να ανήκει στο p (σχήμα 79).

Ανάλογα ορίζουμε ως *δεύτερη ιχνοκάθετη* u_2 σημείου M του p μια ευθεία που είναι κάθετη στο δεύτερο ίχνος σ''_2 του p. Είναι προφανές ότι η δεύτερη προβολή της u_2 η u''_2 θα είναι κάθετη στο δεύτερο ίχνος σ''_2 και η πρώτη τέτοια ώστε η u_2 να ανήκει στο p (σχήμα 79).

Αν δοθούν οι δύο προβολές μιας ιχνοπαράλληλης επιπέδου p, το επίπεδο δεν ορίζεται. Αν όμως δοθούν οι προβολές μιας ιχνοκάθετης, τότε το επίπεδο p μπορεί να οριστεί. Πράγματι, αν δοθούν π.χ. οι προβολές (u'_1, u''_1) μιας πρώτης ιχνοκάθετης και $K_1(K'_1, K''_1)$ το ίχνος αυτής με το e_1, ενώ $\Lambda_1(\Lambda'_1, \Lambda''_1)$ το ίχνος αυτής με το e_2, τότε το πρώτο ίχνος του επιπέδου, το σ'_1, θα είναι κάθετο στην u'_1, ενώ το δεύτερο σ''_2 θα οριστεί από το σημείο Σ (τομή του σ'_1 τον y_{12}) και το σημείο Λ''_1 (σχήμα 79).



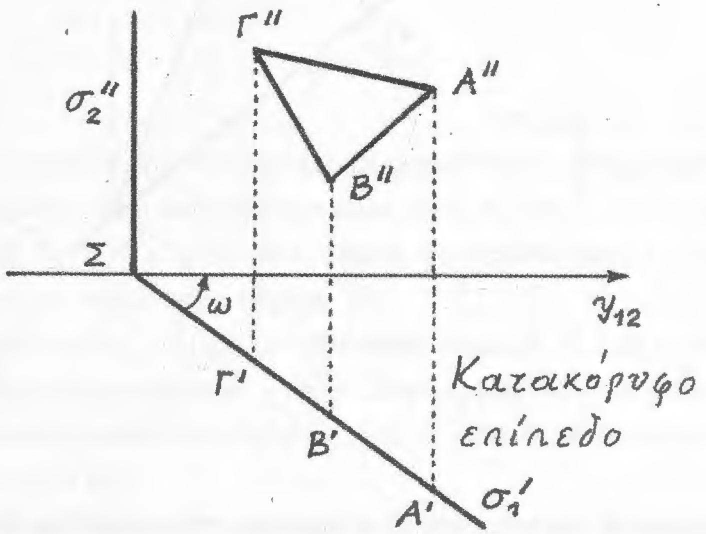
Σχήμα 79

Να υπενθυμήσουμε ότι και στην Παραστατική ενός επιπέδου, ένα επίπεδο *p* ορίζεται από την προβολή μιας ιχνοκάθετης *u´*, η οποία είναι συνήθως βαθμολογημένη, δηλ. *p* (*u´*).

4.13 Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων ως προς τα επίπεδα προβολής

1) Κατακόρυφα επίπεδα.

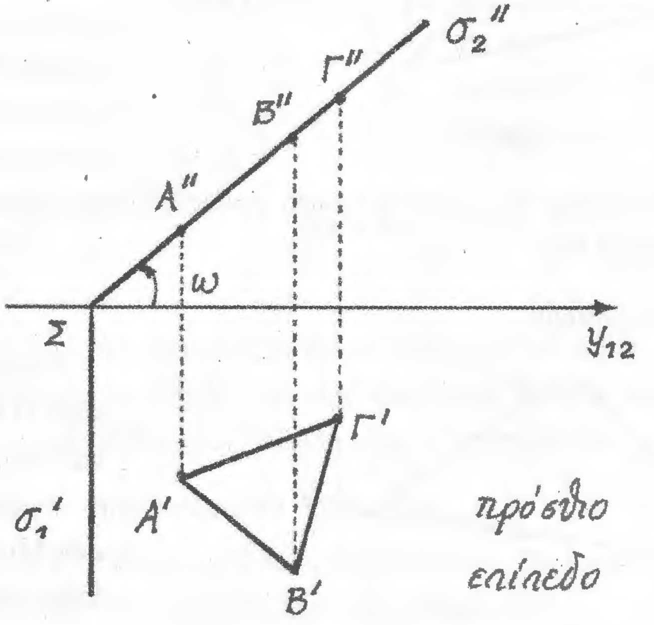
Είναι τα επίπεδα τα κάθετα στο οριζόντιο επίπεδο e_1. Το δεύτερο ίχνος ενός τέτοιου επιπέδου είναι ευθεία κάθετη στον άξονα y_{12}, ενώ το πρώτο ίχνος σχηματίζει με τον y_{12} γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο της δίεδρης γωνίας που ορίζεται απ' το κατακόρυφο επίπεδο και απ' το e_2 (σχήμα 80). Αν έχουμε ένα οποιοδήποτε σχήμα σ' ένα κατακόρυφο επίπεδο, τότε η πρώτη προβολή του βρίσκεται στο πρώτο ίχνος σ'_1 του επιπέδου. Έτσι, ενός τριγώνου ΑΒΓ η πρώτη προβολή του Α΄Β΄Γ΄ είναι ευθύγραμμο τμήμα και βρίσκεται στο ίχνος σ'_1, ενώ η δεύτερη προβολή του Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ είναι ένα τρίγωνο.



Σχήμα 80

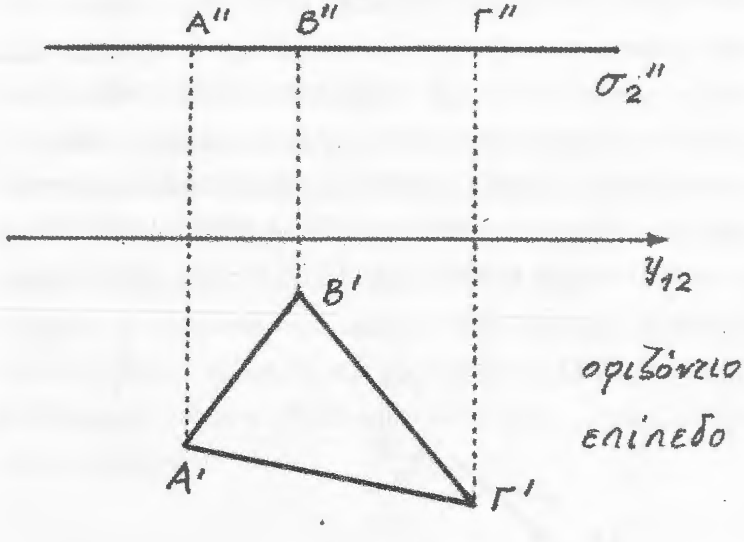
2) Πρόσθια επίπεδα.

Είναι τα επίπεδα τα κάθετα στο κατακόρυφο επίπεδο e_2. Το πρώτο ίχνος ενός τέτοιου επιπέδου είναι ευθεία κάθετη στον άξονα y_{12}, ενώ το δεύτερο ίχνος σχηματίζει με τον y_{12} γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο της δίεδρης γωνίας που ορίζεται απ' το πρόσθιο επίπεδο και το e_1 (σχήμα 81). Αν έχουμε ένα οποιοδήποτε σχήμα σ' ένα πρόσθιο επίπεδο, τότε η δεύτερη προβολή του βρίσκεται πάνω στο δεύτερο ίχνος σ''_2 του επιπέδου. Έτσι, ενός τριγώνου ΑΒΓ η πρώτη προβολή του Α΄Β΄Γ΄ είναι ένα τρίγωνο, ενώ η δεύτερη προβολή του Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ είναι ευθύγραμμο τμήμα και βρίσκεται στο ίχνος σ''_2 (σχήμα 81).



Σχήμα 81

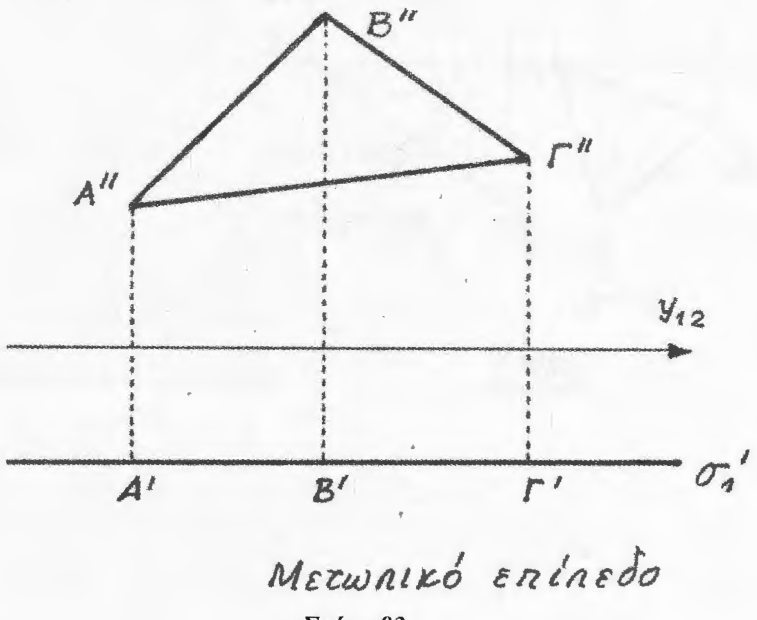
3) Οριζόντια επίπεδα.



Σχήμα 82

Είναι τα επίπεδα τα παράλληλα προς το οριζόντιο επίπεδο e_1. Το δεύτερο ίχνος ενός οριζόντιου επιπέδου είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y_{12}, ενώ το πρώτο ίχνος είναι η επ' άπειρο ευθεία του e_1. Η δεύτερη προβολή ενός σχήματος που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο κείται στο δεύτερο ίχνος σ''_2, ενώ η πρώτη προβολή είναι σχήμα ίσο με το προβαλλόμενο (σχήμα 82).

4) Μετωπικά επίπεδα.

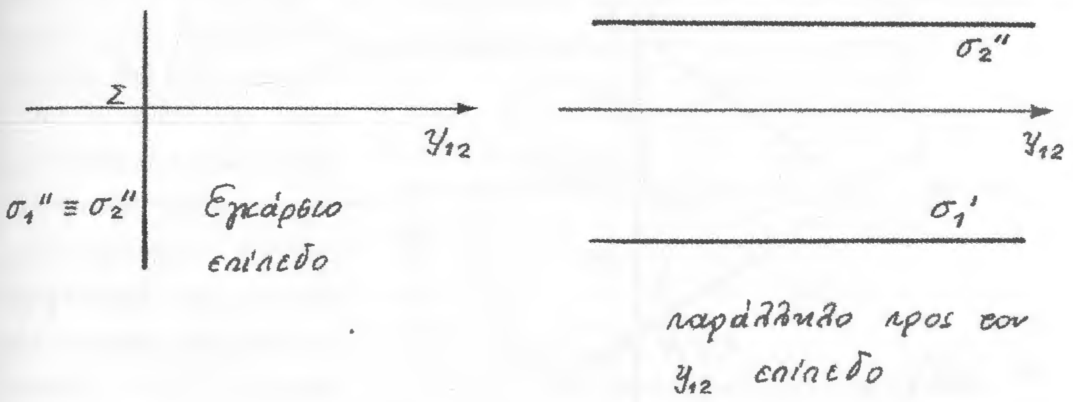


Σχήμα 83

Είναι τα επίπεδα τα παράλληλα προς το κατακόρυφο επίπεδο e_2. Το πρώτο ίχνος σ'_1 ενός τέτοιου επιπέδου είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y_{12}, ενώ το δεύτερο ίχνος συμπίπτει με την επ' άπειρο ευθεία του e_2. Η πρώτη προβολή ενός σχήματος που βρίσκεται σ' ένα μετωπικό επίπεδο κείται στο πρώτο ίχνος, ενώ η δεύτερη προβολή είναι σχήμα ίσο με το προβαλλόμενο (σχήμα 83).

5) Εγκάρσια επίπεδα.

Είναι τα επίπεδα τα κάθετα στον άξονα y_{12}.



Σχήμα 84

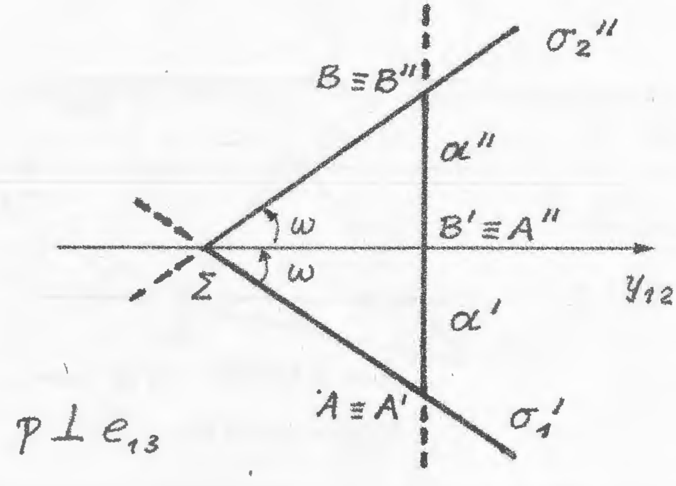
Και τα δύο ίχνη ενός τέτοιου επιπέδου είναι κάθετα στον άξονα y_{12}. Και οι δύο προβολές ενός σχήματος που βρίσκεται σ' ένα τέτοιο επίπεδο βρίσκονται στα ίχνη σ'_1 και σ''_2 τα οποία ταυτίζονται, δηλαδή $\sigma'_1 \equiv \sigma''_2$ (σχήμα 84).

6) Παράλληλα προς τον άξονα y_{12} επίπεδα.

Είναι τα επίπεδα τα παράλληλα προς τον άξονα y_{12}. Και τα δύο ίχνη ενός τέτοιου επιπέδου είναι παράλληλα προς τον άξονα y_{12} (σχήμα 84).

4.14 Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων ως προς τα e_{13} και e_{24}

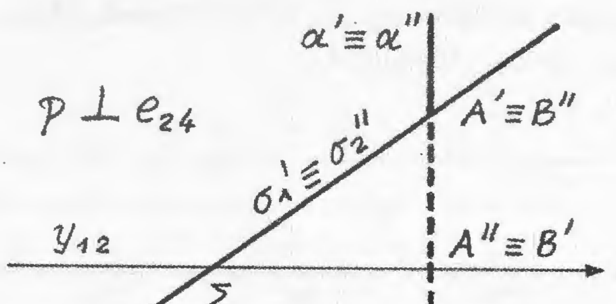
1) Επίπεδα κάθετα στο e_{13} (συμμετρίας)



Σχήμα 85

Κατ' αρχή όλα τα εγκάρσια επίπεδα είναι κάθετα, τόσο στο επίπεδο συμμετρίας e_{13}, όσο και στο επίπεδο συμπτώσεως e_{24}. Έστω τώρα ένα επίπεδο p μη εγκάρσιο, κάθετο στο επίπεδο συμμετρίας e_{13}. Τέμνουμε το επίπεδο p με ένα εγκάρσιο επίπεδο και έστω $\alpha(\alpha', \alpha'')$ η ευθεία τομής τους (σχήμα 85). Η ευθεία αυτή θα είναι κάθετη στο e_{13} ως τομή δύο καθέτων προς το e_{13} επιπέδων. Αν λοιπόν Α και Β είναι τα ίχνη της, θα είναι $A'A'' = B'B''$. Και επειδή τα ίχνη του p θα περάσουν από τα ίχνη της α, προκύπτει ότι τα ίχνη σ'_1 και σ''_2 του p θα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y_{12} (σχήμα 85).

2) Επίπεδα κάθετα στο e_{24} (συμπτώσεως)

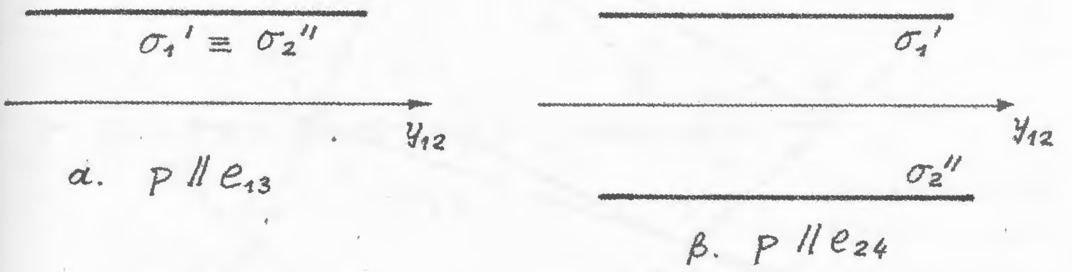


Σχήμα 86

Έστω τώρα ένα επίπεδο p μη εγκάρσιο, κάθετο στο επίπεδο συμπτώσεως e_{24}. Τέμνουμε το επίπεδο p με ένα εγκάρσιο επίπεδο και έστω $\alpha(\alpha', \alpha'')$ η ευθεία τομής τους. Η ευθεία αυτή θα είναι κάθετη στο e_{24} ως τομή δύο καθέτων προς το e_{24} επιπέδων. Αν λοιπόν Α και Β είναι τα ίχνη αυτής στα επίπεδα e_1 και e_2 αντίστοιχα, αυτά θα συμπέσουν μετά την κατάκλιση του e_2 πάνω στο e_1. Επειδή δε τα ίχνη του p θα περάσουν από τα ίχνη της α, προκύπτει ότι τα ίχνη σ'_1 και σ''_2 του p' θα συμπέσουν, δηλαδή $\sigma'_1 \equiv \sigma''_2$ (σχήμα 86).

3) Επίπεδα παράλληλα προς το e_{13} (συμμετρίας)

Ένα τέτοιο επίπεδο θα είναι αφ' ενός μεν κάθετο στο επίπεδο συμπτώσεως, αφ' ετέρου παράλληλο προς τον άξονα y_{12}, επομένως τα ίχνη του θα συμπίπτουν λόγω της πρώτης συνθήκης και θα είναι παράλληλα προς τον άξονα y_{12} λόγω της δεύτερης συνθήκης (σχήμα 87α).



Σχήμα 87

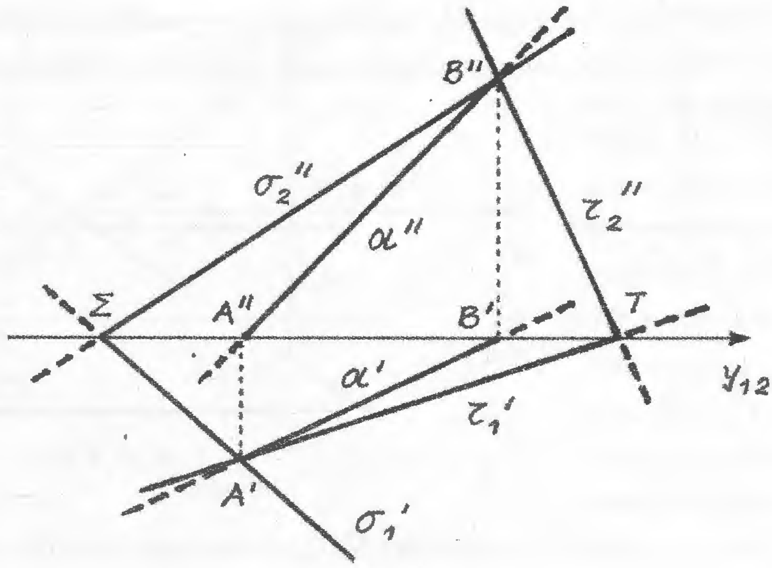
4) Επίπεδα παράλληλα προς το e_{24} (συμπτώσεως)

Ένα τέτοιο επίπεδο θα είναι αφ' ενός κάθετο στο επίπεδο συμμετρίας, αφ' ετέρου παράλληλο προς τον άξονα y_{12}, επομένως τα ίχνη του θα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y_{12} λόγω της πρώτης συνθήκης και θα είναι παράλληλα στον άξονα y_{12} λόγω της δεύτερης συνθήκης (σχήμα 87β).

4.15 Τομή δύο επιπέδων

Κατά την τομή δύο επιπέδων διακρίνουμε τις παρακάτω θέσεις αυτών:

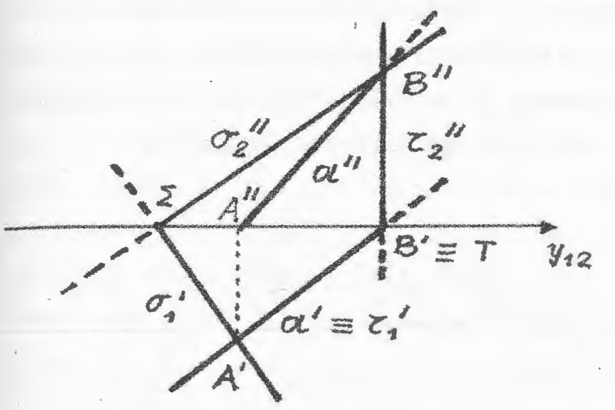
1ον: Τα επίπεδα $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $q(\tau'_1, \tau''_2)$ είναι τυχαία (γενική περίπτωση)



Σχήμα 88

Έστω δύο επίπεδα $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $q(\tau'_1, \tau''_2)$. Για να βρούμε την ευθεία τομής $\alpha(\alpha', \alpha'')$ των δύο αυτών επιπέδων, παρατηρούμε ότι το σημείο τομής των πρώτων ιχνών σ'_1, τ'_1 θα αποτελεί την πρώτη προβολή Α΄ της $\alpha(\alpha', \alpha'')$ με το e_1 (η δεύτερη προβολή Α΄΄ θα βρίσκεται στον άξονα y_{12}), ενώ το σημείο τομής των δεύτερων ιχνών σ''_2, τ''_2 θα αποτελεί την δεύτερη προβολή Β΄΄ της $\alpha(\alpha', \alpha'')$ με το e_2 (η πρώτη προβολή Β΄ θα βρίσκεται στον άξονα y_{12}). Έτσι, απ' το Α΄ φέρουμε κάθετη στον y_{12} και ορίζουμε το Α΄΄, καθώς και απ' το Β΄΄ φέρουμε κάθετη στον y_{12} και ορίζουμε το Β΄. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ(Α΄Β΄, Α΄΄Β΄΄) ορίζει την τομή $\alpha(\alpha', \alpha'')$ των δύο επιπέδων $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $q(\tau'_1, \tau''_2)$ (σχήμα 88).

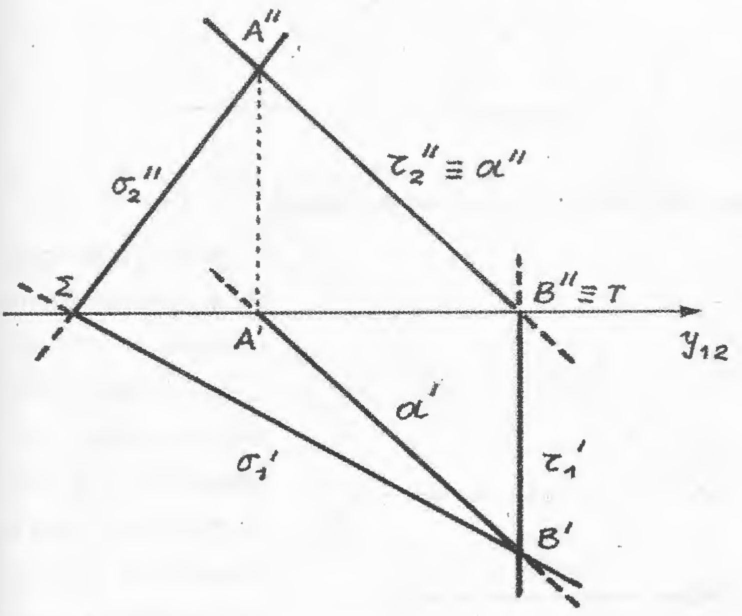
$2^{ον}$: Το ένα από τα επίπεδα το $q(\tau'_1, \tau''_2)$ είναι κατακόρυφο



Σχήμα 89

Επειδή κάθε σχήμα που βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο προβάλλεται στο πρώτο ίχνος του κατακόρυφου επιπέδου, προκύπτει ότι η πρώτη προβολή α' της α συμπίπτει με το πρώτο ίχνος τ'_1 του q. Η δεύτερη προβολή α'' της α κατασκευάζεται απ' την πρώτη (σχήμα 89).

$3^{ον}$: Το ένα από τα επίπεδα το $q(\tau'_1, \tau''_2)$ είναι πρόσθιο

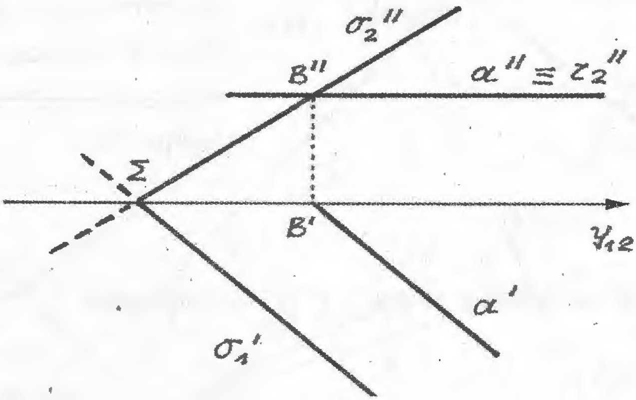


Σχήμα 90

Επειδή κάθε σχήμα που βρίσκεται σε πρόσθιο επίπεδο προβάλλεται στο δεύτερο ίχνος του προσθίου επιπέδου, προκύπτει ότι η δεύτερη προβολή α'' της α συμπίπτει με το δεύτερο ίχνος τ''_2 του q. Η πρώτη προβολή α' της α κατασκευάζεται απ' την δεύτερη α'' κατά τα γνωστά (σχήμα 90).

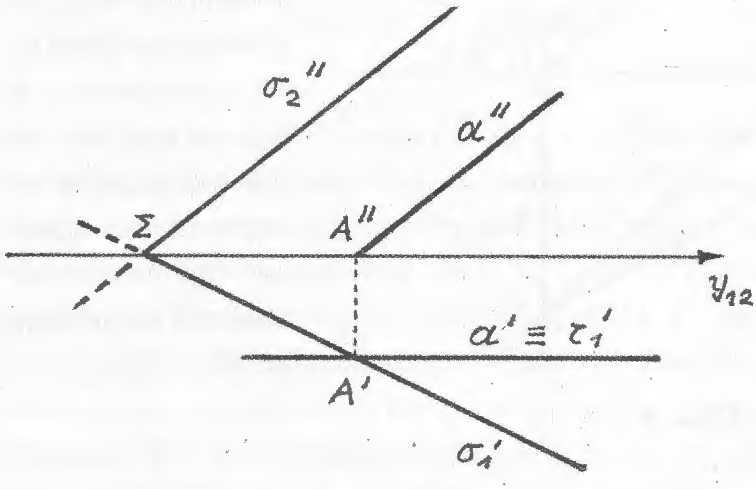
4^{ov}: Το ένα από τα επίπεδα το $q(\tau'_1, \tau''_2)$ είναι οριζόντιο

Επειδή κάθε σχήμα που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο προβάλλεται πάνω στο δεύτερο ίχνος του, προκύπτει ότι η δεύτερη προβολή α'' της α συμπίπτει με το δεύτερο ίχνος τ''_2 του q. Επομένως η α είναι μια πρώτη ιχνοπαράλληλη του $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$. Η πρώτη προβολή α' της α βρίσκεται απ' τη δεύτερη α'' κατά τα γνωστά (σχήμα 91).



Σχήμα 91

5^{ov}: Το ένα από τα επίπεδα το $q(\tau'_1, \tau''_2)$ είναι μετωπικό

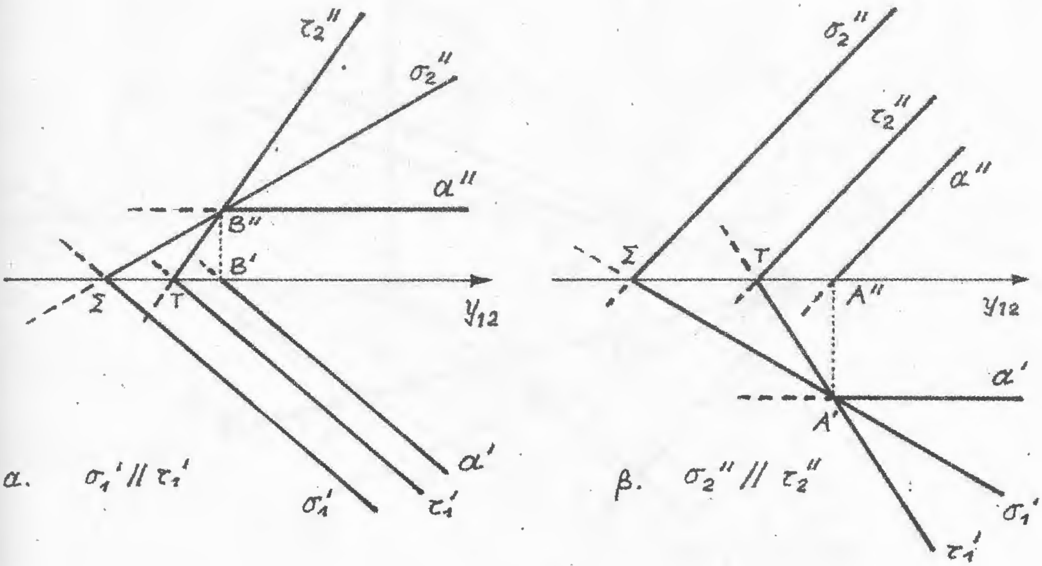


Σχήμα 92

Επειδή κάθε σχήμα που βρίσκεται σε μετωπικό επίπεδο προβάλλεται πάνω στο πρώτο ίχνος του, προκύπτει ότι η πρώτη προβολή α' της α συμπίπτει με το πρώτο ίχνος τ'_1 του q. Επομένως η α είναι μια δεύτερη ιχνοπαράλληλη του $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$. Η δεύτερη προβολή α'' της α βρίσκεται απ' τη πρώτη α' (σχήμα 92).

6ον: Τα πρώτα (ή τα δεύτερα) ίχνη των επιπέδων *p* και *q* είναι παράλληλα

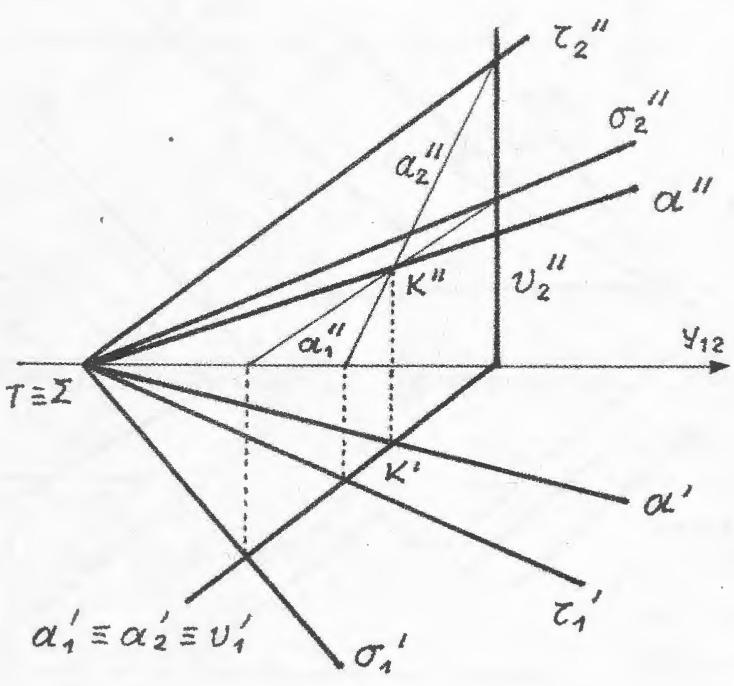
Έστω ότι $\sigma'_1 // \tau'_1$. Τα δύο επίπεδα *p* και *q*, επειδή περνούν από δύο παράλληλες ευθείες, π.χ. τα πρώτα ίχνη τους (σχήμα 93α), θα τέμνονται κατά μια ευθεία παράλληλη προς αυτά, επομένως η ευθεία τομής τους α θα είναι πρώτη ιχνοπαράλληλη και των δύο επιπέδων (δηλαδή η α΄ θα είναι παράλληλη προς τα πρώτα ίχνη σ'_1 και τ'_1). Η δεύτερη προβολή της α η α'' θα περάσει απ' το σημείο $B \equiv B''$ που είναι η τομή των δεύτερων ιχνών σ''_2 και τ''_2 των δύο επιπέδων. Η πρώτη προβολή α' της α βρίσκεται απ' τη δεύτερη α'' (σχήμα 93α). Ανάλογα υπολογίζεται η τομή των *p* και *q* όταν τα δεύτερα ίχνη τους σ''_2, τ''_2 είναι παράλληλα μεταξύ των (σχήμα 93β). Εδώ η πρώτη προβολή της α η α' θα περάσει απ' το σημείο $A \equiv A'$, τομή των σ'_1, τ'_1.



Σχήμα 93

7^{ov}: Τα ίχνη των επιπέδων p, q τέμνονται στο ίδιο σημείο του άξονα y_{12}

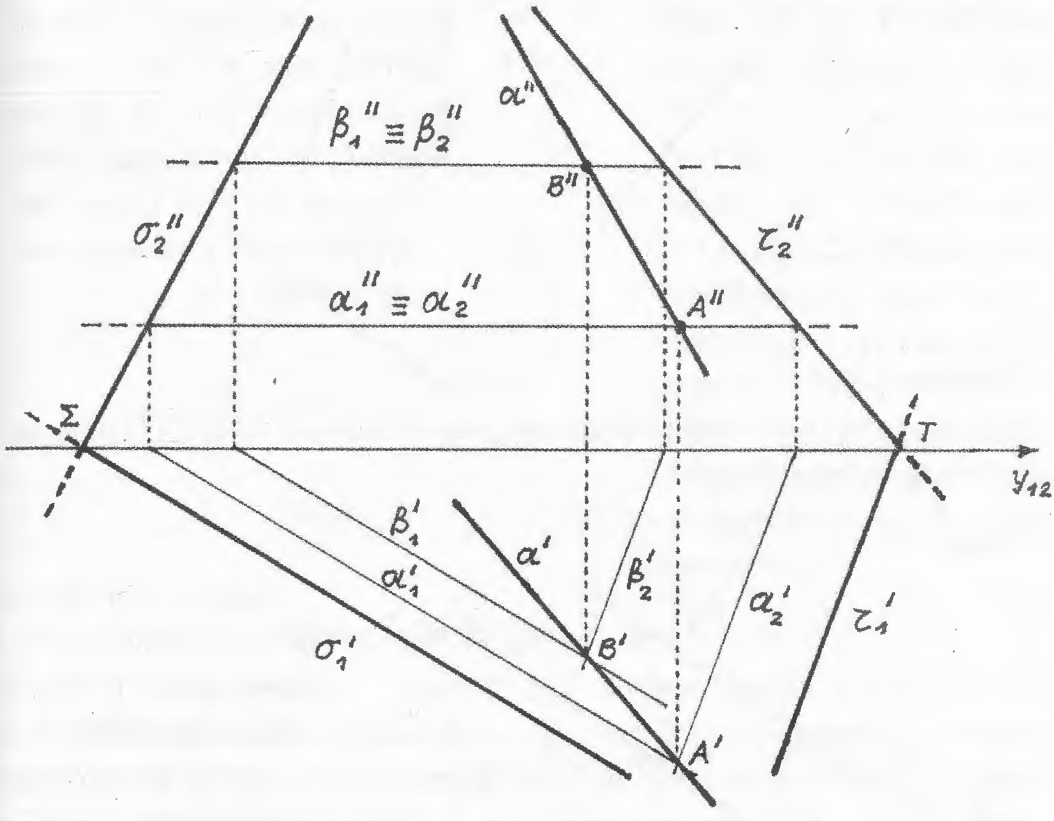
Έστω ότι τα επίπεδα p και q τέμνονται στο ίδιο σημείο Σ πάνω στον άξονα y_{12}. Για να βρούμε τη τομή τους χρησιμοποιούμε βοηθητικό επίπεδο $r(\upsilon'_1, \upsilon''_2)$ κατακόρυφο, που τέμνει τα επίπεδα $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $q(\tau'_1, \tau''_2)$ κατά τις ευθείες $\alpha_1(\alpha'_1, \alpha''_1)$ και $\alpha_2(\alpha'_2, \alpha''_2)$ αντίστοιχα (σχήμα 94). Οι προβολές τους κατασκευάστηκαν κατά τα γνωστά. Το σημείο τομής Κ(Κ΄, Κ΄΄) των επιπέδων p, q, r είναι το σημείο τομής των ευθειών α_1 και α_2. Επομένως οι προβολές της τομής α των δύο επιπέδων p και q είναι $\alpha' \equiv$ ΣΚ΄ και $\alpha'' \equiv$ ΣΚ΄΄.



Σχήμα 94

8ον: Τα ομώνυμα ίχνη των επιπέδων τέμνονται έξω απ' το χαρτί σχεδίασης

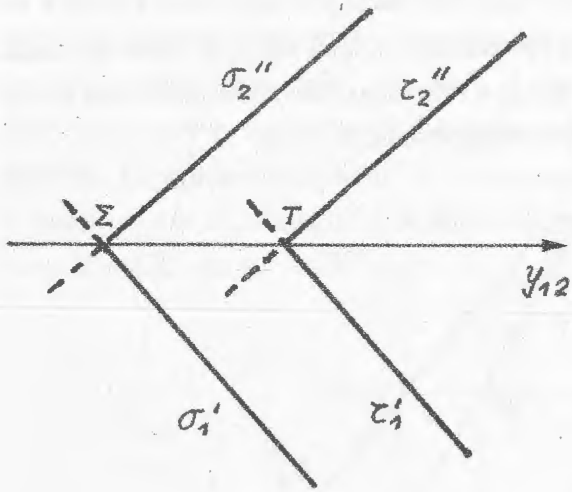
Εδώ χρησιμοποιούμε δύο βοηθητικά οριζόντια επίπεδα a και *b* που τέμνουν το μεν a τα επίπεδα *p* και *q* κατά τις πρώτες ιχνοπαράλληλες α_1 και α_2 αντίστοιχα, το δε *b* κατά τις πρώτες ιχνοπαράλληλες β_1 και β_2 αντίστοιχα. Οι ιχνοπαράλληλες α_1, α_2 τέμνονται στο Α(Α΄, Α΄΄) και οι β_1, β_2 τέμνονται στο Β(Β΄, Β΄΄).



Σχήμα 95

Τα Α και Β επειδή ανήκουν στα *p* και *q* θα ανήκουν και στην τομή τους *α*. Επομένως η ευθεία $\alpha(\alpha', \alpha'') \equiv$ ΑΒ(Α΄Β΄, Α΄΄Β΄΄) είναι η τομή των *p* και *q* (σχήμα 95).

4.16 Παράλληλα επίπεδα



Σχήμα 96

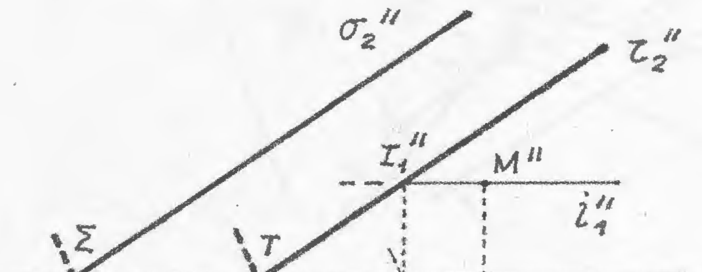
Όπως ξέρουμε, δύο παράλληλα επίπεδα που τέμνονται από τρίτο επίπεδο, τέμνονται κατά παράλληλες ευθείες. Επομένως, αν έχουμε δύο παράλληλα επίπεδα $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $q(\tau'_1, \tau''_2)$, δηλαδή $p \parallel q$, αυτά θα τέμνονται από τα e_1 και e_2 κατά παράλληλες πρώτες και δεύτερες προβολές των ιχνών τους, δηλαδή $\sigma'_1 \parallel \tau'_1$ και $\sigma''_2 \parallel \tau''_2$ (σχήμα 96).

Κατόπιν αυτών μπορούμε να λύσουμε το παρακάτω:

Πρόβλημα:

Από σημείο Μ(Μ΄, Μ΄΄) να αχθεί επίπεδο q παράλληλο προς δοθέν p. (Το p δίνεται με τα δύο ίχνη του σ'_1, σ''_2).

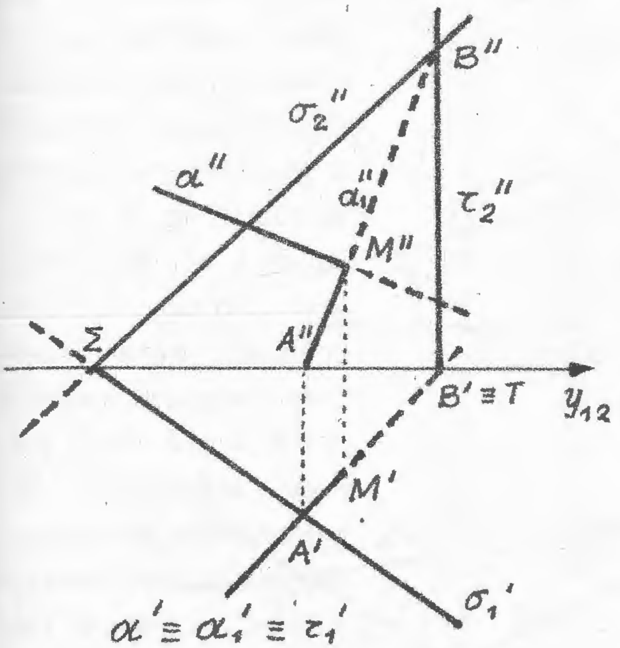
Λύση



Σχήμα 97

Εφόσον το p δίνεται με τα ίχνη του σ'_1, σ''_2, φέρνουμε απ' το Μ μια ευθεία του q παράλληλη προς το πρώτο ίχνος του p το σ'_1 και έστω $I_1(I'_1, I''_1)$ η τομή της με το e_2 (σχήμα 97). Απ' το I''_1 φέρνουμε το δεύτερο ίχνος τ''_2 του q, ($\tau''_2 \parallel \sigma''_2$) που τέμνει τον άξονα y_{12} στο Τ. Απ' το Τ φέρνουμε και το πρώτο ίχνος $\tau'_1 \parallel \sigma'_1$.

4.17 Τομή ευθείας και επιπέδου

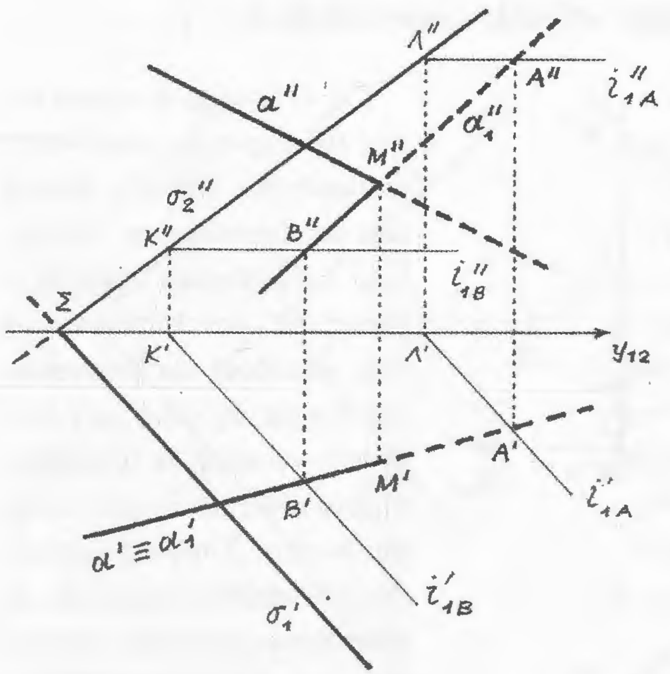


Σχήμα 98

Για να βρούμε το σημείο τομής ευθείας α και επιπέδου p ακολουθούμε την εξής γενική μέθοδο: Φέρνουμε απ' την ευθεία α βοηθητικό επίπεδο q (όπως και στην Παραστατική ενός επιπέδου) και βρίσκουμε την ευθεία α_1 τομή των δύο επιπέδων p και q. Το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο τομής των α και α_1. Συνήθως, ως βοηθητικό επίπεδο παίρνουμε το κατακόρυφο ή πρόσθιο επίπεδο το οποίο προβάλλει την δοθείσα ευθεία α στο e_1 ή e_2 αντίστοιχα. Θα ζητήσουμε την τομή ευθείας και επιπέδου στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Το επίπεδο p δίνεται με τα ίχνη του σ'_1, σ''_2.

Έστω ένα επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $\alpha(\alpha', \alpha'')$ η δοθείσα ευθεία. Φέρνουμε απ' την α ως βοηθητικό επίπεδο το κατακόρυφο $q(\tau'_1, \tau''_2)$. Αυτό θα τμήσει το p κατά μία ευθεία α_1 της οποίας η μεν πρώτη προβολή α'_1 θα συμπέσει με την πρώτη προβολή α' της α, ενώ η δεύτερη προβολή της α''_1 βρίσκεται κατά τα γνωστά. Το σημείο τομής M'' των α'' και α''_1 δίνει την δεύτερη προβολή του M, απ' την οποία εύκολα βρίσκεται και η πρώτη M' (σχήμα 98). Ανάλογες σκέψεις γίνονται αν φέρουμε απ' την α ως βοηθητικό επίπεδο το πρόσθιο επίπεδο r $(\upsilon'_1, \upsilon''_2)$ με $\alpha'' \equiv \upsilon''_2$. Αυτό θα τμήσει το p κατά μια ευθεία α_1 της οποίας η μεν δεύτερη προβολή α''_1 θα συμπέσει με τη δεύτερη προβολή α'' της α, ενώ η πρώτη προβολή της α'_1 βρίσκεται κατά τα γνωστά. Το σημείο τομής M' των α' και α'_1 δίνει την πρώτη προβολή του M, απ' την οποία εύκολα βρίσκεται και η δεύτερη M''.

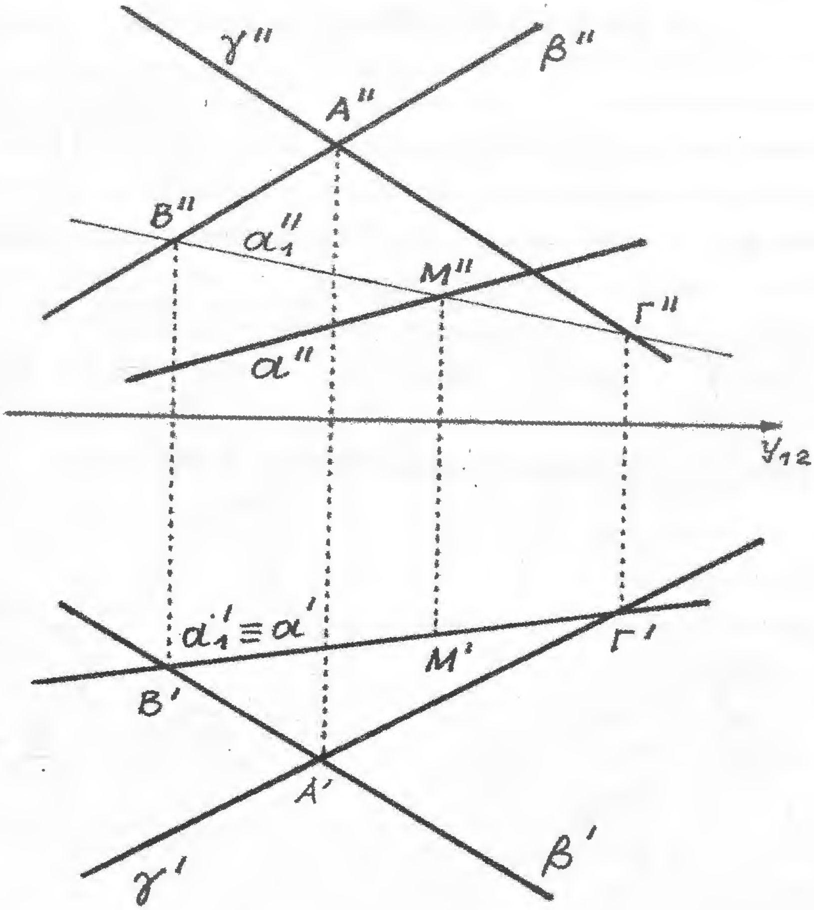


Σχήμα 99

Αν τώρα τα ίχνη της α_1 δεν βρίσκονται μέσα στο χαρτί σχεδίασης, τότε η κατασκευή της α_1 γίνεται ως εξής: Παίρνουμε δύο σημεία A΄, B΄ πάνω στην α' η οποία θα ταυτίζεται με την α'_1. Επειδή η α_1 ανήκει στο p, έπεται ότι τα A και B θα βρίσκονται στο p. Γνωρίζοντας τις πρώτες προβολές A΄, B΄ των A και B βρίσκουμε τις δεύτερες A΄΄, B΄΄ παίρνοντας τις πρώτες ιχνοπαράλληλες του p που περνούν απ' τα A και B. Έτσι ορίζουμε την α''_1. Η τομή της με την α'' θα δώσει το M΄΄ δεύτερη προβολή του σημείου τομής της α με το p. Η πρώτη προβολή M΄ βρίσκεται εύκολα (σχήμα 99). Δεξιά των M΄ και M΄΄, τόσο η ευθεία α όσο και η α_1 δεν φαίνονται διότι καλύπτονται απ' το επίπεδο p. Άρα οι προβολές των θα φαίνονται διακεκομένες.

β) Το επίπεδο p δίνεται από δύο τεμνόμενες ευθείες

Έστω ότι το επίπεδο p ορίζεται από δύο τεμνόμενες ευθείες τις $\beta(\beta', \beta'')$ και $\gamma(\gamma', \gamma'')$. Παίρνουμε τώρα ως βοηθητικό κατακόρυφο επίπεδο $q(\tau'_1, \tau''_2)$ αυτό που περνάει απ' την α (σχήμα 100). Επομένως $\alpha' \equiv \tau'_1$. Το επίπεδο αυτό τέμνει τις β και γ στα B(B΄, B΄΄) και Γ(Γ΄, Γ΄΄) επομένως τέμνει και το επίπεδό τους κατά την $\alpha_1 \equiv$ BΓ.

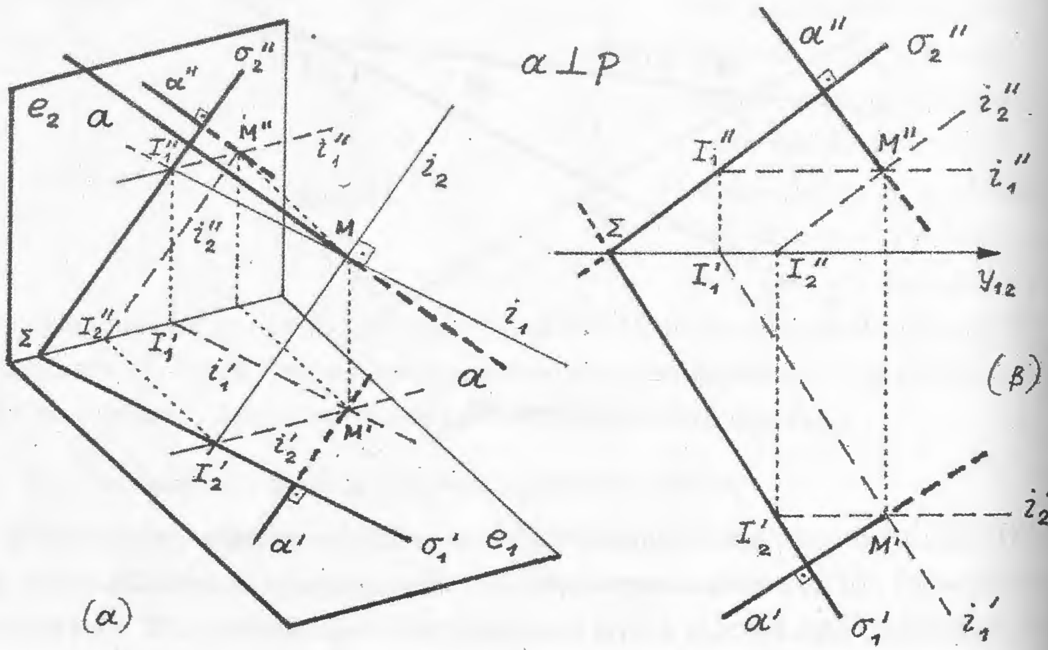


Σχήμα 100

Οι ευθείες α και α_1 επειδή βρίσκονται στο κατακόρυφο επίπεδο q τέμνονται σε σημείο Μ(Μ΄, Μ΄΄), που είναι και το ζητούμενο σημείο τομής του επιπέδου των β, γ με τη ευθεία α. Παρατηρούμε ότι για την εύρεση του σημείου Μ(Μ΄, Μ΄΄) δεν έγινε χρήση του άξονα y_{12} (σχήμα 100).

4.18 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Έστω ένα επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και ευθεία $\alpha(\alpha', \alpha'')$. Αν τα ίχνη του επιπέδου σ'_1, σ''_2 τέμνονται, τότε για να είναι κάθετη η α στο p θα πρέπει η πρώτη προβολή της α' να είναι κάθετη στο πρώτο ίχνος σ'_1 και η δεύτερη προβολή της α'' να είναι κάθετη στο δεύτερο ίχνος σ''_2 του επιπέδου p. (Το ίδιο φυσικά ισχύει και στην Παραστατική ενός επιπέδου, όπου η προβολή της καθέτου η, η η', είναι κάθετη στο ίχνος του επιπέδου p, το i'_0, ως παράλληλη προς την προβολή της ιχνοκαθέτου u'). Στο σχήμα 101(α) απεικονίζεται η ευθεία α κάθετη στο p στο χώρο, ενώ στο σχήμα 101(β) φαίνονται οι προβολές της α, οι α' και α'' κάθετες στα σ'_1 και σ''_2 αντίστοιχα. Ύστερα από τα παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε την ακόλουθη εφαρμογή:



Σχήμα 101

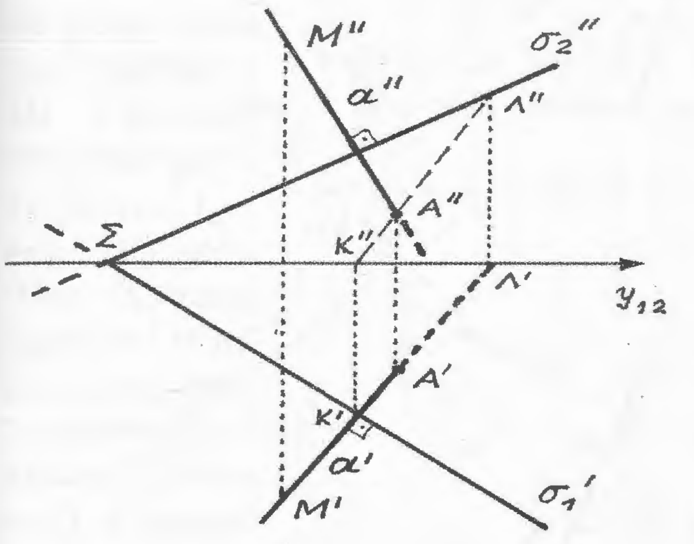
Πρόβλημα:

Από δοθέν σημείο του χώρου να αχθεί κάθετη σε δοθέν επίπεδο p και να βρεθεί η τομή αυτής της καθέτου με το p.

Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

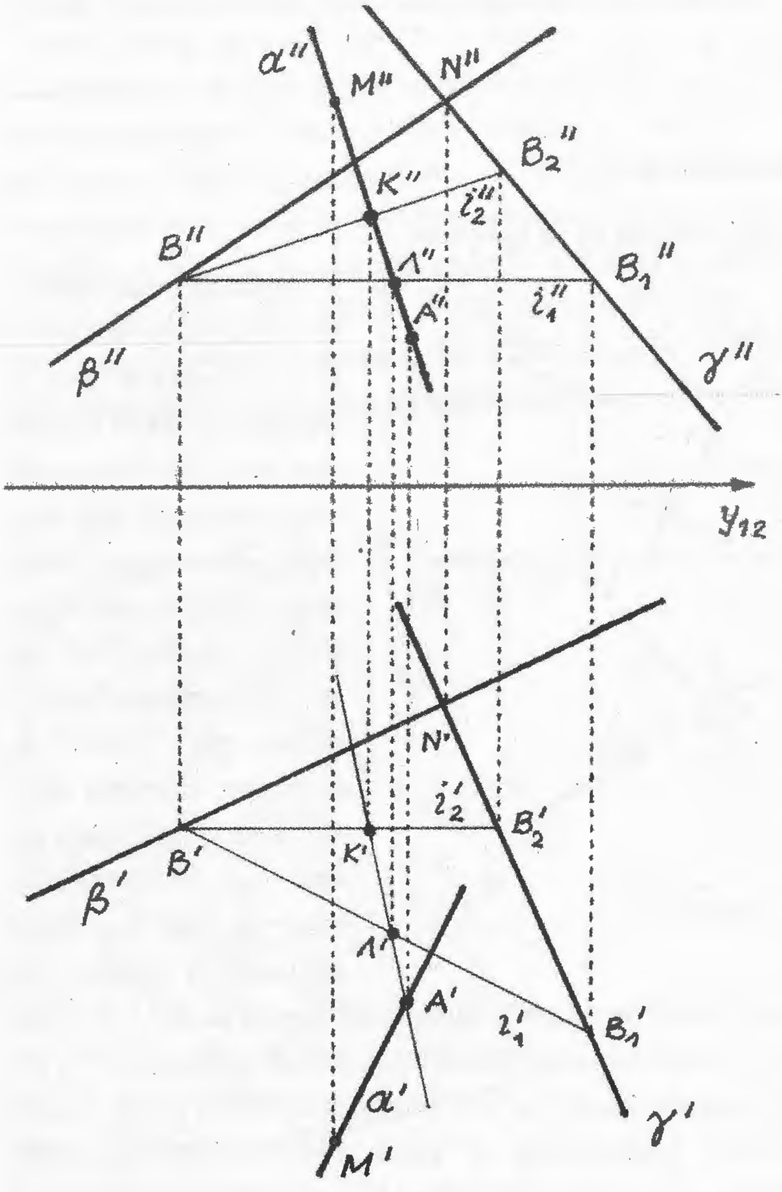
α) Όταν το επίπεδο p δίνεται με τα ίχνη του



Σχήμα 102

Έστω ένα σημείο M(M΄, M΄΄) του χώρου και $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ το επίπεδο. Για να φέρουμε απ' το M την κάθετη στο p, έχοντας υπόψη τα προηγούμενα περί συνθήκης καθετότητας ευθείας και επιπέδου, φέρνουμε απ' τις προβολές M΄ και M΄΄ δύο ευθείες α' και α'' κάθετες στα σ'_1 και σ''_2 αντίστοιχα. Η ευθεία $\alpha(\alpha', \alpha'')$ είναι η ζητούμενη ευθεία. Για να βρούμε την τομή της α με το p εφαρμόζουμε τα γνωστά της παραγράφου 4.17 (α) σελίδα 107 (σχήμα 98). Δηλαδή βρίσκουμε το Λ(Λ΄, Λ΄΄) που είναι σημείο τομής του κατακόρυφου επιπέδου, που περνάει απ' την α, με το σ''_2 και το K(K΄, K΄΄) που είναι σημείο τομής του κατακόρυφου επιπέδου με το σ'_1, και σχηματίζουμε την ευθεία KΛ. Η τομή της K΄΄Λ΄΄ με την α'' δίνει τη δεύτερη προβολή A΄΄ του A(A΄,A΄΄) (τομή της α με το p). Στο σχήμα 102 έγινε διάκριση ορατών και καλυπτόμενων μερών της α, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.2 σελ. 78.

β) Όταν το επίπεδο *p* δίνεται από δύο ευθείες του τις *β* και *γ*



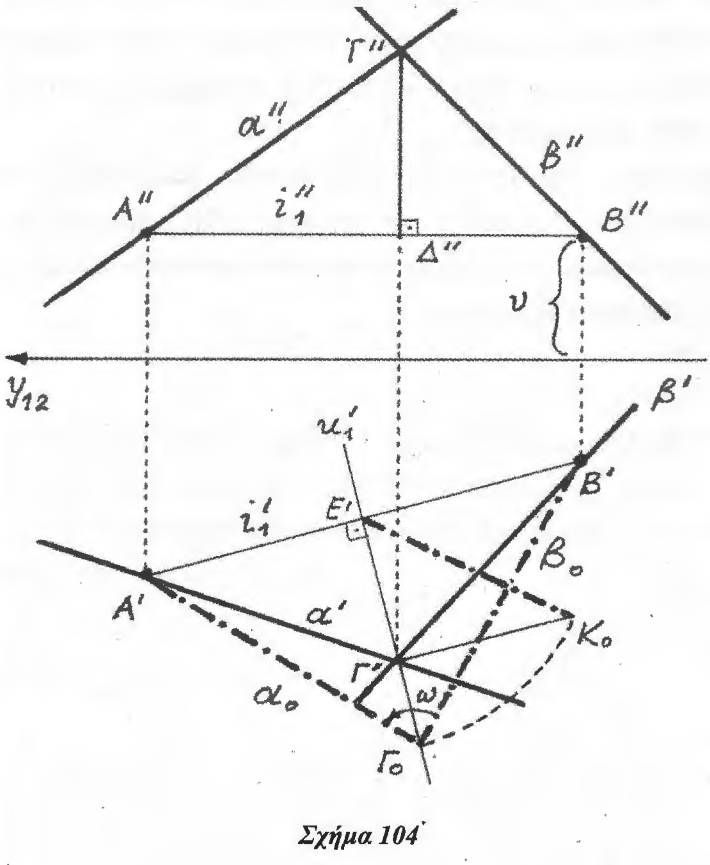
Σχήμα 103

Αν το *p* δίνεται απ' τις ευθείες $\beta(\beta', \beta'')$ και $\gamma(\gamma', \gamma'')$ τότε εργαζόμαστε ως εξής: Από κάποιο σημείο Β της πλευράς *β* φέρνουμε μια πρώτη και μια δεύτερη ιχνοπαράλληλη την $i_1(i'_1, i''_1)$ και $i_2(i'_2, i''_2)$ αντίστοιχα (σχήμα 103) κατά τα γνωστά. Απ' τα Μ΄ και Μ΄΄ φέρνουμε κάθετες στις i'_1 και i''_2 αντίστοιχα τις α' και α''. Η ευθεία αυτή $\alpha(\alpha', \alpha'')$ είναι η ζητούμενη κάθετη στο επίπεδο *p*. Το σημείο τομής της με το *p* βρίσκεται εφαρμόζοντας τα γνωστά της παραγράφου 4.17 (β) σελ. 108. Δηλαδή βρίσκουμε τα σημεία που τέμνει η α'' τις i''_2 και i''_1 και έστω αυτά ότι είναι τα Κ΄΄, Λ΄΄, δεύτερες προβολές των Κ και Λ. Παίρνουμε τώρα τις πρώτες προβολές τους πάνω στις i'_2 και i'_1 τις Κ΄ και Λ΄. Η ευθεία Κ´Λ´ τέμνει την α' στο Α´, πρώτη προβολή του ζητούμενου σημείου τομής Α. Η δεύτερη προβολή του Α η Α´´ βρίσκεται εύκολα (σχήμα 103).

Για να βρούμε τώρα την απόσταση ενός τυχαίου σημείου Μ(Μ´, Μ´´) από δοθέν επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ φέρνουμε απ' το Μ ευθεία κάθετη στο επίπεδο και βρίσκουμε τον πόδα Α αυτής (σημείο τομής της με το p), κατά τα γνωστά. Η απόσταση του Μ απ' το p είναι προφανώς το τμήμα ΜΑ.

4.19 Γωνία δύο τεμνόμενων ευθειών

Έστω ότι έχουμε δύο ευθείες $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ που τέμνονται σ' ένα σημείο Γ(Γ´, Γ´´). Θα ζητήσουμε το πραγματικό μέγεθος της γωνίας των ευθειών α και β στο χώρο (σχήμα 104).



Σχήμα 104

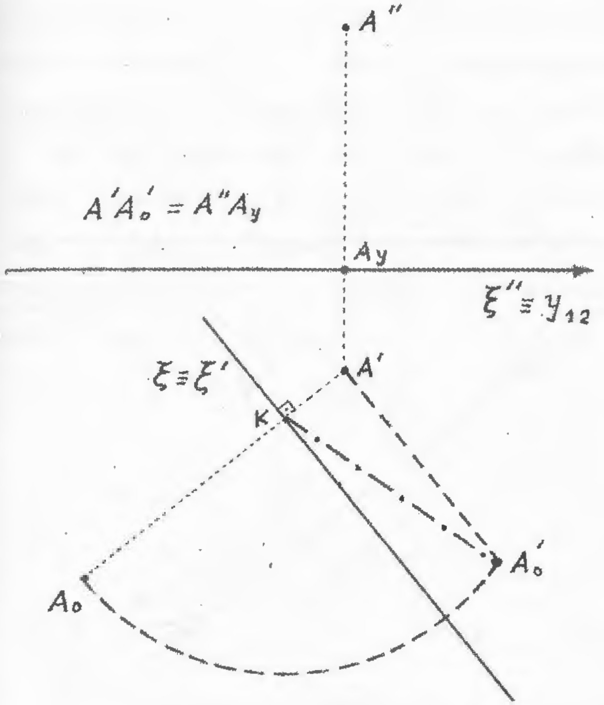
Για να βρούμε τη γωνία αυτή, κατακλίνουμε το επίπεδο των α και β πάνω σ' ένα οριζόντιο επίπεδο μιας τυχαίας πρώτης ιχνοπαράλληλής του, έστω της $i_1(i'_1, i''_1)$ (σχήμα 104). Προφανώς η i'_1 ενώνει τα σημεία Α´ και Β´ των α' και β' που έχουν υψόμετρο 0 ως προς το οριζόντιο επίπεδο (εφόσον η κατάκλιση του επιπέδου των α και β έγινε πάνω σ' αυτό το οριζόντιο επίπεδο υψομέτρου υ). Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στο αντίστοιχο πρόβλημα της παραστατικής ενός επιπέδου (παράγραφος 3.9 σελ. 52), αν λάβουμε υπόψη ότι το υψόμετρο του Γ΄ είναι η απόσταση Γ΄΄Δ΄΄. Η κάθετη απ' το Γ΄ στην Α΄Β΄ δηλαδή η Γ΄Ε΄ θεωρείται η προβολή ιχνοκαθέτου του επιπέδου των *α* και *β*, δηλαδή η διπλή γραμμή που συμβολίζαμε στην Παραστατική ενός επιπέδου με u'. Εδώ φυσικά είναι η πρώτη προβολή της πρώτης ιχνοκαθέτου του επιπέδου δηλαδή η u'_1.

Επομένως, αν φέρουμε απ' το Γ΄ κάθετη στην Γ΄Ε΄ και πάρουμε σ' αυτή μήκος Γ΄K_o ίσο με Γ΄΄Δ΄΄ (όσο δηλαδή το υψόμετρο του Γ), τότε η Ε΄K_o θα παριστάνει την κατάκλιση της ιχνοκαθέτου u_1 την u_{10}. Μεταφέρουμε το σημείο K_o πάνω στην προέκταση της Ε΄Γ΄ και ορίζουμε την τελική του θέση Γ_o. Ενώνοντας τώρα το Γ_o με τα Α΄ και Β΄ έχουμε τη γωνία Α΄Γ_0Β΄ που εκφράζει το πραγματικό μέγεθος της γωνίας των ευθειών *α* και *β* στο χώρο.

Για να βρούμε τη γωνία ευθείας *α* και επιπέδου *p*, εργαζόμαστε όπως και στην Παραστατική ενός επιπέδου. Δηλαδή, από τυχαίο σημείο της ευθείας φέρνουμε κάθετη στο επίπεδο, την *η* με τον τρόπο που αναπτύξαμε παραπάνω, και υπολογίζουμε τη γωνία φ που σχηματίζεται από την *α* και την κάθετη *η* στο *p*. Η συμπληρωματική αυτής της γωνίας, η 90° – φ είναι η ζητούμενη.

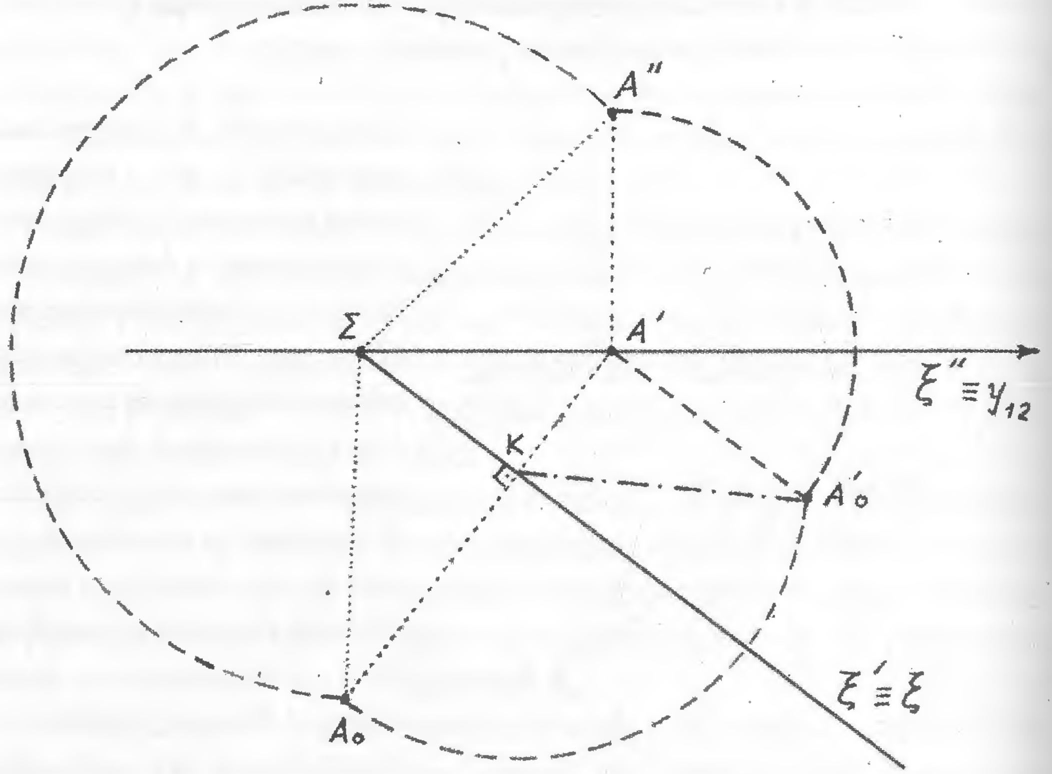
Ανάλογες σκέψεις, όπως και στην Παραστατική ενός επιπέδου, κάνουμε για να υπολογίσουμε τη γωνία δύο επιπέδων. Δηλαδή, φέρνουμε από τυχαίο σημείο Μ τις κάθετες στα επίπεδα. Η παραπληρωματική της γωνίας φ των καθέτων αυτών ευθειών, η 180° – φ είναι η γωνία των επιπέδων στο χώρο.

4.20 Κατάκλιση σημείου γύρω από ευθεία ξ του επιπέδου e_1, πάνω στο e_1



Σχήμα 105

Έστω Α(Α′, Α′′) τυχαίο σημείο και $\xi(\xi', \xi'' \equiv y_{12})$ η δοθείσα ευθεία που κείται ολόκληρη στο e_1 (προφανώς η δεύτερη προβολή της ξ'' ταυτίζεται με τον άξονα y_{12}). Θεωρούμε το επίπεδο που διέρχεται απ' την ευθεία ξ και το σημείο Α και το περιστρέφουμε γύρω απ′ την ευθεία ξ, έτσι ώστε να συμπέσει με το επίπεδο e_1, δηλαδή το κατακλίνουμε πάνω στο e_1 (συνήθως κατά τη μεγάλη γωνία περιστροφής). Είναι προφανές, ότι το σημείο Α μετά την περιστροφή συμπίπτει με το σημείο A_o του επιπέδου e_1, το οποίο βρίσκεται στην κάθετη απ' το Α′ προς την ξ' και σε απόσταση KA_o ίση προς την απόσταση του σημείου Α απ' την ευθεία. (σχήμα 105). Ουσιαστικά το επίπεδο (A, ξ) κατακλίνεται γύρω από το ίχνος του $\xi \equiv \xi'$. Επομένως κάνουμε κατάκλιση της Α′Κ κατασκευάζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο $KA'A'_o$ όπου $A'A'_o \equiv A''A_y$ είναι το υψόμετρο του σημείου Α.



Σχήμα 106

<u>Στην ειδική περίπτωση</u> κατά την οποία το σημείο Α βρίσκεται πάνω στο e_2, η κατάκλισή του γίνεται ως εξής: Με κέντρο το σημείο Σ τομής του άξονα y_{12} με την ευθεία ξ', και ακτίνα ΣΑ΄΄ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την απ' το Α΄ κάθετη στην ευθεία ξ', σε κάποιο σημείο $Α_ο$. Το σημείο $Α_ο$, όπως θα φανεί παρακάτω, είναι η κατάκλιση του σημείου Α, δηλαδή συμπίπτει με τον γενικό τρόπο (σχήμα 106).

Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχήμα 106, από τα ορθογώνια τρίγωνα ΣΑ΄Α΄΄, ΣΚΑ΄, ΚΑ΄$Α'_ο$ και $ΣΚΑ_ο$ προκύπτει:

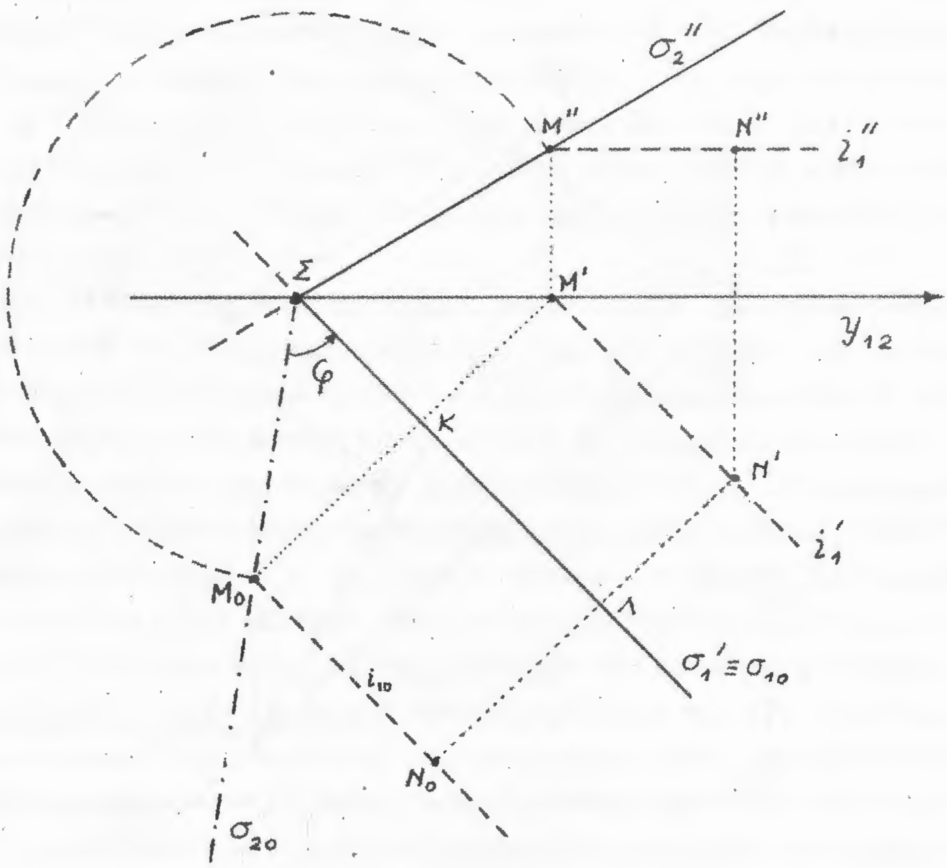
$$\Sigma A''^2 = \Sigma A'^2 + A'A''^2 = \Sigma K^2 + KA'^2 + A'A_0'^2 =$$
$$= \Sigma K^2 + KA_0'^2 = \Sigma K^2 + KA_0{}^2 = \Sigma A_0{}^2.$$

Ανάλογες είναι οι απαιτούμενες γεωμετρικές κατασκευές για την αντίστοιχη κατάκλιση σημείου Β του επιπέδου e_1 πάνω στο επίπεδο e_2 γύρω από μια ευθεία ζ του επιπέδου e_2.

4.21 Κατάκλιση επιπέδου $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ πάνω στο επίπεδο προβολής e_1

Έστω $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ το δοθέν επίπεδο το οποίο θέλουμε να κατακλίνουμε πάνω στο επίπεδο προβολής e_1. Προφανώς το πρώτο ίχνος σ'_1 του επιπέδου p είναι η ευθεία περιστροφής. Κάθε σημείο του ίχνους σ'_1 παραμένει ακίνητο κατά την κατάκλιση.

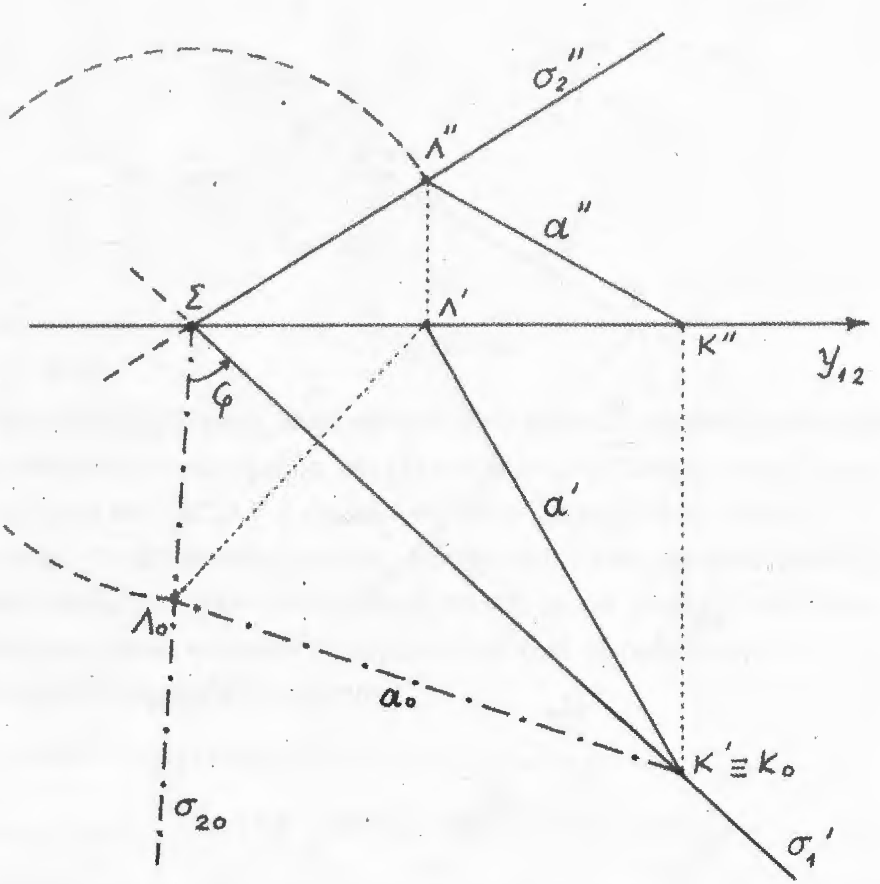
Θα κατασκευάσουμε στην αρχή την κατάκλιση του δευτέρου ίχνους $\sigma_2 \equiv \sigma''_2$, μετά την κατάκλιση μιας πρώτης ιχνοπαραλλήλου $i_1(i'_1, i''_1)$ του p, στη συνέχεια την κατάκλιση ενός τυχαίου σημείου Ν(Ν΄, Ν΄΄) του p, κατόπιν την κατάκλιση τυχαίας ευθείας $\alpha(\alpha', \alpha'')$ του p και τέλος την κατάκλιση επιπέδου σχήματος Ε του p, π.χ. ενός τριγώνου ΑΒΓ του p.



Σχήμα 107

Για την κατάκλιση του σ''_2, αρκεί να προσδιορίσουμε την κατάκλιση ενός τυχαίου σημείου του π.χ. του Μ(Μ', Μ''). Στο σχήμα 107 βρέθηκε η κατάκλιση M_o του σημείου Μ σύμφωνα με την ειδική περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου. Επομένως, αν ενώσουμε το Σ με το M_o, βρίσκουμε την κατάκλιση $\Sigma M_o \equiv \sigma_{20}$ του δεύτερου ίχνους $\sigma_2(\sigma'_2 \equiv y_{12}, \sigma''_2)$. Η γωνία φ εκφράζει την γωνία των δύο ιχνών του p.

Για να κατασκευάσουμε την κατάκλιση μιας πρώτης ιχνοπαραλλήλου $i_1(i'_1, i''_1)$ του p βρίσκουμε την κατάκλιση M_o του σημείου Μ(Μ', Μ'') που τέμνει η i_1 το δεύτερο ίχνος σ''_2, και απ' το σημείο M_o φέρνουμε την παράλληλη i_{10} προς το πρώτο ίχνος σ'_1. Η ευθεία i_{10} είναι η κατάκλιση της πρώτης ιχνοπαραλλήλου i_1 (της παραλλήλου δηλαδή προς το πρώτο ίχνος) όπως φαίνεται στο σχήμα 107.



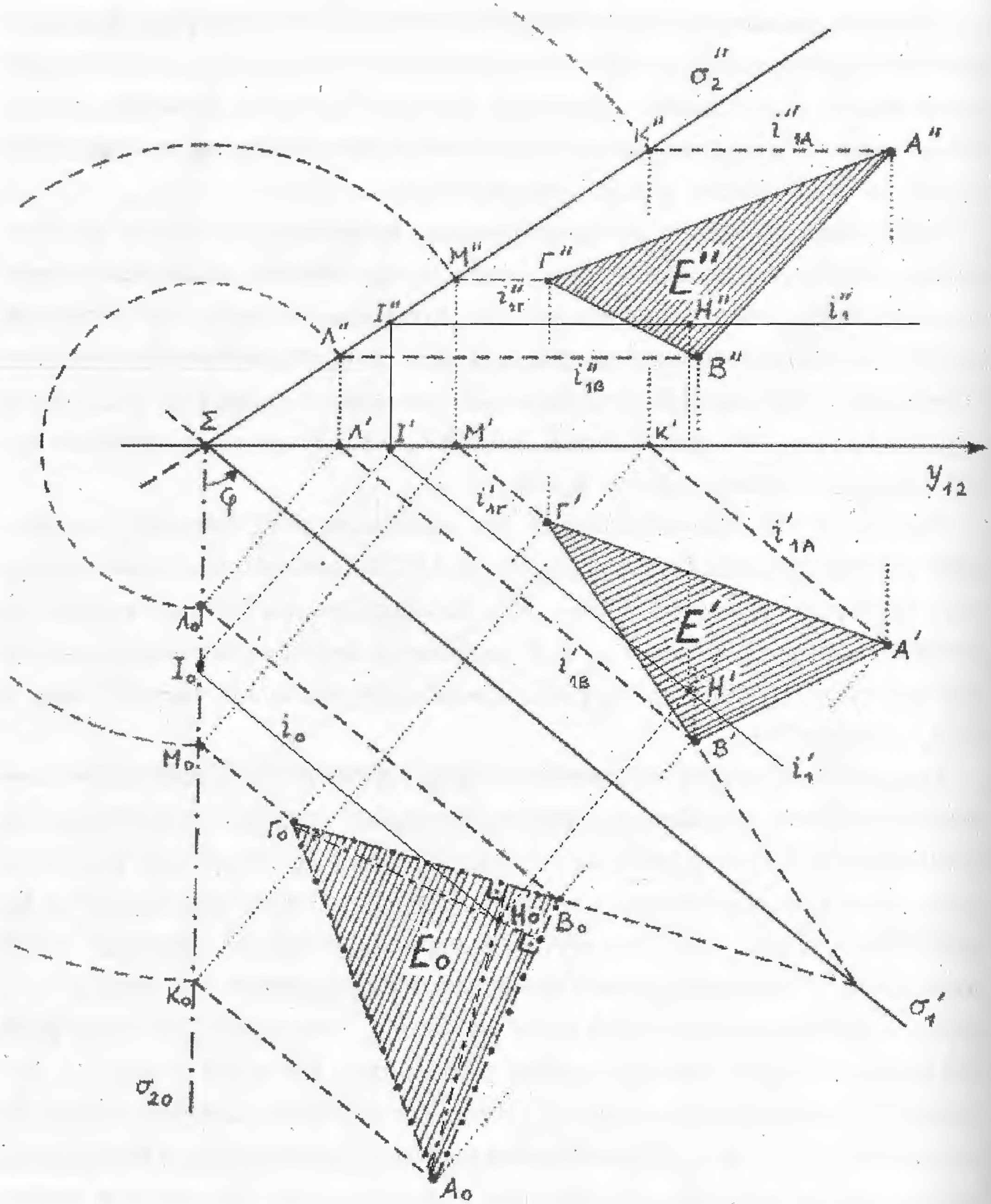
Σχήμα 108

Για την κατάκλιση ενός τυχαίου σημείου N(N΄, N΄΄) του επιπέδου p θεωρούμε μια πρώτη ιχνοπαράλληλη που διέρχεται απ το N έστω την $i_1(i'_1, i''_1)$, την οποία και κατακλίνουμε. Η κατάκλιση του σημείου N δηλαδή η N_o, θα βρίσκεται, αφενός πάνω στην κατάκλιση της ιχνοπαραλλήλου αυτής i_1 δηλαδή στην i_{10}, αφετέρου στην κάθετη απ' το N΄ προς το ίχνος σ'_1 (σχήμα 107).

Για να κατασκευάσουμε την κατάκλιση μιας ευθείας $\alpha(\alpha', \alpha'')$ του p αρκεί να κατασκευάσουμε τις κατακλίσεις δύο σημείων της. Συνήθως επιλέγουμε τα ίχνη της τα οποία βρίσκονται πάνω στα ίχνη του επιπέδου p. Στο σχήμα 108 βρέθηκε η κατάκλιση Λ_o του δευτέρου ίχνους της Λ(Λ΄, Λ΄΄) όπως στην ειδική περίπτωση της παραγράφου 4.20 σελ. 116. Η κατάκλιση K_o του πρώτου ίχνους K(K΄, K΄΄) της α συμπίπτει με το πρώτο ίχνος K΄ του K, δηλαδή $K_o \equiv K'$. Επομένως, η κατάκλιση της ευθείας $\alpha(\alpha', \alpha'')$, είναι η ευθεία $\alpha_o \equiv K_o\Lambda_o$.

Τέλος, για να κατασκευάσουμε την κατάκλιση ενός τυχαίου επιπέδου ευθύγραμμου σχήματος Ε π.χ. ενός τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάζουμε την κατάκλιση σ_{20} του δεύτερου ίχνους $\sigma_2(\sigma'_2 \equiv y_{12}, \sigma''_2)$ του επιπέδου του ΑΒΓ, και κατόπιν τις κατακλίσεις των κορυφών του Α, Β, Γ σύμφωνα με τον τρόπο που είπαμε πριν για την κατάκλιση τυχαίου σημείου του p. Επομένως, η κατάκλιση του ΑΒΓ είναι η $A_oB_o\Gamma_o$ (σχήμα 109).

Έτσι, αν θέλουμε π.χ. να υπολογίσουμε τις προβολές (Η΄, Η΄΄) του ορθόκεντρου Η του τριγώνου ΑΒΓ όταν γνωρίζουμε τις προβολές των κορυφών του, αφού υπολογίσουμε την κατάκλιση $A_oB_o\Gamma_o$ του τριγώνου με τον παραπάνω τρόπο, προσδιορίζουμε σ' αυτή το ορθόκεντρο H_o ως σημείο τομής των υψών του $A_oB_o\Gamma_o$. Κατόπιν φέρνουμε απ' το H_o παράλληλη προς το σ'_1 που τέμνει την σ_{20} στο σημείο I_o. Το σημείο I_o είναι η κατάκλιση του ίχνους Ι(Ι΄, Ι΄΄) της πρώτης ιχνοκαθέτου του p η οποία διέρχεται απ' το Η. Έτσι, απ' το I_o φέρνουμε κάθετη στο ίχνος σ'_1 που τέμνει τον άξονα y_{12} στο σημείο Ι΄ (πρώτη προβολή του ίχνους Ι). Απ' το Ι΄ φέρνουμε κάθετη στον άξονα y_{12} που τέμνει το ίχνος σ''_2 στο σημείο Ι΄΄ (δεύτερη προβολή του ίχνους Ι). Επίσης, απ' το Ι΄ φέρνουμε παράλληλη προς το ίχνος σ'_1 την i'_1 (που είναι η πρώτη προβολή της πρώτης ιχνοπαραλλήλου που διέρχεται απ' το Η), ενώ απ' το H_o φέρνουμε κάθετη στο σ'_1 που τέμνει την i'_1 στο σημείο Η΄ (πρώτη προβολή του ορθόκεντρου Η). Ακόμα, απ' το Ι΄΄ φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y_{12} την i''_1, (που είναι η δεύτερη προβολή της πρώτης ιχνοπαραλλήλου που διέρχεται απ' το Η), ενώ απ' το Η΄ φέρνουμε κάθετη στον άξονα y_{12} που τέμνει την i''_1 στο σημείο Η΄΄ (δεύτερη προβολή του ορθόκεντρου Η) (η περιγραφή γίνεται στο σχήμα 109).


σ''2
K''
i''1A
A''
M''
Γ''
E''
i''1Γ
I''
H''
i''1
Λ''
B''
i''1B
Σ
Λ'
I'
M'
K'
y12
φ
i'1Γ
Γ'
i'1A
E'
A'
Λo
Io
i'1B
H'
B'
i'1
io
Mo
Γo
Ho
Bo
Eo
Ko
σ'1
σ2o
Ao

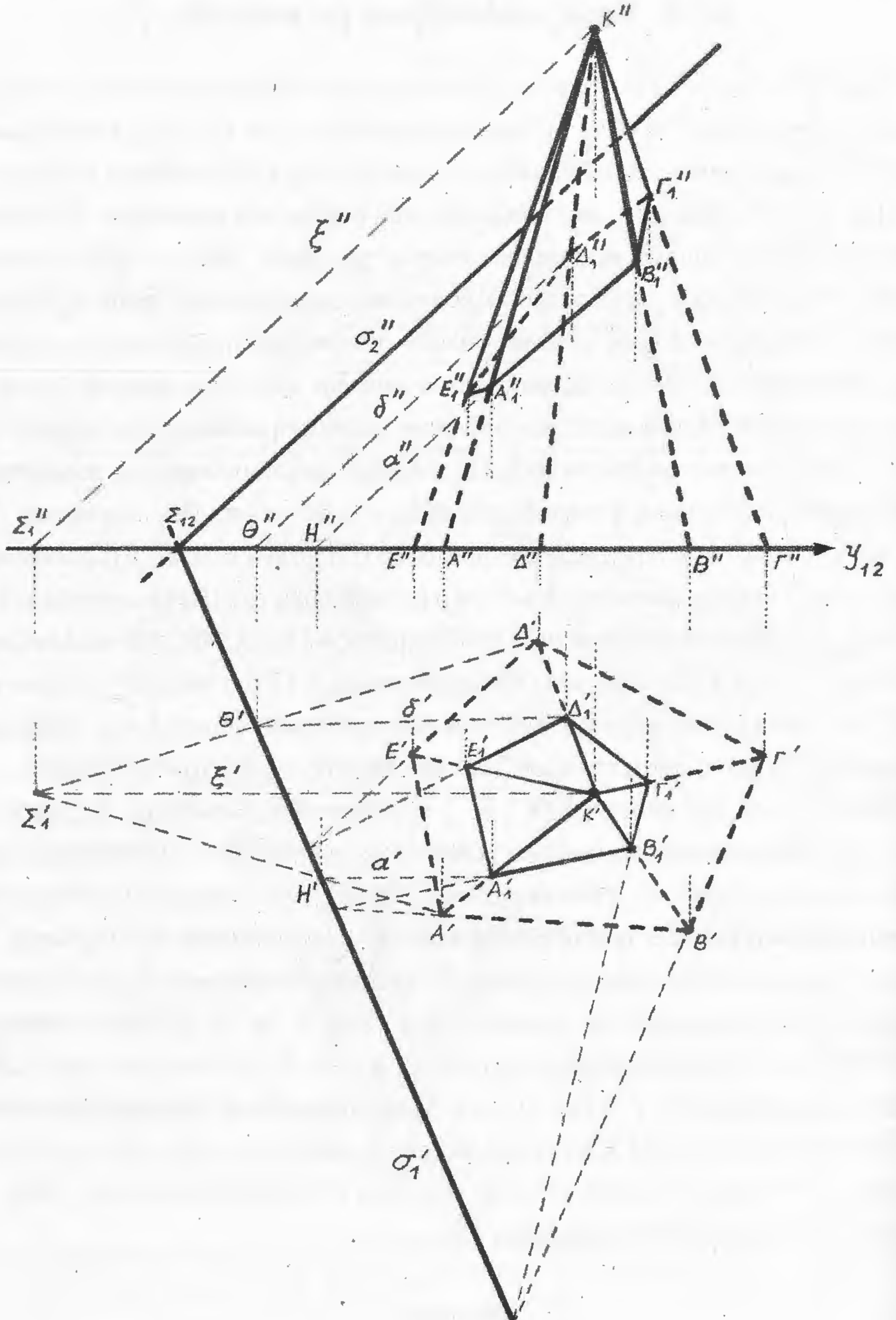
Σχήμα 109

4.22 Τομή πολυέδρου με επίπεδο

Η τομή πολυέδρου (Π) με επίπεδο p είναι ένα κλειστό επίπεδο πολύγωνο. Οι πλευρές του πολυγώνου αυτού θα είναι οι τομές του επιπέδου p με τις έδρες του (Π), οι δε κορυφές του πολυγώνου αυτού θα είναι τα σημεία τομής του επιπέδου p με τις ακμές του (Π). Κατά τη σχεδίαση των προβολών των ακμών του πολυέδρου (Π) γίνεται διάκριση μεταξύ ορατών και καλυπτόμενων γραμμών, όπως το βλέπει κανείς κοιτάζοντάς το για μεν τις πρώτες προβολές από πάνω προς τα κάτω, για δε τις δεύτερες προβολές από μπροστά προς τα πίσω, δηλαδή ο παρατηρητής βρίσκεται στο πρώτο μέρος του χώρου. Οι προβολές των ακμών που δεν φαίνονται συμβολίζονται με διακεκομμένη ευθεία, ενώ αυτές που φαίνονται με συνεχή ευθεία για τα τμήματα των πρώτων και δεύτερων προβολών τους. Ως πολύεδρο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μια πυραμίδα, ένα πρίσμα, ή οποιοδήποτε άλλο στερεό με επίπεδες επιφάνειες.

Για να βρούμε τώρα την τομή του πολυέδρου (Π) με ένα επίπεδο p (εφόσον αυτή υπάρχει), είτε υπολογίζουμε την τομή του p με κάθε έδρα του (Π) (παράγραφος 4.15 ($1^{ον}$) σελ. 100, σε συνδυασμό με το $2^{ο}$ πρόβλημα της 4.11 σελ. 90), είτε υπολογίζουμε την τομή του p με κάθε ακμή του (Π) (παράγραφος 4.17 (α) σελ. 107). Πέραν των μεθόδων αυτών θα αναφέρουμε έναν ευκολότερο τρόπο εύρεσης της τομής μιας πυραμίδας (Π) που η βάση της εδράζεται στο επίπεδο e_1, με τυχαίο επίπεδο p.

Φέρνουμε από την κορυφή Κ(Κ΄, Κ΄΄) της πυραμίδας Κ.ΑΒΓΔΕ, της οποίας η βάση ΑΒΓΔΕ βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο e_1, ευθεία $\xi(\xi', \xi'')$ παράλληλη προς το δεύτερο ίχνος $\sigma_2(y_{12}, \sigma''_2)$ του επιπέδου p, δηλαδή $\xi // \sigma_2$. (σχήμα 110). Θεωρούμε τώρα βοηθητικά επίπεδα που ορίζονται από την ξ και κάθε μια απ' τις ακμές της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας. Τα επίπεδα αυτά τέμνουν το μεν οριζόντιο επίπεδο e_1 κατά δέσμη ευθειών με κέντρο το Σ'_1 (π.χ. $\Sigma'_1 A'$, $\Sigma'_1 \Delta'$), το δε επίπεδο p κατά δεύτερες ιχνοπαραλλήλους (π.χ. $\alpha(\alpha', \alpha'')$, $\delta(\delta', \delta'')$). Διότι, δύο παράλληλες μεταξύ τους ευθείες $\xi(\xi', \xi'')$ και $\sigma_2(y_{12}, \sigma''_2)$ που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα, η πρώτη στο επίπεδο π.χ. (ξ, ΚΑ) και η δεύτερη στο επίπεδο (σ_1, σ_2), είναι παράλληλες και προς την τομή των επιπέδων αυτών την $\alpha(\alpha', \alpha'')$ η οποία προφανώς είναι μια δεύτερη ιχνοπαράλληλη του επιπέδου $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$.


K''
ξ''
Γ₁''
Δ₁''
B₁''
σ₂''
E₁''
A₁''
δ''
α''
Σ₁''
Σ₁₂
Θ''
H''
E''
A''
Δ''
B''
Γ''
y₁₂
Δ'
Θ'
δ'
Δ₁
E'
E₁'
Γ'
ξ'
Σ₁'
Γ₁'
K'
B₁'
α'
A₁'
H'
A'
B'
σ₁'

Σχήμα 110

Οι τομές των ιχνοπαραλλήλων αυτών με τις αντίστοιχες ακμές της πυραμίδας ορίζουν τις κορυφές του πολυγώνου της ζητούμενης τομής. Στο σχήμα 110 ορίζονται με τον τρόπο αυτό τα σημεία $A_1(A'_1, A''_1)$ και $\Delta_1(\Delta'_1, \Delta''_1)$. (Για το A_1 φέρνουμε την Σ'_1A' που τέμνει το σ'_1 στο H′. Απ' το H′ φέρνουμε παράλληλη προς τον y_{12} που τέμνει την K′A′ στο A'_1, πρώτη προβολή του A_1, απ' όπου υπολογίζεται και το A''_1. Όμοια υπολογίζεται και το Δ_1.

Οι υπόλοιπες κορυφές της πρώτης προβολής του πολυγώνου της τομής B'_1, Γ'_1, E'_1 βρέθηκαν ως ομόλογες των κορυφών B′, Γ′, E′ της βάσης της πυραμίδας με άξονα ομολογίας το πρώτο ίχνος σ'_1 του p και κέντρο ομολογίας την πρώτη προβολή K′ της κορυφής K της πυραμίδας (θεώρημα *Desargues* σελ. 10). Στο σχήμα 110, το επίπεδο p θεωρείται αδιαφανές και ξεχωρίζουν οι γραμμές που φαίνονται ή όχι.

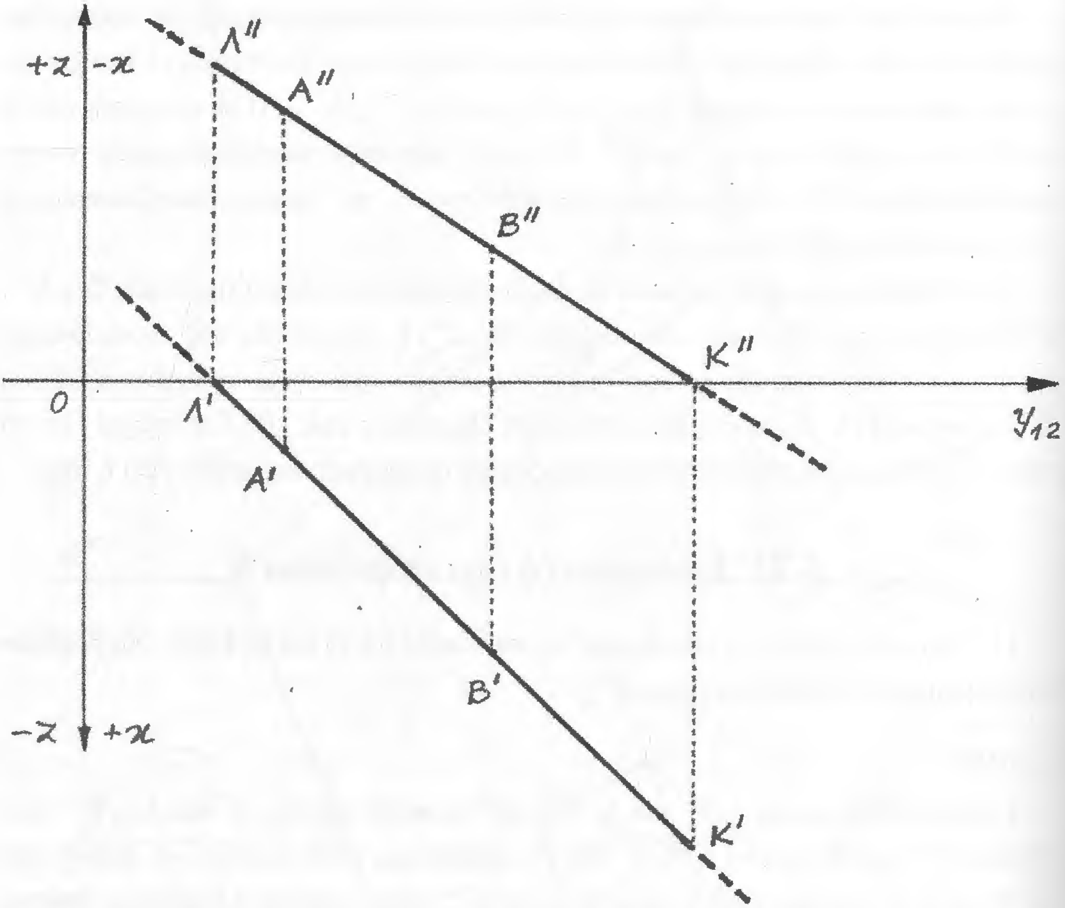
4.23 Εφαρμογές στο κεφάλαιο 4

1) Δίνεται ευθεία που περνάει απ' τα σημεία A(1/3/4) και B(4/6/2). Να βρεθούν τα ίχνη της με τα επίπεδα e_1 και e_2.

Λύση

Κατασκευάζουμε τις A′B′ και A′′B′′ απ' τις προβολές A′, B′ και A′′, B′′. Στο σημείο Λ′ που θα τμήσει η A′B′ τον y_{12} υψώνουμε κάθετη μέχρι να τμήσει την A′′B′′ στο Λ′′ (σχήμα 111). Το σημείο Λ(Λ′, Λ′′) είναι τομή της AB με το e_2. Επίσης, η προέκταση της A′′B′′ τέμνει τον y_{12} στο K′′. Υψώνουμε κάθετη απ' το K′′ στον y_{12} μέχρι να τμήσει την A′B′ στο K′. Το K(K′, K′′) είναι η τομή της AB με το e_1. Το ευθύγραμμο τμήμα ΛK βρίσκεται στο πρώτο μέρος του χώρου, ενώ το πέρα απ' το KΛ προς το Λ βρίσκεται στο δεύτερο μέρος, και πέρα απ' το KΛ προς το K βρίσκεται στο τέταρτο μέρος (σύμφωνα με τον πίνακα της παραγράφου 4.1 σελ. 77).

Στο II και IV μέρος του χώρου που η KΛ δεν φαίνεται, θα είναι διακεκομμένη.



Σχήμα 111

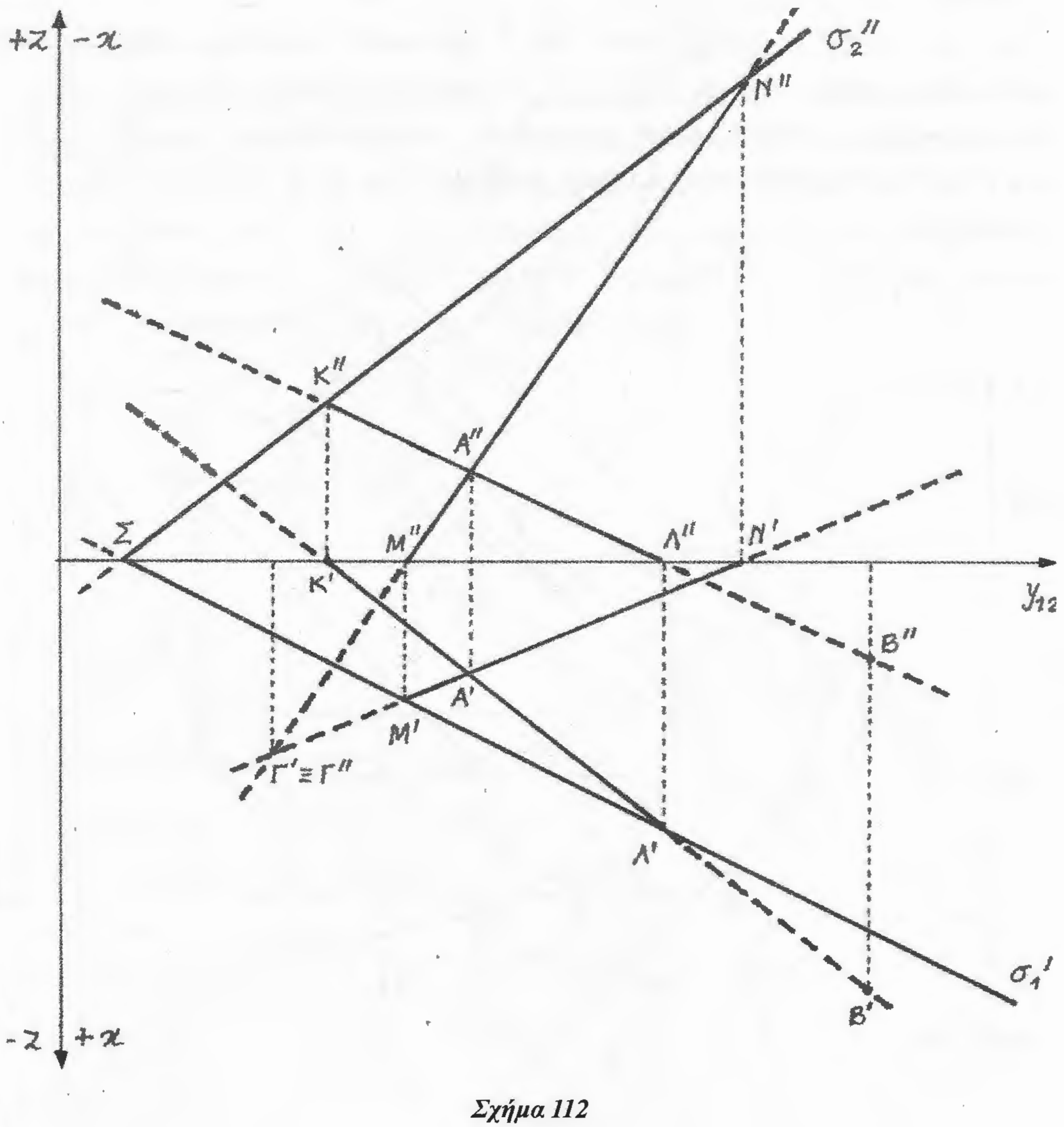
2) Δίνονται τα σημεία Α(1,8 / 6,7 / 1,5), Β(7 / 13,2 / -1,6) και Γ(3 / 3,5 / -3). Να προσδιοριστεί το επίπεδο p με τα δύο ίχνη του σ'_1, σ''_2 που ορίζεται απ' τα τρία αυτά σημεία.

Λύση

Βρίσκουμε τις προβολές των σημείων Α(Α΄, Α΄΄), Β(Β΄, Β΄΄) και Γ(Γ΄, Γ΄΄). Φέρνουμε την Α΄Β΄ που τέμνει τον y_{12} στο Κ΄. Επίσης φέρνουμε την Α΄΄Β΄΄ που τέμνει τον y_{12} στο Λ΄΄. Υψώνουμε κάθετες στα Κ΄ και Λ΄΄ που τέμνουν τις Α΄΄Β΄΄ και Α΄Β΄ στα Κ΄΄ και Λ΄ αντίστοιχα. Το Κ(Κ΄, Κ΄΄) είναι το δεύτερο ίχνος της ΑΒ (τομή αυτής με το e_2), ενώ το Λ(Λ΄, Λ΄΄) είναι το πρώτο ίχνος της (τομή αυτής με το e_1).

Παρόμοια, προεκτείνουμε την Α΄Γ΄ και βρίσκουμε το Ν΄ (τομή της Α΄Γ΄ με τον y_{12}). Επίσης προεκτείνουμε την Γ΄΄Α΄΄ και βρίσκουμε την τομή της Μ΄΄ με τον y_{12}. Βρίσκουμε ανάλογα και τις Μ΄ και Ν΄΄ αντίστοιχα, οπότε το Μ(Μ΄, Μ΄΄) είναι το πρώτο ίχνος της ΑΓ, ενώ το Ν(Ν΄, Ν΄΄) είναι το δεύτερο ίχνος της (σχήμα 112).

Αν ενώσουμε τώρα τα Μ΄, Λ΄ η Μ΄Λ΄ δίνει το πρώτο ίχνος του επιπέδου που ζητάμε, το σ'_1, επειδή ενώνει τις πρώτες προβολές των πρώτων ιχνών των ευθειών ΑΒ και ΑΓ. Παρόμοια, αν ενώσουμε τα Κ΄΄, Ν΄΄ η Κ΄΄Ν΄΄ δίνει το δεύτερο ίχνος του



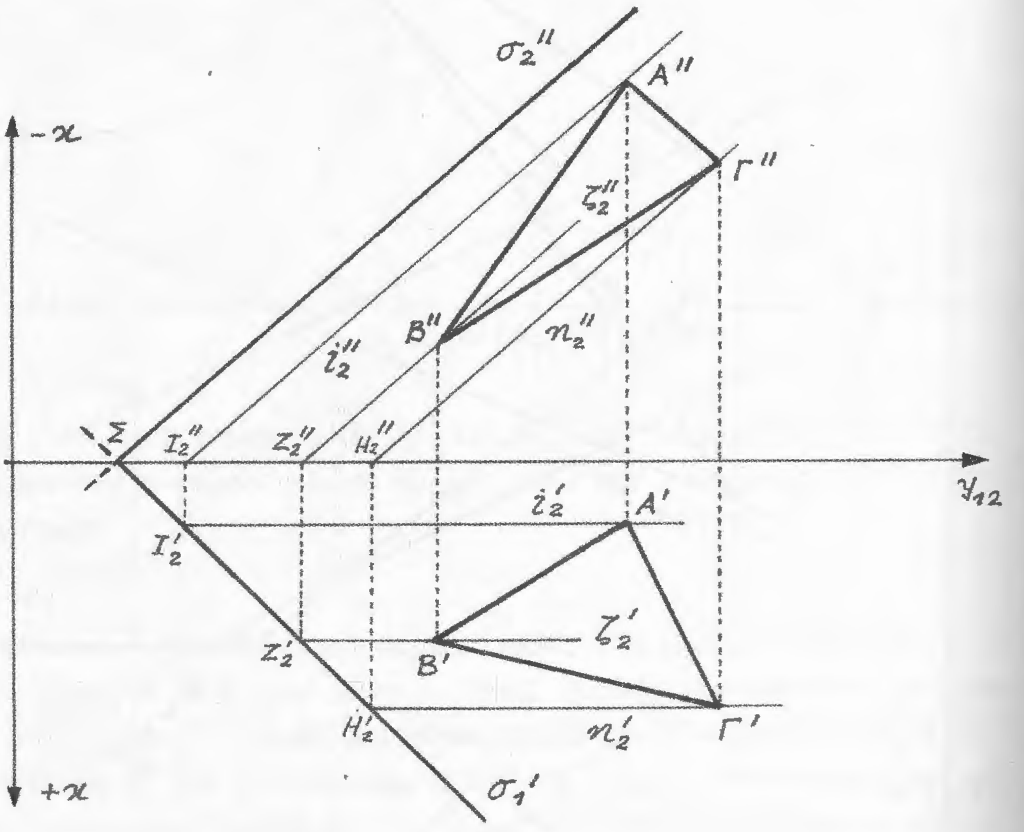
Σχήμα 112

επιπέδου που ζητάμε, το σ''_2, επειδή ενώνει τις δεύτερες προβολές των δεύτερων ιχνών των ΑΒ και ΑΓ. Στο σχήμα 112 έγινε διάκριση ορατών και καλυπτόμενων μερών της κάθε ευθείας ΑΒ και ΑΓ (σύμφωνα με τον πίνακα της παραγράφου 4.1 σελ. 77), με την προϋπόθεση ότι τα επίπεδα e_1 και e_2 είναι αδιαφανή.

3) Δίνεται ένα επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και η πρώτη προβολή Α΄Β΄Γ΄ ενός τριγώνου ΑΒΓ, που ανήκει στο επίπεδο p. Να βρεθεί η δεύτερη προβολή Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ του ΑΒΓ.

Λύση

Απ' τις πρώτες προβολές των Α΄, Β΄, Γ΄ φέρνουμε τις πρώτες προβολές των δεύτερων ιχνοπαραλλήλων i'_2, ζ'_2, η'_2 αντίστοιχα, παράλληλες προς τον y_{12}. Βρίσκουμε τις αντίστοιχες δεύτερες προβολές τους παράλληλες προς το σ''_2, τις i''_2, ζ''_2, η''_2 και κατόπιν τις δεύτερες προβολές των Α΄, Β΄, Γ΄ τις Α΄΄, Β΄΄, Γ΄΄ (σχήμα 113).



Σχήμα 113

Σημείωση

Θα μπορούσαμε να φέρουμε απ' τα Α΄, Β΄, Γ΄ τις πρώτες προβολές των πρώτων ιχνοπαραλλήλων i'_1, ζ'_1, η'_1 επίσης και να εργαστούμε ανάλογα.

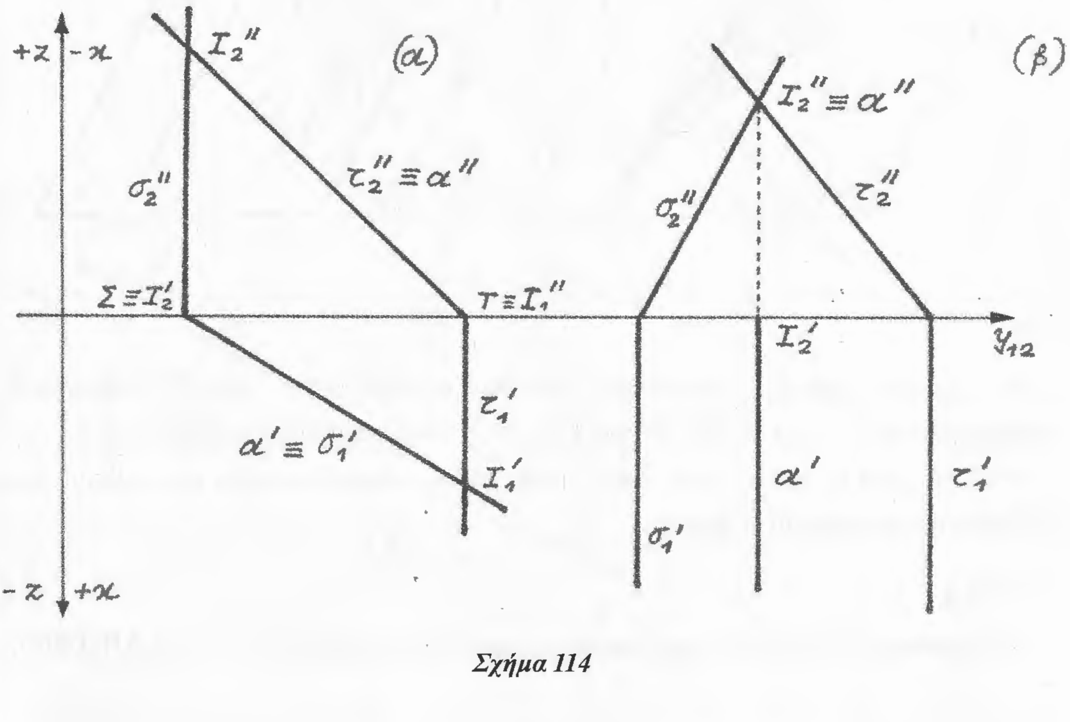
4) Να βρεθεί η τομή των επιπέδων $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ και $q(\tau'_1, \tau''_2)$ όταν

α) το p είναι κάθετο στο e_1 και το q κάθετο στο e_2,

β) και τα δύο είναι κάθετα στο e_2.

Λύση

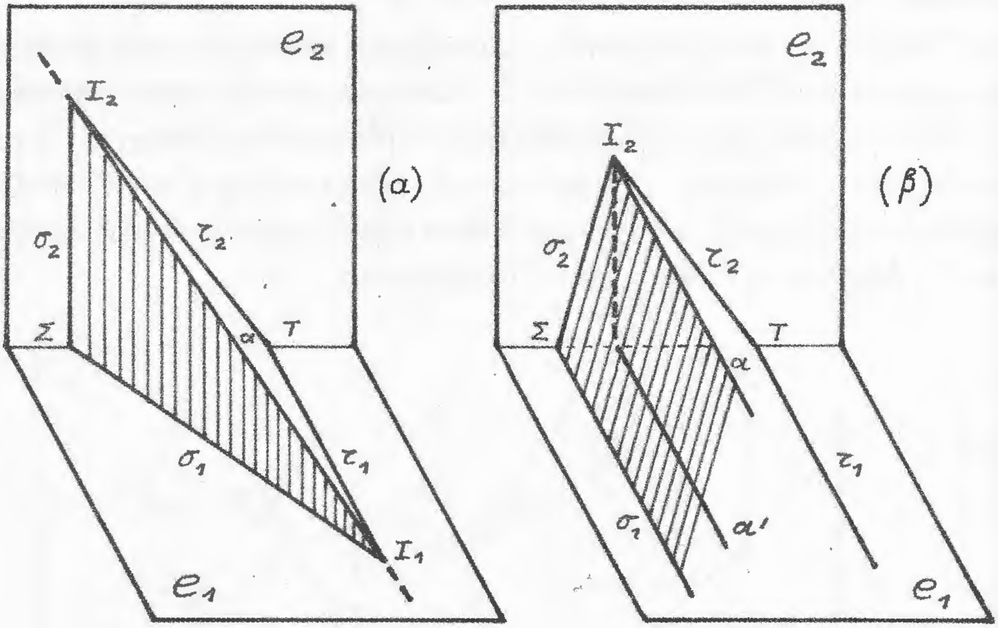
α) Επειδή το p είναι κάθετο στο e_1 προκύπτει ότι θα είναι κατακόρυφο. Άρα το δεύτερο ίχνος του θα είναι κάθετο στον y_{12}. Παρόμοια, επειδή το q είναι κάθετο στο e_2, θα είναι πρόσθιο, συνεπώς το πρώτο ίχνος του θα είναι κάθετο στον y_{12}. Η τομή τους θα είναι η ευθεία $\alpha(\alpha', \alpha'')$ της οποίας η πρώτη προβολή α' ταυτίζεται με το πρώτο ίχνος του p το σ'_1, ενώ η δεύτερη προβολή ταυτίζεται με το δεύτερο ίχνος του q το τ''_2 δηλαδή $\alpha' \equiv \sigma'_1$ και $\alpha'' \equiv \tau''_2$ (σχήμα 114α).



Σχήμα 114

β) Στη δεύτερη περίπτωση και τα δύο είναι πρόσθια επίπεδα, συνεπώς τα πρώτα ίχνη τους θα είναι κάθετα στον y_{12}, επομένως παράλληλα. Άρα τα επίπεδα p και q θα τέμνονται στο χώρο κατά ευθεία α παράλληλη προς τα δύο πρώτα ίχνη τους σ'_1, τ'_1. Επομένως η α θα είναι πρόσθια. Κατά συνέπεια, το σημείο τομής των δεύτερων ιχνών το I''_2 θα ταυτίζεται με τη δεύτερη προβολή της α την α'', ενώ η πρώτη προβολή α' θα είναι κάθετη στον άξονα y_{12} (σχήμα 114β).

Οι λύσεις στο χώρο, φαίνονται στα σχήματα 115α για το α) μέρος της άσκησης και στο σχήμα 115β για το β) μέρος αυτής.



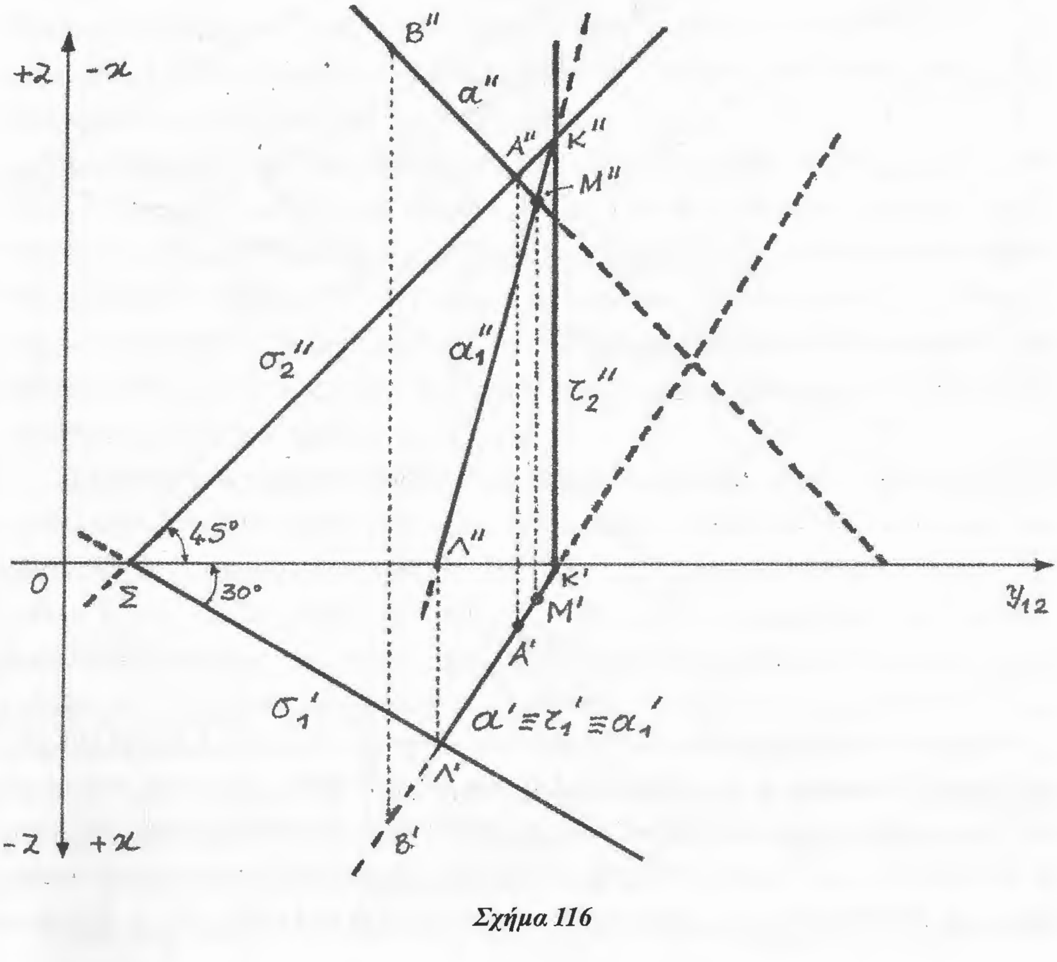
Σχήμα 115

5) Δίνεται επίπεδο p με τα ίχνη του τέτοιο ώστε ΣΟ = 1 εκ. (Ο η αρχή των αξόνων), γων(σ'_1, y_{12}) = 30° και γων (σ''_2, y_{12}) = 45°, καθώς και ευθεία ΑΒ με Α(1 / 7 / 6) και Β(4 / 5 / 8). Να βρεθεί η τομή Μ του επιπέδου p και της ευθείας που ορίζεται απ' τα σημεία Α και Β.

Λύση

Βρίσκουμε τις προβολές των σημείων Α και Β και ορίζουμε την ευθεία ΑΒ. Επίσης προσδιορίζουμε τα ίχνη του επιπέδου $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ απ' τις γωνίες των ιχνών του με τον y_{12}. Για να βρούμε την τομή της ΑΒ ≡ α με το p εργαζόμαστε ως εξής:

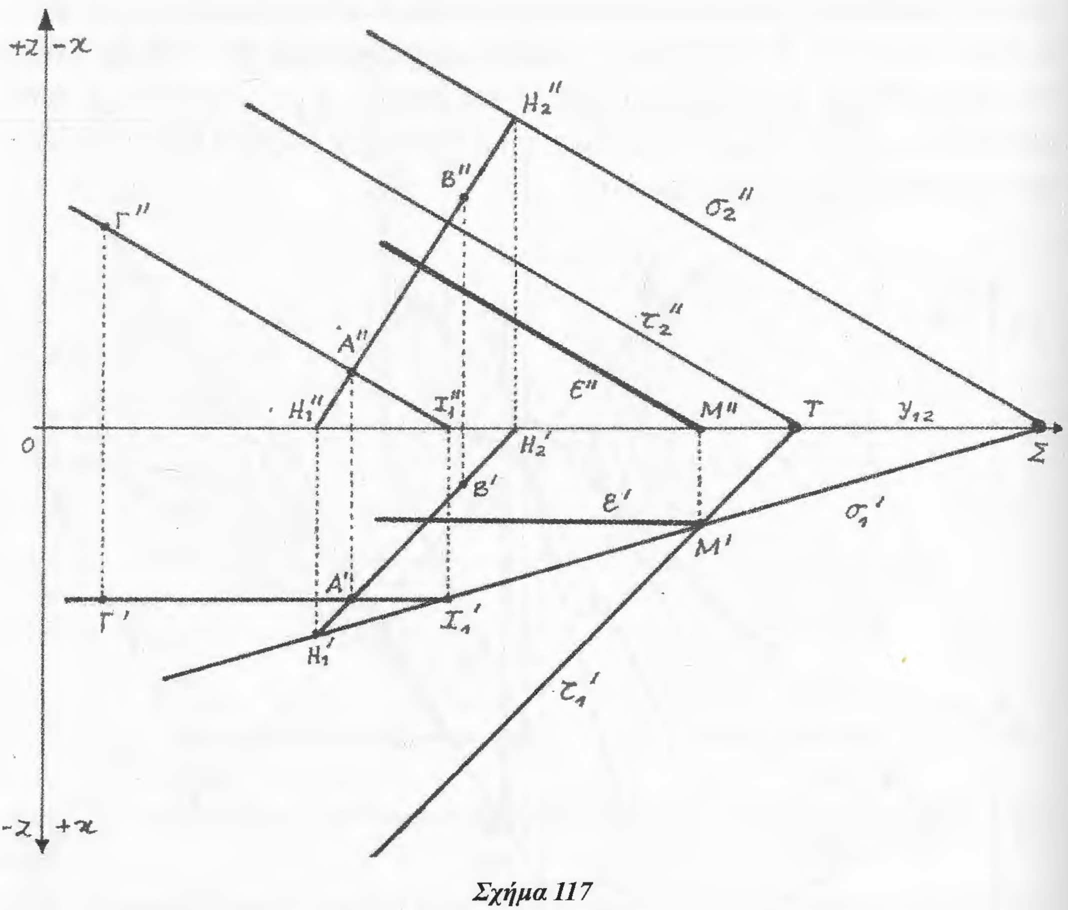
Θεωρούμε ένα κατακόρυφο επίπεδο το οποίο να περιέχει την ευθεία α το $q(\tau'_1, \tau''_2)$. Η πρώτη προβολή του πρώτου ίχνους του τ_1 θα είναι η $\tau'_1 \equiv \alpha'$, ενώ η δεύτερη προβολή του δεύτερου ίχνους του τ_2 η τ''_2 θα είναι ευθεία κάθετη στον άξονα y_{12}. Το επίπεδο αυτό q θα τμήσει το p κατά μια ευθεία α_1 της οποίας οι προβολές βρίσκονται κατά τα γνωστά της τομής δύο επιπέδων. (Η α'_1 θα συμπέσει με την α', ενώ η α''_1 θα είναι η Λ''Κ''). Η τομή της α''_1 με την α'' θα δώσει το Μ'' που θα είναι η δεύτερη προβολή του σημείου τομής Μ της ευθείας α με το επίπεδο p. Διότι προφανώς η τομή α_1 του p με το q τέμνει την α στο σημείο Μ (τομή της α και του p). Το Μ' βρίσκεται εύκολα (σχήμα 116).



Σχήμα 116

6) Δίνεται το επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ που ορίζεται από δύο τεμνόμενες ευθείες ΑΒ και ΑΓ. Δίνεται επίσης το επίπεδο $q(\tau'_1, \tau''_2)$ από τα δύο ίχνη του. Να βρεθεί η τομή των επιπέδων όταν Α(3 / 5,3 / 1), Β(1 / 7,2 / 4), Γ(3 / 1 / 3,5) και ΤΟ = 13 εκ., γων(τ'_1, y_{12}) = 135°, τ''_2 // Α′′Γ′′.

Λύση



Σχήμα 117

Απ' τις συντεταγμένες των σημείων είναι φανερό ότι τα Α και Γ έχουν την ίδια απόσταση (τετμημένη $x = 3$), επομένως η ευθεία ΑΓ είναι παράλληλη προς το δεύτερο επίπεδο προβολής e_2, δηλαδή είναι μια μετωπική ευθεία. Προσδιορίζουμε καταρχήν το επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ των ευθειών ΑΒ και ΑΓ. Προς τούτο βρίσκουμε το πρώτο ίχνος της ΑΓ το $I_1(I'_1, I''_1)$ και το πρώτο ίχνος της ΑΒ το $H_1(H'_1, H''_1)$. Η ευθεία

$H'_1I'_1$ αποτελεί το πρώτο ίχνος σ'_1 του p (σχήμα 117). Απ' το H''_2 φέρνουμε παράλληλη προς την $A''\Gamma''$ που θα αποτελεί το δεύτερο ίχνος σ''_2 του p. Κατασκευάζουμε επίσης το $q(\tau'_1, \tau''_2)$. Τα πρώτα ίχνη σ'_1, τ'_1 τέμνονται στο M'. Τα δεύτερα ίχνη είναι παράλληλα μεταξύ τους ($\tau''_2 \parallel \sigma''_2$). Η τομή των p και q θα είναι η $\varepsilon(\varepsilon', \varepsilon'')$ όπου η ε'' είναι παράλληλη προς τα σ''_2, τ''_2 και η ε' παράλληλη προς τον y_{12}.

7) Κοινή κάθετος δύο ασύμβατων ευθειών

Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση (κοινή κάθετος) των ασύμβατων ευθειών $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$, καθώς και το πραγματικό μέγεθος της κοινής καθέτου.

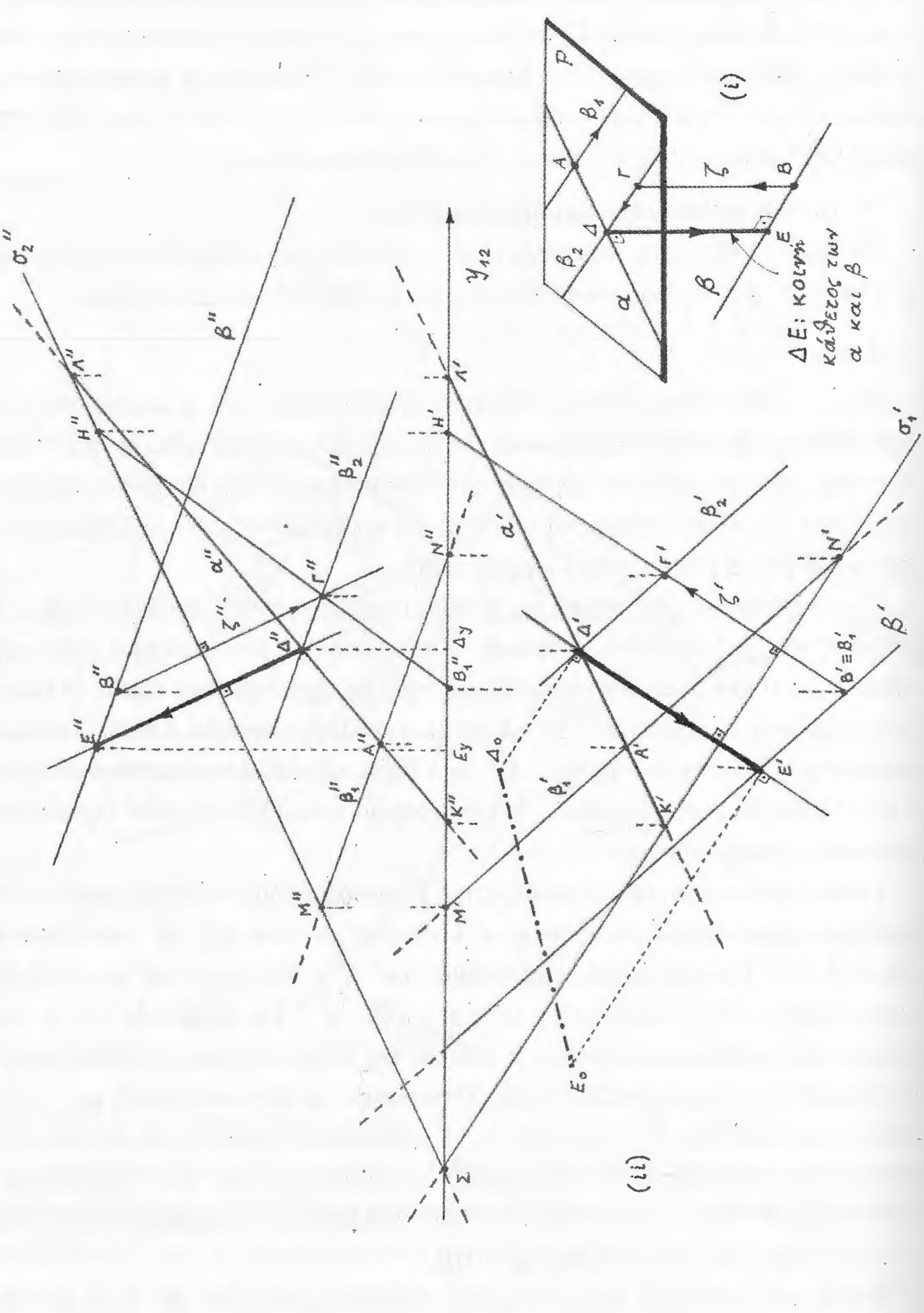
Λύση

Όπως αναπτύχθηκε και στην Παραστατική ενός επιπέδου, η κοινή κάθετη δύο ασύμβατων ευθειών είναι η μοναδική ελάχιστη απόσταση των ευθειών αυτών. Πριν δώσουμε τη λύση του προβλήματος στην Παραστατική δύο επιπέδων, δείχνουμε στο σχήμα 118(i) την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος που ακολουθείται χρησιμοποιώντας τη βοήθεια της Στερεομετρίας.

Φέρνουμε από τυχαίο σημείο της ευθείας α π.χ. το Α ευθεία παράλληλη προς την β την β_1 και ορίζουμε έτσι το επίπεδο p των α και β_1. Στη συνέχεια, από τυχαίο σημείο της β έστω το Β, φέρνουμε κάθετη στο επίπεδο p την ζ που τέμνει το επίπεδο p στο σημείο Γ. Κατόπιν, απ' το Γ φέρνουμε παράλληλη προς τη β τη β_2, η οποία θα τμήσει την ευθεία α στο σημείο Δ. Απ' το Δ τέλος φέρνουμε την κάθετη στο επίπεδο p που τέμνει την β στο σημείο Ε. Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ αποτελεί την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των α και β.

Για την επίλυση του προβλήματος στην Παραστατική δύο επιπέδων, ακολουθούμε τα ίδια ακριβώς βήματα όπως και πριν. Έστω $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ οι δύο ευθείες και $A(A', A'')$ τυχαίο σημείο της ευθείας $\alpha(\alpha', \alpha'')$. Φέρνουμε απ' το $A(A', A'')$ ευθεία $\beta_1(\beta'_1, \beta''_1)$ παράλληλη προς την $\beta(\beta', \beta'')$ (οι προβολές της β_1 είναι παράλληλες προς τις αντίστοιχες προβολές της β) και ορίζουμε στη συνέχεια το επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ που ορίζουν αυτές. (Βρίσκουμε τα ίχνη των α και β_1 με το e_1 που είναι τα σημεία $K(K', K'')$ και $N(N', N'')$, καθώς και τα ίχνη τους με το e_2 που είναι τα $\Lambda(\Lambda', \Lambda'')$ και $M(M', M'')$ αντίστοιχα. Αν ενώσουμε τα K' και N' παίρνουμε το σ'_1, ενώ τα M'' και Λ'' δίνουν το σ''_2. Έτσι καθορίζουμε το επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ των $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta_1(\beta'_1, \beta''_1)$ (σχήμα 118 (ii)).

Πάνω στην ευθεία β τώρα, ορίζουμε τυχαίο σημείο $B(B', B'')$ και απ' αυτό



Σχήμα 118

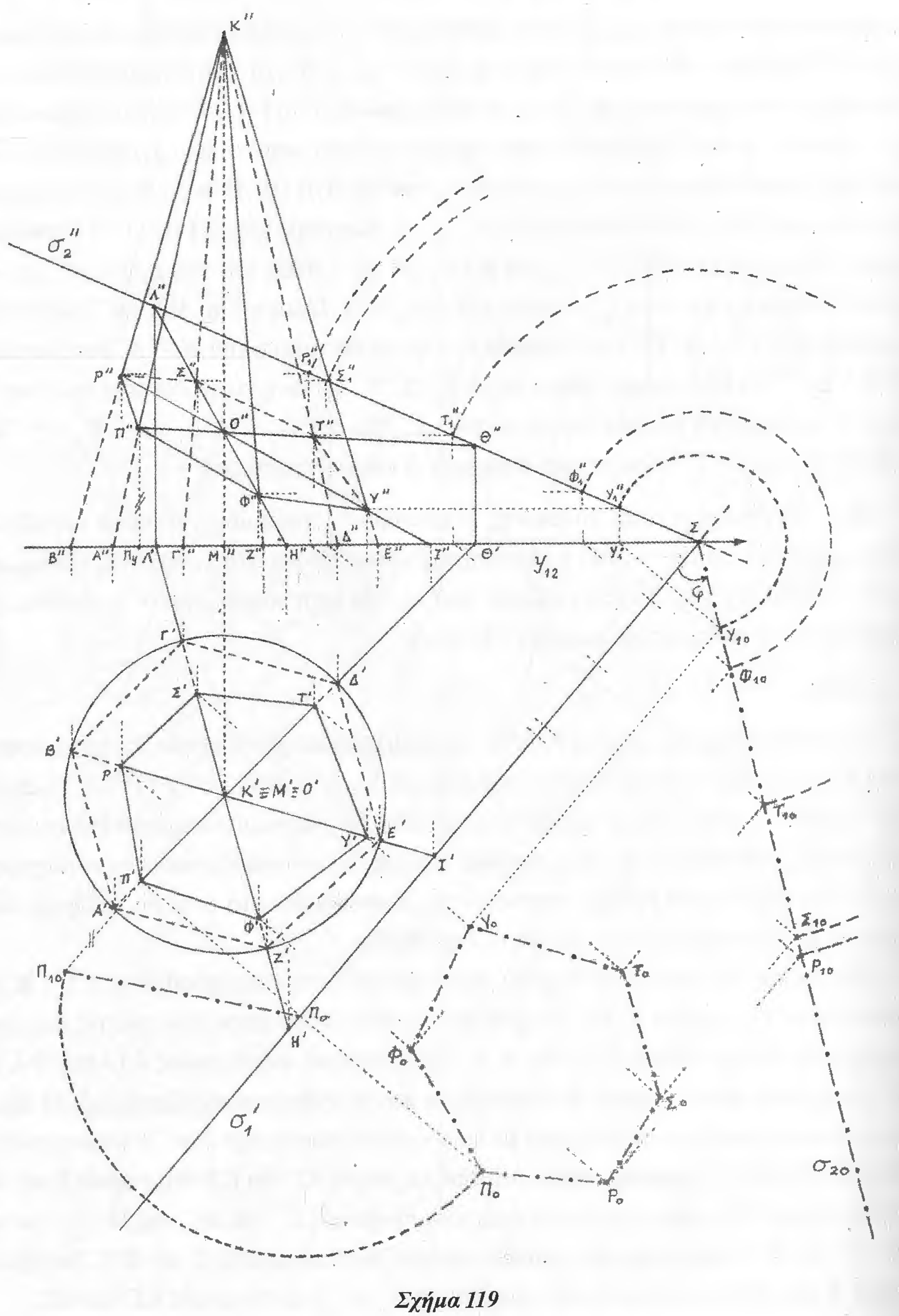
φέρνουμε την κάθετη $\zeta(\zeta', \zeta'')$ στο επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$. (Οι προβολές της κάθετης ζ οι ζ', ζ'' θα είναι κάθετες στα αντίστοιχα ίχνη σ'_1, σ''_2 του p). Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο τομής της καθέτου ζ με το επίπεδο p που είναι το Γ(Γ΄, Γ΄΄). (Αυτό βρίσκεται, ως γνωστό, αν θεωρήσουμε το κατακόρυφο επίπεδο (κάθετο στο e_1) που διέρχεται απ' τη ζ. Αυτό τέμνει το επίπεδο p κατά την ευθεία B_1H ($B'_1H' \equiv \zeta'$, B''_1H'') η οποία τέμνει την ζ στο ζητούμενο σημείο Γ(Γ΄, Γ΄΄)). Κατόπιν, απ' το Γ(Γ΄, Γ΄΄) φέρνουμε παράλληλη προς τη $\beta(\beta', \beta'')$, την $\beta_2(\beta'_2, \beta''_2)$, – όπως και την $\beta_1(\beta'_1, \beta''_1)$, – η οποία θα τμήσει την $\alpha(\alpha', \alpha'')$ στο σημείο Δ(Δ΄, Δ΄΄). Τέλος απ' το Δ(Δ΄, Δ΄΄) φέρνουμε κάθετη ΔΕ(Δ΄Ε΄, Δ΄΄Ε΄΄) στο επίπεδο p, η οποία θα τμήσει την $\beta(\beta', \beta'')$ στο σημείο Ε(Ε΄, Ε΄΄). Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ(Δ΄Ε΄, Δ΄΄Ε΄΄) είναι η κοινή κάθετος των α και β και το πραγματικό του μέγεθος είναι το $\Delta_o E_o$, όπου $\Delta'\Delta_o = \Delta''\Delta_y$ και $E'E_o = E''E_y$. (Τα $\Delta''\Delta_y$ και $E''E_y$ είναι τα υψόμετρα των Δ και Ε αντίστοιχα).

8) Να βρεθεί η τομή κανονικής εξαπλευρικής πυραμίδας, η οποία εδράζεται στο οριζόντιο επίπεδο e_1 και η κορυφή της προβάλλεται στο κέντρο της βάσης, με ένα επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ που ορίζεται από τα δύο ίχνη του σ'_1 και σ''_2. Επίσης, να βρεθεί και το πραγματικό μέγεθος της τομής.

Λύση

Έστω η κανονική πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔΕΖ που ορίζεται με τις προβολές της κορυφής της Κ(Κ΄, Κ΄΄) και των κορυφών της βάσης Α(Α΄, Α΄΄), Β(Β΄, Β΄΄), Γ(Γ΄, Γ΄΄), Δ(Δ΄, Δ΄΄), Ε(Ε΄, Ε΄΄) και Ζ(Ζ΄, Ζ΄΄), καθώς και το επίπεδο p που ορίζεται με τα δύο ίχνη του σ'_1 και σ''_2. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία που αναφέραμε στην παράγραφο 4.22 σελ. 121 και να βρούμε την τομή της πυραμίδας με το επίπεδο p. Όμως εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε και μια άλλη μέθοδο.

Θεωρούμε τις ακμές ΚΓ και ΚΖ των οποίων οι πρώτες προβολές Κ΄Γ΄, Κ΄Ζ΄ αποτελούν την ευθεία Γ΄Ζ΄. Τα ίχνη του κατακόρυφου επιπέδου που τις περιέχει ορίζονται από τις ευθείες Η΄Λ΄ και Λ΄Λ΄΄. (Ως γνωστό, παράγραφος 4.13 σελ. 94, το 2^o ίχνος ενός κατακόρυφου επιπέδου είναι πάντα κάθετο στον άξονα y_{12}). Η τομή του κατακόρυφου αυτού επιπέδου με το δοσμένο επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ είναι η ευθεία ΗΛ(Η΄Λ΄, Η΄΄Λ΄΄) η οποία τέμνει βεβαίως τις ακμές ΚΓ και ΚΖ στα σημεία Σ και Φ. (Στο σχήμα 119 υπολογίζονται οι δεύτερες προβολές Σ΄΄ και Φ΄΄ της Η΄΄Λ΄΄ με τις Κ΄΄Γ΄΄, Κ΄΄Ζ΄΄ αντίστοιχα, και κατόπιν υπολογίζονται οι πρώτες Σ΄ και Φ΄). Τα σημεία αυτά Σ και Φ είναι οι τομές του επιπέδου $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ με τις ακμές ΚΓ και ΚΖ.


K''
σ''₂
Λ''
Ρ''
Σ''
Ρ''₁
Σ''₁
Π''
Ο''
Τ''
Τ''₁
Θ''
Φ''₁
Υ''₁
Φ''
Υ''
Δ''
Β''
Α''
Λ'
Γ''
Μ''
Ζ''
Η''
Ε''
Ι''
Θ'
y₁₂
Υ'₁
Σ
φ
Γ'
Υ₁₀
Δ'
Φ₁₀
Σ'
Τ'
Β'
Ρ'
K'≡M'≡O'
Τ₁₀
Υ'
Ε'
Ι'
Π'
Α'
Φ'
Υ₀
Σ₁₀
Ζ'
Ρ₁₀
Π₁₀
Τ₀
Πσ
Η'
Φ₀
Σ₀
σ'₁
σ₂₀
Π₀
Ρ₀

Σχήμα 119

Η κατασκευή αυτή μπορεί να επαναληφθεί και για άλλες ακμές της πυραμίδας. Όμως, όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς, είναι δυνατό κάποιες ακμές να μη δίνουν προσβάσιμα ίχνη κατακόρυφου επιπέδου, όπως π.χ. οι ΚΒ και ΚΕ. (Το πρώτο ίχνος του κατακόρυφου αυτού επιπέδου δεν μπορεί να σχεδιαστεί μέσα στο χαρτί σχεδίασης). Έτσι, ακολουθούμε την παρακάτω μέθοδο: Επανερχόμενοι στο προηγούμενο κατακόρυφο επίπεδο, παρατηρούμε ότι αυτό περιέχει τον άξονα ΚΜ της πυραμίδας, επομένως η τομή του με το p, η ΗΛ, θα τμήσει τον άξονα ΚΜ στο σημείο Ο(Ο΄, Ο΄΄). Το σημείο αυτό θα είναι το ίδιο και για τα άλλα κατακόρυφα επίπεδα, όπως π.χ. αυτό των ακμών ΚΒ και ΚΕ. Επομένως, για να ορίσουμε την τομή αυτού του επιπέδου με το p, ορίζουμε το σημείο Ι(Ι΄, Ι΄΄) (τομή της Β΄Ε΄ με το σ'_1), και φέρουμε την Ι΄΄Ο΄΄. Η τομή αυτής με τις Κ΄΄Β΄΄ και Κ΄΄Ε΄΄ δίνει τα σημεία Ρ΄΄ και Υ΄΄ αντίστοιχα, που αποτελούν τις δεύτερες προβολές των Ρ και Υ, σημείων τομής του κατακόρυφου επιπέδου των ΚΒ και ΚΕ με το p. Παρόμοια υπολογίζονται και οι τομές του κατακόρυφου επιπέδου των ΚΑ και ΚΔ με το p που είναι οι Π και Τ (η Α΄Δ΄ ορίζει το Θ(Θ΄, Θ΄΄) και η Θ΄΄Ο΄΄ ορίζει τα Π΄΄, Τ΄΄). Στο σχήμα προσδιορίζονται ορατά και αόρατα μέρη της πυραμίδας και της τομής της με το επίπεδο p.

Για να βρούμε τώρα το πραγματικό μέγεθος της τομής ΠΡΣΤΥΦ κάνουμε κατάκλιση του επιπέδου p που περιέχει την τομή, γύρω από το ίχνος του σ'_1 κατακλείνοντας κάθε ένα από τα σημεία Π, Ρ, Σ κλπ. Η κατάκλιση αυτή μπορεί να γίνει, ως γνωστό, με δύο τρόπους:

Με τον πρώτο τρόπο, για την κατάκλιση π.χ. του Π, φέρνουμε απ' το Π΄ κάθετη στο ίχνος σ'_1 την Π΄Π_σ και πάνω σ' αυτή φέρνουμε δεύτερη κάθετη και παίρνουμε μήκος Π΄Π_{10} = Π΄΄Π_y (υψόμετρο του Π). Με κέντρο το Π_σ και ακτίνα την $\Pi_\sigma\Pi_{10}$ μεταφέρουμε το μήκος αυτό στην προέκταση της Π΄Π_σ όπου ορίζουμε την τελική θέση Π_o του σημείου Π μετά την κατάκλιση (παράγραφος 4.20 σελ. 115). Παρόμοια ορίζονται και οι κατακλίσεις των άλλων σημείων.

Με τον δεύτερο τρόπο, κατακλίνουμε το ίχνος σ''_2 γύρω από το σ'_1. Θεωρούμε την δεύτερη προβολή της πρώτης ιχνοπαραλλήλου που περνάει απ' το Υ΄΄ και ορίζουμε το σημείο $Y_1(Y'_1,\ Y''_1)$ πάνω στο ίχνος σ''_2 και κατακλίνουμε το σημείο αυτό (Y_{10}) (σελ. 117), οπότε ορίζουμε και την κατάκλιση σ_{20} του ίχνους σ''_2. Η τελική θέση της κατάκλισης του Υ, η Y_o, ορίζεται ως η τομή της απ το Y_{10} παράλληλης προς το σ'_1 και της απ' το Υ΄ κάθετης σ΄ αυτό. Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι κατακλίσεις των υπολοίπων σημείων. Έτσι ορίζεται το πραγματικό μέγεθος της τομής της πυραμίδας με το επίπεδο p που είναι το κλειστό εξάπλευρο $\Pi_o P_o \Sigma_o T_o Y_o \Phi_o$.

Ασκήσεις

1) Να παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων τα παρακάτω σημεία και να προσδιοριστούν οι περιοχές του χώρου που αναφέρονται:

Α(2,5 / 4 / 4), Β(-3 / 1 / 5), Γ(5 / 7 / -3), Δ(-8 / 10 / -7), Ε(-5 / -2 / 5)

2) Να παρασταθούν τα συμμετρικά των σημείων της προηγούμενης άσκησης ως προς το οριζόντιο επίπεδο προβολής e_1 και ως προς το κατακόρυφο e_2.

3) Να παρασταθούν τα συμμετρικά των σημείων της προηγούμενης άσκησης ως προς τον άξονα y_{12}, καθώς και ως προς το επίπεδο συμμετρίας e_{13}.

4) Δίνεται το σημείο Μ(3 / 5 / 7). Να βρεθούν τα συμμετρικά του Μ τα M_1 και M_{13} ως προς το οριζόντιο επίπεδο e_1 και το επίπεδο συμμετρίας e_{13} αντίστοιχα, και να δειχθεί ότι η πρώτη προβολή του M_1 και η δεύτερη προβολή του M_{13} είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y_{12}, ενώ η δεύτερη προβολή του M_1 και η πρώτη προβολή του M_{13} συμπίπτουν.

5) Δίνεται το σημείο Α(7 / 11 / 13). Να παρασταθεί το συμμετρικό του σημείου Α, το Β, ως προς το σημείο Κ(3 / 5 / 5).

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθούν οι τύποι που δίνουν τις συντεταγμένες του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος συναρτήσει των άκρων.

6) Δίνονται τα σημεία Α(2 / 7 / 12), Β(8,5 / 18 / -3), και Γ(0 / 30 / 2). Να οριστούν οι ευθείες (με τις προεκτάσεις τους) ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ και να φανούν τα ορατά και αόρατα μέρη αυτών.

7) Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με τις συντεταγμένες των σημείων του Α(1,5 / 4 / 6) και Β(6,5 / 10 / 1,5). Να βρεθούν τα ίχνη της ΑΒ με τα επίπεδα προβολής, οι γωνίες κλίσης της ΑΒ ως προς τα e_1 και e_2, καθώς και το πραγματικό μέγεθος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

8) Δίνεται ευθεία $\alpha(\alpha', \alpha'')$ με τις προβολές δύο σημείων της Α(2 / 5 / 8) και Β(-1 / 7 / 6). Να κατασκευαστούν οι συμμετρικές της α, οι $\beta(\beta', \beta'')$ και $\gamma(\gamma', \gamma'')$, ως προς τα επίπεδα e_1 και e_2 αντίστοιχα.

9) Δίνεται η πρώτη προβολή Α΄Β΄Γ΄ ενός τριγώνου ΑΒΓ το οποίο ανήκει σ' ένα επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$. Να βρεθεί η δεύτερη προβολή Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Υπόδειξη:</u> Να χρησιμοποιηθούν πρώτες ή δεύτερες ιχνοπαράλληλες.

10) Να οριστεί επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$ από δύο τεμνόμενες ευθείες του $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$. (Ως γνωστό, δύο ευθείες τέμνονται αν το σημείο τομής των πρώτων προβολών και το σημείο τομής των δεύτερων προβολών τους αποτελούν ευθεία κάθετη στον άξονα y_{12}).

11) Να κατασκευαστούν τα ίχνη σ'_1, σ''_2 ενός επιπέδου p το οποίο ορίζεται από δύο ευθείες $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ οι οποίες όμως τέμνονται στον άξονα y_{12}.

<u>Υπόδειξη:</u> Απ' τις ευθείες $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ να οριστούν μια πρώτη και μια δεύτερη ιχνοπαράλληλη του p, απ' τις οποίες θα οριστούν τα σ'_1 και σ''_2.

12) Να κατασκευαστούν τα ίχνη σ'_1, σ''_2 ενός επιπέδου p το οποίο ορίζεται από δύο ευθείες $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ τέτοιες ώστε $\alpha' \equiv \beta''$ και $\alpha'' \equiv \beta'$.

13) Ένα επίπεδο ορίζεται από δύο τεμνόμενες ευθείες $\alpha(\alpha', \alpha'')$ και $\beta(\beta', \beta'')$ στο σημείο Μ(Μ΄, Μ΄΄). Αν δοθεί η πρώτη προβολή γ' ευθείας γ η οποία ανήκει στο επίπεδο, να οριστεί η δεύτερη προβολή γ'' της γ.

<u>Υπόδειξη:</u> Να κατασκευαστεί πρώτα το επίπεδο $p(\sigma'_1, \sigma''_2)$.

14) Δίνονται οι δύο προβολές τριγώνου ΑΒΓ, οι Α΄Β΄Γ΄, Α΄΄Β΄΄Γ΄΄. Να βρεθούν οι δύο προβολές του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ.

<u>Υπόδειξη:</u> Να γίνει κατάκλιση του ΑΒΓ γύρω από το ίχνος του σ'_1 και εκεί να οριστούν οι δύο κύκλοι. Κατόπιν να γίνει ανάκλιση αυτών (όπως και στην Παραστατική ενός επιπέδου).

[4]

[5]

[6]

[7]

[8]

[9]

Βιβλιογραφία

Α: Ξένη

[1] ***Abbott, W.***
"Practical Geometry & Engineering Graphics", London 1961

[2] ***Hohenberg, Fritz***
"Konstruktive Geometrie in der Technik", Wien 1961

[3] ***Vogler, Hans***
"Darstellende Geometrie", Graz 1989

Β: Ελληνική

[4] ***Λαδόπουλου, Παν.***
"Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας", Αθήνα 1976

[5] ***Λαδόπουλου, Παν.***
"Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας", Αθήνα 1966

[6] ***Λευκαδίτη, Γεωργίου***
"Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας", Αθήνα 1978

[7] ***Λόκκα, Θεοδώρου***
"Σημειώσεις Παραστατικής Γεωμετρίας", Λάρισα 1990

[8] ***Φούντα, Γρηγορίου***
"Παραστατική Γεωμετρία", Αθήνα 1976

[9] ***Χατσόπουλου, Ιωάν.***
"Μαθήματα Παραστατικής και Προβολικής Γεωμετρίας", Αθήνα 1957