ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ M.Sc.
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΕΙ/Λ

ΛΑΡΙΣΑ

Οκτώβριος 1991

T

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ M.Sc.

ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΕΙ/Λ

ΛΑΡΙΣΑ

Οκτώβριος 1991

1. Δι
2. Α[illegible]
3. Σ[illegible]
4. Πι
εφ

1. Ο[illegible]
2. Σ
3. Σ
4. Ά

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α' Μέρος

Β' Μέρος

Α' μ

Κα

ζουμε γ

φορά

γράμμ

Με

θετικός

ζεται

Δι

σκεται

σματος

τό κιν

φορές

Τό

τος. Η

Σύ

καθορί

σματα

στά

έχουν

δύο ύ

συμπ

και

έχουν

δηλ.

και τ

Α' ΜΕΡΟΣ

1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Ορισμοί

Καλούμε **διάνυσμα** ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το συμβολίζομε μέ $\vec{AB}$ ή $\overline{AB}$, που υποθέτομε ότι διανύεται από κινητό σημείο με φορά απ' το Α στο Β. Γιά συντομία το παριστάνομε μ' ένα μόνο γράμμα και μιά επιγραμμή δηλ. $\vec{AB} \equiv \bar{\alpha}$.

Μέτρο ή μήκος ή απόλυτος τιμή διανύσματος $\vec{AB}$ λέγεται ο θετικός αριθμός πού μετράει τό μήκος του ευθ. τμήματος ΑΒ και συμβολίζεται με $|\bar{\alpha}|$ ή απλώς α. δηλ $|\vec{AB}| = (AB)$ ή ΑΒ.

Διεύθυνση διανύσματος λέγεται η διεύθυνση της ευθείας πού βρίσκεται τό διάνυσμα και η ευθεία αυτή λέγεται **φορέας** του διανύσματος. **Φορά** του διανύσματος λέγεται η φορά κατά την οποία κινείται τό κινητό πού διαγράφει τό διάνυσμα. π.χ. τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BA}$ έχουν φορές αντίθετες.

Το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά είναι τα **στοιχεία** ενός διανύσματος. Η διεύθυνση και η φορά καθορίζουν την **κατεύθυνση** ενός διανύσματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω όταν δοθούν τα στοιχεία ενός διανύσματος καθορίζεται το διάνυσμα, όχι όμως και η θέση του στο χώρο. Τέτοια διανύσματα τα λέμε **ελεύθερα** διανύσματα, προς διάκριση από τα **εφαρμοστά** που έχουν ωρισμένη σταθερή αρχή και από τα **ολισθαίνοντα**, πού έχουν ωρισμένο σταθερό φορέα. **Παράλληλα ή συγγραμμικά** λέγονται δύο ή περισσότερα διανύσματα, όταν οι φορείς τους είναι παράλληλοι ή συμπίπτουν. **Ομόρροπα** λέγονται τα διανύσματα που είναι παράλληλα και έχουν την ίδια φορά. **Αντίρροπα** όταν είναι παράλληλα και έχουν αντίθετες φορές. **Αντίθετα** όταν είναι αντίρροπα και ισομήκη. δηλ. $\overline{AB} = -\overline{BA}$. **Ίσα** όταν είναι ομόρροπα και ισομήκη. δηλ όταν έχουν και τα τρία τους στοιχεία ίδια. Αν $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ δύο ίσα διανύσματα γράφομε $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Τό διάνυσμα τό ομόρροπο προς το $\vec{a}$ και με μέτρο το 1 θα τό παριστάνομε με $\vec{a}_0$ και θα το λέμε **μοναδιαίο**. Επί τό διάνυσμα εκείνο για τό οποίο η αρχή και τό πέρας συμπίπτουν λέγεται **μηδενικό**. Στό μηδενικό διάνυσμα δίνομε οποιαδήποτε διεύθυνση και φορά και τα θεωρούμε όλα ίσα μεταξύ τους και μέτρου 0. Διανύσματα διατεταγμένα έτσι ώστε η αρχή εκάστου να συμπίπτει με τό πέρας του προηγουμένου, απ' το δεύτερο κι έπειτα λέγονται **διαδοχικά**. Διανύσματα πού έχουν κοινή σταθερή αρχή λέγονται **διανυσματικές ακτίνες**.

Προβολή διανύσματος επί ευθείας ή επιπέδου λέγεται το διάνυσμα που έχει αρχή την προβολή της αρχής και πέρας την προβολή του πέρατος του προβαλλομένου διανύσματος. Από τα θεωρήματα της στοιχειώδους Γεωμετρίας περί προβολών ευθυγράμμων τμημάτων προκύπτει ότι: "ίσα διανύσματα προβάλλονται κατά ίσα διανύσματα."

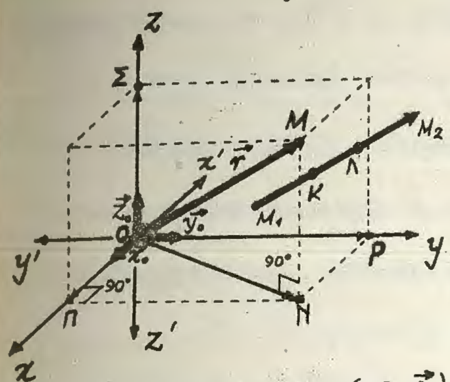
Γινόμενο διανύσματος $\vec{a}$ επί λ $(\lambda \in R)$ ορίζεται τό διάνυσμα $\vec{\beta}$ πού έχει μέτρο $|\lambda| \cdot a$ και πού είναι ομόρροπο προς τό $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο αν $\lambda < 0$. και γράφουμε $\vec{\beta} = \lambda \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$. Αν $\lambda = 0 \Rightarrow 0 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$.

Άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων λέγεται το διάνυσμα πού έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας τό πέρας του τελευταίου. Αν τα διανύσματα δεν είναι διαδοχικά τα καθιστούμε διαδοχικά· αν έχουν κοινή αρχή τότε το άθροισμα των δύο πρώτων είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου αυτών με αρχή την κοινή αρχή των· ή διαγώνιος ως νέο διάνυσμα με το επόμενο δίνει ένα νέο διάνυσμα κατά όμοιο τρόπο κ.ο.κ.

Διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ και συμβολίζεται $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta}$ είναι το διάνυσμα πού προκύπτει αν προσθέσουμε στο διάνυσμα $\vec{AB}$ το αντίρροπο του $\vec{\Gamma\Delta}$ δηλ. τό $\vec{\Delta\Gamma}$ δηλ. $\vec{AB} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB} + (-\vec{\Gamma\Delta}) = \vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma}$.
Όταν τα διανύσματα έχουν κοινή αρχή η διαφορά τους είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου αυτών πού δεν διέρχεται από την κοινή αρχή των.

Γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ είναι η γωνία πού σχηματίζεται από τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ (αφού τα κατασκευάσουμε με κοινή αρχή), θετική ↺ ή αρνητική ↻

Συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο χώρο.



Έστωσαν $x'x$, $y'y$, $z'z$ μια τριάδα διατεταγμένων αξόνων με κοινή αρχή O, με μοναδιαία ισομήκη διανύσματα $\vec{x_0}$, $\vec{y_0}$, $\vec{z_0}$, που σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα. (**Δεξιόστροφο** σύστημα τριών διανυσμάτων, τα οποία δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, προκύπτει, όταν από κάθε ζεύγος διανυσμάτων $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$, $(\vec{\beta},\vec{\gamma})$, $(\vec{\gamma},\vec{\alpha})$ των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, κυκλικά λαμβανόμενο, αν περιστραφεί π.χ. το $\vec{\alpha}$ κατά την μικρότερη γωνία προς το $\vec{\beta}$, να κοχλιώνεται προς το μέρος του επιπέδου που βρίσκεται το $\vec{\gamma}$. Ομοίως και για τα άλλα ζεύγη $(\vec{\beta},\vec{\gamma})$, $(\vec{\gamma},\vec{\alpha})$). Αν οι άξονες είναι μεταξύ τους ανά δύο κάθετοι τότε το σύστημα $Oxyz$ λέγεται **τρισορθογώνιο ή Καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων και επί πλέον **ορθοκανονικό**, εφ' όσον τα μοναδιαία διανύσματα (όπως εδώ) είναι ισομήκη. Ο άξονας $x'x$ λέγεται άξονας των **τετμημένων**, ο $y'y$ των **τεταγμένων** και ο $z'z$ των **κατηγμένων**.

Έστω τώρα διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$ του τριδιαστάτου χώρου και $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}$ όπου O η αρχή του συστήματος $Oxyz$. Το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ (ή του ίσου του $\overrightarrow{OM}$) στον άξονα των τετμημένων λέγεται **τετμημένη** του διανύσματος και αντιστοίχως στον άξονα των τεταγμένων και κατηγμένων λέγονται **τεταγμένη** και **κατηγμένη**. Παριστάνομε δε με $\alpha = O\Pi$ την τετμημένη, με $\beta = OP$ την τεταγμένη και με $\gamma = O\Sigma$ την κατηγμένη. Οι τρεις αριθμοί α, β, γ λέγονται **συντεταγμένες** του διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ και γράφομε $\overrightarrow{M_1M_2}(\alpha,\beta,\gamma)$. Απ' το σχήμα προκύπτει $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{O\Pi} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O\Sigma}$. Επειδή όμως $\overrightarrow{O\Pi} = \alpha\vec{x_0}$, $\overrightarrow{OP} = \beta\vec{y_0}$, $\overrightarrow{O\Sigma} = \gamma\vec{z_0}$ θα έχουμε τελικά $\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha\vec{x_0} + \beta\vec{y_0} + \gamma\vec{z_0}$. (1)

Έστω τώρα M σημείο του χώρου και (x, y, z) οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OM}$ δηλ. $O\Pi = x$, $OP = y$, $O\Sigma = z$. Ο x λέγεται τετμημένη του σημείου M, ο y τεταγμένη και ο z κατηγμένη του M. Και οι τρεις αριθμοί λέγονται συντεταγμένες του σημείου M και γράφουμε $M(x,y,z)$. Έτσι σε κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί μονοσήμαντα μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο M του χώρου. Η αμφιμονοσήμαντη αυτή αντιστοίχηση λέγεται **αναλυτική παράσταση** των σημείων του χώρου ως προς το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$.

Έστω για το $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ και $\overrightarrow{M_1M_2}(\alpha,\beta,\gamma)$. Θέλουμε να εκφράσουμε τα α,β,γ με τις συντεταγμένες των M_1, M_2. Έχουμε:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \quad \text{ή} \quad \alpha\vec{x_0}+\beta\vec{y_0}+\gamma\vec{z_0} = (x_2\vec{x_0}+y_2\vec{y_0}+z_2\vec{z_0}) -$$

$$-(x_1\vec{x_0}+y_1\vec{y_0}+z_1\vec{z_0}) = (x_2-x_1)\vec{x_0}+(y_2-y_1)\vec{y_0}+(z_2-z_1)\vec{z_0}$$

Εκ της τελευταίας σχέσεως προκύπτει: $\alpha = x_2-x_1,\ \beta = y_2-y_1,\ \gamma = z_2-z_1$. (2)

Ας ζητήσουμε τώρα να εκφράσουμε το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}(\alpha,\beta,\gamma)$ συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Από το ορθ. τρίγωνο ONM έχομε: $OM^2 = ON^2 + NM^2$. Αλλά $OM = M_1M_2$, $ON^2 = O\Pi^2 + \Pi N^2 = \alpha^2+\beta^2$, $NM^2 = \gamma^2$. άρα αν λάβουμε υπόψη των (1) προκύπτει τελικά:

$$OM = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (3)$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν σημείο $K(x,y,z)$ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Λέμε ότι το σημείο K χωρίζει το τμήμα M_1M_2 σε **μερικό ή απλό λόγο** λ_1 όταν ($\lambda_1 \neq$ $\lambda_1 = \frac{(M_1K)}{(KM_2)}$. Ο μερικός λόγος λ_1 παρίσταται με το σύμβολο $\lambda_1 = (M_1M_2K)$. Αν τέσσερα σημεία M_1, K, Λ, M_2 κείνται επ' ευθείας, ο λόγος

$$\lambda_2 = \frac{(M_1K\Lambda)}{(M_1KM_2)} = \frac{\frac{(M_1\Lambda)}{(\Lambda K)}}{\frac{(M_1M_2)}{(M_2K)}} = \frac{(M_1\Lambda)(M_2K)}{(\Lambda K)(M_1M_2)}$$

λέγεται **διπλούς λόγος** των τεσσάρων σημείων M_1, K, Λ, M_2, και είναι $\lambda_2 = (M_1K\Lambda M_2)$. Αν $\lambda_2 = -1$, τα M_1, K, Λ, M_2 αποτελούν **αρμονική τετράδα**, ή το ένα ζεύγος χωρίζει αρμονικά το άλλο. Θα ζητήσουμε τώρα να εκφράσουμε τις συντεταγμένες (x,y,z) του K συναρτήσει των συντεταγμένων των M_1, M_2. Έχομε:

$$\overrightarrow{M_1K} = (x-x_1)\vec{x_0}+(y-y_1)\vec{y_0}+(z-z_1)\vec{z_0}, \quad \overrightarrow{KM_2} = (x_2-x)\vec{x_0}+(y_2-y)\vec{y_0}+(z_2-z)\vec{z_0}.$$

Ο μερικός λόγος $\lambda_1 = \frac{M_1K}{KM_2}$ του διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ γίνεται: $\overrightarrow{M_1K} = \lambda_1 \overrightarrow{KM_2}$.

ή αντικαθιστώντας τα διανύσματα $\overrightarrow{M_1K}$ και $\overrightarrow{KM_2}$ έχομε

$$(x-x_1)\vec{x}_0+(y-y_1)\vec{y}_0+(z-z_1)\vec{z}_0=\lambda_1(x_2-x)\vec{x}_0+\lambda_1(y_2-y)\vec{y}_0+\lambda_1(z_2-z)\vec{z}_0$$ ή

ακόμη: $x-x_1=\lambda_1(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda_1(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda_1(z_2-z)$

Αν λύσουμε τις σχέσεις αυτές, την πρώτη ως προς x, την δεύτερη ως προς y και την τρίτη ως προς z θα πάρουμε αντιστοίχως:

$$x=\frac{x_1+\lambda_1x_2}{1+\lambda_1},\quad y=\frac{y_1+\lambda_1y_2}{1+\lambda_1},\quad z=\frac{z_1+\lambda_1z_2}{1+\lambda_1}\quad (4).$$

Αν $\lambda_1=1$ οι τύποι (3) γίνονται:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη διανυσματική ακτίνα του τυχόντος σημείου K του διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ όταν $\frac{M_1K}{KM_2}=\lambda_1$ τότε, αν $\overrightarrow{OM_1}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{OM_2}=\vec{r}_2$ και $\overrightarrow{OK}=\vec{r}$ η ζητούμενη διανυσματική ακτίνα, θα έχωμε εκ της σχέσεως $\frac{M_1K}{KM_2}=\lambda_1 \Rightarrow \overrightarrow{M_1K}=\lambda_1\overrightarrow{KM_2}$ ή επειδή $\overrightarrow{M_1K}=\vec{r}-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{KM_2}=\vec{r}_2-\vec{r} \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}_1=\lambda_1(\vec{r}_2-\vec{r})$ εκ της οποίας, δια λύσεως ως προς $\vec{r}$ προκύπτει: $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda_1\vec{r}_2}{1+\lambda_1}$ (5).

Ονομάζομε **συνημίτονα κατευθύνσεως** ενός διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ ή του ίσου του $\overrightarrow{OM}$ τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το $\overrightarrow{OM}$ με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz. Εκ του ορισμού αυτού προκύπτει:

$$\text{συν}(Ox,\overrightarrow{OM})=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad \text{συν}(Oy,\overrightarrow{OM})=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$\text{συν}(Oz,\overrightarrow{OM})=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$, αν το M έχει συντεταγμένες α,β,γ.

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$. Τα διανύσματα αυτά λέμε ότι είναι **γραμμικώς εξηρτημένα** όταν μπορούν να παρασταθούν υπό την μορφή $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=0$ όπου λ_1, λ_2 δεν είναι ταυτοχρόνως μηδέν. Αλλοιώς λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** (αν δηλ. $\lambda_1=\lambda_2=0$). Εκ της σχέσεως $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=0$ προκύπτει ότι δύο γραμμικώς εξηρτημένα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά. Αυτό προκύπτει απ' τον ορισμό δύο συγγραμμικών διανυσμάτων διότι σε δύο συγγραμμικά ή παράλληλα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ισχύει $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}_2$. Εκ της σχέσεως όμως $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=0$ προκύπτει $\lambda_1\vec{a}_1=-\lambda_2\vec{a}_2$ ή $\vec{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2$. Δηλ. οι σχέσεις $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}_2$ και $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=0$ ταυτίζονται για $\lambda=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Αν επομένως τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ δίδονται δια των συντεταγμένων των $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ η σχέση $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}_2$ γίνεται:

$x_1\vec{x}_0+y_1\vec{y}_0+z_1\vec{z}_0=\lambda x_2\vec{x}_0+\lambda y_2\vec{y}_0+\lambda z_2\vec{z}_0$ από την οποία προκύπτει $x_1=\lambda x_2$, $y_1=\lambda y_2$, $z_1=\lambda z_2$ ή $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda$ δηλ. για να είναι δύο διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ συγγραμμικά πρέπει και αρκεί $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$

Ομοίως τρία διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ λέμε ότι είναι γραμμικώς εξηρτημένα άν μπορούν να παρασταθούν υπό την μορφή: $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ δεν είναι όλοι ταυτοχρόνως μηδέν. Αλλοιώς λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα (αν δηλ. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$). Αποδεικνύεται ότι τρία γραμμικώς εξηρτημένα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ είναι συνεπίπεδα, δηλ. βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αν $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a}_3(x_3, y_3, z_3)$ από τη σχέση $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0$ προκύπτει:

$\lambda_1(x_1\vec{x}_0+y_1\vec{y}_0+z_1\vec{z}_0)+\lambda_2(x_2\vec{x}_0+y_2\vec{y}_0+z_2\vec{z}_0)+\lambda_3(x_3\vec{x}_0+y_3\vec{y}_0+z_3\vec{z}_0)=0$

ή $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\vec{x}_0+(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3)\vec{y}_0+(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3)\vec{z}_0=0$

και επειδή $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \neq \vec{0}$ (ως μοναδιαία διανύσματα) προκύπτει

$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3=0$, $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=0$, $\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0$ (α).

Το σύστημα των εξισώσεων (α) με αγνώστους τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι ομογενές. Για να έχει λύση διάφορο της προφανούς $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ επειδή υπέθεσα ότι $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ δεν είναι όλοι συγχρόνως μηδέν, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ να είναι μηδέν. δηλ.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0 \quad ή$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \quad (B)$$

η οποία είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ να είναι συνεπίπεδα.

Όλοι οι ορισμοί που δώσαμε για τις συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στον **τρισδιάστατο** χώρο, ισχύουν και για τις συντεταγμένες σημείου και διανύσματος στο **διδιάστατο χώρο** (επίπεδο) αν δεν υπάρχει ο άξονας Oz ή αν $z=0$, καθώς επίσης και στο **μονοδιάστατο χώρο** (ευθεία), αν δεν υπάρχουν οι άξονες Oz, Oy ή αν $z=0$, $y=0$. Τότε οι τύποι (1), (2), (3), (4) του διανύσματος συντεταγμένων, μήκους και απλού λόγου παίρνουν τις μορφές: 1) στο διδιάστατο χώρο (επίπεδο):

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha\vec{x}_0 + \beta\vec{y}_0 \quad (1\alpha), \quad \alpha = x_2 - x_1,\ \beta = y_2 - y_1 \quad (2\alpha),$$

$$OM = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad (3\alpha), \quad x = \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1+\lambda_1},\ y = \frac{y_1+\lambda_1 y_2}{1+\lambda_1} \quad (4\alpha)$$

2) στο μονοδιάστατο χώρο (ευθεία): $\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha\vec{x}_0$ (1β),

$$\alpha = x_2 - x_1 \quad (2\beta), \quad OM = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = x_2 - x_1 \quad (3\beta).\ \text{δηλ.}\ (3\beta)=(2\beta)$$

και $$x = \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1+\lambda_1} \quad (4\beta).$$

Ειδικά στο επίπεδο ορίζουμε ως **συντελεστή κατευθύνσεως** ενός διανύσματος $\vec{r}(\alpha,\beta)$ το λόγο $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \lambda$. Απ' τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι, για να είναι δύο διανύσματα $\vec{r}_1(\alpha_1,\beta_1)$, $\vec{r}_2(\alpha_2,\beta_2)$, στο επίπεδο, συγγραμμικά πρέπει και αρκεί να έχουν ίσους συντελεστάς κατευθύνσεως, (αν λάβουμε υπ' όψιν τη συγγραμμικότητα δύο διανυσμάτων στο χώρο $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$).

Στην αρχή ορίσαμε γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ επί λ $(\lambda \in R)$. Τώρα θα ορίσουμε γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ επί ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$. Διακρίνουμε διάφορα τέτοια είδη γινομένων:

1. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά. Ο αριθμός $\alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ λέγεται **εσωτερικό** γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και παρίσταται με το σύμβολο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. (Τα α, β είναι τα μέτρα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$). Όταν ένα εκ των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μηδενικό, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$. Απ' τον ορισμό προκύπτει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ είτε όταν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ είτε όταν $\vec{\beta} = \vec{0}$ είτε όταν $\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$, δηλ. όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ των.

Στο εσωτερικό γινόμενο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ αντιμεταθετική, 2) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ επιμεριστική, 3) $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ δηλ. δεν ισχύει η προσεταιριστικότητα στον πολλαπλασιασμό (εσωτερικώς) 4) $\vec{x}_0\cdot\vec{x}_0 = \vec{y}_0\cdot\vec{y}_0 = \vec{z}_0\cdot\vec{z}_0 = 1$ 5) $\vec{x}_0\cdot\vec{y}_0 = \vec{y}_0\cdot\vec{z}_0 = \vec{z}_0\cdot\vec{x}_0 = 0$ Όλες αυτές οι ιδιότητες προκύπτουν από τον ορισμό. 6) Αν $\vec{\alpha} = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0$, $\vec{\beta} = x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0)\cdot(x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0) =$
$= x_1x_2\vec{x}_0\cdot\vec{x}_0 + x_1y_2\vec{x}_0\cdot\vec{y}_0 + x_1z_2\vec{x}_0\cdot\vec{z}_0 + y_1x_2\vec{y}_0\cdot\vec{x}_0 + y_1y_2\vec{y}_0\cdot\vec{y}_0 +$
$+ y_1z_2\vec{y}_0\cdot\vec{z}_0 + z_1x_2\vec{z}_0\cdot\vec{x}_0 + z_1y_2\vec{z}_0\cdot\vec{y}_0 + z_1z_2\vec{z}_0\cdot\vec{z}_0$. Και αν λάβωμε υπ' όψιν τις ιδιότητες (4) και (5) $\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. (i)
Απ' τη σχέση (i) προκύπτει και η συνθήκη καθετότητος δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ στο χώρο. Δηλ. άν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ $(\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0)$.
Στο επίπεδο η συνθήκη καθετότητος γίνεται $(z_1 = z_2 = 0)$:
$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ή $y_1y_2 = -x_1x_2$ ή $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2} = -1$ δηλ. $\lambda_1\cdot\lambda_2 = -1$
όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές κατευθύνσεως των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, και $\text{εφ}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$.
Ακόμα απ' την (i) υπολογίζεται η γωνία των δύο διανυσμάτων· είναι
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \alpha\beta\,\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ και $\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\alpha\cdot\beta}$ ή

$$\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

όπως και εκ της $\text{εφ}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.

2. Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά. Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που έχει μέτρο $\alpha\cdot\beta\cdot\text{ημ}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και φορά τέτοια ώστε η διατεταγμένη τριάδα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ να αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα λέγεται **εξωτερικό** γινόμενο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και παρίσταται με το σύμβολο $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$, ή $[\vec{\alpha},\vec{\beta}]$. Όταν ένα εκ των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μηδενικό τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = \vec{0}$. Απ' τον ορισμό προκύπτει ότι $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = \vec{0}$ είτε όταν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, είτε όταν $\vec{\beta} = \vec{0}$, είτε όταν $\text{ημ}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$ δηλ. όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα. Ακόμη ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα, σε αντίθεση με το εσωτερικό αυτών που είναι αριθμός.

Στο εξωτερικό γινόμενο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = -\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}$ δηλ. δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

2) $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}+\vec{\alpha}\wedge\vec{\gamma}$ επιμεριστική

3) $\lambda(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}) = (\lambda\vec{\alpha})\wedge\vec{\beta} = \vec{\alpha}\wedge(\lambda\vec{\beta}) = (\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})\lambda$

4) $\vec{x}_0\wedge\vec{x}_0 = \vec{y}_0\wedge\vec{y}_0 = \vec{z}_0\wedge\vec{z}_0 = 0$ (διότι $\text{ημ}(\vec{x}_0,\vec{x}_0)=\text{ημ}(\vec{y}_0,\vec{y}_0)=\text{ημ}(\vec{z}_0,\vec{z}_0)=0$)

5) $\vec{x}_0\wedge\vec{y}_0=\vec{z}_0$, $\vec{y}_0\wedge\vec{z}_0=\vec{x}_0$, $\vec{z}_0\wedge\vec{x}_0=\vec{y}_0$ (γιατί τα $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα). 6) Αν $\vec{\alpha} = x_1\vec{x}_0+y_1\vec{y}_0+z_1\vec{z}_0$ και $\vec{\beta} = x_2\vec{x}_0+y_2\vec{y}_0+z_2\vec{z}_0$ τότε το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ θα είναι:

$$\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = (x_1\vec{x}_0+y_1\vec{y}_0+z_1\vec{z}_0)\wedge(x_2\vec{x}_0+y_2\vec{y}_0+z_2\vec{z}_0) = x_1x_2\vec{x}_0\wedge\vec{x}_0 + x_1y_2\vec{x}_0\wedge\vec{y}_0 + x_1z_2\vec{x}_0\wedge\vec{z}_0 + y_1x_2\vec{y}_0\wedge\vec{x}_0 + y_1y_2\vec{y}_0\wedge\vec{y}_0 + y_1z_2\vec{y}_0\wedge\vec{z}_0 + z_1x_2\vec{z}_0\wedge\vec{x}_0 + z_1y_2\vec{z}_0\wedge\vec{y}_0 + z_1z_2\vec{z}_0\wedge\vec{z}_0.$$

Και αν λάβουμε υπ' όψιν τις ιδιότητες (4) και (5) $\Rightarrow \vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = (y_1z_2-y_2z_1)\vec{x}_0 - (x_1z_2-x_2z_1)\vec{y}_0 + (x_1y_2-x_2y_1)\vec{z}_0$ η οποία γράφεται υπό μορφή ορίζουσας, ήτοι:

$$\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (ii)$$

δηλ. το διάνυσμα $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ έχει συντεταγμένες το ανάπτυγμα της ορίζουσας αυτής, δηλ είναι $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta} = \vec{\gamma}(y_1z_2-y_2z_1,\ x_2z_1-x_1z_2,\ x_1y_2-x_2y_1)$.

Από την ιδιότητα (5) προκύπτει ότι για να είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει και αρκεί το εξωτερικό γινόμενο αυτών να είναι μηδέν. Ακόμη απ' τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου προκύπτει ότι το μέτρο του $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διότι είναι $\alpha\cdot\beta\,\text{ημ}(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \alpha\cdot\upsilon$ όπου $\upsilon = \beta\,\text{ημ}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι το ύψος του παρ/μου των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

3. Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη μηδενικά. Καλείται **μικτό** γινόμενο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ κατά την τάξη αυτή το $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})$. Προφανώς το μικτό γινόμενο των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ σαν εσωτερικό γινόμενο του $\vec{\alpha}$ με το $\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma}$ είναι αριθμός, ο $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\text{ημ}(\vec{\beta},\vec{\gamma})\cdot\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})$, και παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Συμβολίζεται ακόμη και με $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]$ και μάλιστα $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}] = [\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha}] = [\vec{\gamma},\vec{\alpha},\vec{\beta}]$ με κυκλική μετάθεση.

Άν $\vec{\alpha}=x_1\vec{x_0}+y_1\vec{y_0}+z_1\vec{z_0}$, $\vec{\beta}=x_2\vec{x_0}+y_2\vec{y_0}+z_2\vec{z_0}$, $\vec{\gamma}=x_3\vec{x_0}+y_3\vec{y_0}+z_3\vec{z_0}$ τότε το μικτό γινόμενο των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ευρίσκεται, αν ληφθούν υπ' όψιν οι σχέσεις (i) και (ii) του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, ότι είναι:

$$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (iii).$$

Άν η ορίζουσα αυτή είναι μηδέν τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μηδέν δηλ. τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα οπότε προκύπτει ο ίδιος τύπος (B) που δίνει την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι 3 διανύσματα συνεπίπεδα.

4. Διεξωτερικό γινόμενο τριών διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ μη μηδενικά. Καλείται **διεξωτερικό** γινόμενο των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ κατά την τάξη αυτή το $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})$. Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})$ υπολογίζουμε πρώτα τις συντεταγμένες του $(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})$ απ' τον τύπο (ii) και κάνουμε πάλι εφαρμογή του ίδιου τύπου για το $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})$. Το διεξωτερικό γινόμενο αναλύεται ως εξής: 1) $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}$ και

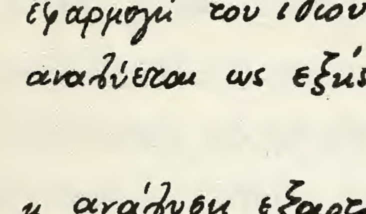
2) $(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{\alpha}$ δηλ.

η ανάλυση εξαρτάται από τη θέση της παρενθέσεως.

Ασκήσεις.

1.1. Άν $A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $B(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\Gamma(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$ οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ στο χώρο να ευρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των διαμέσων αυτού.

Λύση. Το μέσον Δ της ΒΓ έχει συντεταγμένες:



$\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$, $\dfrac{\beta_2+\beta_3}{2}$, $\dfrac{\gamma_2+\gamma_3}{2}$. Το Μ διαιρεί την ΑΔ σε λόγο $\lambda_1=(A\Delta M)=\dfrac{A\Delta}{M\Delta}=\dfrac{2}{1}=2$ Άν το Μ έχει συντεταγμένες x,y,z αυτές θα δίδονται απ' τους τύπους (4) για $\lambda_1=2$: $x=\dfrac{\alpha_1+2\cdot\left(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)}{1+2}=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}$

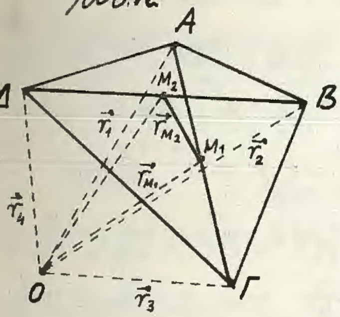
ομοίως $y=\dfrac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{3}$, $z=\dfrac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{3}$.

1.2. Να προσδιορισθεί το α έτσι ώστε το σημείο $M(\alpha, 1, 1)$ να απέχει εξ ίσου από την αρχή των συντεταγμένων και από το σημείο $N(1,2,3)$.

Λύση. Από τον τύπο (3) του μήκους ενός διανύσματος προκύπτει: $MO^2 = \alpha^2 + 1^2 + 1^2 = \alpha^2 + 2$ (όπου O η αρχή των συντεταγμένων). $MN^2 = (\alpha-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 5$ δηλ. θα πρέπει: $MO = MN$ ή $\alpha^2 + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 5$ δηλ. $\alpha = \frac{3}{2}$.

1.3. Αν $AB\Gamma\Delta$ είναι τυχόν τετράπλευρο στο χώρο και M_1, M_2 τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$, $B\Delta$ να δειχθεί ότι: $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} = 4\overrightarrow{M_1M_2}$.

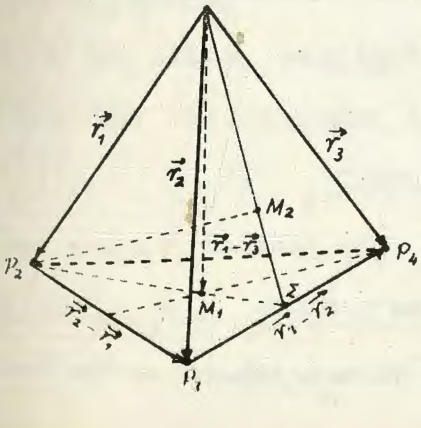
Λύση.



Έστω $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, \vec{r_4}$ οι διανυσματικές ακτίνες των κορυφών του τετραπλεύρου με αρχή των συντεταγμένων το O. Τότε το διάνυσμα θέσεως του M_1 εκ του τύπου (5) για $\lambda_1 = 1$ είναι: $\vec{r}_{M_1} = \dfrac{\vec{r_1} + \vec{r_3}}{2}$ του δε M_2 $\vec{r}_{M_2} = \dfrac{\vec{r_2} + \vec{r_4}}{2}$ και επομένως $\overrightarrow{M_1M_2} = \dfrac{\vec{r_2} + \vec{r_4}}{2} - \dfrac{\vec{r_1} + \vec{r_3}}{2}$ και $4\overrightarrow{M_1M_2} = 2(\vec{r_2} + \vec{r_4} - \vec{r_1} - \vec{r_3})$. Επίσης έχομε: $\vec{AB} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\vec{A\Delta} = \vec{r_4} - \vec{r_1}$, $\vec{\Gamma B} = \vec{r_2} - \vec{r_3}$, $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{r_4} - \vec{r_3}$. Άρα $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} =$ $\vec{r_2} - \vec{r_1} + \vec{r_4} - \vec{r_1} + \vec{r_2} - \vec{r_3} + \vec{r_4} - \vec{r_3} = 2(\vec{r_2} + \vec{r_4} - \vec{r_1} - \vec{r_3})$ δηλ. $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = 4\overrightarrow{M_1M_2}$.

1.4. Αν P_1, P_2, P_3, P_4 είναι οι κορυφές τετραέδρου και M_1, M_2, M_3, M_4 τα σημεία τομής των διαμέσων των απέναντι εδρών να δειχθεί ότι: $\overrightarrow{P_1M_1} + \overrightarrow{P_2M_2} + \overrightarrow{P_3M_3} + \overrightarrow{P_4M_4} = \vec{O}$.

Λύση



Λαμβάνομε ως αρχή των αξόνων το P_1. Τότε $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r_1}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{r_2}$, $\overrightarrow{P_1P_4} = \vec{r_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\overrightarrow{P_3P_4} = \vec{r_3} - \vec{r_2}$ $\overrightarrow{P_4P_2} = \vec{r_1} - \vec{r_3}$. Το διάνυσμα θέσεως του M_1 είναι $\overrightarrow{P_1M_1} = \overrightarrow{P_1P_2} + \frac{2}{3}\overrightarrow{P_2\Sigma}$. Τό $\overrightarrow{P_2\Sigma} =$

$$\frac{\overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_2P_4}}{2} = \frac{\overrightarrow{P_2P_3} - \overrightarrow{P_4P_2}}{2} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1} - (\vec{r_1} - \vec{r_3})}{2} =$$

$\dfrac{\vec{r_2} + \vec{r_3} - 2\vec{r_1}}{2}$ Άρα $\overrightarrow{P_1M_1} = \vec{r_1} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\vec{r_2} + \vec{r_3} - 2\vec{r_1}}{2} =$

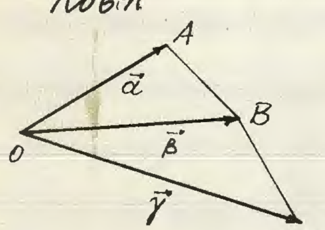
$= \frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3}$ Τό $\overrightarrow{P_2M_2} = \overrightarrow{P_2P_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{P_1\Sigma} = -\vec{r_1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{r_2}+\vec{r_3}}{2} = \frac{-3\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3}$

ομοίως $\overrightarrow{P_3M_3} = \frac{\vec{r_1}-3\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3}$ και $\overrightarrow{P_4M_4} = \frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}-3\vec{r_3}}{3}$ άρα

$$\overrightarrow{P_1M_1}+\overrightarrow{P_2M_2}+\overrightarrow{P_3M_3}+\overrightarrow{P_4M_4} = \frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3} + \frac{-3\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3} + \frac{\vec{r_1}-3\vec{r_2}+\vec{r_3}}{3} + \frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}-3\vec{r_3}}{3}$$

1.5. Για να είναι τα πέρατα A, B, Γ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λαμβανομένων από την αρχή O σε ευθεία, πρέπει και αρκεί να υπάρχουν 3 αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ όλοι διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}=\vec{0}$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

Λύση



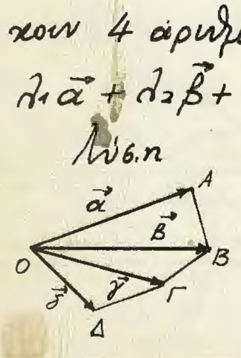
Για να βρίσκονται τα A, B, Γ επ' ευθείας πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι συγγραμμικά, δηλ. $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{B\Gamma}$. Είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}-\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma}-\vec{\beta}$ δηλ. $\vec{\beta}-\vec{\alpha} = k(\vec{\gamma}-\vec{\beta})$ ή $-\vec{\alpha}+(1+k)\vec{\beta}-k\vec{\gamma}=\vec{0}$. Άρα υπάρχουν 3 αριθμοί $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1+k$, $\lambda_3=-k$ όλοι $\neq 0$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο. Έστω ότι υπάρχουν τρεις αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}=\vec{0}$ (1) και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ (2). Αν λύσω τη (2) ως προς λ_1 π.χ. έχω $\lambda_1=-\lambda_2-\lambda_3$ αντικαθιστώ την τιμή αυτή στην (1) και έχω:

$-\lambda_2\vec{\alpha}-\lambda_3\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}=\vec{0}$ ή $\lambda_2(\vec{\beta}-\vec{\alpha}) = \lambda_3(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})$ ή $\vec{\beta}-\vec{\alpha} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})$

Αλλά $\vec{\beta}-\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\alpha}-\vec{\gamma} = -(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}) = -\overrightarrow{A\Gamma}$ δηλ. $\overrightarrow{AB} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ δηλ. τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι συγγραμμικά, άρα τα άκρα αυτών κείνται επ' ευθείας.

1.6. Για να είναι τα πέρατα A, B, Γ, Δ τεσσάρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$, που έχουν κοινή αρχή O στο ίδιο επίπεδο, πρέπει και αρκεί να υπάρχουν 4 αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ διάφοροι του μηδενός τέτοιοι ώστε να είναι $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}+\lambda_4\vec{\delta}=\vec{0}$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$.

Λύση



Για να βρίσκονται τα A, B, Γ, Δ στο ίδιο επίπεδο, πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ να είναι συνεπίπεδα. Δηλ. πρέπει να υπάρχουν 3 αριθμοί k, λ, μ όχι όλοι συγχρόνως μηδέν ώστε

$k\vec{AB}+\lambda\vec{B\Gamma}+\mu\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0}$ ή $k(\vec{\beta}-\vec{\alpha})+\lambda(\vec{\gamma}-\vec{\beta})+\mu(\vec{\delta}-\vec{\gamma})=\vec{0}$ ή μετά τις πράξεις: $-k\vec{\alpha}+(k-\lambda)\vec{\beta}+(\lambda-\mu)\vec{\gamma}+\mu\vec{\delta}=\vec{0}$. Άρα υπάρχουν 4 αριθμοί $\lambda_1=-k$, $\lambda_2=k-\lambda$, $\lambda_3=\lambda-\mu$, $\lambda_4=\mu$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}+\lambda_4\vec{\delta}=\vec{0}$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$ Αντιστρόφως. Έστω ότι υπάρχουν 4 αριθμοί τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}+\lambda_4\vec{\delta}=\vec{0}$ (1) και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$ (2) Εκ της (2) αν λύσω ως προς λ_4 π.χ. έχω $\lambda_4=-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3$. Θέτω την τιμή αυτή του λ_4 στην (1) και έχω $\lambda_1(\vec{\alpha}-\vec{\delta})+\lambda_2(\vec{\beta}-\vec{\delta})+\lambda_3(\vec{\gamma}-\vec{\delta})=\vec{0}$ ή $\lambda_1(\vec{\delta}-\vec{\alpha})+\lambda_2(\vec{\delta}-\vec{\beta})+\lambda_3(\vec{\delta}-\vec{\gamma})=\vec{0}$ ή $\lambda_1\vec{A\Delta}+\lambda_2\vec{B\Delta}+\lambda_3\vec{\Gamma\Delta}=\vec{0}$, δηλ. τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$, $\vec{B\Delta}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ συνεπίπεδα, άρα τα Α,Β,Γ,Δ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

1.7. Αν $\vec{r_1}=2\vec{x_0}-\vec{y_0}+\vec{z_0}$, $\vec{r_2}=\vec{x_0}+3\vec{y_0}-2\vec{z_0}$, $\vec{r_3}=-2\vec{x_0}+\vec{y_0}-3\vec{z_0}$ και $\vec{r_4}=3\vec{x_0}+2\vec{y_0}+5\vec{z_0}$ να ευρεθούν οι αριθμοί λ_1, λ_2, λ_3 τέτοιοι ώστε $\vec{r_4}=\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}$. (1).

Λύση Θέτω στην (1) όπου $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, \vec{r_4}$ τα ίσα τους και έχω

$3\vec{x_0}+2\vec{y_0}+5\vec{z_0}=\lambda_1(2\vec{x_0}-\vec{y_0}+\vec{z_0})+\lambda_2(\vec{x_0}+3\vec{y_0}-2\vec{z_0})+\lambda_3(-2\vec{x_0}+\vec{y_0}-3\vec{z_0})$

ή εκτελώντας τις πράξεις και μεταφέροντας όλους τους όρους στο πρώτο μέλος με κοινό παράγοντα τα $\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$ προκύπτει:

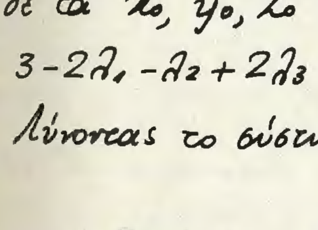
$(3-2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3)\vec{x_0}+(2+\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3)\vec{y_0}+(5-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)\vec{z_0}=\vec{0}$. Επειδή δε τα $\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$ είναι μη συνεπίπεδα θα είναι κατ' ανάγκη:

$3-2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0$, $2+\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3=0$, $5-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$. (2)

Λύνοντας το σύστημα (2) ευρίσκομε $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-3$.

1.8. Να δειχθεί διανυσματικά ότι οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

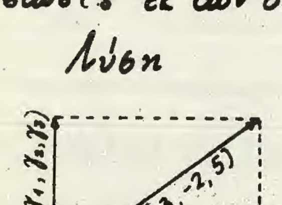
Λύση



Είναι $\vec{B\Delta}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ άρα $\vec{BP}=\lambda\vec{B\Delta}=\lambda(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$. Επίσης $\vec{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ άρα $\vec{AP}=\mu\vec{A\Gamma}=\mu(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ Αλλά $\vec{AB}=\vec{AP}+\vec{PB}$ $=\vec{AP}-\vec{BP}$ άρα $\vec{\alpha}=\mu(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-\lambda(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$ ή $(1-\mu-\lambda)\vec{\alpha}+$ $+(\lambda-\mu)\vec{\beta}=\vec{0}$ Και επειδή τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά $\Rightarrow 1-\mu-\lambda=0$ και $\lambda-\mu=0$ (1). Λύνοντας το σύστημα (1) βρίσκομε $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ δηλ. το P μέσον της ΒΔ και ΑΓ.

1.9. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{r}(3,-2,5)$ σε δύο καθέτους συνιστώσες εκ των οποίων η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}(1,1,2)$.

Λύση



Έστω $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\vec{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ οι δύο κάθετες συνιστώσες εκ των οποίων η $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ παρ/λη προς το $\vec{\alpha}(1,1,2)$. Είναι $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{r}$ ή $\beta_1\vec{x_0}+\beta_2\vec{y_0}+\beta_3\vec{z_0}+$ $+\gamma_1\vec{x_0}+\gamma_2\vec{y_0}+\gamma_3\vec{z_0}=3\vec{x_0}-2\vec{y_0}+5\vec{z_0}$ ή $(\beta_1+\gamma_1-3)\vec{x_0}+(\beta_2+\gamma_2+2)\vec{y_0}+(\beta_3+\gamma_3-5)\vec{z_0}=\vec{0}$ και επειδή τα $\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}$ μη συνεπίπεδα θα είναι: $\beta_1+\gamma_1-3=0$, $\beta_2+\gamma_2+2=0$, $\beta_3+\gamma_3-5=0$. (1). Επειδή το $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό προς το $\vec{\alpha}$ έχομε εκ της σχέσεως (A) συγγραμμικότητος δύο διανυσμάτων:
$\frac{\beta_1}{1}=\frac{\beta_2}{1}=\frac{\beta_3}{2}=\lambda$ ή $\beta_1=\lambda$, $\beta_2=\lambda$, $\beta_3=2\lambda$ (2). Επειδή $\vec{\gamma}$ κάθετο σ[το] $\vec{\beta}$ $\Rightarrow$ κάθετο και στο συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$ άρα (συνθήκη καθετότητος δύο διανυσμάτων): $\gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot 1+\gamma_3\cdot 2=0$ ή $\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3=0$ (3) Εκ της (1) $\gamma_1=3-\beta_1$, $\gamma_2=-2-\beta_2$, $\gamma_3=5-\beta_3$ η λαμβάνοντας υπ' όψιν την (2) έχομε $\gamma_1=3-\lambda$, $\gamma_2=-2-\lambda$, $\gamma_3=5-2\lambda$ Θέτω τις τιμές των $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ στην (3): $3-\lambda-2-\lambda+10-4\lambda=0$ και $\lambda=\frac{11}{6}$. Εκ της (2) προκύπτουν οι τιμές των β_1,β_2,β_3. Είναι $\beta_1=\frac{11}{6}$, $\beta_2=\frac{11}{6}$, $\beta_3=\frac{11}{3}$ οπότε εκ της (1) προκύπτουν οι τιμές των $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. Είναι $\gamma_1=\frac{7}{6}$, $\gamma_2=\frac{23}{6}$, $\gamma_3=\frac{4}{3}$.

1.10. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{\beta}(1,2,3)$ και $\vec{\gamma}(7,1,-3)$ σε σύστ[ημα] αξόνων τρισορθογώνιο και δεξιόστροφο. Να ευρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ εκ της σχέσεως $\vec{x}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}\wedge\vec{x}$. (1)

Λύση. Έστω ότι το $\vec{x}$ έχει συντεταγμένες $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Άρα $\vec{x}=\omega_1\vec{x_0}+\omega_2\vec{y_0}+\omega_3\vec{z_0}$, $\vec{\beta}=\vec{x_0}+2\vec{y_0}+3\vec{z_0}$, $\vec{\gamma}=7\vec{x_0}+\vec{y_0}-3\vec{z_0}$ οπότε η μετασχηματίζεται εις την $\omega_1\vec{x_0}+\omega_2\vec{y_0}+\omega_3\vec{z_0}=\vec{x_0}+2\vec{y_0}+3\vec{z_0}+(7\vec{x_0}+\vec{y_0}-3\vec{z_0})\wedge(\omega_1\vec{x_0}+\omega_2\vec{y_0}+\omega_3\vec{z_0})$. Βρίσκω πρώτα το $\vec{\gamma}\wedge\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{x_0} & \vec{y_0} & \vec{z_0}\\ 7 & 1 & -3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{vmatrix}=$ $(\omega_3+3\omega_2)\vec{x_0}-(7\omega_3+3\omega_1)\vec{y_0}+(7\omega_2-\omega_1)\vec{z_0}$.

Αν αντικαταστήσω και μεταφέρω στο πρώτο μέλος προκύπτει:
$(\omega_1-3\omega_2-\omega_3-1)\vec{x_0}+(3\omega_1+\omega_2+7\omega_3-2)\vec{y_0}+(\omega_1-7\omega_2+\omega_3-3)\vec{z_0}=\vec{0}$. Επειδή

$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ είναι μη συνεπίπεδα θα είναι και ανάγκη: $w_1-3w_2-w_3-1=0$, $3w_1+w_2+7w_3-2=0$, $w_1-7w_2+w_3-3=0$ λύνοντας το σύστημα των 3 αυτών εξισώσεων βρίσκω τις τιμές των αγνώστων w_1, w_2, w_3: προκύπτει: $w_1=\frac{1}{6}$, $w_2=-\frac{11}{30}$, $w_3=\frac{4}{15}$ δηλ. είναι $\vec{x}\left(\frac{1}{6}, -\frac{11}{30}, \frac{4}{15}\right)$.

1.11. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda\vec{u}+\vec{u}\wedge\vec{\alpha}=\vec{\beta}$, όπου γνωστά είναι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και ο αριθμός λ και άγνωστο το διάνυσμα $\vec{u}$.

Λύση Πολλαπλασιάζω την δοθείσα σχέση εσωτερικώς επί $\vec{\alpha}$ και έχω: $\lambda\vec{u}\cdot\vec{\alpha}+(\vec{u}\wedge\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (1) Είναι όμως $(\vec{u}\wedge\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}=0$ διότι το $\vec{u}\wedge\vec{\alpha}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\vec{u}$ και $\vec{\alpha}$ επομένως κάθετο στο $\vec{\alpha}$, πολλαπλασιαζόμενο εσωτερικώς επομένως με $\vec{\alpha}$, θα είναι: συν$(\vec{u}\wedge\vec{\alpha}, \vec{\alpha})=0$, άρα $(\vec{u}\wedge\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}=0$ οπότε εκ της (1) προκύπτει: $\lambda\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ ή $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{\lambda}$ (2). Πολλαπλασιάζω πάλι τη δοθείσα σχέση εξωτερικώς τώρα με $\vec{\alpha}$ και έχω $\lambda\vec{\alpha}\wedge\vec{u}+\vec{\alpha}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{\alpha})=\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ ή βάσει της ιδιότητος του διεξωτερικού γινομένου: $\lambda\vec{\alpha}\wedge\vec{u}+\alpha^2\vec{u}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{u})\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ (3) Εκ της δοθείσης προκύπτει ακόμη $\vec{u}\wedge\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\lambda\vec{u}$, ή $\vec{\alpha}\wedge\vec{u}=\lambda\vec{u}-\vec{\beta}$ (4) Θέτω τις τιμές εκ των (2) και (4) στην (3) και έχω: $\lambda(\vec{\beta}-\lambda\vec{u})+\alpha^2\vec{u}-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{\lambda}\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ ή $\lambda\vec{\beta}-\lambda^2\vec{u}+\alpha^2\vec{u}-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{\lambda}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ ή $(\alpha^2-\lambda^2)\vec{u}=\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}+\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{\lambda}\cdot\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ οπότε τελικά προκύπτει:

$$\vec{u}=\frac{\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}}{\alpha^2-\lambda^2}+\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{\lambda(\alpha^2-\lambda^2)}\vec{\alpha}-\frac{\lambda\vec{\beta}}{\alpha^2-\lambda^2}.$$

1.12. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{r}$ συνδέονται δια της σχέσεως: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}\wedge\vec{r}$, είναι δε το $\vec{\gamma}$ συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$, το δε $\vec{r}$ κάθετο στο $\vec{\gamma}$. Να ευρεθεί το $\vec{r}$ συναρτήσει των άλλων.

Λύση Επειδή το $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$ $\Rightarrow$ $\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}=\vec{0}$ (1). Επειδή το $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{r}$ $\rightarrow$ $\vec{\gamma}\cdot\vec{r}=0$ (2). Πολλαπλασιάζω την δοθείσα εξωτερικώς με $\vec{\gamma}$ και έχω: $\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\wedge\vec{\beta}+\vec{\gamma}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{r})$ ή (ιδιότης διεξωτ. γινομένου) $\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\wedge\vec{\beta}+(\vec{\gamma}\cdot\vec{r})\vec{\gamma}-(\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma})\vec{r}$ ή λόγω των (1), (2) $\Rightarrow$ $\vec{0}=\vec{\gamma}\wedge\vec{\beta}-\gamma^2\vec{r}$ και $\vec{r}=\frac{\vec{\gamma}\wedge\vec{\beta}}{\gamma^2}$.

1.13. Να ορισθεί διάνυσμα $\vec{r}$ εκ της σχέσεως $\vec{r}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}\wedge\vec{r}$ όπου $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Λύση. Αν πολ/σω τη δοθείσα εσωτερικώς επί $\vec{\beta}$ θα έχω: $\vec{r}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+(\vec{\beta}\wedge\vec{r})\cdot\vec{\beta}$. Αλλά $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και $(\vec{\beta}\wedge\vec{r})\cdot\vec{\beta}$ επίσης μηδέν διότι συν$(\vec{\beta}\wedge\vec{r},\vec{\beta})=0$ (γωνία $\widehat{\vec{\beta}\wedge\vec{r},\vec{\beta}}=90^\circ$) άρα $\vec{r}\cdot\vec{\beta}=0$ (1) δηλ. το $\vec{r}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$. Πολ/ζω τώρα την δοθείσα εξωτερικώς επί $\vec{\beta}$ και έχω $\vec{\beta}\wedge\vec{r}=\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}+\vec{\beta}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{r})$ ή $\vec{\beta}\wedge\vec{r}=\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}+(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta}-\beta^2\vec{r}$ ή $\vec{\beta}\wedge\vec{r}=\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}-\beta^2\vec{r}$ (λόγω της (1)). Εκ της δοθείσης έχω: $\vec{\beta}\wedge\vec{r}=\vec{r}-\vec{\alpha}$ επομένως η τελευταία σχέση γίνεται: $\vec{r}-\vec{\alpha}=\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}-\beta^2\vec{r}$ ή $\vec{r}(1+\beta^2)=\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}+\vec{\alpha}$ ή $\vec{r}=\dfrac{\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}+\vec{\alpha}}{1+\beta^2}$

1.14. Να ευρεθεί το διάνυσμα $\vec{r}$ εκ των σχέσεων $\vec{\alpha}\cdot\vec{r}=\mu$ και $\vec{\beta}\wedge\vec{r}=\vec{\gamma}$ όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ δοθέντα διανύσματα και μ δοθείς αριθμός.

Λύση. Πολ/ζω την $\vec{\beta}\wedge\vec{r}=\vec{\gamma}$ εξωτερικώς επί $\vec{\alpha}$ και έχω: $(\vec{\beta}\wedge\vec{r})\wedge\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}$ ή $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{\alpha})\vec{\beta}=\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}$ ή $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\vec{r}-\mu\vec{\beta}=\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}$ ή $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{r}=\mu\vec{\beta}+\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}$ και τελικά $\vec{r}=\dfrac{\mu\vec{\beta}+\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}$

1.15. Να δειχθεί ότι $(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})(\vec{\gamma}\wedge\vec{\delta})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$.

Λύση. Θέτω $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}=\vec{r}$ οπότε έχω $\vec{r}(\vec{\gamma}\wedge\vec{\delta})$ αλλά $\vec{r}(\vec{\gamma}\wedge\vec{\delta})=(\vec{r}\wedge\vec{\gamma})\cdot\vec{\delta}=[(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})\wedge\vec{\gamma}]\vec{\delta}=[(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{\alpha}]\vec{\delta}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})$ (Επειδή στο μικτό γινόμενο των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=[\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha}]=[\vec{\gamma},\vec{\alpha},\vec{\beta}]$ αυτό σημαίνει: $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})=\vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha})=\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})$ δηλ. μπορεί να γίνει αλλαγή των συμβόλων εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου).

1.16. Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})+\vec{\beta}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha})+\vec{\gamma}\wedge(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})=\vec{0}$.

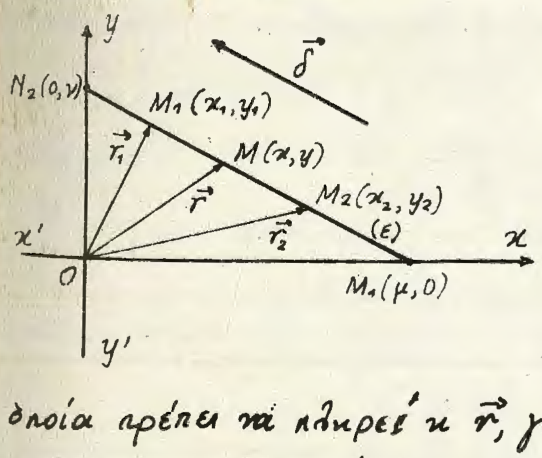
Λύση. Είναι $\vec{\alpha}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}$. Όμοιως $\vec{\beta}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha})=(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\gamma}-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}\wedge(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})=(\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha})\vec{\beta}$ Άρα η δοθείσα σχέση γίνεται: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}+(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\gamma}-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{\alpha}+(\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}-(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha})\vec{\beta}=0$ διότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\gamma}$ (ιδιότης (1) εσωτ. γινομένου).

2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ορισμοί

Αναλυτική Γεωμετρία είναι ο μαθηματικός εκείνος κλάδος που συσχετίζει αλληλένδετα την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία. Το πρόβλημα της Αναλυτικής Γεωμετρίας είναι η κατασκευή της γραφικής παραστάσεως μιάς καμπύλης ή επιφανείας όταν δοθεί η συνάρτησή της και αντιστρόφως η εύρεση της συναρτήσεως όταν δοθεί η γραφική της παράσταση. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων-το οποίο εισήγαγε πρώτος ο Descartes (Γάλλος Μαθηματικός και φιλόσοφος 1596-1650), ή των πολικών συντεταγμένων. Κάθε εξίσωση της μορφής $f(x,y)=0$ παριστά μία καμπύλη της οποίας η γραφική παράσταση γίνεται στο επίπεδο, (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με δύο άξονες ox, oy). Ενώ κάθε εξίσωση της μορφής $f(x,y,z)=0$ παριστά επιφάνεια της οποίας η γραφική παράσταση γίνεται στο χώρο (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τρεις άξονες ox, oy, oz). Εδώ θα αναφερθούμε στην Αναλυτική Γεωμετρία του Επιπέδου και θα ασχοληθούμε με την εύρεση εξισώσεων μερικών στοιχειωδών καμπυλών όπως της **ευθείας** και των **κωνικών τομών** δηλαδή του **κύκλου**, της **ελλείψεως**, της **υπερβολής** και της **παραβολής**.

1. Ευθεία.



Έστω ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xoy και (ε) μία ωρισμένη ευθεία στο επίπεδο xoy με αρχή το O κοινή αρχή διανυσματικών ακτίνων $\vec{r}$. Καλούμε **διανυσματική εξίσωση** της ευθείας αυτής την αναγκαία και ικανή συνθήκη την οποία πρέπει να πληρεί η $\vec{r}$, για να κείται το πέρας αυτής επί της (ε). Στη συνέχεια θα λέμε σημείο $\vec{r}$ και θα εννοούμε το πέρας M της ακτίνος $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OM}$.

Θα ζητήσωμε να βρούμε τη διανυσματική εξίσωση ευθείας στις εξ[ής] 2 κύριες περιπτώσεις:

i. Η ευθεία διέρχεται από δύο διάφορα σημεία $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Έστω ότι το σημείο $\vec{r}$ κείται επί της ευθείας. Θα έχομε $\overrightarrow{M_1M} = t\overrightarrow{M_1M_2}$ ή $\vec{r}-\vec{r}_1 = t(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$. Δηλ. η διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$ ικανοποιεί την εξίσωση: $\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ (1). Αλλά και αντίστροφα για κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου t η (1) ορίζει διανυσματική ακτίνα $\vec{r}$ τέτοια ώστε να ισχύη η $\overrightarrow{M_1M} = t\overrightarrow{M_1M_2}$ η οποία εκφράζει ότι το $\overrightarrow{M_1M}$ είναι παράλληλο προς τό $\overrightarrow{M_1M_2}$ δηλ. το σημείο M πέρας της $\vec{r}$ κείται επί τ[ης ευθείας].

Αν τώρα είναι $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0$ αντικαθιστώντας στην (1) έχομε: $x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + t(x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 - x_1\vec{x}_0 - y_1\vec{y}_0)$ εκ της οποίας προκύπτουν οι εξισώσεις:

$x = x_1 + t(x_2-x_1)$, $y = y_1 + t(y_2-y_1)$ οι οποίες λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** της ευθείας (ε). Αν τελικά απ τίς εξισώσεις αυτές απαλείψωμε την παράμετρο t θα προκύψη η εξίσωση:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (2)$$

που αποτελεί την κανονική εξίσωση της ευθείας πουδιέρχεται από δύο σημεία $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

ii. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\vec{r}_1$ και είναι παράλληλη πρ[ος] τό μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha,\beta)$.

Αντικαθιστώντας στη προηγούμενη σειρά σχέσεων το $\overrightarrow{M_1M_2}$ με το διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει εντελώς αντίστοιχα η παραμετρική διανυσματική εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{\delta}$ (1α) καθώς και οι παραμετρικές (αναλυτικ[ές]) εξισώσεις $x = x_1 + t\alpha$, $y = y_1 + t\beta$ οι οποίες με την απαλοιφή του t δίδουν την εξίσωση: $\dfrac{x-x_1}{\alpha} = \dfrac{y-y_1}{\beta}$ (2α) που αποτελεί την κανονική εξίσωση ευθείας πού διέρχεται από ένα σημείο $\vec{r}_1$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha,\beta)$.

Οι εξισώσεις (2) και (2α) γράφονται και υπό μορφήν οριζούσης ως εξής: η (2): $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (3) η δε (2α): $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$ (3α).

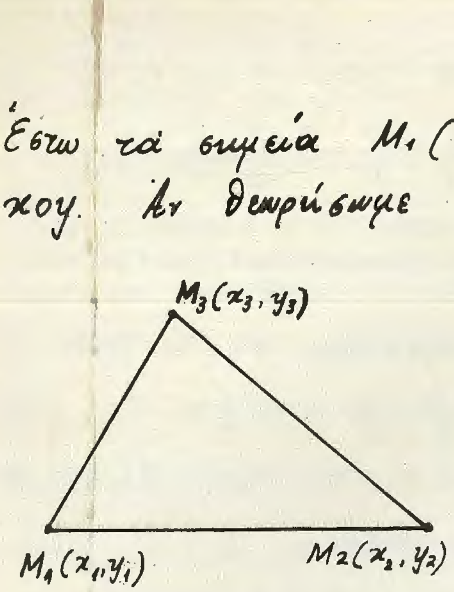
Ακόμη οι εξισώσεις (2) καί (2α) μπορούν νά γραφούν ως εξής:
η (2): $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ καί η (2α): $y-y_1=\dfrac{\beta}{\alpha}(x-x_1)$
καί επειδή τό λόγο $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\beta}{\alpha}=\lambda$ τόν ονομάσαμε συντελεστή κατευθύνσεως, η εξίσωση της ευθείας πού διέρχεται από τό σημείο $\vec{r}_1$ καί έχει συντελεστή κατευθύνσεως λ είναι: $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ (4).
Τέλος άν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα ox στό $M_1(\mu,0)$ καί τον oy στό $N_2(0,\nu)$ τότε από τον τύπο (2) προκύπτει:
$\dfrac{x-\mu}{0-\mu}=\dfrac{y-0}{\nu-0}$ ή $(x-\mu)\cdot\nu+\mu y=0$ ή $x\nu+\mu y=\mu\nu$ ή διαιρώντας μέ $\mu\nu\neq0$ προκύπτει $\dfrac{x}{\mu}+\dfrac{y}{\nu}=1$ (5). Οι αριθμοί μ καί ν λέγονται **συντεταγμένες επί την αρχή.**
Αν στην εξίσωση (3) της ορίζουσας εκτελέσωμε τίς πράξεις θά έχωμε: $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0$ οπότε θέτοντας $A=y_2-y_1$, $B=-(x_2-x_1)$ και $\Gamma=x_2y_1-x_1y_2$ προκύπτει εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ (6) η οποία είναι και η **γενική εξίσωση** της ευθείας.
Έστω $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ οι εξισώσεις δύο ευθειών. Αυτές ή θά τέμνονται σ' ένα σημείο, ή θά είναι παράλληλες ή τέλος θά ταυτίζονται καί θά αποτελούν μία ευθεία. Αυτό από αλγεβρική άποψη σημαίνει ότι το σύστημα των εξισώσεων αυτών ή θά έχει μία λύση ή δεν θά έχει καμμία, ή θά έχει άπειρες λύσεις, και τότε οι εξισώσεις θα ταυτίζονται. Από τη διερεύνηση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων πρώτου βαθμού προκύπτει:

1) $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}\Rightarrow$ 1 λύση $\Rightarrow$ οι ευθείες τέμνονται.

2) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\Rightarrow$ καμμία λύση $\Rightarrow$ οι ευθείες είναι παρ/λες.

3) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\Rightarrow$ άπειρες λύσεις $\Rightarrow$ οι ευθείες ταυτίζονται.

Έστω τά σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ στο επίπεδο xOy. Άν θεωρήσωμε τά διανύσματα $\overrightarrow{M_1M_2}$ καί $\overrightarrow{M_1M_3}$, ώς γνωστόν το μέτρον του $\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}$ δη το $|\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}|$ εκφράζει τό εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. Επομένως άν M_2M_3 είναι μία διαγώνιος του παραλληλογράμμου τότε το εμβαδόν του τριγώνου πού σχηματίζεται από τα M_1, M_2, M_3 θά είναι $E = \frac{1}{2}|\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}|$



Όπως ξέραμε όμως (ιδιότητα 6, σχέσις (ii) του εξωτερικού γινομένου) άν τά διανύσματα $\vec{a}$ καί $\vec{\beta}$ ληφθούν στο επίπεδο, τότε θα είναι απ τόν τύπο (ii):

$$|\vec{a}\wedge\vec{\beta}| = \sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_2z_1-x_1z_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2} \quad \text{γιά } z_1=z_2=$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{\beta}| = \sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2} = x_1y_2-x_2y_1.$$

Επομένως στην προκειμένη περίπτωση, άν αντικαταστήσωμε τα μήκη x_1, x_2 καί y_1, y_2 πού είναι οί τετμημένες καί οί τεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}$ καί $\vec{\beta}$ με τά αντίστοιχά των στό τρίγωνο $M_1M_2M_3$ θά έχωμε:

τό x_1 αντιστοιχεί στό μήκος x_2-x_1, τό x_2 αντιστοιχεί στο μήκος x_3-x_1

τό y_1 " " " y_2-y_1, τό y_2 " " " y_3-y_1

Άρα $E = \frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]$. Άν εκτελέσωμε τ πράξεις προκύπτει: $E = \frac{1}{2}\left(x_2y_3-x_1y_3-x_2y_1+\cancel{x_1y_1}-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_2-\cancel{x_1y_1}\right)$ (1). Εξ άλλου άν αναπτύξωμε την ορίζουσα $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

κατά τα στοιχεία της τρίτης στήλης θά έχομε

$$\Delta = (x_2y_3-x_3y_2)-(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_2-x_2y_1)$$
$$= x_2y_3-x_3y_2-x_1y_3+x_3y_1+x_1y_2-x_2y_1 \quad (2).$$

Συγκρίνοντας τώρα τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$|E| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

ο οποίος εκφράζει τό εμβαδόν τριγώνου $M_1M_2M_3$ συναρτήσει των συντεταγμένων των κορυφών του M_1, M_2, M_3.

Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα οy στο σημείο $N_2(0,\nu)$ και έχει συντελεστή κατευθύνσεως λ. Τότε εκ της (4) προκύπτει $y-\nu=\lambda(x-0)$ ή $y=\lambda x+\nu$ (7). Η δε εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ γίνεται $By=-Ax-\Gamma$ ή $y=-\frac{A}{B}x-\Gamma$ δηλ. της μορφής (7) με συντελεστή κατευθύνσεως $\lambda=-\frac{A}{B}$.

Έστω τώρα οι ευθείες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$, και $A_3x+B_3y+\Gamma_3=0$. Για να διέρχονται οι ευθείες αυτές απ' το ίδιο σημείο, θα πρέπει να τέμνονται οι δύο πρώτες, και οι συντεταγμένες του σημείου τομής των να επαληθεύουν την τρίτη εξίσωση. Αυτό αλγεβρικά σημαίνει, το σύστημα των 3 αυτών εξισώσεων με δύο αγνώστους να είναι συμβιβαστό. Τούτο συμβαίνει όπως ξέρουμε, αν η ορίζουσα των αγνώστων και των σταθερών όρων ισούται με μηδέν. δηλ.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}=0 \quad (8)$$

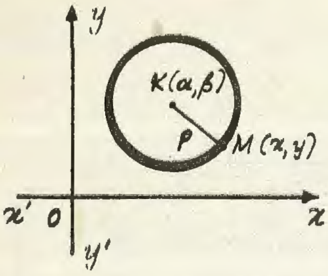
η οποία αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη.

2. Κωνικές τομές.

Γενικά οι καμπύλες δευτέρου βαθμού λέγονται **κωνικές τομές**. Και τούτο, γιατί αποδεικνύεται ότι η τομή ενός ορθού κυλινδρικού κώνου με ένα επίπεδο είναι μία καμπύλη $2^{\text{ου}}$ βαθμού, η οποία εκφυλίζεται σε ζεύγος ευθειών όταν το επίπεδο διέρχεται απ' την κορυφή του κώνου. Ειδικά αν το επίπεδο τέμνει τον άξονα του κώνου πλαγίως, η καμπύλη είναι κλειστή και λέγεται **έλλειψη**· αν είναι παράλληλο προς τη γενέτειρα του κώνου η καμπύλη είναι ανοικτή και λέγεται **παραβολή** και τέλος άν το επίπεδο είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου η τομή είναι μια ανοικτή καμπύλη με δύο κλάδους και λέγεται **υπερβολή**. Στην περίπτωση τώρα πού το επίπεδο είναι κάθετο προς τον άξονα του κώνου η τομή θα είναι **κύκλος**. Οι κωνικές τομές μελετήθηκαν κατ' αρχάς απ' τους αρχαίους Έλληνες και πρώτος ο Απολλώνιος τις ονόμασε κωνικές τομές.

2α. Κύκλος.

Κύκλος είναι ως γνωστόν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ επιπέδου τα οποία απέχουν από σταθερό σημείο Κ σταθερή απόσταση ρ. (ακτίνα).



Έστω Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και $K(\alpha,\beta)$ το κέντρο K ενός κύκλου ακτίνος ρ. Αν $M(x,y)$ είναι τυχόν σημείο του κύκλου τότε το μήκος KM της ακτίνος ρ θα δίδεται ως γνωστόν από τον τύπο μήκους διανύσματος (3α): $KM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ ή τελικά αν $KM=\rho$ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ (1). Αν εκτελέσωμε τις πράξεις στην (1) έχομε $x^2+a^2-2xa+y^2+\beta^2-2y\beta=\rho^2$ ή $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\rho^2=0$ οπότε θέτοντας $-2\alpha=A$, $-2\beta=B$, $\alpha^2+\beta^2-\rho^2=\Gamma$ (2) η (1) παίρνει τελικά την μορφή: $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (3) η οποία είναι και η γενική εξίσωση κύκλου. Όπως προκύπτει εκ της (3) είναι μια καμπύλη 2ου βαθμού. Εκ των σχέσεων (2) προκύπτει: $\alpha=-\frac{A}{2}$, $\beta=-\frac{B}{2}$ και $\rho=\sqrt{a^2+\beta^2-\Gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$. Δηλ. το κέντρο K έχει συντεταγμένες $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$.

Απ' τη Γεωμετρία γνωρίζομε ότι αν δοθούν τρία σημεία μη κείμενα επ' ευθείας, διέρχεται απ' αυτά ένας και μόνο ένας κύκλος. Αν δοθούν λοιπόν τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, τότε αποδεικνύεται ότι η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία M_1, M_2, M_3 έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (4)$$

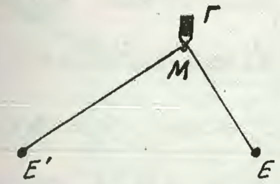
Για να διέρχονται επομένως τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 απ' τον ίδιο κύκλο πρέπει το σημείο M_4 να επαληθεύει την (4).

Έστω τώρα $x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ (5) δύο κύκλοι. Οι κύκλοι αυτοί ή θα τέμνονται σε δύο σημεία, ή θα εφάπτονται σε ένα, ή δεν θα τέμνονται. Αλγεβρικά τούτο σημαίνει, ότι το σύστημα (5) των δύο εξισώσεων ή θα έχει 2 ζεύγη λύσεων πραγματικών, ή ένα ζεύγος, ανά μία ρίζα διπλή ή θα έχει μιγαδικές ρίζες, οπότε προφανώς δεν προσδιορίζονται σημεία στο πραγματικό επίπεδο. Η εξίσωση κύκλου $(x-a)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$, αν το κέντρο του κύκλου K συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, παίρνει τη μορφή $x^2+y^2=\rho^2$ (6).

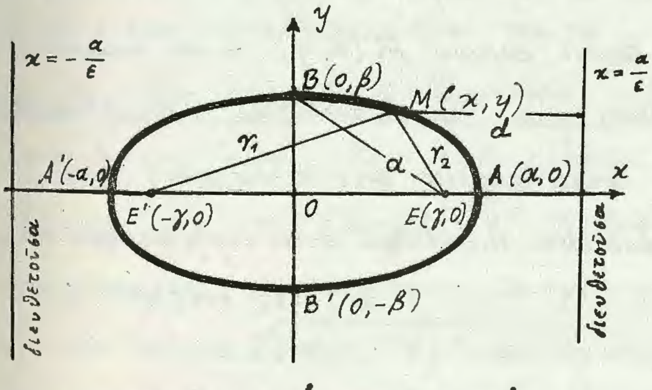
2β. Ἔλλειψη.

Ἔλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο δοθέντα σημεία E', E του επιπέδου είναι σταθερό ήτοι: $EM + E'M = 2\alpha$ (όπου $2\alpha > 2\gamma = E'E$). Τα σημεία E', E λέγονται **εστίες** και όταν συμπέσουν δηλ. $E' \equiv E$ τότε ο γεωμ. τόπος γίνεται κύκλος με κέντρο το $E' \equiv E$ και ακτίνα α.

Ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$ λέγεται **εκκεντρότητα** της ελλείψεως και δίνει ένα μέτρο αποκλίσεως της από τον κύκλο για τον οποίο επειδή $E' \equiv E$, είναι $\gamma = 0$ δηλ. $\varepsilon = 0$. Αν $\varepsilon = 1$ δηλ. $\gamma = \alpha$, τότε η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθεία. Για να κατασκευάσουμε την έλλειψη εργαζόμαστε ως εξής:



Στερεώνουμε στα σημεία E', E δύο καρφιά στα οποία δένουμε τα άκρα νήματος μήκους 2α. Με γραφίδα Γ την οποία συνεχώς κινούμε στο επίπεδο του χάρτου σχεδιάσεως που βρίσκονται οι εστίες, κρατάμε τεντωμένο το νήμα. Πραγματικώς η γραφίδα Γ έγραψε κατά την κίνηση της έλλειψη με εστίες τα E' E και άθροισμα των αποστάσεων $E'M + ME = 2\alpha$ όσο είναι το μήκος του νήματος.



Έστω Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα αντεταγμένων και O το μέσον του ευθ. τμήματος $E'E = 2\gamma$. Αν $M(x,y)$ είναι τυχόν σημείο της ελλείψεως τότε θα είναι $E'M + ME = 2\alpha$ (1). Τα μήκη $E'M = r_1$ και $EM = r_2$ λέγονται **εστιακές αποστάσεις** και είναι $r_1 = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$ και $r_2 = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$ οπότε εκ της (1) προκύπτει η εξίσωση ελλείψεως: $\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha$. Αν μετασχηματίσουμε αυτή σε πιο απλοποιημένη μορφή θα έχουμε: $\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$ ή υψώνοντας στο τετράγωνο: $(x+\gamma)^2 + y^2 = 4\alpha^2 - 2 \cdot 2\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} + (x-\gamma)^2 + y^2$ απομονώνουμε το ριζικό και εκτελώντας τις πράξεις: $\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 - \gamma x$, υψώνοντας εκ νέου εις το τετράγωνο έχομε:

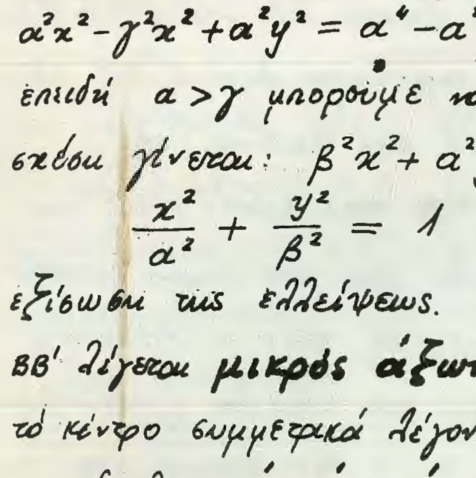
$$a^2x^2-2a^2\gamma x+a^2\gamma^2+a^2y^2=a^4-2a^2\gamma x+\gamma^2x^2\Rightarrow$$

$$a^2x^2-\gamma^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2\gamma^2\Rightarrow(a^2-\gamma^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-\gamma^2)$$ και

επειδή $a>\gamma$ μπορούμε να θέσωμε: $a^2-\gamma^2=\beta^2$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται: $\beta^2x^2+a^2y^2=a^2\beta^2$ και αν διαιρέσωμε με $a^2\beta^2$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad (2).$$

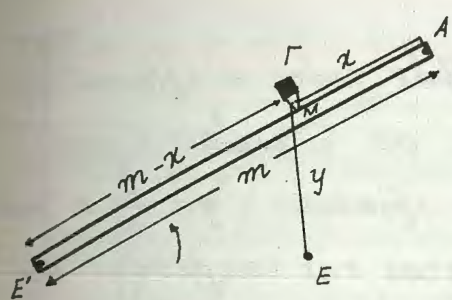
Η (2) είναι η κανονική ή απλοποιημένη εξίσωση της ελλείψεως. Το τμήμα ΑΑ' λέγεται **μεγάλος άξων**, το δε ΒΒ' λέγεται **μικρός άξων**. Οι δύο κάθετες ευθείες σε απόσταση $\frac{a}{\varepsilon}$ από το κέντρο συμμετρικά λέγονται **διευθετούσαι** της ελλείψεως. Μία ιδιότης των διευθετουσών είναι ότι ο λόγος $\frac{r_2}{d}$ τυχούσης εστιακής αποστάσεως προς την εις την εστίαν Ε αντιστοιχούσα διευθετούσα κάθετο d είναι σταθερός ήτοι $\frac{r_2}{d}=\varepsilon$. Ένας άλλος τρόπος χαράξεως της ελλείψεως όταν ξέρωμε τα a,β:



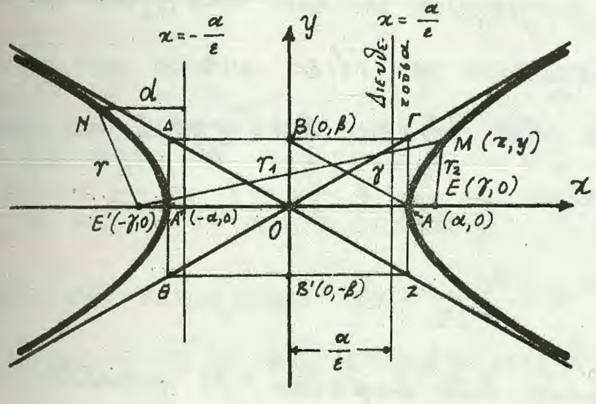
Φέρομε τυχούσα τέμνουσα ΟΤ η οποία τέμνει τη μικρή περιφέρεια στο σημείο T_1 και τη μεγάλη στο T_2. Από το T_2 φέρομε κάθετο προς τον άξονα οx και από το T_1 παράλληλο προς τον οx. Το σημείο τομής αυτών $M(x,y)$ είναι σημείο της ελλείψεως όπως αποδεικνύεται. Ομοίως υποδείζομε και άλλα σημεία της ελλείψεως και κατασκευάζομε προσεγγιστικώς την έλλειψη. Η έλλειψη είναι συμμ. ως προς τους άξονές της Α'Α, Β'Β.

2γ. Υπερβολή.

Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων κατ' απόλυτο τιμή από δύο σημεία Ε', Ε δοθέντα του επιπέδου είναι σταθερή ήτοι: $0<|E'M-EM|=2a<E'E=2\gamma$. Ομοίως τα Ε',Ε λέγονται εστίες της υπερβολής, ο δε λόγος $\varepsilon=\frac{\gamma}{a}>1$ λέγεται ομοίως εκκεντρότητα αυτής. Από τον ορισμό της υπερβολής προκύπτει ότι για να κατασκευάσωμε την καμπύλη της, που είναι εδώ ένα ζεύγος ανοικτών καμπυλών, εργαζόμαστε ως εξής:



Στερεώνομε το ένα άκρο κανόνος στη μια εστία πχ. την E' ώστε να μπορεί ο κανόνας να στρέφεται περί το E', το δε άλλο άκρο του A, καθώς και το E τα προσδένομε με νήμα μήκους $m-2\alpha$, όπου m είναι το μήκος του κανόνος. Κρατούμε το νήμα τεντωμένο με γραφίδα Γ την οποία κινούμε κατά μήκος του κανόνος και επί της πλευράς της εστραμμένης προς την εστία, οπότε, όταν ο κανόνας στρέφεται περί την εστία E', η γραφίδα χαράσσει τόξο το οποίο είναι υπερβολή διότι $x+y=m-2\alpha$, η δε διαφορά $ME'-ME = m-x-y = m-(x+y) = m-(m-2\alpha) = 2\alpha$

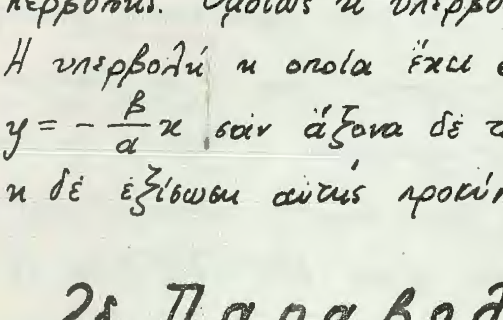


Έστω Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και O το μέσον του ευθύγρ. τμήματος $E'E=2\gamma$. Αν $M(x,y)$ είναι τυχόν σημείο της υπερβολής, τότε θα είναι $E'M-ME=2\alpha$, εφόσον το M βρίσκεται πλησιέστερα προς την E ή $EM-E'M=2\alpha$ αν το M βρίσκεται πλησιέστερα προς την E'. Αν $E'M=r_1$ και $EM=r_2$ τότε θα είναι: $r_1-r_2=2\alpha$ και $r_2-r_1=2\alpha$ δηλ. $r_1-r_2=\pm 2\alpha$ και επειδή τα r_1, r_2 είναι: $r_1=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$ προκύπτει η εξίσωση της υπερβολής:
$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\pm 2\alpha$ ή $\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}=\pm 2\alpha+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$
και υψώνοντας στο τετράγωνο: $(x+y)^2+y^2=4\alpha^2\pm 4\alpha\sqrt{(x-y)^2+y^2}+(x-\gamma)^2+y^2$ ή
$\gamma x-\alpha^2=\pm\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$ και υψώνοντας εκ νέου εις το τετράγωνο έχομε:
$\gamma^2x^2-2\alpha^2\gamma x+\alpha^4=\alpha^2[(x-\gamma)^2+y^2]$ ή $\gamma^2x^2-2\alpha^2\gamma x+\alpha^4=\alpha^2x^2-2\alpha^2\gamma x+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2y^2$ ή
$(\gamma^2-\alpha^2)x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2(\gamma^2-\alpha^2)$. Θέτομε $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$ οπότε προκύπτει $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$
ή τελικά $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ (3). Η (3) είναι η κανονική ή απλοποιημένη εξίσωση της υπερβολής. και αυτή δευτέρου βαθμού, όπως η έλλειψη κι ο κύκλος. Για $x=0$ έχομε εκ της (3): $y=\pm\beta i$ δηλ ο άξονας y δεν τέμνει σε πραγματικά σημεία την υπερβολή. Για $y=0$ έχομε $x=\pm\alpha$. Τα A', A είναι οι **κορυφές** της υπερβο-

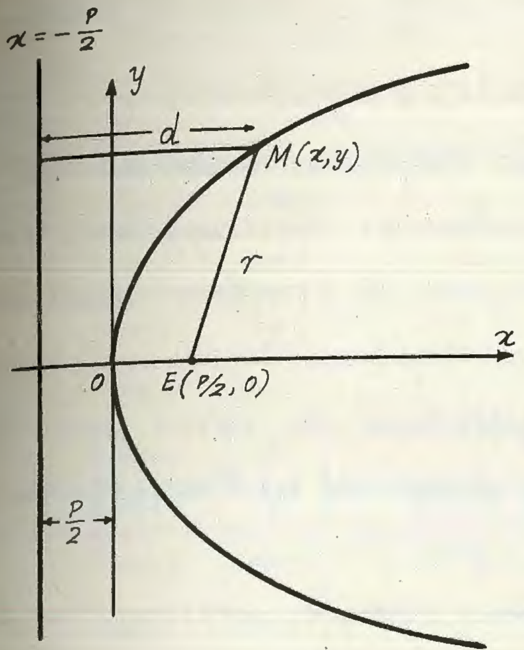
λής. Αν $\alpha = \beta$ η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** οπότε η εξίσωσή της γίνεται: $x^2 - y^2 = \alpha^2$ Οι ευθείες ΟΓ και ΟΖ οι οποίες έχουν συντελεστές κατευθύνσεως $\frac{\beta}{\alpha}$ και $-\frac{\beta}{\alpha}$ έχουν εξισώσεις: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ αντιστοίχως, λέγονται **ασύμπτωτοι** της υπερβολής και τέμνουν αυτή στα επ' άπειρον σημεία της. Οι δύο κάθετες ευθείες σε α[πο]στάσει $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ από το κέντρο συμμετρικά λέγονται επίσης διευθετούσαι της υπερβολής και έχουν κι αυτές την ιδιότητα ότι ο λόγος $\frac{r}{d}$ της εστια[κής] αποστάσεως τυχόντος σημείου Ν πρός την απόσταση της αντιστοίχου στη[ν] Ε' ή Ε διευθετούσης είναι σταθερός ήτοι: $\frac{r}{d} = \varepsilon$. ($\varepsilon$ = εκκεντρότης της υπερβολής. Ομοίως η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς τους άξονές της. Άλ[λη]
Η υπερβολή η οποία έχει σαν ασυμπτώτους τις ίδιες ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ [και] $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ σαν άξονα δε τον άξονα Β'Β λέγεται **συζυγής** της πρώτ[ης] η δέ εξίσωση αυτής προκύπτει ότι είναι $-\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$

2δ. Παραβολή.

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ επιπέδου τα οποία απέχουν εξ ίσου από δοσμένο σημείο Ε και δοσμένη ευθεία (δ) του επιπέδου. Το σημείο Ε που δεν κείται επί της (δ) λέγεται εστ[ία] της παραβολής και η (δ) διευθετούσα. Από τον ορισμό της παραβο[λής] προκύπτει η ακόλουθη κατασκευή της: Τοποθετούμε την μία των



καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου επί της δοθείσης ευθείας (δ) και δένουμε τα άκρα νήματος, μήκους ίσου με το μήκος τ[ης] της άλλης καθέτου πλευράς, με την κορ[υφή] του τριγώνου Α εκτός της ευθείας (δ) και με την εστία Ε. Μία γραφίδα Γ κινεί[ται] κατά μήκος της καθέτου πλευράς ΜΑ έχοντας το νήμα τεντωμένο. Όταν τ[ο] τρίγωνο ολισθαίνει επί της ευθείας (δ) η γραφίδα Γ χαράσσει τόξο που είναι κατά τον ορισμό παραβολή διότι $x + y = m$ και $y = m - x$ δηλ. ΜΓ = ΓΕ.

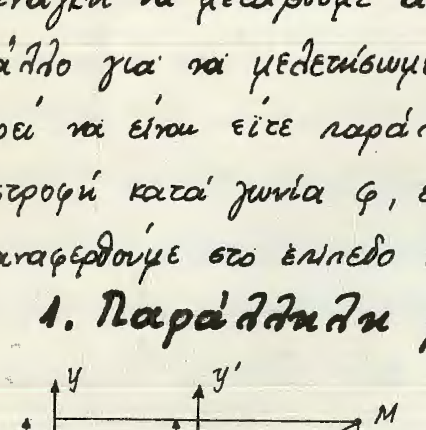


Έστω Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με άξονα Ox την από την εστία E κάθετο στη διευθετούσα (δ) και αρχή O το μέσον της αποστάσεως του E από της (δ). Αν p είναι η απόσταση του E από την (δ) τότε η εστία E θα έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2},0)$ ενώ η διευθετούσα θα έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$. Έστω $M(x,y)$ τυχόν σημείο της παραβολής. Τότε η απόστασις d του τυχόντος σημείου απ' τη διευθετούσα (δ) θα είναι $d = x+\frac{p}{2}$, ενώ η απόσταση r του M από την εστία E θα είναι $r=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$. Και επειδή $d=r$ προκύπτει η εξίσωση της παραβολής: $x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$ ή δια υψώσεως στο τετράγωνο: $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 = x^2+2\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}$ ή ακόμη $x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$ ή τελικά $y^2=2px$ (4). Η (4) είναι η κανονική ή απλοποιημένη μορφή της εξισώσεως της παραβολής. Από την (4) προκύπτει ότι για $x=0$ προκύπτει $y=0$ άρα η παραβολή διέρχεται απ' την αρχή των συντεταγμένων. Στην παραβολή ο λόγος $\frac{r}{d}$ ορίζεται ως η εκκεντρότης ε της παραβολής και επειδή $r=d$ προκύπτει $\varepsilon=1$. (Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι γενικώς **εκκεντρότης** μιας καμπύλης δευτέρου βαθμού είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M επιπέδου των οποίων ο λόγος $\frac{r}{d}$ των αποστάσεων από ένα δεδομένο σημείο E και μια δεδομένη ευθεία (δ) είναι σταθερός. Αν είναι $\frac{r}{d}<1$ έχομε έλλειψη αν είναι $\frac{r}{d}>1$ υπερβολή και $\frac{r}{d}=1$ παραβολή). Το σημείο O λέγεται κορυφή της παραβολής. Αν το σημείο $M(x,y)$ κείται επί της παραβολής, τότε και το σημείο $M(x,-y)$ κείται επίσης επί της παραβολής όπως προκύπτει απ' την εξίσωση (4). Άρα η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox.

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων.

Σε πολλά προβλήματα της Αναλυτικής Γεωμετρίας παρουσιάζεται ανάγκη να μεταβούμε από ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων σ' ένα άλλο για να μελετήσωμε τα προβλήματα αυτά. Η μετάβαση αυτή μπορεί να είναι είτε παράλληλη μεταφορά του αρχικού συστήματος, είτε στροφή κατά γωνία φ, είτε παράλληλη μεταφορά και στροφή μαζί. Θα αναφερθούμε στο επίπεδο και θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις 3 αυτές περιπτώσεις.

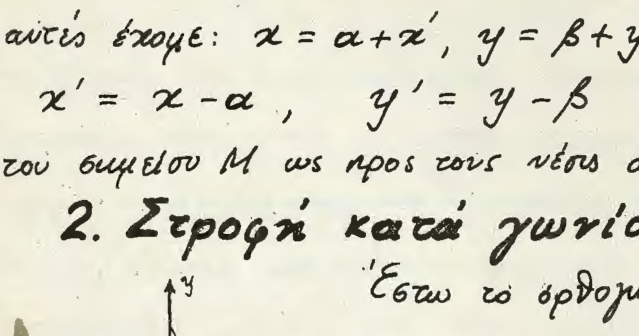
1. Παράλληλη μεταφορά.



Έστω το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xoy. Μεταφέρομε αυτό παράλληλα προς τον εαυτό του στη θέση $x'O'y'$ όπου είναι $O'(\alpha, \beta)$. Οι συντεταγμένες τυχόντος σημείου M ως προς το σύστημα xoy είναι $O\Pi = x$, $\Pi M = y$ και ως προς το σύστημα $x'O'y'$ είναι $O'\Pi' = x'$ και $\Pi' M = y'$. Έχομε $O\Pi = OP + P\Pi$ και $\Pi M = \Pi\Pi' + \Pi' M = PO' + \Pi' M$. Απ' τις σχέσεις αυτές έχομε: $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$ εκ των οποίων προκύπτουν οι τύποι:

$x' = x - \alpha$, $\quad y' = y - \beta \quad (1)$ που μας δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου M ως προς τους νέους άξονες $x'O'y'$ συναρτήσει των παλαιών

2. Στροφή κατά γωνία φ.



Έστω το ορθογώνιο σύστημα xoy. Στρέφομε αυτό περί το O κατά γωνία φ προς τη θετική φορά και έτσι έχομε το σύστημα $x'oy'$. Έστω M τυχόν σημείο. Οι συντεταγμένες αυτού ως προς το xoy είναι $O\Pi = x$, $\Pi M = y$ και ως προς $x'oy'$ είναι $O\Pi' = x'$, $\Pi' M = y'$. Έχομε $OM = O\Pi' + \Pi' M$ (i). Προβάλλομε τη (i) στους άξονες ox και oy και έχομε: $\pi\rho o\beta_{ox} OM = \pi\rho o\beta_{ox} O\Pi' + \pi\rho o\beta_{ox} \Pi' M$, $\pi\rho o\beta_{oy} OM = \pi\rho o\beta_{oy} O\Pi' + \pi\rho o\beta_{oy} \Pi' M$

επειδή δε $\pi\rho o\beta_{ox} OM = O\Pi = x$, $\pi\rho o\beta_{ox} O\Pi' = x' \sigma\upsilon\nu\varphi$, $\pi\rho o\beta_{ox} \Pi' M = y' \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \varphi) =$

και $\text{προβ}_{Oy} OM = ΠM = y$, $\text{προβ}_{Oy} OΠ' = x' συν(90° - φ) = x' ημφ$, $\text{προβ}_{Oy} Π'M = y' συνφ$

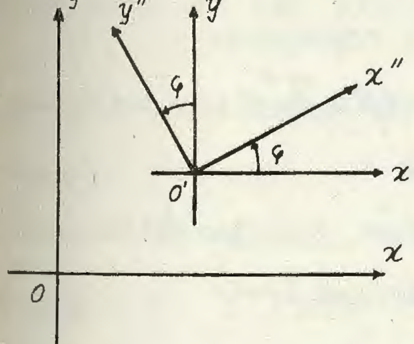
θα έχωμε: $x = x' συνφ - y' ημφ$, $y = x' ημφ + y' συνφ$ (2). Λύνοντας δε το σύστημα των εξισώσεων (2) ως προς x', y' έχομε (μέθοδος Cramer):

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & -ημφ \\ y & συνφ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} συνφ & -ημφ \\ ημφ & συνφ \end{vmatrix}} = \frac{x συνφ + y ημφ}{συν^2 φ + ημ^2 φ} = \frac{x συνφ + y ημφ}{1} = x συνφ + y ημφ,$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} συνφ & x \\ ημφ & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} συνφ & -ημφ \\ ημφ & συνφ \end{vmatrix}} = \frac{y συνφ - x ημφ}{συν^2 φ + ημ^2 φ} = \frac{-x ημφ + y συνφ}{1} = -x ημφ + y συνφ. \qquad (3)$$

Οι τύποι (3) μας δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου M ως προς τους νέους άξονες $x'Oy'$ συναρτήσει των συντεταγμένων των παλαιών αξόνων xOy.

Παράλληλη μεταφορά και στροφή κατά γωνία φ.



Έστω τα ορθογώνια συστήματα xOy και $x''O'y''$. Το $x''O'y''$ προέκυψε με παράλληλη μετάθεση του xOy προς τον εαυτό του στη θέση $x'O'y'$ και στη συνέχεια με στροφή του $x'O'y'$ περί το O' κατά γωνία $φ$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) της παράλληλης μεταφοράς έχομε:

$x' = x - α$, $y' = y - β$, αν $O'(α, β)$ (ii)

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (3) της στροφής κατά γωνία $φ$ έχομε: $x'' = x' συνφ + y' ημφ$, $y'' = -x' ημφ + y' συνφ$ ή λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (ii) προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned} x'' &= (x - α) συνφ + (y - β) ημφ \\ y'' &= -(x - α) ημφ + (y - β) συνφ \end{aligned} \qquad (4)$$

Οι τύποι (4) μας δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου M ως προς τους νέους άξονες $x''O'y''$ συναρτήσει των συντεταγμένων των παλαιών xOy.

Με την αλλαγή αυτή των αξόνων μπορούμε να απλουστέψωμε κατά πολύ την μελέτη των γραφικών παραστάσεων, ιδιαίτερα των συναρτήσεων 2ου βαθμού μεταχειριζόμενοι το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.

Διερεύνηση τών κωνικών τομών.

Η γενική εξίσωση μιας καμπύλης $2^{ου}$ βαθμού (κωνικής τομής) είναι
$f(x,y) = Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ (1) αναφερομένη σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy. Θέτομε:

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}, \quad d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}, \quad S = A+\Gamma$$

Διακρίνομε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Όταν $d>0$ η καμπύλη (1) είναι γένους **ελλείψεως** και μάλιστα
- α΄) άν $D\neq 0$ και $D\cdot S<0$ πραγματική έλλειψη,
- β΄) άν $D\neq 0$ και $D\cdot S>0$ φανταστική έλλειψη
- γ΄) άν $D=0$ ζεύγος φανταστικών ευθειών.

2. Όταν $d<0$ η καμπύλη (1) είναι γένους **υπερβολής** και μάλιστα
- α΄) άν $D\neq 0$ είναι πραγματική υπερβολή,
- β΄) άν $D=0$ είναι δύο πραγματικές ευθείες τεμνόμενες.

3. Όταν $d=0$ η καμπύλη (1) είναι γένους **παραβολής** και μάλιστα
- α΄) άν $D\neq 0$ είναι πραγματική παραβολή
- β΄) άν $D=0$ είναι ζεύγος παραλλήλων ευθειών και μάλιστα
  - i) άν $\Delta^2-AZ>0$ πραγματικές διακεκριμμένες
  - ii) άν $\Delta^2-AZ=0$ συμπίπτουσες
  - iii) άν $\Delta^2-AZ<0$ φανταστικές.

Τά μεγέθη D, d και S λέγονται **αναλλοίωτοι** της καμπύλης επειδή δεν μεταβάλλονται όταν έχομε μετατόπιση της αρχής ή στροφή των αξόνων τού συστήματος συντεταγμένων πού αναφέρεται ή (1).

Στην περίπτωση **1.** και **2.** δηλ. γένους ελλείψεως ή υπερβολής, οι συντεταγμένες του κέντρου της καμπύλης (ελλείψεως ή υπερβολής) αποδεικνύεται ότι δίδονται από τους τύπους:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d} \quad (2)$$

οπότε η καμπύλη απλοποιείται διά μεταφοράς της αρχής των συντεταγμένων της εις το κέντρο αυτής. (Παράλληλος μεταφορά).

Αν τώρα θέλωμε να έχωμε συγχρόνως και στροφή των αξόνων xOy (όπου $O'(x_0,y_0)$) έτσι ώστε να προκύψη νέο σύστημα αξόνων $x'O'y'$ που οι άξονές του να συμπίπτουν με τους άξονες της καμπύλης, αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (1) δίδεται στο νέο σύστημα αξόνων $O'x'y'$ από την σχέση: $A'x'^2+\Gamma'y'^2+\frac{D}{d}=0$ (3) όπου τα A', Γ' δίδονται εκ των σχέσεων $A'=\frac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}$, $B'=\frac{A+\Gamma-\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}$ (3α) δηλ. τα A', Γ' είναι ρίζες της εξισώσεως $t^2-St+d=0$ η δε γωνία φ της στροφής των αξόνων του νέου συστήματος υπολογίζεται εκ της σχέσεως: $\varepsilon\varphi 2\varphi=\frac{2B}{A-\Gamma}$ (3β) όπου όμως το πρόσημο του ημ2φ να είναι το ίδιο με το πρόσημο του $2B$ (κατά συνέπεια θα γνωρίζομε και το πρόσημο του συν2φ, δηλ. σε ποιό τεταρτημόριο θα βρίσκεται η γωνία 2φ, εφ' όσον $0<2\varphi<2\pi$). Ο συντελεστής κατευθύνσεως του νέου άξονος $O'x'$ δίδεται τότε εκ της σχέσεως $k=\frac{\Gamma-A+\sqrt{(\Gamma-A)^2+4B^2}}{2B}$.

Στη περίπτωση **3.** δηλ. γένους παραβολής οι συντεταγμένες της κορυφής $O'(x_0,y_0)$ της παραβολής βρίσκονται απ' την επίλυση του συστήματος δύο εξισώσεων 1ου βαθμού ως προς x_0, y_0, των: (4)

$$Ax_0+By_0+\frac{A\Delta+BE}{S}=0,\quad \left(\Delta+\frac{\Delta\Gamma-BE}{S}\right)x_0+\left(E+\frac{AE-B\Delta}{S}\right)y_0+Z=0$$

Αν θέλωμε να έχωμε συγχρόνως και στροφή των αξόνων xOy, όπου $O'(x_0,y_0)$, έτσι ώστε ο άξονας Ox να συμπέσει με τον άξονα της παραβολής τότε η (1) δίδεται στο νέο σύστημα αξόνων $O'x'y'$ από την σχέση:

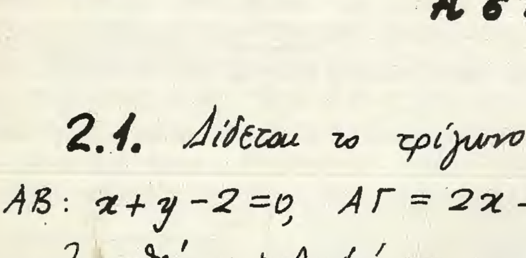
$y'^2=2px'$ (5) όπου το p υπολογίζεται εκ της $p=\frac{AE-B\Delta}{S\sqrt{A^2+B^2}}$ (5α) η δε γωνία φ της στροφής των αξόνων του νέου συστήματος υπολογίζεται εκ της σχέσεως $\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{A}{B}$ (5β), και το πρόσημο του ημφ πρέπει τώρα να είναι αντίθετο του προσήμου του A.

Προφανώς η καμπύλη (1) θα παριστά κύκλο στη περίπτωση που αποδεικνύεται ότι η (1) είναι γένους ελλείψεως και επί πλέον οι συντελεστές A', Γ' της (3α) ταυτίζονται.

Ασκήσεις.

2.1. Δίδεται το τρίγωνο ΑΒΓ με εξισώσεις των πλευρών, ΑΒ: $x+y-2=0$, ΑΓ $= 2x-y-1=0$ και ΒΓ $= 2x+y-9=0$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

Λύση.



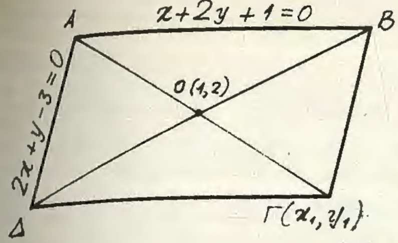
Δια λύσεως του συστήματος των εξισώσεων των πλευρών ΑΓ, ΑΒ δηλ. των $x+y-2=0$, $2x-y-1=0$ υπολογίζω τις συντεταγμένες του σημείου Α. Είναι $x=1$, $y=1$ δηλ. $A(1,1)$. Ομοίως διά λύσεως του συστήματος των εξισώσεων $2x-y-1=0$, $2x+y-9=0$ υπολογίζω τις συντεταγμένες του Β· έχω $x=7$, $y=-5$ δηλ. $B(7,-5)$. Επίσης δια λύσεως των $2x+y-9=0$, $x+y-2=0$ έχω $x=\frac{5}{2}$, $y=4$ δηλ. $\Gamma(\frac{5}{2},4)$. Επομένως το εμβαδόν του ΑΒΓ δίδεται από την απόλυτο τιμή της ορίζουσας:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ \frac{5}{2} & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-5-4-7+\frac{5}{2}+28+\frac{25}{2}\right) =$$

Το σημείο Μ της ΒΓ έχει συντεταγμένες το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των άκρων δηλ. $M\left(\frac{\frac{5}{2}+7}{2}, \frac{4-5}{2}\right)$ ή $M\left(\frac{19}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. Η ΑΜ είναι ευθεία διερχομένη δια δύο σημείων των Α, Μ άρα θα δίδεται απ' τον τύπο $\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ όπου $A(x_1,y_1)$, $M(x_2,y_2)$. Αντικαθιστώντας τα Α, Μ με τις συντεταγμένες των έχω $\frac{x-1}{y-1} = \frac{\frac{19}{4}-1}{-\frac{1}{2}-1}$ κ τελικά $2x+5y-7=0$.

2.2. Οι δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου κείνται επί των ευθειών $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$ αντιστοίχως, το δε κέντρο του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $(1,2)$. Να υπολογισθούν οι εξισώσεις των 2 άλλων πλευρών.

Λύση. Επειδή οι ευθείες $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$ δεν είναι παράλληλοι (διότι δεν ισχύει η σχέση $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$), θα είναι εξισώσεις δύο προσκειμένων πλευρών. Έστω ΑΒ: $x+2y+1=0$, ΑΔ: $2x+y-3=0$.



Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των AB, AΔ ευρίσκω $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{5}{3}$ δηλ. $A\left(\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

Άν το $Γ_1$ έχει συντεταγμένες x_1, y_1 τότε θα είναι: $\frac{\frac{7}{3}+x_1}{2}=1$, και $\frac{-\frac{5}{3}+y_1}{2}=2$, επειδή O μέσον του AΓ. Εξ αυτών προκύπτει $x_1=-\frac{1}{3}$, $y_1=\frac{17}{3}$ δηλ. $Γ\left(-\frac{1}{3},\frac{17}{3}\right)$. Η πλευρά BΓ επομένως θα είναι της μορφής: $y-y_1=λ_1(x-x_1)$ εφ' όσον διέρχεται από δοθέν σημείο $Γ(x_1,y_1)$ και έχει συντελεστή κατευθύνσεως $λ_1$ ίσον με το συντελεστή κατευθύνσεως της ευθείας AΔ εφ' όσον AΔ // BΓ. Αλλά $λ_{AΔ}=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{1}=-2$ επομένως και ο $λ_1$ της BΓ θα είναι -2 δηλ. η εξίσωση της BΓ θα έχει την μορφή: $y-\frac{17}{3}=-2\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

Ομοίως η ΓΔ θα είναι της μορφής $y-y_1=λ_2(x-x_1)$ όπου τώρα $λ_2=λ_{AB}=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$ Άρα η ΓΔ θα έχει εξίσωση: $y-\frac{17}{3}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

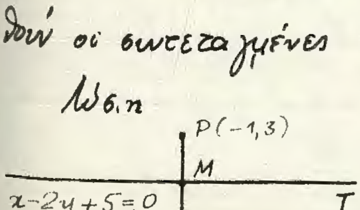
2.3. Η ευθεία $2x+y+1=0$ τέμνει την ευθεία που ορίζουν τα σημεία $M_1(1,1)$, $M_2(2,3)$ στο σημείο M. Ζητούνται ο λόγος $\frac{M_1M}{MM_2}$ και οι συντεταγμένες του σημείου M.

Λύση Άν καλέσουμε x', y' τις συντεταγμένες του σημείου M δηλ. $M(x',y')$ και λ τον ζητούμενο λόγο, θα έχουμε τις σχέσεις:

$x'=\frac{1+2λ}{1+λ}$, $y'=\frac{1+3λ}{1+λ}$. Επειδή όμως το $M(x',y')$ κείται επί της ευθείας $2x+y+1=0$ θα την επαληθεύει, δηλ. θα είναι: $2x'+y'+1=0$ ή $2\left(\frac{1+2λ}{1+λ}\right)+\frac{1+3λ}{1+λ}+1=0$. Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς λ έχουμε $λ=-\frac{1}{2}$. Αντικαθιστώντας την τιμή του λ στις σχέσεις των x', y' έχουμε $x'=0$, $y'=-1$.

2.4. Δίδεται το σημείο $P(1,3)$ και η ευθεία $x-2y+5=0$. Να ευρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του P ως προς την ευθείαν.

Λύση



Η PM διέρχεται από το P και είναι κάθετη στη δοθείσα ευθεία επομένως η εξίσωσίς της θα είναι: $y-3=λ_{PM}(x+1)$ Αλλά είναι $λ_{PM}\cdot λ_{MT}=-1$ όπως ξέρω-

με από το εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων ο $\lambda_{MT} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-2}$
άρα $\lambda_{PM} = -2$ και επομένως η εξίσωση της PM είναι $y-3=-2(x+$
ή $2x+y-1=0$. Αν λύσωμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων των δύο αυτών καθέτων ευθειών ευρίσκομε το σημείο τομής των M. Έχομε εκ της λύσεως των $x-2y+5=0$, $2x+y-1=0$ $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{11}{5}$ Άρα θα είναι $M(-\frac{3}{5},$
Το M τώρα χωρίζει το PP_1 σε λόγο 1 άρα θα είναι:

$$\frac{-1+x_1}{2}=-\frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \frac{3+y_1}{2}=\frac{11}{5}$$

από τις οποίες προκύπτει $x_1=-$
και $y_1=\frac{7}{5}$ δηλ. $P_1\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$.

2.5 Να προσδιορισθή ο λ έτσι ώστε οι ευθείες με εξισώσεις: $\lambda x = 2(\lambda+2)-(\lambda-1)y$, $3\lambda x = (3\lambda+1)y+5\lambda+7$ να είναι παράλληλες.

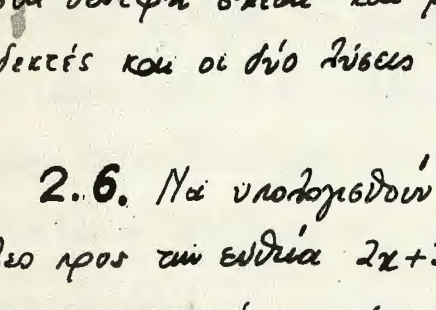
Λύση Οι εξισώσεις γράφονται $\lambda x+(\lambda-1)y-2(\lambda+2)=0$ και $3\lambda x-(3\lambda+1)y-5\lambda-7=0$ και για να συμβαίνει το ζητούμενο πρέπει:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad \text{δηλ.} \quad \frac{\lambda}{3\lambda}=\frac{\lambda-1}{-(3\lambda+1)} \quad \text{και} \quad \frac{\lambda-1}{-(3\lambda+1)}\neq\frac{-2(\lambda+2)}{-5\lambda-7}$$

Εκ της πρώτης σχέσεως προκύπτει $-\lambda(3\lambda+1)=3\lambda(\lambda-1)$ ή τελικά $\lambda(6\lambda-2)=0$ οπότε ή $\lambda=0$ ή $\lambda=\frac{1}{3}$ Θέτομε τις τιμές αυτές των λ στη δεύτερη σχέση και βλέπομε ότι πράγματι ισχύει. Επομένως είναι δεκτές και οι δύο λύσεις $\lambda=0$ και $\lambda=\frac{1}{3}$.

2.6. Να υπολογισθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x+3y+6=0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες των συντεταγμένων τρίγωνα εμβαδού 3.

Λύση



Έστω ότι οι ζητούμενες ευθείες τέμνουν τους άξονες ox, oy στα A, B και A', B' αντιστοίχως. όπου $A(x_1,0)$ και $B(0,y_1)$. Η πρώτη εξίσωση θα είναι επομένως $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1$ ή $y_1x+x_1y=x_1y_1$ επομένως $\lambda=-\frac{A}{B}=-\frac{y_1}{x_1}$ και επειδή η ευθεία αυτή είναι παρ/λη με τη $2x+3y+6=0$ θα είναι $-\frac{y_1}{x_1} = -\frac{2}{3}$ ή $\frac{y_1}{x_1} = \frac{2}{3}$. Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ έχω $E_{AOB} = \frac{1}{2}x_1 \cdot y_1 = 3$ άρα $x_1 y_1 = 6$. Λύνω το σύστημα των εξισώσεων $\frac{y_1}{x_1} = \frac{2}{3}$ και $x_1 y_1 = 6$ και βρίσκω $x_1 = \pm 3$ και $y_1 = \pm 2$. Επομένως οι συντεταγμένες των Α, Β και Α', Β' είναι: $A(3,0)$, $B(0,2)$, $A'(-3,0)$, $B'(0,-2)$. οι δε εξισώσεις των ευθειών είναι $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ και $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$.

2.7. Να ευρεθεί η εξίσωση της περιφερείας η οποία έχει κέντρο επί της ευθείας $2x+y+4=0$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(2,1)$, $M_2(3,-2)$.

Λύση. Έστω $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ η ζητουμένη εξίσωση. Οι συντεταγμένες των σημείων M_1, M_2 θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, εφ' όσον αυτή διέρχεται απ' αυτά. δηλ. θα είναι: $(2-\alpha)^2+(1-\beta)^2=\rho^2$ και $(3-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=\rho^2$ (1). Επίσης οι συντεταγμένες του κέντρου Κ αι α, β θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $2x+y+4=0$ εφ' όσον το Κ κείται επ' αυτής, δηλ. $2\cdot\alpha+\beta+4=0$ (2). Εκ των (1) και (2) προκύπτει σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους τους α, β, ρ. Λύνοντάς το βρίσκομε $\alpha=0$, $\beta=-4$, $\rho=\sqrt{29}$. Επομένως η ζητουμένη εξίσωση είναι $x^2+(y+4)^2=29$.

2.8. Δίδεται η περιφέρεια $2x^2+2y^2-4x+6y-1=0$. Να ευρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το κέντρο της περιφερείας και είναι κάθετος στην ευθεία $3x-2y+5=0$.

Λύση. Το κέντρο της περιφερείας έχει συντεταγμένες $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ άρα αν φέρω την εξίσωση της περιφερείας στην κανονική της μορφή: $x^2+y^2+Ax+Bx+\Gamma=0$ θα έχω: $x^2+y^2-2x+3y-\frac{1}{2}=0$ δηλ. $A=-2$, $B=3$ άρα $K\left(1,-\frac{3}{2}\right)$. Η ζητουμένη ευθεία θα είναι $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ ή $y+\frac{3}{2}=\lambda(x-1)$. Επειδή δε η ευθεία αυτή είναι κάθετος στην $3x-2y+5=0$ θα είναι $\lambda\lambda_1=-1$ (όπου $\lambda_1 = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$ άρα $\lambda = -\frac{2}{3}$ και η ζητουμένη ευθεία θα είναι η $y+\frac{3}{2} = -\frac{2}{3}(x-1)$.

2.9. Δίδεται η περιφέρεια $x^2+y^2=\rho^2$ και η ευθεία $y=\lambda x+\beta$. Να ευρεθεί η συνθήκη ώστε να εφάπτονται.

Λύση. Για να εφάπτονται η ευθεία και η περιφέρεια πρέπει και αρκεί το σύστημα των εξισώσεων αυτών να έχει μία λύση. Λύνουμε την ευθεία ως προς y και την τιμή του y τη θέτουμε στην εξίσωση της περιφερείας. Θα έχουμε: $x^2+(\lambda x+\beta)^2=\rho^2$ ή $(1+\lambda^2)x^2-2\beta\lambda x+\beta^2-\rho^2=0$. η οποία είναι δευτεροβάθμιος ως προς x. Για να έχει μία ρίζα (διπλή), θα πρέπει να είναι $\Delta=0$ (όπου Δ η διακρίνουσα). δηλ. $4\lambda^2\beta^2-4(1+\lambda^2)(\beta^2-\rho^2)=0$ εκ της οποίας προκύπτει $\rho^2=\dfrac{\beta^2}{1+\lambda^2}$ που είναι και η ζητουμένη σχέση.

2.10. Να ευρεθεί η εξίσωση ελλείψεως όταν είναι $\alpha=2\beta$ και το σημείο $(6,4)$ κείται επί της ελλείψεως.

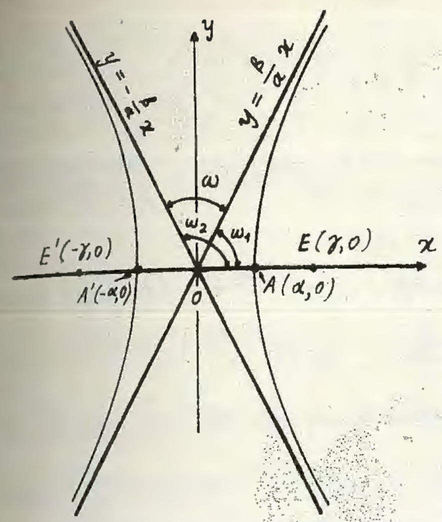
Λύση. Η γενική εξίσωση της ελλείψεως είναι $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$. Επειδή $\alpha=2\beta$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{x^2}{4\beta^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$. Οι συντεταγμένες του σημείου $(6,4)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ελλείψεως δηλ. $\dfrac{36}{4\beta^2}+\dfrac{16}{\beta^2}=1$ εκ της οποίας $\beta^2=25$· άρα η ζητουμένη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1 \quad ή \quad x^2+4y^2=100.$$

2.11. Να ευρεθεί η εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής, η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $16x^2+25y^2=400$.

Λύση. Ως γνωστόν η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $x^2-y^2=\alpha_1^2$ (όπου $\alpha_1=\beta_1$) Επομένως αρκεί να ορισθεί το α_1. Εκ της ελλείψεως έχομε: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ δηλ $\alpha_2=5$ και $\beta_2=4$ (όπου $2\alpha_2$ και $2\beta_2$ είναι ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της ελλείψεως.). Επίσης έχομε $\gamma^2=\alpha_2^2-\beta_2^2=25-16=9$ δηλ $\gamma=\pm3$ Στην υπερβολή η σχέση που συνδέει τα α,β,γ είναι $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ και επειδή $\alpha=\beta=\alpha_1$ και γ της ελλείψεως είναι το ίδιο με το γ της υπερβολής (εφ' όσον έχουν τις ίδιες εστίες) έπεται $\gamma^2=\alpha_1^2+\beta_1^2=2\alpha_1^2$ δηλ $9=2\alpha_1^2$ και $\alpha_1^2=\dfrac{9}{2}$. Άρα η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής θα είναι: $x^2-y^2=\dfrac{9}{2}$ ή $2x^2-2y^2=9$.

2.12. Αν η εκκεντρότης μιάς υπερβολής είναι 2 να ευρεθεί η γωνία των ασυμπτώτων αυτής.



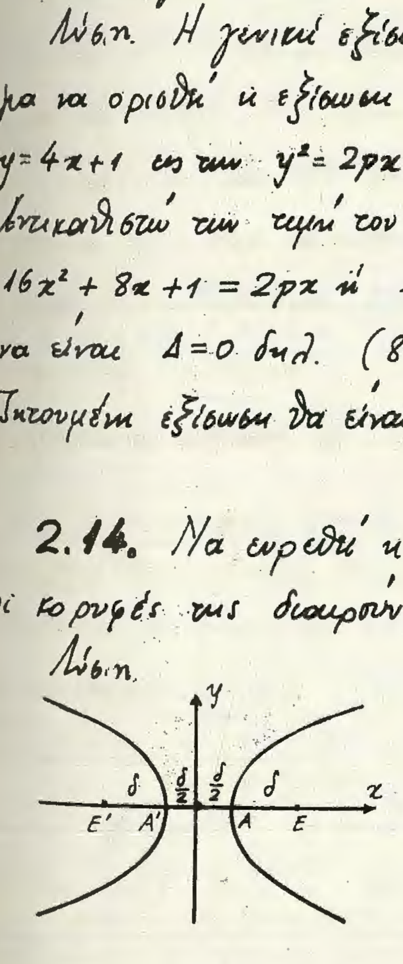
Λύση. Η ζητουμένη γωνία θα είναι $\omega=\omega_2-\omega_1$ ή $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\omega_2-\omega_1)=$
$=\dfrac{\varepsilon\varphi\omega_2-\varepsilon\varphi\omega_1}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\varepsilon\varphi\omega_2}=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$ όπου λ_1,λ_2 οι συντελεστές κατευθύνσεως των δύο ασυμπτώτων. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$. Επομένως $\lambda_1=\frac{\beta}{\alpha}$ και $\lambda_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ (1). Για να υπολογίσω τα λ_1,λ_2 αρκεί να υπολογίσω τα α,β. Στην υπερβολή έχομε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$. Εκ της σχέσεως $\frac{\gamma}{\alpha}=2$ (εκκεντρότης) ή $\gamma=2\alpha$ παίρνω $4\alpha^2=\alpha^2+\beta^2$ ή $3\alpha^2=\beta^2$ και $\alpha=\pm\frac{\beta}{\sqrt{3}}$ οπότε εκ των (1) προκύπτει $\lambda_1=\sqrt{3}$ και $\lambda_2=-\sqrt{3}$. άρα η σχέση $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}=\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-3}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$ άρα $\omega=\frac{\pi}{3}$.

2.13. Να ευρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφήν το 0 (αρχή των συντεταγμένων) και άξονα ox, η οποία να εφάπτεται της ευθείας $y=4x+1$.

Λύση. Η γενική εξίσωση της παραβολής θα είναι $y^2=2px$ επομένως για να ορισθεί η εξίσωση αρκεί να προσδιορισθεί ο p. Για να εφάπτεται η ευθεία $y=4x+1$ εις την $y^2=2px$ πρέπει το σύστημα να έχει μία πραγματική λύση. Αντικαθιστώ την τιμή του $y=4x+1$ στην εξίσωση της παραβολής οπότε έχω: $16x^2+8x+1=2px$ ή $16x^2+(8-2p)x+1=0$ Για να έχω μία ρίζα πρέπει να είναι $\Delta=0$ δηλ. $(8-2p)^2-64=0$ εκ της οποίας $p=0$ ή $p=8$. Άρα η ζητουμένη εξίσωση θα είναι: $y^2=16x$.

2.14. Να ευρεθεί η εκκεντρότητα μιας υπερβολής αν γνωρίζωμε ότι οι κορυφές της διαιρούν την απόσταση μεταξύ των εστιών σε 3 ίσα μέρη.

Λύση.



Η εκκεντρότητα δίδεται ως γνωστόν από τη σχέση $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$. Η απόσταση $E'E=3\delta$ η δε $OE=\gamma=OA+AE=\frac{\delta}{2}+\delta=\frac{3\delta}{2}$ η δε $OA=\alpha=$ $=\frac{\delta}{2}$ άρα θα είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{3\cdot\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}=3$.
δηλ. $\varepsilon=3$.

2.15. Της καμπύλης $x^2+2xy+2y^2-2x-4y+1=0$ να ευρεθούν το γένος, το είδος, το κέντρο, η απλοποιημένη της μορφή και οι εξισώσεις των αξόνων της.

Λύση. Ως γνωστόν η γενική μορφή μιας καμπύλης 2ου βαθμού είναι $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$. Επομένως είναι $A=1$, $B=1$, $\Gamma=2$, $\Delta=-1$, $E=-2$, $Z=1$ οπότε οι αναλλοίωτοι αυτής, D, d, S είναι

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1(2-4)-1(1-2)-1(-2+2)=-1<$$

$$d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1>0, \quad S=A+\Gamma=1+2=3>0.$$

Επειδή $d>0$ η καμπύλη είναι γένους ελλείψεως, και επειδή $D<$, $S>$ έπεται ότι $D\cdot S<0$ άρα έχομε πραγματική έλλειψη.

Το κέντρο της ελλείψεως έχει ως γνωστόν συντεταγμένες x_0, y_0 τις

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{1}=\frac{-2+2}{1}=0$$

$$y_0=\frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{1}=\frac{-1+2}{1}=1$$

Δηλ. το κέντρο της είναι $O'(0,1)$.

Η κανονική της μορφή προκύπτει ως γνωστόν από τη σχέση:
$A'x'^2+\Gamma'y'^2+\frac{D}{d}=0$ όπου $A'=\frac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}=\frac{3+\sqrt{1^2+4}}{2}=$
$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\Gamma'=\frac{A+\Gamma-\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}=\frac{3-\sqrt{1^2+4}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

και $\frac{D}{d}=\frac{-1}{1}=-1$ άρα η εξίσωση γίνεται: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}x'^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}y'^2=$

Η εξίσωση του νέου άξονος $O'x'$ είναι της μορφής $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ όπου x_1, y_1 είναι οι συντεταγμένες του κέντρου $O'(0,1)$ και ο λ δίδεται ως γνωστόν εκ της σχέσεως $\lambda=\frac{\Gamma-A+\sqrt{(\Gamma-A)^2+4B^2}}{2B}=\frac{1+\sqrt{1^2+4}}{2\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

δηλ. θα είναι η εξίσωση του $O'x'$: $y-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$. Ο άλλος άξονας $O'y'$ ως κάθετος στον $O'x'$ θα έχει λ_1 τέτοιον ώστε $\lambda\cdot\lambda_1=-1 \Rightarrow \lambda_1=$
ή $\lambda_1=-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{-2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, και η εξίσωση του $O'y'$: $y-1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$

2.16. Δίδεται η καμπύλη $2x^2-4xy+y^2-2x-6y+1=0$. Να ευρεθούν το γένος, το είδος, το κέντρο και η κανονική της μορφή.

Λύση. Είναι εκ της γενικής εξισώσεως $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$
$A=2,\ B=-2,\ \Gamma=1,\ \Delta=-1,\ E=-3,\ Z=1$ οπότε έχομε:

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -33<0, \quad d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2<0$$

και $S=A+\Gamma=3>0$. Επειδή $d<0$ η καμπύλη είναι γένους υπερβολή και επειδή $D\neq 0$ η υπερβολή είναι πραγματική.

Το κέντρο της O' έχει συντεταγμένες:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{6+1}{-2} = -\frac{7}{2}$$

$$y_0=\frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2+6}{-2} = -4$$

δηλ. $O'\left(-\frac{7}{2},-4\right)$.

Η δε κανονική της εξίσωση: $A'x'^2+\Gamma'y'^2+\frac{D}{d}=0$ όπου είναι:

$$A'=\frac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}=\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \quad \Gamma'=\frac{A+\Gamma-\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

και $\frac{D}{d}=\frac{33}{2}$ άρα $\frac{3+\sqrt{17}}{2}x'^2-\frac{-3+\sqrt{17}}{2}y'^2=-\frac{33}{2}$

2.17 Δίδεται η καμπύλη $x^2-2xy+y^2-2x-4y+1=0$. Να ευρεθούν το γένος, το είδος, το κέντρο η κανονική της μορφή και η γωνία στροφής των αξόνων του νέου συστήματος συντεταγμένων της.

Λύση. Είναι: $A=1,\ B=-1,\ \Gamma=1,\ \Delta=-1,\ E=-2,\ Z=1$. οπότε έχομε:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9<0, \quad d=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

άρα η καμπύλη είναι παραβολή και μάλιστα (επειδή $D\neq 0$) πραγματική, άρα δεν θα έχει κέντρο. Οι συντεταγμένες της κορυφής της $O'(x_0,y_0)$ είναι ως γνωστόν οι λύσεις του συστήματος: $Ax_0+By_0+\frac{A\Delta+BE}{S}=0$, $\left(\Delta+\frac{\Delta\Gamma-BE}{S}\right)x_0+\left(E+\frac{AE-B\Delta}{S}\right)y_0+Z=0$ εκ των οποίων προκύπτει μετά την αντικατάσταση $x_0=\frac{11}{24}$, $y=-\frac{1}{24}$. Η κανονική της μορφή: $y'^2=2px'$ όπου $p=\frac{AE-B\Delta}{S\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{3}{4\sqrt{2}}$ και $\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{A}{B}=1 \Rightarrow \varphi=45°$.

3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Ορισμοί

Καλούμε **συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το σύνολο $X \neq \emptyset$ και με τιμές στο σύνολο $\Psi \neq \emptyset$, κάθε μονότιμη απεικόνιση του X εις το Ψ, δηλ. κάθε αντιστοιχία f του X εις το Ψ κατά την οποία κάθε στοιχείο του X έχει ένα και μόνο ένα αντίστοιχο εις το Ψ. Αν $x \in X$, τότε το αντίστοιχο αυτού $y \in \Psi$ σημειώνεται με $f(x)$ και η συνάρτηση συμβολίζεται με $f: X \to \Psi$. Ειδικώτερα λέμε ότι η συνάρτηση $f: X \to \Psi$ είναι συνάρτηση (ή απεικόνιση) του X **επί** του Ψ ή **επίμορφη** συνάρτηση του X επί του Ψ, τότε και μόνο, όταν για κάθε $y \in \Psi$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in X$ με $f(x) = y$. Κάθε συνάρτηση $f: X \to \Psi$ που δεν είναι επί του Ψ θα λέγεται συνάρτηση του X **εντός** του Ψ.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: X \to \Psi$ είναι **αμφιμονότιμη** (ή **αμφιμονοσήμαντη**) συνάρτηση του X εις το Ψ (αντίστοιχα εντός, επί), τότε και μόνον, όταν για κάθε ζεύγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. και συμβολίζεται $f: X \overset{εις}{\longleftrightarrow} \Psi$.

Έστω $f: X \overset{επί}{\longleftrightarrow} \Psi$ αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του X επί του Ψ. Τότε κάθε στοιχείο $y \in \Psi$ είναι εικόνα ενός και μόνο στοιχείου $x \in X$ (δηλ. έχει ένα και μόνο αρχέτυπο $x \in X$). Παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία εκ του Ψ εις το X κατά την οποία σε κάθε $y \in \Psi$ αντιστοιχεί το αρχέτυπο αυτού $x \in X$ υπό της f, είναι επίσης συνάρτηση του Ψ επί του X. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **αντίστροφη** της $f: X \overset{επί}{\longleftrightarrow} \Psi$ και συμβολίζεται με $f^{-1}: \Psi \overset{επί}{\longleftrightarrow} X$ ή απλώς με f^{-1}. Εάν $y \in \Psi$, τότε το στοιχείο $x \in X$ με $f(x) = y$ είναι η εικόνα του y υπό της f^{-1}. Επομένως είναι αληθής η ισοδυναμία: $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$.

Όταν τώρα τα σύνολα X και Ψ είναι υποσύνολα του R ($X, \Psi \subseteq R$), τότε η συνάρτηση λέγεται **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής** ή απλώς **αριθμητική συνάρτηση**.

Έστωσαν f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις με κοινό σύνολο ορισμού το E. Ορίζουμε ως **άθροισμα, διαφορά, γινόμενο** και **πηλίκο** αυτών τις συναρτήσεις $\sigma_1 = f+g$, $\sigma_2 = f-g$, $\sigma_3 = f\cdot g$, $\sigma_4 = \frac{f}{g}$ ορισμένες εις το E με $\sigma_1(x) = f(x)+g(x)\ \forall x\in E$, $\sigma_2(x)=f(x)-g(x)$ $\forall x\in E$, $\sigma_3(x)=f(x)\cdot g(x)\ \forall x\in E$ και $\sigma_4(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ \forall x\in E$ με $g(x)\neq 0$.

Ορίζουμε ακόμη ως **σύνθετη συνάρτηση** αυτών και την συμβολίζουμε με $f\circ g$ τη συνάρτηση $(f\circ g) = f(g(x))$, με πεδίο ορισμού τώρα το πεδίο τιμών της g. Προφανώς είναι $f\circ g \neq g\circ f$. Αν δε δοθούν τρεις συναρτήσεις f, g, h τότε είναι $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$.

Θα λέμε ότι μία συνάρτηση f πραγματική πραγματικής μεταβλητής είναι **αύξουσα** εις το σύνολο $A\subseteq E$ (πεδίο ορισμού της), τότε και μόνο, όταν για κάθε $x_1, x_2\in A$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)\le f(x_2)$. Αν ειδικά για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα**. Αναλόγως η f είναι **φθίνουσα** εις το σύνολο $A\subseteq E$, τότε και μόνο, όταν για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)\ge f(x_2)$. Αν ειδικά για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$ τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα**. Οι αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις ονομάζονται **μονότονοι** συναρτήσεις. Για να διαπιστώσουμε αν μία συνάρτηση είναι μονότονη και μάλιστα να βρούμε αν είναι αύξουσα σ' ένα διάστημα $A\subset R$, αρκεί να μελετήσωμε το πρόσημο του λόγου $\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\forall x_1,x_2\in A$. Έτσι αν $\lambda\geq 0 \Leftrightarrow$ η f αύξουσα· αν $\lambda\leq 0\Leftrightarrow$ η f φθίνουσα.

Έστω μια αριθμητική συνάρτηση $f: E\subset R\to R$. Θα καλείται η συνάρτηση αυτή **άρτια**, εάν για κάθε $x\in E$ να προκύπτει ότι και το $-x\in E$ και μάλιστα $f(-x)=f(x)$. Η συνάρτηση f θα καλείται αντιστοίχως **περιττή** αν για κάθε $x\in E$ να προκύπτει ότι και το $-x\in E$ και μάλιστα $f(-x)=-f(x)$. Η συνάρτηση f θα λέγεται **περιοδική** εάν υπάρχει $T\in R$ έτσι ώστε για κάθε $x\in R$ να είναι $f(x+T)=f(x)$. Ο μικρότερος αριθμός T ο οποίος πληροί την ιδιότητα αυτή λέγεται **περίοδος** της συναρτήσεως. Π.χ. οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$, $f(x)=συν x$ είναι άρτιες, οι ημ, εφ, $f(x)=x^3$ περιττές, οι δε ημ, συν, εφ, σφ περιοδικές.

Είναι γνωστό από την Αναλυτική Γεωμετρία ότι σ' ένα σύστημα αξόνων xOy του επιπέδου, κάθε ζεύγος αριθμών (x,y) παρίσταται δι' ενός σημείου $P(x,y)$. Τό σύνολο των σημείων του επιπέδου xOy τό οποίο προκύπτει έκ του συνόλου των ζευγών $S = \{(x, f(x)) : \forall\, x \in A \subseteq$ λέγεται **γραφική παράσταση ή γράφημα** της $f(x)$.

Τα σημεία τομής (εάν υπάρχουν) του άξονος xx' και της γραφικής παραστάσεως Γ έχουν τετμημένες $\alpha \in R$ οι οποίες πληρούν τη σχέση $f(\alpha)=$ δηλ είναι οι πραγματικές λύσεις της εξισώσεως $f(x)=0$.

Εάν η συνάρτηση f είναι περιττή τότε, ως γνωστόν, τα ζεύγη $(x, f($ $(-x, -f(x))$ είναι σημεία του γραφήματος της f, εφ' όσον τό σημείο x είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f. Εξ αυτού έπεται ότι η καμπύλη Γ της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Εάν η f είναι άρτια, τότε επειδή τα ζεύγη $(x, f(x)), (-x, f(x))$ είναι ταυτοχρόνως σημεία του γραφήματός της, εφ' όσον το x είναι σημ του πεδίου ορισμού της f, έπεται ότι η καμπύλη Γ έχει τον άξονα yy' ως άξονα συμμετρίας, εφ' όσον οι άξονες xx', yy' είναι κάθετοι.

Εάν η f είναι περιοδική τότε ως γνωστόν $\forall x_0 \in A$ (πεδίο ορισμού της f) είναι $f(x_0+nT)=f(x_0)$ $\forall n \in Z$ (ακεραίους). Συνεπώς όλα τα ζεύγη της μορφής $(x_0+nT, f(x_0))$ παριστάνουν σημεία της καμπύλης Γ. Εκ τούτου προκύπτει ότι η καμπύλη Γ λαμβάνεται δια παραλλήλου με τατοπίσεως πρός τον άξονα $x'x$ του τμήματός της τό οποίο αντιστοιχεί στο τμήμα $[x_0, x_0+T]$ της πραγματικής ευθείας R, για το οποίο ισ $x_0 < x \leq x_0+T$. Σημειωτέον ότι όταν το πεδίο ορισμού μιας συναρ σεως είναι ένα διάστημα μεταξύ δύο αριθμών α, β τότε ορίζεται τ διάστημα αυτό ως: κλειστό και συμβολίζεται με $[\alpha,\beta]$ όταν $\alpha \leq x \leq$ ανοικτό και συμβολίζεται με (α,β) όταν $\alpha < x < \beta$, ανοικτό πρός δεξιά και κλειστό πρός τα αριστερά και συμβολίζεται με $[\alpha,\beta)$ όταν $\alpha \leq x < \beta$ και τέλος ανοικτό πρός τα αριστερά και κλειστό πρός τα δεξιά και συμβολίζεται με $(\alpha,\beta]$ όταν $\alpha < x \leq \beta$.

Στις αριθμητικές συναρτήσεις για να λάβουμε την αντίστροφη συνάρτηση δοθείσης συναρτήσεως f λύνουμε την συνάρτησή της ως προς την μεταβλητή που περιέχει (εφ' όσον λύνεται, δηλ. εφ' όσον υπάρχει αμφιμονότιμος αντιστοιχία) και κατόπιν εναλλάσσουμε τις μεταβλητές μεταξύ τους. π.χ. της συναρτήσεως $y=f(x)=2x+1$ η αντίστροφή της είναι: $x=\frac{y-1}{2}$ δηλ $x=f^{-1}(y)=\frac{y-1}{2}$ ή $y=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$.
Προφανώς σε μια αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} πεδίο ορισμού της είναι το $f(A)$ ενώ το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα A. Από τον ορισμό της αντίστροφης συναρτήσεως προκύπτει ότι αν το ζεύγος $(x, f(x))$ είναι σημείο της καμπύλης Γ (γραφικής παραστάσεως της f), τότε το ζεύγος $(f(x), x)$ θα είναι σημείο της καμπύλης Γ' (γραφικής παραστάσεως της f^{-1}) και είναι συμμετρικό του ζεύγους $(x, f(x))$ ως προς την ευθεία $y=x$, δηλ την διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων.

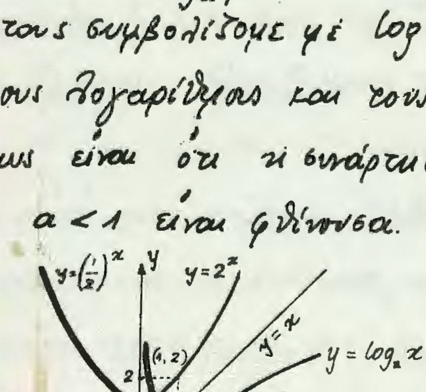
Οι αριθμητικές συναρτήσεις διακρίνονται σε 2 μεγάλες κατηγορίες: **1. αλγεβρικές** και **2. υπερβατικές** συναρτήσεις. Οι αλγεβρικές διακρίνονται σε **ακέραιες πολυωνυμικές** συναρτήσεις της μορφής: $f(x): a_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ όπου $\mu \in N$, **σε ρητές** συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \frac{a_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + a_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \beta_0}$, και σε **άρρητες** της μορφής: $f(x) = \frac{\sqrt{\sigma(x)}}{\sqrt{\rho(x)}}$ όπου σ, ρ είναι ακέραιες πολυωνυμικές ή άρρητες συναρτήσεις ή αθροίσματά των. Οι υπερβατικές είναι οι μη αλγεβρικές. π.χ. οι $y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$, $y=\log x$, $y=e^x$, $y=shx$ κ.τ.λ. Διακρίνονται σε **τριγωνομετρικές, αντίστροφες κυκλικές, υπερβολικές, εκθετικές και λογαριθμικές** συναρτήσεις.

Οι **τριγωνομετρικές** και **αντίστροφες κυκλικές** συναρτήσεις είναι αντίστροφες συναρτήσεις. Τριγωνομετρικές είναι ως γνωστόν οι συναρτήσεις $y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$, $y=\varepsilon\varphi x$, $y=\tau\varepsilon\mu x$, $y=\sigma\tau\varepsilon\mu x$, ενώ αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις δηλ οι αντίστροφες αυτών είναι οι $y=\tau o\xi\eta\mu x$ (και διαβάζεται y είναι ένα τόξο του οποίου το ημίτονο είναι x), $y=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$, $y=\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ $y=\tau o\xi\sigma\varphi x$, $y=\tau o\xi\tau\varepsilon\mu x$, $y=\tau o\xi\sigma\tau\varepsilon\mu x$, οι γραφικές παραστάσεις των οποίων είναι, απ' τον ορισμό των αντιστρόφων συναρτήσεων, συμμετρικές των τριγωνομετρικών αντιστοίχων ως προς την ευθεία $y=x$· όπου τώρα ως πεδίο ορισμού λαμβάνεται το διάστημα $[-1,1]$ και πεδίο τιμών ολόκληρος ο

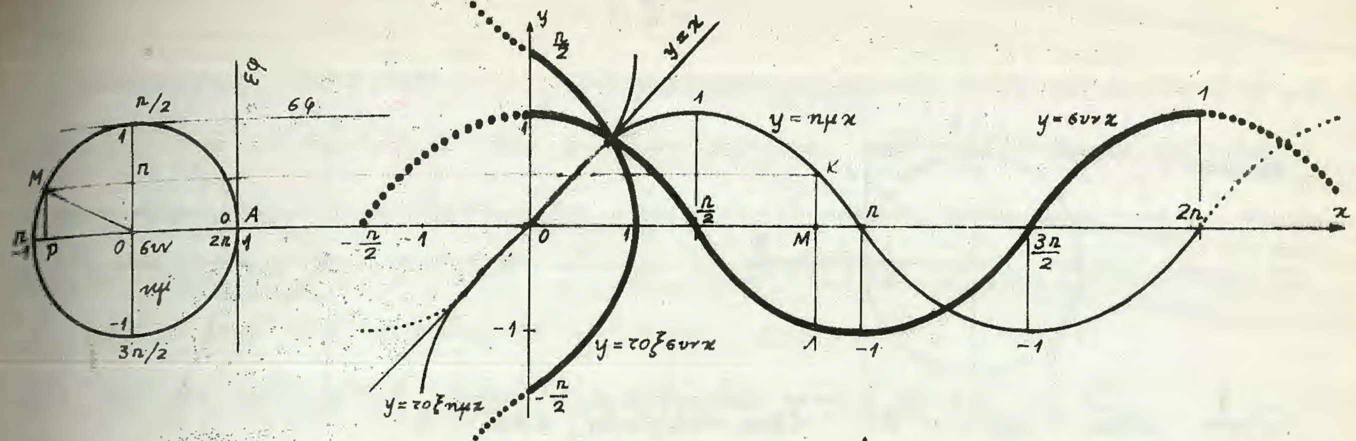
Οι **εκθετικές** και **λογαριθμικές** συναρτήσεις επίσης είναι αντίστροφες. Ως εκθετική ορίζεται η συνάρτηση της οποίας η μεταβλητή x είναι εκ[θέτης] της ενός αριθμού (ή συναρτήσεως γενικώς) η οποία λέγεται βάσις. π.χ. $y=10^x$, $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=e^x$ (όπου $e=2,71828\ldots$) κ.τ.λ. Οι αντίστοιχες αυτών λογαριθμικές δηλ. οι αντίστροφες αυτών είναι: $y=\log_{10}x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_{1/2}x$, $y=\log_e x$. Πράγματι άν πάρωμε την πρώτη και λύσωμε ως προς x (λογαριθμίζοντας πρώτα με βάση 10) $\log_{10}y = x\log_{10}10$ ή $\log y = x\cdot 1$ (διότι $\log_{10}10=1$.) Και άν εναλλάξωμε τις θέσεις των x, y προκύπτει η $y=\log_{10}x$, δηλ. ουσιαστικά ο ορισμός των λογαριθμικών συναρτήσεων. Ομοίως και για τις άλλες μόνο που η λογαρίθμηση θα γίνεται με την αντίστοιχη βάση της εκθετικής συναρτήσεως.

Αναφέρομε ευκαιριακά μερικές ιδιότητες των λογαρίθμων:
$\log_\alpha 1=0$ διότι $\alpha^0=1$, $\log_\alpha 0=-\infty$ διότι $\alpha^{-\infty}=\frac{1}{\alpha^\infty}=0$, $\log_\alpha\alpha=1$ διότι $\alpha^1=\alpha$, $\log_\alpha(x\cdot y)=\log_\alpha x+\log_\alpha y$ $\forall x,y\in R^+$, $\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)=\log_\alpha x-\log_\alpha y$ $\forall x,y\in R^+$, $\log_\alpha(x^\nu)=\nu\log_\alpha x$ $\forall x\in R^+$ και $\nu\in R$,

$\log_\beta x=\dfrac{\log_\alpha x}{\log_\alpha\beta}$. Ειδικά για $\alpha=10$ έχομε τους δεκαδικούς λογαρίθμους και τους συμβολίζομε με $\log$ ενώ για $\alpha=e$ έχομε τους φυσικούς ή Νεπερίους λογαρίθμους και τους συμβολίζομε με $\ln$ ή $\log_e$. Άξιον παρατηρήσεως είναι ότι η συνάρτηση $y=\alpha^x$ όταν $\alpha>1$ είναι αύξουσα ενώ όταν $\alpha<1$ είναι φθίνουσα. Οι γραφικές παραστάσεις μερικών εικονίζονται στο κατωτέρω σχήμα.



Η $y=2^x$ για $x=0$ γίνεται $y=2^0=1$. Ήτοι το σημείο $(0,1)$ αντιστοιχεί στη $y=2^x$ ομοίως για $x=1$ $y=2^1=2$. για $x=-\infty$ $y=0$, για $x=\infty$ $y=\infty$. Και έτσι κατασκευάζεται προσεγγιστικά η γραφική της παράσταση· ομοίως και των άλλων.



Για τη γραφική παράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ξεδιπλώνουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο πάνω στον άξονα ox και ευρίσκουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου AM (εδώ σημειώσαμε τις γραφικές παραστάσεις του ημx, συνx, τοξημx, τοξσυνx). Το τόξο AM έχει ημίτονο το MP = OΠ δηλ. ημ$\widehat{AM}$ = OΠ = MK ενώ συν$\widehat{AM}$ = OP = MΛ. Όμοιως υπολογίζομε το ημ, συν, οριακών τιμών δηλ των τόξων $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. και παίρνομε τις αντίστοιχες καμπύλες των ημx, συνx. Οι αντίστοιχες αντίστροφες αυτών λαμβάνονται κατά παρόμοιο τρόπο. και είναι συμμετρικές των ημx, συνx ως προς την ευθεία $y = x$ με πεδίο ορισμού όπως φαίνεται το $[-1, 1]$. και πεδίο τιμών ολόκληρο το R. Όπως διαπιστώνεται ακόμη οι συναρτήσεις ημx, συνx είναι περιοδικές με περίοδο 2π διότι: ημ$(x+2\pi)$ = ημx και συν$(x+2\pi)$ = συνx. (Οι συναρτήσεις εφx, σφx είναι περιοδικές με περίοδο π, διότι εφ$(x+\pi)$ = εφx και σφ$(x+\pi)$ = σφx).

Οι **υπερβολικές** συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

υπερβολικό ημίτονο (**S**inus **h**yperbolicus) και γράφεται $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

υπερβολικό συνημίτονο (**C**osinus **h**yperbolicus) " " $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

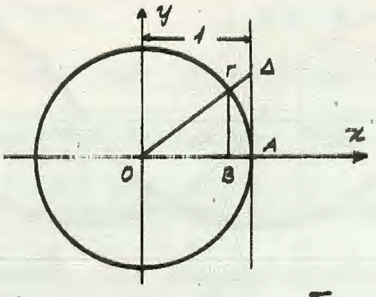
υπερβολική εφαπτομένη (**T**agens **h**yperbolicus) " " $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

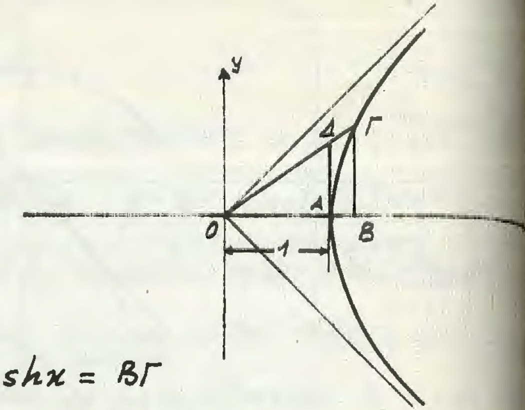
υπερβολική συνεφαπτομένη (**Cot**agens **h**yperbolicus) " " $cothx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

υπερβολική τέμνουσα (**Sec**ans **h**yperbolicus) " " $sechx = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$,

υπερβολική συντέμνουσα (**Cosec**ans **h**yperbolicus) " " $cosechx = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$,

Η λέξη "υπερβολικό" οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις αυτές συνδέονται γεωμετρικά με την ισοσκελή υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, όπως οι τριγωνομετρικές (κυκλικές) συνδέονται με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:





Στόν κύκλο: ημx = ΒΓ   Στην υπερβολή: sh$x$ = ΒΓ

συνx = ΟΒ   ch$x$ = ΟΒ   όπου το x

εφx = ΑΔ   th$x$ = ΑΔ.   μετράται σε ακτίν

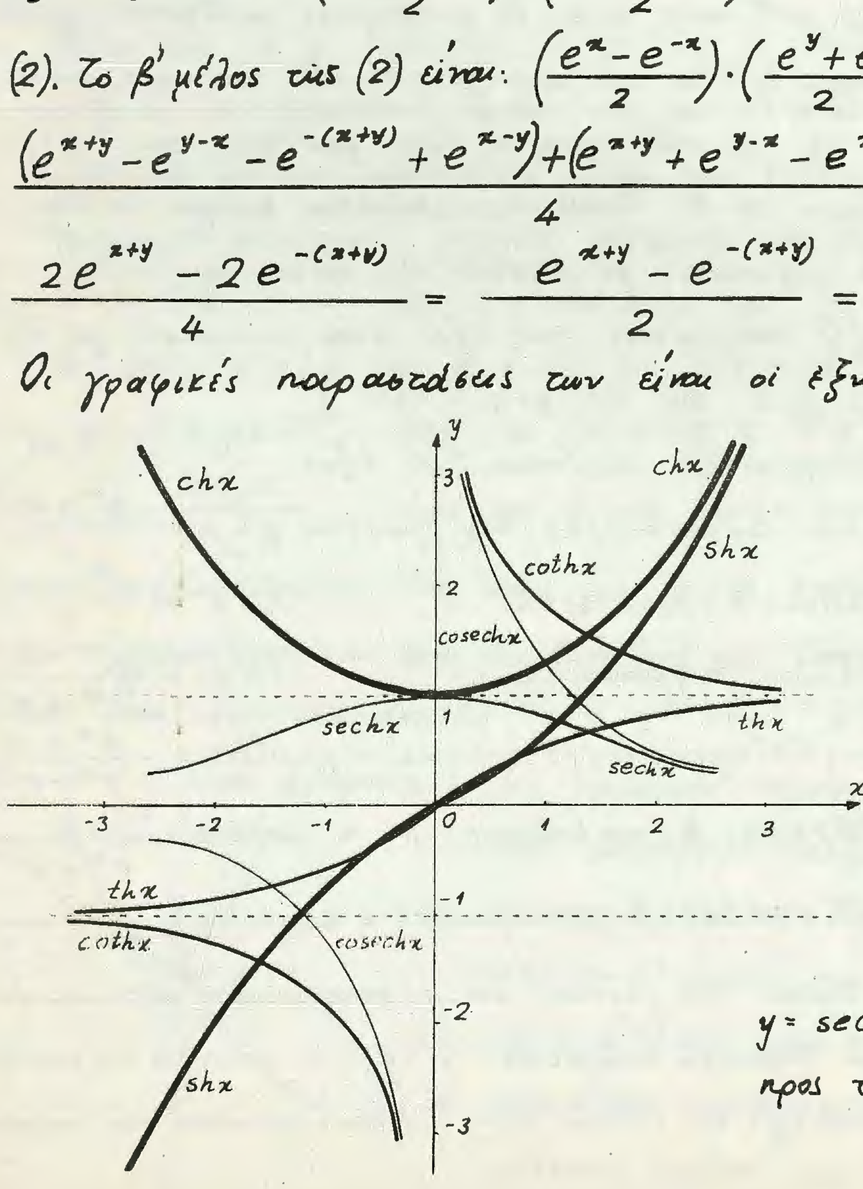
Στις υπερβολικές συναρτήσεις υπάρχουν σχέσεις ανάλογες (ή περίπου ανά-γες) με τις τριγωνομετρικές όπως π.χ. $ch^2x - sh^2x = 1$ (1), $sh(x+y) = shx\cdot chy + chx\cdot shy$ (2). Οι (1) και (2) αποδεικνύονται ως εξής: (1). Είναι: $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2-e^{2x}-e^{-2x}+2}{4}$

(2). Το β' μέλος της (2) είναι: $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$

$$\frac{\left(e^{x+y}-e^{y-x}-e^{-(x+y)}+e^{x-y}\right)+\left(e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}\right)}{4} =$$

$$\frac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2} = sh(x+y).$$

Οι γραφικές παραστάσεις των είναι οι εξής κατωτέρω:



Οι αντίστροφες αυτών $y = $ τοξ sh$x$, $y = $ τοξ ch$x$, $y = $ τοξ th$x$, $y = $ τοξ coth$x$, $y = $ τοξ sech$x$ και $y = $ τοξ cosech$x$ προκύ προφανώς σαν συμμετ των αντιστοίχων: $y = shx$, $y = chx$, $y = thx$, $y = cothx$, $y = sechx$ και $y = cosechx$ προς την ευθεία $y = x$.

Ονομάζομε **ακολουθία** πραγματικών αριθμών κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο N των φυσικών αριθμών και πεδίο τιμών το σύνολο R των πραγματικών αριθμών, δηλ. κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του N εις το R. Την τιμή της συναρτήσεως f την συμβολίζομε με a_ν δηλώνοντας ότι a_ν είναι ο όρος της ακολουθίας ο οποίος κατέχει την ν τάξη.

Π.χ. η $a_\nu = \nu^2$, $\nu \in N$ είναι η ακολουθία $1, 4, 9, 16, \dots, \nu^2$.

Μια ακολουθία a_ν είναι **φραγμένη** τότε και μόνο, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ϑ τέτοιος ώστε $|a_\nu| \le \vartheta$ $\forall \nu \in N$.

π.χ. η ακολουθία $a_\nu = \frac{\nu\eta\mu\nu}{\nu+1}$ είναι φραγμένη διότι είναι:

$$\left|\frac{\nu\eta\mu\nu}{\nu+1}\right| = \frac{\nu|\eta\mu\nu|}{\nu+1} \le \frac{\nu}{\nu+1} \le 1 \quad \forall \nu \in N$$

Μια ακολουθία a_ν είναι **μηδενική** και γράφεται $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, a_\nu = 0$, όταν δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης ν_0 εξαρτώμενος από τον ε δηλ. $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $|a_\nu| < \varepsilon$ $\forall \nu \ge \nu_0$.

π.χ. η ακολουθία $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu = 1, 2, \dots$ είναι μηδενική διότι για τυχόντα θετικό ε υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ έτσι ώστε για $\forall \nu \ge \nu_0$ να είναι $\left|\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right| < \varepsilon$ και είναι ο $\nu_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}$. (Το ν_0 το βρίσκουμε αν λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{\sqrt{\nu}} = \varepsilon$ εξ αυτής προκύπτει $\frac{1}{\nu} = \varepsilon^2$ ή $\nu = \frac{1}{\varepsilon^2}$ και θέτουμε $\nu = \nu_0$.). Πράγματι για $\nu \ge \nu_0$ είναι $\left|\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \le \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} = \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon$.

Μηδενικές είναι ακόμη οι ακολουθίες $\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}, \frac{1}{\nu^3}, a^\nu$ με $|a| < 1$, $\frac{1}{2^\nu}$ κ.τ.λ.

Μια ακολουθία a_ν είναι **συγκλίνουσα** ή αλλοιώς συγκλίνει προς τον πραγματικό αριθμό l, όταν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, a_\nu = l$. τον αριθμό l τον λέμε **όριο** ή **οριακή τιμή** της ακολουθίας a_ν. Αν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, a_\nu = l$ τότε $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}(a_\nu - l) = 0$

π.χ. η ακολουθία $a_\nu = \frac{\nu+10}{\nu+9}$ συγκλίνει στο 1 διότι η ακολουθία $a_\nu = \frac{\nu+10}{\nu+9} - 1$ είναι μηδενική επειδή $\left|\frac{\nu+10}{\nu+9} - 1\right| = \frac{1}{\nu+9} <$ $< \frac{1}{\nu}$ και η $\frac{1}{\nu}$ είναι μηδενική.

Αναφέρομε μερικές βασικές ιδιότητες των μηδενικών και συγκλινουσών ακολουθιών: 1) $a_\nu \to 0$, $\beta_\nu \to 0 \Rightarrow a_\nu + \beta_\nu \to 0$, 2) $a_\nu \to 0$, β_ν φραγμένη $\Rightarrow a_\nu\beta_\nu \to 0$, 3) $|a_\nu| \le |\beta_\nu|$, $\beta_\nu \to 0 \Rightarrow a_\nu \to 0$, 1') $a_\nu \to l_1$, $\beta_\nu \to l_2 \Rightarrow a_\nu + \beta_\nu \to l_1 + l_2$, 2') $a_\nu \to l_1$, $\beta_\nu \to l_2 \Rightarrow a_\nu\beta_\nu \to l_1 \cdot l_2$ 3') $a_\nu \to l$, $\beta_\nu \to l$, $a_\nu \le \gamma_\nu \le \beta_\nu \Rightarrow \gamma_\nu \to l$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο** τον αριθμό A όταν το x τείνει στον αριθμό α, και θα σημειώνομε: $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f(x) = A$, όταν, για κάθε αριθμό ε οσονδήποτε μικρό, μπορούμε να βρούμε έναν άλλο η εξαρτώμενο απ' τον ε, δηλ. ο η να είναι συνάρτηση του ε $(\eta = \eta(\varepsilon))$ τέτοιον ώστε για κάθε x που επαληθεύει την ανισότητα $|x-\alpha|<\eta$ $(x\neq\alpha)$ να προκύπτει ότι και $|f(x) - A| < \varepsilon$.

π.χ. είναι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, x\,\text{ημ}\,x^{-1} = 0$ διότι $|x\,\text{ημ}\,x^{-1} - 0| = |x||\text{ημ}\,x^{-1}| \leq |x|$ επομένως αν λάβομε $\eta = \varepsilon$, τότε για $|x-0|<\varepsilon$ θα είναι επίσης $|x\,\text{ημ}\,x^{-1} - 0| < \varepsilon$ δηλ $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, x\,\text{ημ}\,x^{-1} = 0$.

Αν του x τείνοντος στο α είναι $f_i(x) = A_i$ $(i=1,2,3,\cdots,\nu)$ όπου A_i ωρισμένοι αριθμοί, αποδεικνύονται οι εξής βασικές ιδιότητες:

(i) $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_\nu(x)\right) = \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_1(x) \pm \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_2(x) \pm \cdots \pm \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_\nu(x) = A_1 \pm A_2 \pm \cdots \pm A_\nu$

(ii) $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_\nu(x)\right) = \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_1(x)\cdot \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_2(x) \cdots \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_\nu(x) = A_1\cdot A_2\cdots A_\nu$

(iii) $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_1(x)}{\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}} f_2(x)} = \dfrac{A_1}{A_2}.$ $(A_2 \neq 0)$.

Αναφέρομε ακόμη ορισμένα βασικά όρια: $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \sqrt[\nu]{\nu} = 1$, $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \sqrt[\nu]{\nu!} = +\infty$ $(\nu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu)$, $\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\, \alpha^x = +\infty$ $(\alpha>1)$, $\underset{x\to 0^+}{\text{ορ}} \log_\alpha x = -\infty$, $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, \text{συν}\, x = 1$, $\underset{x\to\infty}{\text{ορ}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828\ldots$, $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{x}{\text{ημ}\,x} = 1$ όπως και $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\text{ημ}\,x}{x} = 1$.

Ορίζομε ακόμη ως όριο **εκ δεξιών** το $\underset{x\to\alpha^+}{\text{ορ}} f(x) = A$, όταν το x δηλ τείνει στο α με τιμές μεγαλύτερες του α και αναλόγως όριο **εξ αριστερών** το $\underset{x\to\alpha^-}{\text{ορ}} f(x) = A$, όταν το x τείνει στο α με τιμές μικρότερες του α.

Για να βρούμε το όριο μιας συναρτήσεως, εφαρμόζομε τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) των ορίων καθώς και τα βασικά όρια που αναφέραμε, αν καταλήγομε στο να βρούμε ένα απ' αυτά τα όρια. Αν η συνάρτηση είναι ρητή, τότε διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεταβλητή της μεγαλυτέρας δυνάμεως και βρίσκομε το όριο της παραστάσεως όταν το $x\to\alpha$. π.χ. $\underset{x\to\infty}{\text{ορ}} \dfrac{x^2+2x}{x^2} = \underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 1 + \underset{x\to\infty}{\text{ορ}} \dfrac{2}{x} = 1+0 = 1$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι **συνεχής** επί το σημείο $x=x_0$ άν 1) υπάρχει το $f(x_0)$ δηλ. η συνάρτηση ορίζεται για $x=x_0$)

2) υπάρχει το $\underset{x\to x_0}{\text{ορ}} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός,

3) $\underset{x\to x_0}{\text{ορ}} f(x) = f(x_0)$. Άν μία ή περισσότερες από τις ανωτέρω συνθήκες δεν πληρούται, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ασυνεχής** στο σημείο $x=x_0$.

Παρατήρηση. Η δεύτερη συνθήκη δηλώνει ότι πρέπει να παίρνομε τα όρια εκ δεξιών και εξ αριστερών δηλ. τά $\underset{x\to x_0^+}{\text{ορ}} f(x)$, $\underset{x\to x_0^-}{\text{ορ}} f(x)$ αν παρίσταται ανάγκη, δηλ. αν η συνάρτηση ορίζεται διαφορετικά για τιμές του x μεγαλύτερες του x_0 και διαφορετικά για τιμές του x μικρότερες του x_0.

Ομοίως ορίζομε την συνέχεια μιας συναρτήσεως σ' ένα διάστημα (α,β) άν η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (εκτός των α,β). Γιά να είναι η συνάρτηση f συνεχής εις το $[\alpha,\beta]$ θά πρέπει εκτός των σημείων του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, νά υπάρχουν και τα $\underset{x\to \alpha^+}{\text{ορ}} f(x)$, $\underset{x\to \beta^-}{\text{ορ}} f(x)$.

Το γεγονός ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ γεωμετρικά ερμηνεύεται ότι η καμπύλη της συναρτήσεως f είναι μία συνεχής γραμμή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αναφέρομε χωρίς απόδειξη μερικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

1. Πρόταση του Weierstrass: Άν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο γ τού διαστήματος αυτού γιά τό οποίο $f(x)\le f(\gamma)=M$ μέγιστο της $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και τουλάχιστον ένα σημείο δ γιά τό οποίο $f(x)\ge f(\delta)=m$ ελάχιστο της $f(x)$ στό $[\alpha,\beta]$.

2. Πρόταση των Bolzano-Weierstrass: Άν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο γ του διαστήματος (α,β) γιά το οποίο είναι $f(\gamma)=0$, δηλ. υπάρχει μία ρίζα της εξισώσεως $f(x)=0$ στο (α,β).

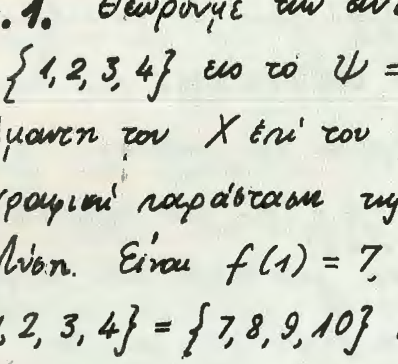
3. Κάθε συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι περατωμένη συνάρτηση στο διάστημα αυτό, δηλ. υπάρχουν δύο αριθμοί A,B με $A<B$ τέτοιοι ώστε νά είναι $A<f(x)<B$ γιά κάθε x του $[\alpha,\beta]$.

4. Άν f,g συνεχείς σε σημείο ξ, τότε και $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g $(g\neq 0)$ συνεχείς εις ξ.

Ασκήσεις.

3.1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f=\{(1,7),(2,9),(3,8),(4,10)\}$ του $X=\{1,2,3,4\}$ εις το $\Psi=\{7,8,9,10\}$. Να δειχθεί ότι η f είναι αμφι μονοσήμαντη του X επί του Ψ, να ευρεθεί η αντίστροφη αυτής και να γί η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f ως και της αντιστρόφου της f

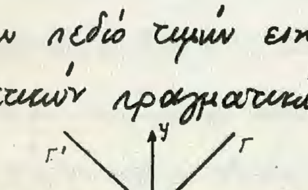
Λύση. Είναι $f(1)=7$, $f(2)=9$, $f(3)=8$, $f(4)=10$. Άρα $f\{1,2,3,4\}=\{7,8,9,10\}$ δηλαδή $f[X]=\Psi$. Δηλ. η συνάρτηση f εί συνάρτηση του X επί του Ψ. Επίσης παρατηρούμε ότι τα στοιχεία $f(1)$, $f($ $f(3)$, $f(4)$ είναι διάφορα μεταξύ των ανά δύο. Επομένως η f είναι αμφιμον σήμαντη συνάρτηση του X επί του Ψ. Η αντίστροφη αυτής είναι η $f^{-1}=\{(7,1),(9,2),(8,3),(10,4)\}$ δηλ. είναι $f^{-1}(7)=1$, $f^{-1}(9)=2$, $f^{-1}(8)=3$, $f^{-1}(10)=4$. Η γραφική παράσταση των f και f^{-1} είναι η εξή



Η γραφική παράσταση της f όπως προκύπτ είναι τα σημεία A, B, Γ. Η γραφική παράστ ση της f^{-1} είναι τα σημεία A', B', Γ', Δ', συμμ τρικά των σημείων A, B, Γ, Δ ως προς την ευθεία $y=x$ διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων.

3.2. Δίδεται η συνάρτηση $y=|x|$. Να ευρεθεί το πεδίο ορι και το πεδίο τιμών της και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής.

Λύση. Ως γνωστόν απόλυτος τιμή ενός αριθμού x και συμβολίζ $|x|$ είναι ο ίδιος ο x αν $x>0$ και ο αντίθετός του αν $x<0$. δηλ. πά θετικός αριθμός. Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως εί ολόκληρος ο άξονας των x δηλ. ολόκληρο το σύνολο των πραγματικώ ενώ πεδίο τιμών είναι μόνο ο θετικός ημιάξονας Oy δηλ. το σύνολο τ θετικών πραγματικών ήτοι το R^+. Το διάγραμμά της είναι $G=\{(x,y): y=|$

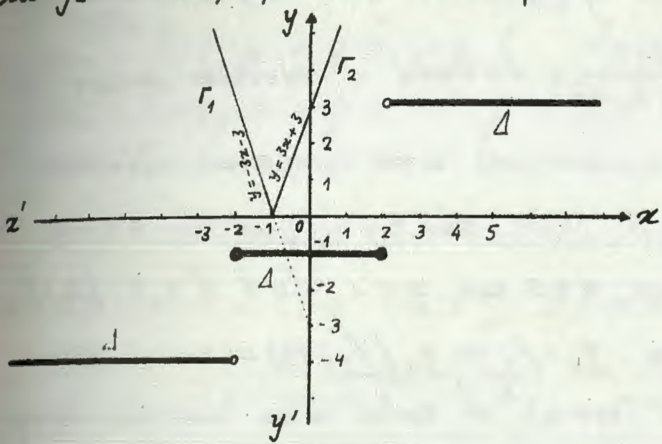


$=\{(0,0),(1,1),(-1,1),(2,2),(-2,2),\dots(\alpha,\alpha),(-\alpha,\alpha)$ α δηλ. η γραφική της παράσταση είναι οι ημιευθείες ΟΓ, Ο

3.3. Να ευρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των συναρτήσεων

$$y_1=\begin{cases}-4 & \text{αν} \quad x<-2\\ -1 & \text{"} \quad -2\le x\le 2\\ 3 & \text{"} \quad x>2.\end{cases} \quad \text{και} \quad y_2 = |3x+3|,$$ καθώς και το διάγραμμά τους.

Λύση. Πεδίο ορισμού της y_1 είναι όπως φαίνεται ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, ενώ πεδίο τιμών της είναι μόνο οι αριθμοί $-4, -1, 3$. Της y_2 πεδίο ορισμού της είναι ομοίως ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών



αριθμών δηλ. ολόκληρος ο άξονας xx'. Το πεδίο τιμών της θα είναι εφ' όσον έχουμε απόλυτο τιμή μόνο ο θετικός ημιάξονας Oy. Οι γραφικές παραστάσεις των προκύπτουν για μεν την y_1 η χοντρή καμπύλη $Δ$, για δε την y_2, η λεπτή $Γ_1, Γ_2$. Διότι η συνάρτηση $y_2=|3x+3|$ ή είναι $y_2=3x+3$ αν $3x+3\geq 0$ δηλ. αν $x\geq -1$ (με y_2 πάντα θετικό), δηλ. η ευθεία $y_2=3x+3$ δηλ. η $Γ_2$, ή είναι $y_2=-(3x+3)$ αν $3x+3<0$ δηλ. αν $x<-1$ δηλ. η ευθεία $y_2=-3x-3$ δηλ. η $Γ_1$ $(y_2>0)$.

3.4. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα για $x\geq 0$ και γνησίως φθίνουσα για $x\leq 0$, ενώ η συνάρτηση $φ(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση $σ(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x>0$ ή $x<0$.

Λύση 1) $f(x)$: Έστω $x_1, x_2\in R$ με $0\leq x_1<x_2$. Τότε $x_1-x_2<0$ και $x_1+x_2>0$. Άρα $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$ και $f(x_1)<f(x_2)$. Επίσης αν $x_1<x_2\leq 0$ θα έχουμε $x_1-x_2<0$ και $x_1+x_2<0$ οπότε $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$ άρα $f(x_1)>f(x_2)$.

2) $φ(x)$: έστω $x_1, x_2\in R$ με $x_1<x_2$ τότε $φ(x_1)-φ(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)\cdot$
$\cdot(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\dfrac{2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2}{2}=\frac{1}{2}(x_1-x_2)\left[x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2\right]<0$
διότι $x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2>0$ και $x_1-x_2<0$. Άρα $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

3). $σ(x)$: Είναι $σ(x_1)-σ(x_2)=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$. Για $0<x_1<x_2$ καθώς και για $x_1<x_2<0$ έχομε $x_2-x_1>0$ και $x_1x_2>0$. Δηλ. σε κάθε περίπτωση είναι $σ(x_1)<σ(x_2)$.

3.5. Θεωρούμε τις πραγματικές και πραγματικής μεταβλητής συναρτήσεις f, g με $f(x)=\frac{x}{x-1}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$. Να ευρεθεί η σύνθεση αυτών $\sigma = g\circ f$. Ποιό το πεδίο ορισμού αυτής. Ομοίως των συναρτήσεων $f_1(x)=x^3$ και $g_1(x)=\text{συν}\, x$ να ευρεθούν οι συναρτήσεις $g_1\circ f_1$ και $f_1\circ g_1$. Ποιά τα σύνολα ορισμού των.

Λύση. Είναι $g(x)=x-\frac{1}{x}$. Άρα $g(f(x)) = g\circ f = f(x)-\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x} = \frac{x^2-(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$. Δηλαδή η σύνθεση αυτών σ είναι $\sigma(x)=\frac{2x-1}{x(x-1)}$. Το σύνολο ορισμού της είναι προφανώς ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών R εκτός τών τιμών για τις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής δηλ. των $x=0$ και $x=1$ Δηλ. $X=R-\{0,1\}$. Των $f_1(x)=x^3$ και $g_1(x)=\text{συν}\, x$ είναι $g_1\circ f_1 = g_1(f_1(x)) = \text{συν}\, f_1(x) = \text{συν}(x^3)$ και $f_1\circ g_1 = f_1(g_1(x)) = (\text{συν}\, x)^3 = \text{συν}^3 x$ Και των δύο συναρτήσεων το πεδίο ορισμού των συμπίπτει με το R.

3.6. Να προσδιοριστεί αν οι συναρτήσεις $f_1(x)=5x^8+1$, $f_2(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$ και $f_3(x)=5x^3-7x$ είναι άρτιες ή περιττές.

Λύση. Ως γνωστόν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια αν $f(-x)=f(x)$ και περιττή αν $f(-x)=-f(x)$. Είναι $f_1(-x)=5(-x)^8+1 = 5x^8+1 = f_1(x)$ άρα $f_1(-x)=f_1(x)$ δηλ. η $f_1(x)$ άρτια. Ομοίως είναι $f_2(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3+x}{x^2+1} = -\frac{x^3-x}{x^2+1} = -f_2(x)$ Άρα $f_2(-x)=-f_2(x)$ δηλ. η $f_2(x)$ περιττή. Επίσης είναι: $f_3(-x)=5(-x)^3-7(-x) = -5x^3+7x = -(5x^3-7x) = -f_3(x)$ δηλ. $f_3(x)$ περιττή.

3.7. Να δειχθεί ότι, αν f είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο p, τότε η συνάρτηση g όπου $g(x)=f(\beta x)$ με $\beta>0$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο $\frac{p}{\beta}$ δηλ. $g(x)=g(x+\frac{p}{\beta})$.

Λύση. Είναι $g(x)=f(\beta x)=f(\beta x+p)$ (διότι f περιοδική με περίοδο p) $=f\left(\beta\left(x+\frac{p}{\beta}\right)\right)=g\left(x+\frac{p}{\beta}\right)$ (διότι $g(x)=f(\beta x)$) Άρα $g(x)=g\left(x+\frac{p}{\beta}\right)$

3.8. Δίδεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha\cdot\beta^{\gamma x}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g όπου $g(x) = \log_\beta f(x)$, είναι γραμμική συνάρτηση.

Λύση. Αν στη $g(x) = \log_\beta f(x)$ αντικαταστήσουμε την $f(x)$ θα έχουμε:
$g(x) = \log_\beta\left(\alpha\cdot\beta^{\gamma x}\right)$. Και αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα των λογαρίθμων $\log_\alpha(x\cdot y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$ θα έχουμε: $g(x) = \log_\beta \alpha + \log_\beta \beta^{\gamma x}$. Αν τώρα εφαρμόσουμε την ιδιότητα $\log_\alpha x^\nu = \nu \log_\alpha x$ θα έχουμε ακόμη:
$g(x) = \log_\beta \alpha + \gamma x\cdot\log_\beta \beta$. Αλλά $\log_\beta \beta = 1$ Άρα
$g(x) = \log_\beta \alpha + \gamma x = \gamma x + \delta$ (όπου $\delta = \log_\beta \alpha$), δηλ. γραμμική.

3.9. Να δειχθούν στις υπερβολικές συναρτήσεις οι κάτωθι ταυτότητες:
1). $sh\,2x = 2\,sh\,x\cdot ch\,x$, 2) $sh\,A + sh\,B = 2\,sh\dfrac{A+B}{2}\,ch\dfrac{A-B}{2}$.

Λύση. 1). Αν αναπτύξουμε το δεύτερο μέλος της (1) έχομε:

$$2\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = sh\,2x.$$

2). Ομοίως αν αναπτύξουμε το 2ο μέλος της (2) έχουμε:

$$2\cdot\frac{e^{\frac{A+B}{2}}-e^{-\frac{A+B}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{A-B}{2}}+e^{-\frac{A-B}{2}}}{2} =$$

$$\frac{e^{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}-e^{-\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}+e^{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}-e^{-\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}}{2} =$$

$$\frac{e^{A}-e^{-B}+e^{B}-e^{-A}}{2} = \frac{e^{A}-e^{-A}}{2}+\frac{e^{B}-e^{-B}}{2} = sh\,A + sh\,B.$$

3.10. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2-2x}{x-1}$ ωρισμένη στο σύνολο $A = R-\{1\}$. Να ευρεθεί το $\underset{x\to 1}{\text{ορ}} f(x)$.

Λύση.

Η τιμή της συναρτήσεως $f(x)$ για $x=1$ δεν υπάρχει γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=1$. Εφ' όσον $x\neq 1$ η συνάρτηση $f(x)$ παίρνει την μορφή: $f(x) = \dfrac{2x(x-1)}{x-1} = 2x$ διότι $x-1\neq 0$. Θα δείξουμε ότι $\underset{x\to 1}{\text{ορ}} f(x) = 2$. Πράγματι θα πρέπει να δείξουμε ότι δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει αριθμός n εξαρτώμενος εκ του ε δηλ. $n = n(\varepsilon)$ έτσι ώστε αν $|x-1| < n$ να είναι $|f(x)-2| < \varepsilon$. (1) Η (1) γίνεται:

$|2x-2| = 2|x-1|$ Επομένως θα πρέπει $2\cdot\eta = \varepsilon$ και $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$. Πράγματι αν πάρωμε $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, τότε για $|x-1| < \eta = \frac{\varepsilon}{2}$ έχομε $2|x-1| = |2x-2| = |f(x)-2| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Άρα $\underset{x\to 1}{\text{όρ}}\, f(x) = 2$.

Παρατήρηση. Ο ορισμός που δώσαμε για το όριο συναρτήσεως χρησιμοποιείται για να διαπιστώσουμε ότι δοθείς αριθμός A είναι το όριο συναρτήσεως $f(x)$ όταν το x τείνει στο α. Εδώ ο $A=2$ είναι προφανής.

3.11. Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας: $a_\nu = \dfrac{\nu^4+2}{\nu^2-4} - \dfrac{\nu^5-3\nu^2}{\nu^3+1}$ καθώς και της $u_\nu = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}$.

Λύση. Είναι μετά τις πράξεις $a_\nu = \dfrac{4\nu^5+4\nu^4-10\nu^3+2}{\nu^5-4\nu^3+\nu^2-4} =$

$$\frac{4+\frac{4}{\nu}-\frac{10}{\nu^2}+\frac{2}{\nu^5}}{1-\frac{4}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^3}-\frac{4}{\nu^5}}$$ οπότε $\underset{\nu\to\infty}{\text{όρ}}\, a_\nu = \frac{4}{1} = 4$.

Ομοίως θα έχω για την u_ν: $u_\nu = \dfrac{(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu})}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} = \dfrac{\nu+1-\nu}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}$

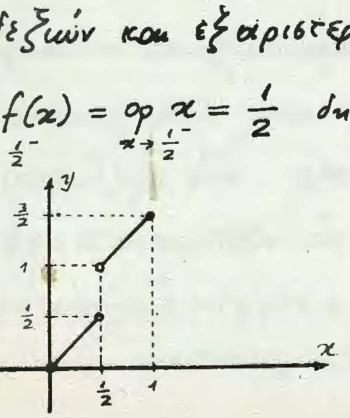
$= \dfrac{1}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}$ και $\underset{\nu\to\infty}{\text{όρ}}\, u_\nu = 0$.

3.12. Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}+x & \text{αν } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ και να παρασταθεί γραφικώς.

Λύση. Ως γνωστόν για να είναι μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής εις ένα σημείο αυτής x_0 θα πρέπει: 1) Να υπάρχει το $\underset{x\to x_0}{\text{όρ}}\, f(x)$, 2) Να υπάρχει το $f(x_0)$ και 3) Να είναι $\underset{x\to x_0}{\text{όρ}}\, f(x) = f(x_0)$.

Εδώ έχομε για $x_0 = \frac{1}{2}$: $f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (διότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται από τον τύπο $f(x) = x$. Επειδή όμως η συνάρτηση $f(x)$ στην περιοχή του σημείου $\frac{1}{2}$ ορίζεται διαφοροτρόπως, θα εξετάσωμε τα όρια εκ δεξιών και εξ αριστερών. Είναι $\underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\text{όρ}}\, f(x) = \underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\text{όρ}}\, (\frac{1}{2}+x) = 1$ και

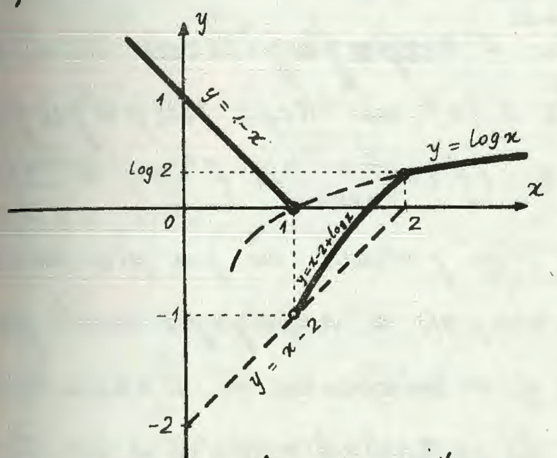
$\underset{x\to\frac{1}{2}^-}{\text{όρ}}\, f(x) = \underset{x\to\frac{1}{2}^-}{\text{όρ}}\, x = \frac{1}{2}$ αλλά $\underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\text{όρ}}\, f(x) \neq \underset{x\to\frac{1}{2}^-}{\text{όρ}}\, f(x)$ επομένως η $f(x)$ είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.



Η ασυνέχεια αυτή φαίνεται στη γραφική της παράσταση (Η καμπύλη δεν είναι συνεχής γραμμή στο διάστημα $[0, 1]$).

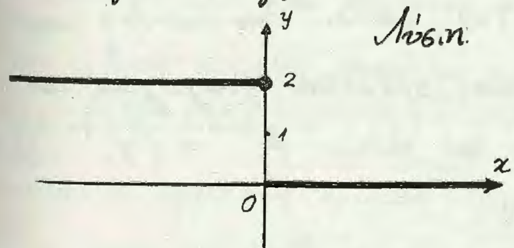
3.13. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \log x & \text{αν } x>2 \\ x-2+\log x & \text{"} \ 1<x\leq 2 \\ 1-x & \text{"} \ x\leq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$ και ακολούθως να γίνει γραφική της παράσταση.

Λύση. Εξέταση συνεχείας στο σημείο $x_1=1$: Είναι: $f(x_1)=f(1)=1-1=0$, $\text{όρ}_{x\to 1^-} f(x_1)=\text{όρ}_{x\to 1^-}(1-x)=1-1=0$ (διότι η $f(x)$ δίδεται από τον τύπο $f(x)=1-x$ για $x<1$). Επίσης $\text{όρ}_{x\to 1^+} f(x_1)=\text{όρ}_{x\to 1^+}(x-2+\log x)=$ $=1-2+\log 1=-1$ Επομένως είναι $\text{όρ}_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\neq \text{όρ}_{x\to 1^+} f(x)$. Δηλ. η συνάρτηση είναι ασυνεχής στο σημείο $x_1=1$. (Είναι όμως συνεχής εξ αριστερών στο $x_1=1$). Εξέταση συνεχείας στο σημείο $x_2=2$: Είναι:



$f(x_2)=f(2)=2-2+\log 2=\log 2$.
Επίσης $\text{όρ} f(x_2)=\text{όρ}(x-2+\log x)=$ $=2-2+\log 2=\log 2$ (διότι η $f(x)=$ $=x-2+\log x$ για $x\leq 2$). Επίσης $\text{όρ} f(x_2)=$ $=\text{όρ}(\log x)=\log 2$. (διότι $f(x)=\log x$ για $x>2$). Άρα $\text{όρ} f(x)=\text{όρ} f(x)=$ $=f(2)$. Δηλ. η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_2=2$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

3.14. Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x} & \text{για } x\neq 0 \\ 2 & \text{"} \ x=0. \end{cases}$ Να εξεταστεί αν είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.



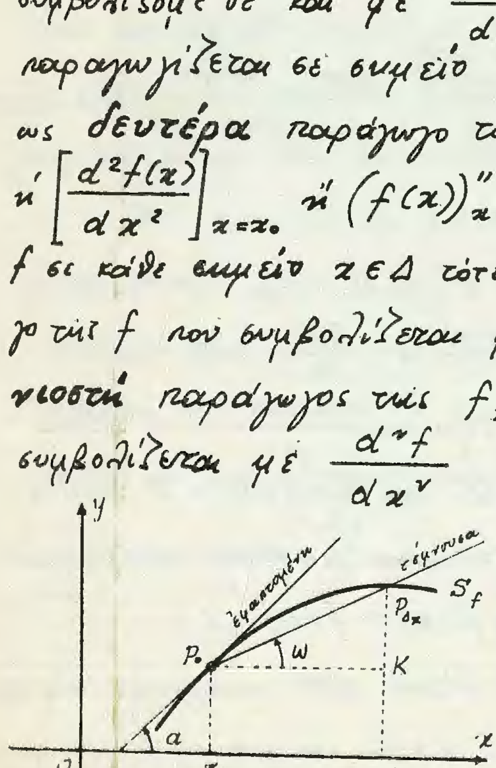
Λύση. Είναι $f(0)=2$. Επίσης, αν $x<0$ τότε $f(x)=\dfrac{x-(-x)}{x}=\dfrac{2x}{x}=2$ αν δε $x>0$ τότε $f(x)=\dfrac{x-x}{x}=0$ Άρα $\text{όρ}_{x\to 0^-} f(x)=2$ και $\text{όρ}_{x\to 0^+} f(x)=0$ δηλ. η συνάρτηση $f(x)$ είναι ασυνεχής στο σημείο $x=0$. (Είναι όμως συνεχής εξ αριστερών διότι $\text{όρ} f(x)=f(0)=2$.)

Παρατήρηση: Αν $\text{όρ}_{x\to x_0^-} f(x)=\text{όρ}_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$ τότε μπορούμε να άρουμε την ασυνέχεια, ορίζοντας τη συνάρτηση για $x=x_0$ ίση με $\text{όρ}_{x\to x_0^-} f(x_0)=\text{όρ}_{x\to x_0^+} f(x_0)$.

4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ.

Ορισμοί

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και έσ[τω] $x_0 \in \Delta$. Τότε διά του τύπου: $g_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ x \in \Delta - \{x_0\}$ ορ[ί]ζεται μία συνάρτηση g_{x_0} η οποία λέγεται **πηλίκο διαφορών της f εις το x_0**. Αν τώρα υπάρχει το $\underset{x\to x_0}{\text{ορ}}\, g_{x_0}(x)$ και είναι τούτο πραγ[ματ]ικός αριθμός, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f **παραγωγίζεται** εις το ση[μ]είο $x=x_0$ και την οριακή αυτή τιμή της $g_{x_0}(x)$ την λέμε **παράγωγο της f εις το x_0** και τη συμβολίζομε με $(f(x))'_{x=x_0}$ ή $f'(x_0)$ ή $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]$ ώστε είναι $f'(x_0) = \underset{x\to x_0}{\text{ορ}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Και γενικώς αν για μία συνάρ[τη]ση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ υπάρχει η παράγωγος αυτής για κάθε $x\in\Delta$ τότε ο τύπος $y=f'(x)$ ορίζει μία συνάρτηση f', η οποία έχει πεδίο ορισμού επίσης το Δ και την οποία λέμε **πρώτη** παράγωγο της f, η[ν] συμβολίζομε δε και με $\frac{df}{dx}$. Αν είναι δυνατόν και η συνάρτηση f' να παραγωγίζεται σε σημείο $x_0 \in \Delta$ τότε ορίζομε την παράγωγο $(f'(x))'_{x=x_0}$ ως **δευτέρα** παράγωγο της f εις το $x=x_0$ και τη συμβολίζομε με $f''(x_0)$ ή $\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}$ ή $(f(x))''_{x=x_0}$. Και αν υπάρχει η δευτέρα παράγωγος της f σε κάθε σημείο $x\in\Delta$ τότε ο τύπος $y=f''(x)$ ορίζει την δευτέρα παράγωγο της f που συμβολίζεται με $\frac{d^2f}{dx^2}$. Ομοίως ορίζεται επαγωγικά και η **νιοστή** παράγωγος της f, η $f^{(\nu)}$ διά του τύπου $f^{(\nu)} = \left(f^{(\nu-1)}\right)'$ και συμβολίζεται με $\frac{d^\nu f}{dx^\nu}$ όπου $\nu = 2, 3, \dots$.



Γεωμετρικά η παράγωγος της f στο σημεί[ο] αυτής x_0, είναι ο συντελεστής κατευθύνσεως λ της εφαπτομένης ευθείας του γραφήματος S_f [της] f στο σημείο x_0, διότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{KP_{\Delta x}}{P_0K} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ και $\lambda = \varepsilon\varphi a = \underset{\Delta x\to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

δηλ. η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $P_0(x_0,y_0)$ θα είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ όπου $\lambda=f'(x_0)$ η τελικά προκύπτει: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. που είναι η εξίσωση ευθείας διερχομένης από σημείο $P_0(x_0,y_0)$ και της οποίας ο συντελεστής κατευθύνσεως είναι $\lambda=f'(x_0)$.

Π.χ. Να ευρεθή η εφαπτομένη περιφερείας κύκλου στο $P_1(x_1,y_1)$ με εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Όπως αναπτύσσωμε στη συνέχεια, την εξίσωση της περιφερείας είναι δυνατόν είτε να τη λύσωμε ως προς y και να βρούμε την παράγωγό της, είτε να τη θεωρήσωμε σαν πεπλεγμένη συνάρτηση της μορφής $f(x,y)=0$ και να υπολογίσωμε την παράγωγό της, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το y είναι συνάρτηση του x. Τότε θα έχωμε: $(x^2+y^2)'=(\rho^2)'$ ή $2x(x)'+2y(y)'=0$ ή $2x\cdot 1+2yy'=0$ οπότε $y'=-\frac{x}{y}$ (1). Αν λύσωμε την $x^2+y^2=\rho^2$ ως προς y θα έχωμε: $y=\pm\sqrt{\rho^2-x^2}$ οπότε $y'=\left[(\rho^2-x^2)^{1/2}\right]'$ ή $y'=\frac{1}{2}(\rho^2-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x)$ ή $y'=(\rho^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-x)$ ή $y'=-\frac{x}{\sqrt{\rho^2-x^2}}$ ή τελικά $y'=-\frac{x}{y}$ δηλ. η ίδια με την (1). και άρα $\lambda=-\frac{x_1}{y_1}$ δηλ. η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ ή $x\cdot x_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$. Αλλά $x_1^2+y_1^2=\rho^2$ διότι το $P_1(x_1,y_1)$ είναι σημείο του κύκλου. άρα η εφαπτομένη του κύκλου θα έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

Μία άλλη ερμηνεία της παραγώγου είναι η κινηματική. Έστω ότι η θέση x υλικού σημείου που κινείται επ' ευθείας εκφράζεται συναρτήσει του χρόνου t ήτοι $x=f(t)$, $t\in\Delta=[t_0,t_1]$ (ένα χρονικό διάστημα). Το πηλίκο διαφορών $\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}$ στη χρονική στιγμή $\tau\in[t_0,t_1]$ εκφράζει τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ των στιγμών τ και t. Το $\mathop{\text{ορ}}\limits_{t\to\tau}\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}=v(\tau)=f'(\tau)$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα $v(\tau)$ του υλικού σημείου κατά την χρονική στιγμή τ. Αν τώρα η στιγμιαία ταχύτητα $v(t)$ ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή $t\in[t_0,t_1]$, τότε το πηλίκο διαφορών $\frac{v(t)-v(\tau)}{t-\tau}$ εκφράζει την μέση επιτάχυνση του υλικού σημείου κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ των στιγμών τ και t. Το $\mathop{\text{ορ}}\limits_{t\to\tau}\frac{v(t)-v(\tau)}{t-\tau}=\gamma(\tau)=v'(\tau)=f''(\tau)$ είναι η στιγμιαία επιτάχυνση του υλικού σημείου $\gamma(\tau)$ κατά την χρονική στιγμή τ.

Μερικά παραδείγματα παραγώγων απλών συναρτήσεων:

Αν $f(x)=c$. τότε $(c)'_{x=x_0} = \underset{x\to x_0}{\text{όρ}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underset{x\to x_0}{\text{όρ}} \dfrac{c-c}{x-x_0} = 0$. ή $(c)'=0$

Αν $f(x)=x$ τότε $(x)'_{x=x_0} = \underset{x\to x_0}{\text{όρ}} \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$ και γενικά $(x)'=1 \ \forall x_0\in R$.

Αν $f(x)=x^2$ τότε $(x^2)'_{x=x_0} = \underset{x\to x_0}{\text{όρ}} \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \underset{x\to x_0}{\text{όρ}} (x+x_0) = 2x_0$ ή $(x^2)'=2x \ \forall x_0\in R$

Καλούμε **διαφορικό** της συναρτήσεως $y=f(x)$ και το σημειώνομε με το σύμβολο dy ή $df(x)$, το γινόμενο της παραγώγου $f'(x)$ της συναρτήσεως επί την αύξηση Δx της ανεξαρτήτου μεταβλητής. Δηλ. $dy = y'\Delta x$. Αν θελήσωμε τώρα να βρούμε το διαφορικό της ανεξαρτήτου μεταβλητής δηλ το dx, θεωρούμε τη συνάρτηση $y=x$, οπότε επειδή $y'=1$ θα έχωμε $dy=1\cdot\Delta x$ ή επειδή η συνάρτηση είναι $y=f(x)=x$ είναι $df(x)=1\cdot\Delta x$ ή $dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$. Επομένως το διαφορικό dy μιας συναρτήσεως $y=f(x)$ ισούται με το γινόμενο της παραγώγου αυτής $f'(x)$ επί το διαφορικό dx της ανεξαρτήτου μεταβλητής. δηλ. $dy=y'\cdot dx$. Άρα $y'=\dfrac{dy}{dx}$. Έτσι δικαιολογείται και ο συμβολισμός που θέσαμε για την παράγωγο σαν λόγος του διαφορικού της συναρτήσεως προς το διαφορικό της ανεξαρτήτου μεταβλητής. Ομοίως ορίζομε ως **δεύτερο** διαφορικό της συναρτήσεως $y=f(x)$ και το συμβολίζομε με d^2y ή $d^2f(x)$ το διαφορικό του πρώτου διαφορικού αυτής δηλ. $d^2y=d(dy)$ Προφανώς είναι $d^2f(x)=d[df(x)] = d[f'(x)dx] = f''(x)dx\cdot dx = f''(x)(dx)^2$. Αντί $(dx)^2$ γράφομε dx^2 (όπου όμως ο συμβολισμός dx^2 δεν σημαίνει "διαφορικό της συναρτήσεως $y=x^2$") δηλ $d^2f(x)=f''(x)dx^2$. Και επαγωγικά ορίζεται το διαφορικό **n-τάξεως** $d^n f(x) = d[d^{n-1}f(x)] = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$ δηλ. $d^n f(x)=f^{(n)}(x)dx^n$.

Αναφέρομε μερικές ιδιότητες των παραγώγων χωρίς απόδειξη. Η απόδειξή τους στηρίζεται προφανώς στον ορισμό των παραγώγων.

1. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο διάστημα Δ, τότε είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ.

2. Αν οι συναρτήσεις f και g παραγωγίζονται στο διάστημα Δ, τότε παραγωγίζονται και οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ και μάλιστα ισχύουν

$(f+g)' = f'+g'$, $(f-g)' = f'-g'$, $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ και $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (όπου $g \neq 0$ $\forall x \in \Delta$). Επαγωγικά αποδεικνύεται για ν συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$: $(f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_\nu)' = f_1' \pm f_2' \pm \cdots \pm f_\nu'$, $(f_1 \cdot f_2 \cdots f_\nu)' = f_1' \cdot f_2 \cdots f_\nu + f_2' \cdot f_1 \cdot f_3 \cdots f_\nu + f_3' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_4 \cdots f_\nu + \cdots + f_\nu' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_{\nu-1}$.

3. Αν οι συναρτήσεις f και g παραγωγίζονται στα διαστήματα A και Δ αντιστοίχως τότε και η σύνθεση αυτών $h = f\circ g$ δηλ. $h(x) = f(g(x))$ $\forall x \in \Delta$ παραγωγίζεται επίσης, και μάλιστα $h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Μερικά παραδείγματα παραγώγων στοιχειωδών συναρτήσεων.

α') $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ $(\nu = 2, 3, \cdots)$. Προφανώς για $\nu = 2$ είναι $(x^2)' = 2\cdot x^{2-1} = 2x$ δηλ. ισχύει. Κάνομε την απόδειξη επαγωγικά. Έστω ότι ισχύει: $(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}$. Θα δείξωμε ότι $(x^{\kappa+1})' = (\kappa+1)x^\kappa$. Έχωμε: $x^{\kappa+1} = x\cdot x^\kappa$ οπότε $(x^{\kappa+1})' = (x\cdot x^\kappa)' = (x)'\cdot x^\kappa + x\cdot(x^\kappa)'$ Αλλά $(x)' = 1$ και $(x^\kappa)' =$ (όπως έχομε δεχθεί) $\kappa x^{\kappa-1}$ Άρα $(x^{\kappa+1})' = 1\cdot x^\kappa + x\cdot\kappa\cdot x^{\kappa-1} = x^\kappa + \kappa x^\kappa = (\kappa+1)x^\kappa$. δηλ. $(x^{\kappa+1})' = (\kappa+1)x^\kappa$ Άρα θα ισχύει για $\forall \nu \in N$.

Παρατήρηση: Η ανωτέρω περίπτωση παραγωγίσεως συναρτήσεως ισχύει και όταν ο ν είναι **αρνητικός**, καθώς και όταν ο ν είναι **κλασματικός**.

β') $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. Πράγματι είναι $(\eta\mu x)'_{x=x_0} = \displaystyle\mathop{o\rho}_{x\to x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \mathop{o\rho}_{x\to x_0} \frac{2\eta\mu\frac{x-x_0}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \mathop{o\rho}_{x\to x_0}\frac{\eta\mu\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_0}{2}$ και επειδή όπως αναφέραμε στα όρια συναρτήσεως $\displaystyle\mathop{o\rho}_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ θα είναι $\displaystyle\mathop{o\rho}_{x\to x_0}\frac{\eta\mu\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$ άρα $(\eta\mu x)'_{x=x_0} = 1\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2x_0}{2} = \sigma\upsilon\nu x_0$. και τούτο για κάθε πραγματικό x_0 άρα $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

Η $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$. Πράγματι είναι $(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' =$ (ιδ. 2)

$$= \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} = -(1+\sigma\varphi^2 x)$. $(x \neq \kappa\pi)$

Όλοι οι ανωτέρω τύποι όταν ο x δεν είναι απλώς μεταβλητή, αλλά συνάρτηση του x έστω $u = u(x)$, γίνονται (ιδιότ. 3): α') $(u^\nu)' = \nu u^{\nu-1}\cdot u'$, β') $(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u\cdot u'$, $(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u\cdot u'$, $(\varepsilon\varphi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}\cdot u'$, $(\sigma\varphi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u}\cdot u'$.

γ') Για να βρούμε την παράγωγο των αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δηλ. των $y = τοξημx$, $y = τοξσυνx$, $y = τοξεφx$, $y = τοξσφx$, μεταχειριζόμαστε το επόμενο θεώρημα:

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x, τότε η αντίστροφη συνάρτηση αυτής $x = f^{-1}(y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο y και, αν θέσωμε $x = \varphi(y)$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$ (Η παράγωγος της ... είναι ως πρός y)

Κατόπιν τούτου θα έχωμε:

Αν $y = τοξημx \Rightarrow x = ημy$ οπότε $y' = (τοξημx)' = \dfrac{1}{(ημy)'} = \dfrac{1}{συνy} = \dfrac{1}{\sqrt{1-ημ^2y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ομοίως $(τοξσυνx)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(τοξεφx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ και $(τοξσφx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ και γενικότερα αν $u = u(x)$ τότε (σελ. 3):

$$(τοξημu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (τοξσυνu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (τοξεφu)' = \frac{u'}{1+u^2}, \quad (τοξσφu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

δ') Θα υπολογίσωμε τώρα την παράγωγο της συναρτήσεως $y = \log x$

Έχομε $(\log x)' = \underset{\Delta x \to 0}{ορ} \dfrac{\log(x+\Delta x) - \log(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{x} \underset{\Delta x \to 0}{ορ} \dfrac{x}{\Delta x} \log\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right) =$
$\dfrac{1}{x} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{ορ} \dfrac{x}{\Delta x} \log\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right) = \dfrac{1}{x} \underset{\Delta x \to 0}{ορ} \log\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ Αν θέσωμε $\dfrac{x}{\Delta x} = t$ τότε τον $\Delta x \to 0$, $t \to \infty$ και $\underset{t \to \infty}{ορ}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t = e$ άρα $\underset{t \to \infty}{ορ} \log\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t =$
$= \log\left[\underset{t \to \infty}{ορ}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t\right] = \log e = 1$. Ώστε $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ και γενικότερα, αν το x δεν είναι μεταβλητή αλλά συνάρτηση του x: $(\log u)' = \dfrac{u'}{u}$.

ε') Ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παράγωγοι των εκθετικών συναρτήσεων δηλ. συναρτήσεων της μορφής $y = u_1^{u_2}$ (όπου u_1, u_2 συναρτήσεις του x). Σε μια τέτοια συνάρτηση πρώτα λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της $y = u_1^{u_2}$ και κατόπιν παραγωγίζουμε. Τότε θα έχωμε

$y = u_1^{u_2}$ ή $\log y = \operatorname{Log}(u_1^{u_2})$ ή $\log y = u_2 \cdot \log u_1$ ή $(\log y)' = (u_2 \cdot \log u_1)'$
οπότε θα είναι $\dfrac{y'}{y} = (u_2)' \cdot \log u_1 + u_2 \cdot (\log u_1)' = (u_2)' \log u_1 + u_2 \cdot \dfrac{u_1'}{u_1}$ η τελικά $y' = y\left[(u_2)' \log u_1 + u_2 \dfrac{u_1'}{u_1}\right] = u_1^{u_2}\left[(u_2)' \log u_1 + u_2 \cdot \dfrac{u_1'}{u_1}\right]$

Κάνοντας εφαρμογή στις εκθετικές συναρτήσεις $y_1 = e^x$, $y_2 = a^x$ θα έχωμε
$\log y_1 = x \log e = x$ ή $(\log y_1)' = (x)'$ ή $\dfrac{y_1'}{y_1} = 1 \Rightarrow y_1' = y_1 = e^x$. Ομοίως έχ

$\log y_2 = x\log a$ ή $(\log y_2)' = (x\log a)'$ ή $\frac{y_2'}{y_2} = (x)'\log a + x(\log a)'$ ή $\frac{y_2'}{y_2} = \log a \Rightarrow y_2' = y_2\cdot\log a$ ή τελικά $y_2' = a^x\log a$. Γενικώς αν $y_1 = e^u$, $y_2 = a^u \Rightarrow y_1' = e^u\cdot u'$, $y_2' = a^u\cdot\log a\cdot u'$.

ζ') Στις υπερβολικές συναρτήσεις shx, chx, thx, $cothx$, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι: $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}$ θα έχωμε:

$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$. Ομοίως ευρίσκομε:

$(chx)' = shx$, $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$, $(cothx)' = -\frac{1}{sh^2x}$ Η γενικώτερα:

$(shu)' = chu\cdot u'$, $(chu)' = shu\cdot u'$, $(thu)' = \frac{u'}{ch^2u}$, $(cothu)' = -\frac{u'}{sh^2u}$.

Για τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις, αν εργασθούμε όπως και με τις αντίστροφες τριγωνομετρικές θα έχωμε:

$y = \text{τοξ}\, shx \Rightarrow x = shy$ Άρα $y' = (\text{τοξ}\, shx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}}$

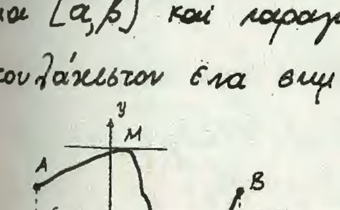
(διότι $ch^2y - sh^2y = 1$) $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Άρα έχομε

$(\text{τοξ}\, shx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ομοίως $(\text{τοξ}\, chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\text{τοξ}\, thx)' = (\text{τοξ}\, cothx)' = \frac{1}{1-x^2}$.

Εφαρμογές των παραγώγων συναρτήσεων.

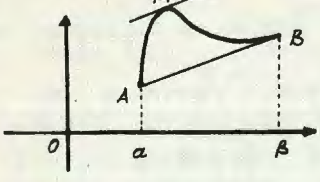
Στη συνέχεια αναφέρομε μερικές προτάσεις που έχουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές:

1. Θεώρημα του Rolle: Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), είναι δε $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο γ του διαστήματος (α,β) για το οποίο είναι $f'(\gamma) = 0$.



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι, αν τα άκρα Α,Β μιας συνεχούς γραμμής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, που έχει εφαπτομένη σ' όλα της τα σημεία που αντιστοιχούν στο (α,β), έχουν ίσες τεταγμένες τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραμμής διάφορο των Α,Β στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα ox.

2. Θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, ή θεώρημα των πεπερασμένων αυξήσεων: Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο γ του διαστήματος (α,β) για το οποίο είναι: $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)\cdot f'(\gamma)$. (γενίκευση του θεωρήματος του Rolle).



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι, αν η συνεχής γραμμή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ έχει εφαπτομένη σ' όλα της τα σημεία μεταξύ των A,B, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο γραμμής διάφορο των A,B εις το οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την

Συνέπειες του θεωρήματος της μέσης τιμής είναι οι επόμενες προτάσεις:

3. Αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ της συναρτήσεως $f(x)$ για $\forall x\in(\alpha,\beta)$ και είναι $f'(x)>0$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), αν δε $f'(x)<0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

4. Αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ της $f(x)$ εις το (α,β) και είναι $f'(x)$ για $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι σταθερά στο (α,β).

5. Αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ της συναρτήσεως $f(x)$ εις το (α,β) και η $f'(x)$ είναι περατωμένη για $\forall x\in(\alpha,\beta)$, δηλ. $|f'(x)|\le M$, τότε και η συνάρτηση $f(x)$ είναι περατωμένη στο (α,β).

6. Επέκταση του θεωρήματος της μέσης τιμής, ο τύπος του **Taylor**: Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, έχει εις το $[\alpha,\beta]$ παραγώγους μέχρι ν τάξεως που είναι συνεχείς εις το $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει η $\nu+1$ τάξεως παράγωγος αυτής στο διάστημα (α,β) τότε $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+\frac{(\beta-\alpha)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\alpha)+R_\nu$$ όπου

$$R_\nu=\frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\xi)$$ και λέγεται υπόλοιπο κατά Lagrange.

Ο τύπος του Taylor έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές. Αν θέσωμε $\alpha=0$, $\beta=x$ προκύπτει: $$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(0)+R_\nu$$

όπου $R_\nu=\dfrac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f^{(\nu+1)}(\vartheta x)$ με $0<\vartheta<1$ και λέγεται τύπος του Mac-Laurin

Με τον τύπο του Mac-Laurin μπορούμε να προσεγγίσωμε την τιμή μιας συναρτήσεως σε ένα σημείο δι' ενός πολυωνύμου. Π.χ. για την συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ η οποία έχει παραγώγους οιασδήποτε τάξεως μπορούμε να προσεγγίσωμε την τιμή αυτής με ένα πολυώνυμο π.χ. $7^{ου}$ βαθμού.

Έχομε $f(x)=\eta\mu x$, $f(0)=0$, $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'(0)=1$, $f''(x)=-\eta\mu x$, $f''(0)=0$, $f'''(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(x)=\eta\mu x$, $f^{(4)}(0)=0$, $f^{(5)}(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f^{(5)}(0)=1$, $f^{(6)}(x)=-\eta\mu x$, $f^{(6)}(0)=0$, $f^{(7)}(x)=-\sigma\upsilon\nu x$,

$f^{(7)}(0)=-1$, $f^{(8)}(x)=\eta\mu x$, $f^{(8)}(\xi)=\eta\mu\xi$. Άρα:

$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\eta\mu\xi$. Ο όρος $\frac{x^8}{8!}\eta\mu\xi$ είναι η προσέγγιση πού θά έχωμε.

Επίσης αν $f(x)=e^x$ θά έχωμε: $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x, \dots, f^{(\nu)}(x)=e^x$ και επομένως $f^{(\nu)}(0)=1$ για κάθε $\nu\in N$. Εξ άλλου θα είναι:

$R_\nu = \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{\vartheta x}$, $0<\vartheta<1$ και επειδή ο παράγων $e^{\vartheta x}$ είναι πεπερασμένος έπεται ότι $\mathop{\text{όρ}}_{\nu\to\infty} R_\nu = 0$. Άρα $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\dots$

και για $x=1$ έχομε τον αριθμό $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{\nu!}+\dots$.

7. Γενίκευση του θεωρήματος της μέσης τιμής. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(x)$ είναι συνεχείς εις το διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες εις το (α,β) η δε $\varphi'(x)$ είναι πεπερασμένη και $\neq 0$ δια $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε υπάρχει σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$.

Αποτέλεσμα της γενικεύσεως του θεωρήματος της μέσης τιμής είναι ο κανόνας του L' Hospital που ισχύει για απροσδιόριστες μορφές συναρτήσεων:

8. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\varphi(x)$ είναι ωρισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=0$, $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi'(\alpha)\neq 0$ τότε, αν υπάρχει το $\mathop{\text{όρ}}_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ υπάρχει και το $\mathop{\text{όρ}}_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ και είναι: $\mathop{\text{όρ}}_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathop{\text{όρ}}_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

Και γενικότερα: Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(x)$ καθώς και οι παράγωγοι αυτών μέχρι τάξεως n μηδενίζονται για $x=\alpha$ δηλ. αν $f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(n)}(\alpha)=0$, $\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\dots=\varphi^{(n)}(\alpha)=0$ και υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{(n+1)}(x)$, $\varphi^{(n+1)}(x)$ οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις και $\varphi^{(n+1)}(\alpha)\neq 0$ τότε $\mathop{\text{όρ}}_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathop{\text{όρ}}_{x\to\alpha}\frac{f^{(n+1)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{\varphi^{(n+1)}(\alpha)}$

Μια άλλη μορφή απροσδιοριστίας εκτός της μορφής $\frac{0}{0}$ είναι η $\frac{\infty}{\infty}$ για την οποία ισχύει επίσης ο κανών του L' Hospital.

Τέλος υπάρχουν ακόμη οι απροσδιόριστες μορφές συναρτήσεων:

1). $\infty\cdot 0$, 2) $\infty-\infty$, 3) 0^0, 1^∞, ∞^0. Οι μορφές αυτές δια καταλλήλων μετασχηματισμών φέρονται στην μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ οπότε στη συνέχεια μπορεί να εφαρμοσθεί ο κανόνας του L' Hospital.

Ειδικώτερα εκτελούμε τους εξής μετασχηματισμούς:

1). Έστω $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ και $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$. Γράφομε τότε: $y=\dfrac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ οπότε $\lim_{x\to a} y=\frac{0}{0}$ δηλ. μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L' Hospital ήτοι $\lim_{x\to a} y=\dfrac{\varphi'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$.

2) Έστω $y=f(x)-\varphi(x)$ και $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ οπότε $\lim_{x\to a} y=\infty-\infty$. Γράφομε τότε $y=\varphi(x)\left[\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}-1\right]$. Αν το $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ είναι πεπερασμένο $\neq 1$ τότε $\lim_{x\to a} y=\infty$. Ενώ αν $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$ τότε $\lim_{x\to a} y=\infty\cdot 0$ δηλ. η προηγουμένη μορφή.

3. Έστω $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$. Τότε πρώτα λογαριθμίζουμε και μετά παίρνομε τα όρια των συναρτήσεων, οπότε καταλήγομε σε μια απ' τις προηγούμενες μορφές και στη συνέχεια εφαρμόζομε τον κανόνα του L' Hospital.

Μια ακόμη σπουδαία εφαρμογή των παραγώγων είναι στον υπολογισμό των άκρων τιμών μιας συναρτήσεως $f(x)$. Δίδομε κατ' αρχάς τους εξής ορισμούς: **i).** Η συνάρτηση $f(x)$ λέγομε ότι έχει **σχετικό ελάχιστο** στο σημείο $x=\xi\in[\alpha,\beta]$, όταν για $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$, όπου ε οσονδήποτε μικρός και $x\neq\xi$, είναι $f(x)>f(\xi)$. **ii).** Η συνάρτηση $f(x)$ λέγομε ότι έχει **σχετικό μέγιστο** στο σημείο $\xi\in[\alpha,\beta]$, όταν για $\forall x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ και $x\neq\xi$ είναι $f(x)<f(\xi)$. Το σχετικό μέγιστο και σχετικό ελάχιστο μιας συναρτήσεως λέγονται **τοπικά ακρότατα**. Κατόπιν αυτών αναφέρομε 2 προτάσεις, που μας βοηθούν στη διαπίστωση υπάρξεως άκρων τιμών και τη μέθοδο υπολογισμού αυτών.

9. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο ξ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, υπάρχουν οι $f'(x)$, $f''(x)$ οι οποίες είναι συνεχείς εις το ξ και για $x=\xi$ έχομε $f'(\xi)=0$, $f''(\xi)\neq 0$ τότε α') αν $f''(\xi)>0$ η συνάρτηση f για $x=\xi$ παρουσιάζει ελάχιστο ενώ β') αν $f''(\xi)<0$ η συνάρτηση για $x=\xi$ παρουσιάζει μέγιστο.

10. Γενικευμένη περίπτωση: Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής εις το σημείο ξ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, υπάρχει η παράγωγος ν τάξεως $f^{(\nu)}(x)$, είναι δε $f'(\xi)=f''(\xi)=\dots=f^{(\nu-1)}(\xi)=0$ και $f^{(\nu)}(\xi)\neq$

και n = άρτιος, τότε για $x=\xi$ η συνάρτηση $f(x)$ λαμβάνει άκρα τιμή και μάλιστα σχετικό μέγιστο αν $f^{(n)}(\xi)<0$, σχετικό ελάχιστο αν $f^{(n)}(\xi)>0$.

Ώστε προκειμένου να βρούμε τις άκρες τιμές μιας συναρτήσεως εργαζόμαστε ως εξής: **1)**. Βρίσκουμε την $f'(x)$ και τις πραγματικές ρίζες της εξισώσεως $f'(x)=0$. Έστω δε ξ μια πραγματική ρίζα της εξισώσεως αυτής. **2)**. Βρίσκουμε την $f''(x)$. Εάν $f''(\xi)\neq 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει άκρα τιμή για $x=\xi$ και μέγιστο μεν εάν $f''(\xi)<0$, ελάχιστο δε αν $f''(\xi)>0$. Αν $f''(\xi)=0$ βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενιζομένη για $x=\xi$ παράγωγο ανωτέρας τάξεως της δευτέρας. Αν αυτή είναι περιττής τάξεως, τότε η συνάρτηση στερείται άκρων τιμών για $x=\xi$. Αν είναι αρτίας τάξεως έχει άκρες τιμές και μάλιστα μέγιστο όταν $f^{(n)}(\xi)<0$, ελάχιστο αν $f^{(n)}(\xi)>0$.

Τέλος οι παράγωγοι συναρτήσεων βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στη μελέτη και κατασκευή της γραφικής παραστάσεως των συναρτήσεων. Θα δώσουμε κατ' αρχάς τους εξής ορισμούς: Έστω συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ξ σημείο του $[\alpha,\beta]$, $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ περιοχή του ξ η οποία ανήκει στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και C η γραφική παράσταση της $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε:

i). Λέγομε ότι στη θέση $x=\xi$ η γραμμή C στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω (κάτω)** όταν για κάποια περιοχή $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ του ξ η γραμμή C κείται από πάνω (από κάτω) από την εφαπτομένη της στο σημείο αυτής $P(\xi, f(\xi))$. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ η γραμμή C κείται πάνω (κάτω) από την εφαπτομένη της για το σημείο αυτό x, τότε η C είναι κοίλη προς τα άνω (κάτω) σ' ολόκληρο το διάστημα $[\alpha,\beta]$.

ii). Το σημείο $P(\xi, f(\xi))$ της γραμμής C λέγεται **σημείο καμπής** όταν υπάρχη περιοχή του ξ η $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ τέτοια ώστε στο διάστημα $(\xi-\varepsilon, \xi)$ η γραμμή C να είναι κοίλη προς τα άνω ή κάτω, και στο διάστημα $(\xi, \xi+\varepsilon)$ να είναι κοίλη προς τα κάτω ή άνω. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραμμής C στο σημείο $P(\xi, f(\xi))$ διαπερά αυτή. Οι παρακάτω προτάσεις μας βοηθούν να διαπιστώνουμε αν η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή κάτω και να βρίσκουμε σημεία καμπής.

11. Άν υπάρχει η δευτέρα παράγωγος της $f(x)$ εις το σημείο $x=\xi$ και είναι $f''(\xi)>0$, τότε η γραμμή C στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, εάν δέ $f''(\xi)<0$ η C στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

12. Γενικευμένη περίπτωσις: Άν η συνάρτησις $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και η παράγωγος $f'(x)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο σημείο $\xi \in [\alpha,\beta]$, υπάρχει δέ η παράγωγος n τάξεως $f^{(n)}(x)$, είναι δέ $f''(\xi)=f'''(\xi)=\cdots=f^{(n-1)}(\xi)=0$ και $f^{(n)}(\xi)\neq 0$ και $n=$ άρτιος, τότε η συνάρτησις $f(x)$ στρέφει στη θέση ξ τα κοίλα προς τα άνω (κάτω), άν $f^{(n)}(\xi)>0$ $\left(f^{(n)}(\xi)<0\right)$.

13. Άν υπάρχει η $f'''(\xi)$ και είναι $f''(\xi)=0$ και $f'''(\xi)\neq 0$, τότε το σημείο $P(\xi, f(\xi))$ της C είναι σημείο καμπής αυτής.

14. Γενικευμένη περίπτωσις: Άν η συνάρτησις $f(x)$ έχει παραγώγους μέχρι n τάξεως είναι δέ $f''(\xi)=f'''(\xi)=\cdots=f^{(n-1)}(\xi)=0$ και $f^{(n)}(\xi)\neq 0$ και $n=$ περιττός, τότε το σημείο $P(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της γραμμής C.

Για την μελέτη μιας συναρτήσεως σπουδαίο ρόλο παίζουν οι ασύμπτωτοι αυτής. Έστω $f(x)$ συνάρτησις ωρισμένη εις το (α,β) και C η γραφική παράστασις αυτής. Τότε **i)** ευθεία ε λέγεται **ασύμπτωτος** της γραμμής C, εάν η απόστασις σημείου $P(x,y)$ της C από την ευθεία ε τείνει προς το μηδέν, όταν το σημείο $P(x,y)$ απομακρύνεται επί της γραμμής C εις το άπειρον. Ειδικώτερα **ii)** η ευθεία $y=k$ είναι **οριζοντία** ασύμπτωτος της C όταν $\underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{op}}\, y = k$, ενώ **iii)** η ευθεία $x=\lambda$ είναι **κατακόρυφος** ασύμπτωτος της C όταν $\underset{x\to\lambda}{\mathrm{op}}\, y=\pm\infty$. Από τον ορισμό i) της ασυμπτώτου προκύπτει ότι μια ευθεία ε με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ είναι ασύμπτωτος της γραμμής C όταν $\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\left(f(x)-\alpha x-\beta\right)=0$. (1). Εκ της (1) το μεν β προσδιορίζεται αμέσως διότι $\beta=\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\left(f(x)-\alpha x\right)$ το δε α υπολογίζεται ως εξής: Αν διαιρέσω την (1) με $x \Rightarrow \underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\left(\frac{f(x)}{x}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=0$ $\Rightarrow \mathrm{op}\left(\frac{f(x)}{x}-\alpha\right)=0$ ήτοι $\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\,\frac{f(x)}{x}=\alpha$. Και γενικώτερα: Αν $\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\, f(x)=\infty$ και $\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\, f'(x)=\alpha$, τότε η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ όπου $\alpha=\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\, f'(x)$ και $\beta=\underset{x\to\infty}{\mathrm{op}}\left(f(x)-\alpha x\right)$ είναι ασύμπτωτος της γραμμής C.

Στηριζόμενοι στις ιδιότητες που αναφέραμε παραπάνω, για να κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως $f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής:

1. Καθορίζομε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x)$
2. Βρίσκομε τα σημεία ασυνεχείας της $f(x)$ και χωρίζομε το πεδίο ορισμού σε μικρότερα διαστήματα, σε καθένα των οποίων η συνάρτηση είναι συνεχής.
3. Βρίσκουμε (εφ' όσον υπάρχουν) τας ασυμπτώτους της καμπύλης.
4. Βρίσκουμε τις πραγματικές ρίζες της $y=0$ - αν είναι δυνατόν - (σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα $x'x$), όπως και για $x=0$ την τιμή του y.
5. Βρίσκουμε τις πραγματικές ρίζες της $y'=0$ (πιθανά σημεία ακροτάτων τιμών).
6. Βρίσκουμε τις πραγματικές ρίζες της $y''=0$ (πιθανά σημεία καμπής).
7. Βρίσκουμε τα διαστήματα που είναι $y'>0$ (y αύξουσα), $y'<0$ (y φθίνουσα), $y''>0$ (y στρέφει κοίλα πρός τα άνω), $y''<0$ (y στρέφει κοίλα προς τα κάτω).
8. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα με μεταβλητές τα x, y, y', y'' στον οποίο καταγράφουμε: όλες τις χαρακτηριστικές τιμές του x απ' το $-\infty$ ως το $+\infty$, ήτοι το σημείο με $x=0$, τις ρίζες των $y=0$, $y'=0$, $y''=0$ καθώς και τις τιμές του x που έχουμε (ενδεχομένως) κατακορύφους ασυμπτώτους, όλες τις χαρακτηριστικές τιμές του y (τις αντίστοιχες του x), τις ρίζες της $y'=0$ ως και τα διαστήματα που είναι $y'>0$, $y'<0$, τις ρίζες της $y''=0$ καθώς και τα διαστήματα που είναι $y''>0$, $y''<0$.
9. Με βάση τον πίνακα που σχηματίσαμε σχεδιάζουμε την καμπύλη.

Ασκήσεις.

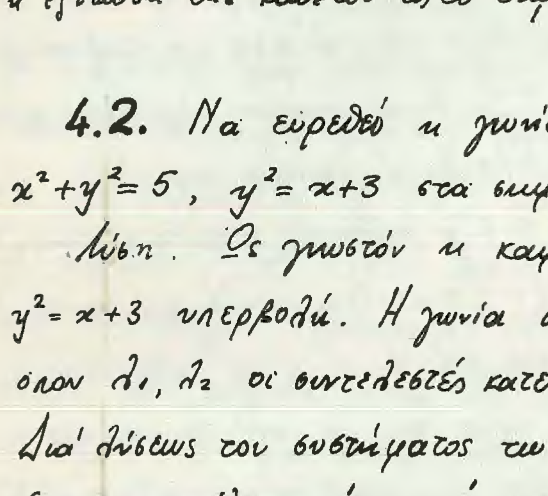
4.1. Να ευρεθή η εξίσωση της εφαπτομένης ως και της καθέτου των καμπυλών εις το έναντι αυτών σημείο: $y_1 = x^2-4x+5$ $(x=1)$, $y_2 = εφx+σφx$ $(x=\frac{\pi}{6})$.

Λύση. Η εφαπτομένη της $y_1 = x^2-4x+5$ εις το $x_0=1$ θα είναι της μορφής $y-y_0 = λ_{εφ}(x-x_0)$ όπου $y_0 = 1^2-4\cdot1+5 = 2$, $λ_{εφ} = y_1'(x_0)$. Είναι $y_1' = 2x-4$ και $y'_{1\,x_0=1} = 2\cdot1-4 = 2$ και $λ_{εφ} = -2$ δηλ. η εξίσωση γίνεται $y-2 = -2(x-1)$ ή $y+2x-4=0$ η δε εξίσωση της καθέτου θα είναι επίσης της μορφής $y-2 = λ_{καθ.}(x-1)$ όπου $λ_{καθ.}\cdot λ_{εφ} = -1$ δηλ. $λ_{καθ} = \frac{1}{2}$ δηλαδή η

$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$ ή $2y-x-3=0$. Ομοίως για την y_2 θα έχωμε στο $x_0=\frac{\pi}{6}$
Εξίσωση της εφαπτομένης της: $y-y_0=\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot(x-x_0)$ όπου $y_0=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}+\sigma\varphi\frac{\pi}{6}=$
$\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_{\varepsilon\varphi}=y_2'(x_0)=\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)_{x_0=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}-4$
$=\frac{-8}{3}$ άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή:
$y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=-\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ η δε εξίσωση της καθέτου θα είναι της
μορφής: $y-y_0=\lambda_{\kappa\alpha\theta}\cdot(x-x_0)$ όπου $\lambda_{\kappa\alpha\theta}\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi}=-1$ ή $\lambda_{\kappa\alpha\theta}=\frac{3}{8}$ άρα
η εξίσωση της καθέτου στο σημείο $P\left(\frac{\pi}{6},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ είναι: $y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{8}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

4.2. Να ευρεθεί η γωνία των εφαπτομένων των καμπυλών:
$x^2+y^2=5$, $y^2=x+3$ στα σημεία τομής τους.

Λύση. Ως γνωστόν η καμπύλη $x^2+y^2=5$ παριστά κύκλο, ενώ η
$y^2=x+3$ υπερβολή. Η γωνία ω δύο τεμνομένων ευθειών είναι: $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$
όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές κατευθύνσεως των δύο ευθειών αντιστοίχως.
Διά λύσεως του συστήματος των εξισώσεων των καμπυλών προσδιορίζομε τα
(πραγματικά) σημεία τομής των. Έχομε 4 ζεύγη τιμών, τα: $(x_1=1,\ y_1=2)$
$(x_2=1,\ y_2=-2)$, $(x_3=-2,\ y_3=1)$ και $(x_4=-2,\ y_4=-1)$ δηλ. οι καμπύλες
τέμνονται σε 4 σημεία. Υπολογίζομε κατ' αρχάς τη γωνία των εφαπτομένων



στο σημείο $M(1,2)$. Οι παράγωγοι των δύο συναρτήσεων είναι της πρώτης: $2x+2yy'=0$
$y'=-\frac{x}{y}$ άρα $\lambda_{1\varepsilon\varphi}=-\frac{1}{2}$, της δεύτερης:
$2yy'=1$ ή $y'=\frac{1}{2y}$ άρα $\lambda_{2\varepsilon\varphi}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$
επομένως θα έχωμε αν αντικαταστήσωμε

$$(1):\ \varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}$$ άρα

$\omega=\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{6}{7}=40{,}6^\circ$ Ομοίως και για τα άλλα ση

4.3. Κινητό σημείο έχει εξίσωση $x=2t\cdot e^{t-1}$. Να ευρεθεί η
μέση ταχύτης μεταξύ των χρονικών στιγμών 1 και 1,2 καθώς και η
ταχύτης αυτού κατά την χρονική στιγμή 1. $(x=f(t))$.

Λύση Η μέση ταχύτης είναι ως γνωστόν το πηλίκο διαφορών $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\cdot 1{,}2\, e^{1{,}2-1} - 2\cdot 1\cdot e^{1-1}}{1{,}2-1} = 12\sqrt[5]{e} - 10$. Η ταχύτης (στιγμιαία) βρίσκεται από τον τύπο: $v(t) = f'(t) = 2e^{t-1} + 2te^{t-1}$. Οπότε η ταχύτητα αυτού κατά τη χρονική στιγμή $t=1$ θα είναι: $f'(1) = 2\cdot e^{1-1} + 2\cdot 1\, e^{1-1} = 4$.

4.4. Να ευρεθούν οι παράγωγοι των κάτωθι συναρτήσεων:

$$y_1 = \frac{x^2}{(x+1)^3}, \quad y_2 = \sqrt[3]{x-1}, \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad y_4 = \sqrt{εφ^2 x + 1}$$

Λύση Είναι $y_1' = \frac{(x^2)'(x+1)^3 - x^2\left((x+1)^3\right)'}{\left[(x+1)^3\right]^2} = \frac{2x(x+1)^3 - x^2\cdot 3(x+1)^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^6} =$
$\frac{(x+1)^2\left(2x(x+1) - 3x^2\right)}{(x+1)^6} = \frac{2x(x+1) - 3x^2}{(x+1)^4} = \frac{-x^2+2x}{(x+1)^4}$. Ομοίως έχομε:
$y_2 = (x-1)^{1/3}$ (περίπτωση $y = u^n$, $u = x-1$, $n = \frac{1}{3}$). Άρα $y_2' = \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot$
$\cdot (x-1)' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 1 = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. Για την $y_3 = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
θα έχωμε: $y_3' = \frac{(1)'\cdot\sqrt{x+1} - 1\cdot(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} = -\frac{\left[(x+1)^{1/2}\right]'}{x+1}$. Αλλά
$\left[(x+1)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}(x+1)^{1/2-1}\cdot(x+1)' = \frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2(x+1)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Άρα $y_3' = -\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$. Η $y_4 = \sqrt{εφ^2x+1}$ είναι της μορφής:
$y = \sqrt{u} = u^{1/2}$ της οποίας η $y' = \frac{1}{2}\cdot u^{1/2-1}\cdot u' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot u' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^{1/2}}\cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
άρα $y_4' = \frac{(εφ^2x+1)'}{2\sqrt{εφ^2x+1}} = \frac{2εφx\cdot(εφx)'}{2\sqrt{εφ^2x+1}} = \frac{εφx\cdot\frac{1}{συν^2x}}{\sqrt{εφ^2x+1}} = εφx\sqrt{εφ^2x+1}$.

4.5. Ομοίως να ευρεθούν οι παράγωγοι των κάτωθι συναρτήσεων.

$$y_1 = \log ημx + x^x, \quad y_2 = ημ(x^{\log x}), \quad y_3 = x^{x^x}, \quad y_4 = (εφx)^x.$$

Λύση. Είναι $y_1' = (\log ημx + x^x)' = (\log ημx)' + (x^x)'$. Αλλά αν συμβολίσω με $y_{1α} = \log ημx$ και $y_{1β} = x^x$ θα είναι:
$(y_{1α})' = \frac{(ημx)'}{ημx} = \frac{συνx}{ημx} = σφx$ και $y_{1β} = x^x$ εκθετική άρα πρώτα λογαριθμίζομε και μετά παραγωγίζομε: $\log y_{1β} = x\log x$ και $(\log y_{1β})' = (x\log x)'$

$\frac{y_{1\beta}'}{y_{1\beta}} = (x)'\log x + x(\log x)' = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$ άρα:

$y_{1\beta}' = y_{1\beta}(\log x+1) = x^x(\log x+1)$ Ώστε $y_1' = y_{1\alpha}' + y_{1\beta}' = \sigma\varphi x + x^x(\log x+1)$.

$y_2 = \eta\mu(x^{\log x})$ θα είναι $y_2' = (\eta\mu(x^{\log x}))' = \sigma\upsilon\nu(x^{\log x})\cdot(x^{\log x})'$.

Αν θέσουμε $y_{2\alpha} = x^{\log x}$ θα έχουμε: (εκθετική συνάρτηση άρα πρώτα λογαριθμίζουμε και μετά παραγωγίζουμε): $\log y_{2\alpha} = \log(x^{\log x}) = \log x\cdot\log x = (\log x)^2$ ή $(\log y_{2\alpha})' = ((\log x)^2)'$ ή $\frac{y_{2\alpha}'}{y_{2\alpha}} = 2\log x\cdot(\log x)' = \frac{1}{x}\cdot 2\log x$

άρα $y_{2\alpha}' = y_{2\alpha}\cdot\frac{2}{x}\log x = x^{\log x}\cdot\frac{2}{x}\log x$ Άρα $y_2' = \sigma\upsilon\nu(x^{\log x})\cdot\frac{2x^{\log x}}{x}\log x$

Η $y_3 = x^{x^x}$ γίνεται $y_3 = x^{(x^x)}$ εκθετική άρα $\log y_3 = x^x\cdot\log x$ ή $(\log y_3)' = (x^x\log x)'$ ή $\frac{y_3'}{y_3} = (x^x)'\cdot\log x + x^x\cdot(\log x)'$ Αλλά $(x^x)' = x^x(\log x+1)$ όπως υπολογίστηκε προηγουμένως ($y_{1\beta}$). Άρα θα είναι:

$\frac{y_3'}{y_3} = x^x(\log x+1)\log x + x^x\cdot\frac{1}{x} = x^x\left[(\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\right]$ Άρα τελικά $y_3' = y_3\cdot x^x\left[(\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\right] = x^{x^x}\cdot x^x\left[(\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\right]$

Η $y_4 = (\varepsilon\varphi x)^x$ είναι εκθετική άρα πρώτα λογαριθμίζουμε και μετά παραγωγίζουμε: $\log y_4 = x\log\varepsilon\varphi x$ ή $(\log y_4)' = (x\log\varepsilon\varphi x)'$ ή

$\frac{y_4'}{y_4} = (x)'\log\varepsilon\varphi x + x\cdot(\log\varepsilon\varphi x)' = 1\cdot\log\varepsilon\varphi x + x\cdot\frac{(\varepsilon\varphi x)'}{\varepsilon\varphi x} = \log\varepsilon\varphi x + \frac{x(\varepsilon\varphi^2 x+1)}{\varepsilon\varphi x}$ Άρα $y_4' = (\varepsilon\varphi x)^x\left[\log\varepsilon\varphi x + \frac{x(\varepsilon\varphi^2 x+1)}{\varepsilon\varphi x}\right]$.

4.6. Ομοίως οι παράγωγοι των κάτωθι συναρτήσεων:

$y_1 = 5^{e^{\eta\mu x}}$, $y_2 = (\mathrm{ch}\,x)^{\tau o\xi\varepsilon\varphi x}$, $y_3 = \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x$, $y_4 = (4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$

Λύση Η $y_1 = 5^{e^{\eta\mu x}}$ είναι εκθετική άρα πρώτα λογαριθμίζουμε και μετά παραγωγίζουμε: $\log y_1 = e^{\eta\mu x}\cdot\log 5$ οπότε $(\log y_1)' = (e^{\eta\mu x}\log 5)'$

$\frac{y_1'}{y_1} = (e^{\eta\mu x})'\log 5 = e^{\eta\mu x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\log 5$ (το $e^{\eta\mu x}$ είναι της μορφής e^u) ή $y_1' = y_1\cdot e^{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\log 5$ και $y_1' = 5^{e^{\eta\mu x}}\cdot e^{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\log 5$.

Η y_2 είναι ομοίως εκθετική άρα $\log y_2 = \tau o\xi\varepsilon\varphi x\cdot\log\mathrm{ch}\,x$ οπότε $(\log y_2)' = (\tau o\xi\varepsilon\varphi x\cdot\log\mathrm{ch}\,x)'$ ή $\frac{y_2'}{y_2} = (\tau o\xi\varepsilon\varphi x)'\cdot\log\mathrm{ch}\,x + \tau o\xi\varepsilon\varphi x(\log$

ή $\frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{1+x^2}\cdot \log chx + \text{τοξεφ}x\cdot\frac{(chx)'}{chx} = \frac{\log chx}{1+x^2} + \text{τοξεφ}x\,\frac{shx}{chx}$

άρα $y_2' = y_2\left[\frac{\log chx}{1+x^2} + \text{τοξεφ}x\cdot thx\right] = (chx)^{\text{τοξεφ}x}\left[\frac{\log chx}{1+x^2} + \text{τοξεφ}x\cdot thx\right]$.

Η $y_3 = \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x$ εκθετική άρα $\log y_3 = x\cdot\log\frac{\nu e}{x}$ άρα $(\log y_3)' = \left(x\log\frac{\nu e}{x}\right)'$

ή $\frac{y_3'}{y_3} = (x)'\cdot\log\frac{\nu e}{x} + x\cdot\left(\log\frac{\nu e}{x}\right)' = 1\cdot\log\frac{\nu e}{x} + x\cdot\frac{1}{\frac{\nu e}{x}}\cdot\left(\frac{\nu e}{x}\right)'$.

αλλά $\log\frac{\nu e}{x} = \log \nu e - \log x = \log\nu + \log e - \log x = \log\nu + 1 - \log x$

και $x\frac{1}{\frac{\nu e}{x}}\left(\frac{\nu e}{x}\right)' = \frac{x^2}{\nu e}\cdot\left(\frac{-\nu e}{x^2}\right) = -1$ Άρα θα έχουμε

$\frac{y_3'}{y_3} = \log\nu + 1 - \log x - 1 = \log\nu - \log x$ Άρα $y_3' = \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x\cdot(\log\nu - \log x)$.

Η $y_4 = (4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$ με $|x|\geq 5$ (για να είναι η υπόριζος ποσότητα πραγματικός) είναι εκθετική άρα $\log y_4 = 2+\sqrt{x^2-5}\cdot\log(4x^2-7)$ οπότε:

$\frac{y_4'}{y_4} = \left(2+\sqrt{x^2-5}\right)'\log(4x^2-7) + \left(2+\sqrt{x^2-5}\right)\left(\log(4x^2-7)\right)'$ Είναι όμως:

$\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ και $\left(\log(4x^2-7)\right)' = \frac{(4x^2-7)'}{4x^2-7} = \frac{8x}{4x^2-7}$ Άρα $\frac{y_4'}{y_4} = \frac{x\log(4x^2-7)}{\sqrt{x^2-5}} + \frac{8x\cdot(2+\sqrt{x^2-5})}{4x^2-7}$ Άρα

$$y_4' = (4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}\left(\frac{x\log(4x^2-7)}{\sqrt{x^2-5}} + \frac{8x(2+\sqrt{x^2-5})}{4x^2-7}\right)$$

4.7. Να ευρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως που ορίζεται υπό πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $e^x\cdot\text{συν}y - e^y\text{ημ}x = 0$.

Λύση Θεωρούμε την y ως συνάρτηση του x και παραγωγίζουμε ως προς x οπότε προκύπτει: $(e^x)'\cdot\text{συν}y + e^x\cdot(\text{συν}y)' - (e^y)'\text{ημ}x - e^y(\text{ημ}x)' = 0$ ή $e^x\text{συν}y - e^x\text{ημ}y\cdot y' - e^y\cdot y'\text{ημ}x - e^y\text{συν}x = 0$ ή βγάζοντας κοινό παράγοντα το y' έχουμε: $-y'(e^x\text{ημ}y + e^y\text{ημ}x) = e^y\text{συν}x - e^x\text{συν}y$

άρα $y' = \frac{e^x\cdot\text{συν}y - e^y\cdot\text{συν}x}{e^x\text{ημ}y + e^y\text{ημ}x}$.

4.8. Να ευρεθεί το πεδίο ορισμού και το διαφορικό της συναρτήσεως: $y = \text{τοξ}th\sqrt{2x+1}$ για $x = -\frac{3}{8}$ και $dx = 0{,}003$.

Λύση. Από τη γραφική παράσταση των υπερβολικών συναρτήσεων διαπιστώνομε ότι το πεδίο τιμών της $th\,x$ είναι το διάστημα $(-1,1)$. Επομένως το διάστημα αυτό $(-1,1)$ θα είναι το πεδίο ορισμού της αντιστρόφου της $\text{τοξ}th\,x$. Εδώ όμως το x είναι $\sqrt{2x+1}$. Και επειδή το ριζικό πρέπει να είναι θετική ποσότης για να έχωμε πραγματικές τιμές του x, γι' αυτό πρέπει, αντί $-1<\sqrt{2x+1}<1$ να είναι $0\le\sqrt{2x+1}<1$ δηλ. $2x+1<1 \Rightarrow x<0$ και $2x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{2}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της $y=\text{τοξ}th\sqrt{2x+1}$ είναι το $-\frac{1}{2}\le x<0$. Διαφορίζοντας την y έχομε: $dy=\left(\text{τοξ}th\sqrt{2x+1}\right)'dx =$

$$\frac{1}{1-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{2x+1}\right)'dx = -\frac{1}{2x\sqrt{2x+1}}\cdot dx$$

Αν θέσωμε $x=-\frac{3}{8}$ και $dx=0,003$ έχωμε $dy=-\frac{1}{2\cdot(-3/8)\cdot\sqrt{2\cdot(-3/8)+1}}\cdot 0,003=\frac{8}{3}\cdot 0,003=$ $0,008$. Το αριθμητικό αυτό εξαγόμενο είναι μία καλή προσέγγιση της αυξήσεως $\Delta y = y\left(-\frac{3}{8}+0,003\right)-y\left(-\frac{3}{8}\right)=y(-0,372)-y(-0,375)$ δηλ. είναι $\Delta y=\text{τοξ}th\sqrt{0,264}-\text{τοξ}th\,0,5\approx 0,008$. Δηλ. το διαφορικό μιας συναρτήσεως μας επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό, κατά προσέγγιση, της μεταβολής της τιμής μιας συναρτήσεως για μία μικρή μεταβολή Δx της ανεξαρτήτου μεταβλητής.

4.9. Να δειχθεί ότι κάθε μία των επομένων συναρτήσεων πληροί την έναντι αυτής σχέση (διαφορική εξίσωση):

1) $y=x^2+x^{-2}$: $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ και

2) $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$: $y'''+3y''+2y'=0$. 3). $y=e^{x}\,\text{συν}x$: $y^{(4)}+4y=0$

Λύση. Κατ' αρχάς διαφορική εξίσωση n τάξεως είναι μια συνάρτηση της μορφής $f(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)})=0$. Έχομε:

1). $y'=2x+(-2x^{-2-1})=2x-2x^{-3}$ και $y''=(y')'=2+2\cdot 3\cdot x^{-3-1}=$ $=2+6x^{-4}$. Αν αντικαταστήσω τις τιμές των y, y', y'' στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση της (1) προκύπτει: $x^2(2+6x^{-4})+x(2x-2x^{-3})-$ $-4(x^2+x^{-2})=2x^2+6x^{-2}+2x^2-2x^{-2}-4x^2-4x^{-2}=0$ Ομοίως θα έχω

2) $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$, $y'=Ae^{-x}\cdot(-x)'+Be^{-2x}\cdot(-2x)'=-Ae^{-x}-2Be^{-2x}$
$y''=-Ae^{-x}\cdot(-x)'-2Be^{-2x}\cdot(-2x)'=Ae^{-x}+4Be^{-2x}$ και
$y'''=Ae^{-x}(-x)'+4Be^{-2x}(-2x)'=-Ae^{-x}-8Be^{-2x}$. Άρα η σχέση:
$y'''+3y''+2y'=0$ παίρνει τη μορφή μετά την αντικατάσταση των
y', y'', y''': $-Ae^{-x}-8Be^{-2x}+3Ae^{-x}+12Be^{-2x}-2Ae^{-x}-4Be^{-2x}=0$.

3). Βρίσκω την 4η παράγωγο της $y=e^{-x}συνx$. Έχω:
$y'=(e^{-x}συνx)'=(e^{-x})'συνx+e^{-x}\cdot(συνx)'=-e^{-x}συνx-e^{-x}ημx=$
$=-e^{-x}(συνx+ημx)$, $y''=(y')'=\left[-e^{-x}(συνx+ημx)\right]'=(-e^{-x})'(συνx+ημx)+$
$+(-e^{-x})\cdot(συνx+ημx)'=-e^{-x}\cdot(-x)'(συνx+ημx)-e^{-x}(-ημx+συνx)=$
$=e^{-x}(συνx+ημx)-e^{-x}(-ημx+συνx)$ ή $y''=2e^{-x}ημx$.
$y'''=(y'')'=(2e^{-x}ημx)'=(2e^{-x})'ημx+2e^{-x}\cdot(ημx)'=-2e^{-x}ημx+$
$+2e^{-x}συνx$ ή $y'''=2e^{-x}(συνx-ημx)$ Και τέλος $y^{(4)}=(y''')'=$
$=\left[2e^{-x}(συνx-ημx)\right]'=(2e^{-x})'(συνx-ημx)+2e^{-x}(συνx-ημx)'=$
$=-2e^{-x}(συνx-ημx)+2e^{-x}(-ημx-συνx)$ ή $y^{(4)}=-4e^{-x}συνx$.
και επομένως η $y^{(4)}+4y=0$ γίνεται: $-4e^{-x}συνx+4\cdot e^{-x}συνx=0$.

4.10. Να ευρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι συναρτήσεις: $y_1=x^2-x+1$ και $y_2=x^a\cdot e^{-x}$ $(a>0)$ είναι μονότονες.

Λύση. Η παράγωγος της y_1 είναι: $y_1'=2x-1$ και είναι: $2x-1>0$ για $x>\frac{1}{2}$ και $2x-1<0$ για $x<\frac{1}{2}$. Άρα κατά την πρόταση 3. των εφαρμογών των παραγώγων θα είναι η συνάρτηση y_1 αύξουσα στο διάστημα $\frac{1}{2}<x<\infty$ και φθίνουσα στο $-\infty<x<\frac{1}{2}$.
Ομοίως η παράγωγος της y_2 είναι: $y_2'=\alpha x^{\alpha-1}e^{-x}-x^{\alpha}e^{-x}=$ $=x^{\alpha-1}e^{-x}(\alpha-x)$ και είναι $x^{\alpha-1}e^{-x}(\alpha-x)>0$ όταν, i) $x>0$ και $\alpha-x>0$ δηλ. $x>0$ και $x<\alpha$ ή $0<x<\alpha$ ii) $x<0$ και $\alpha-x<0$ δηλ. $x<0$ και $x>\alpha$. Οι δύο τελευταίες δεν ισχύουν γιατί ο α υπετέθη θετικός δηλ. οι $x<0$ και $x>\alpha$ δεν συναληθεύουν. Δηλ. η y_2' είναι θετική στο διάστημα $0<x<\alpha$ και αρνητική στο $x>\alpha$ δηλ. η y είναι αύξουσα στο $0<x<\alpha$ και φθίνουσα στο $\alpha<x<\infty$.

11. Να αναπτυχθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^4-5x^3+5x^2+x+2$ κατά τις δυνάμεις του $x-2$.

Λύση. Αν στον τύπο του Taylor (πρότ. 6. των εφαρμογών των παραγώγων) θέσωμε $\beta = x$ και $\alpha = 2$ θα έχωμε:

$$f(x) = f(2) + \frac{x-2}{1!}f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2) + \frac{(x-2)^4}{4!}\cdot f^{(4)}(2) + R_4.$$

Είναι $f(2) = 2^4-5\cdot 2^3+5\cdot 2^2+2+2 = 0$

$f'(x) = 4x^3-15x^2+10x+1$ και $f'(2) = 4\cdot 2^3-15\cdot 2^2+10\cdot 2+1 = -7$. Επίσης $f''(x) = 12x^2-30x+10$ και $f''(2) = 12\cdot 2^2-30\cdot 2+10 = -2$ καθώς και $f'''(x) = 24x-30$ και $f'''(2) = 24\cdot 2-30 = 18$, $f^{(4)}(x) = 24$ και προφανώς $f^{(4)}(2) = 24$. Επίσης το $R_4 = \frac{(x-2)^5}{5!}\cdot f^{(5)}(2) = 0$ διότι $f^{(5)}(x) = 0$, οπότε αντικαθιστώντας έχομε το ζητούμενο ανάπτυγμα της $f(x)$:

$$f(x) = (x-2)^4+3(x-2)^3-(x-2)^2-7(x-2).$$

4.12. Να αναπτυχθούν σε σειρές κατά τις δυνάμεις του x οι κάτωθι συναρτήσεις: 1) $y = \sigma\upsilon\nu x$ 2) $y = \frac{1}{1-x}$, 3) $y = \alpha^x$.

Λύση 1). Είναι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f'(x) = -\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$,

$f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$, $f'''(x) = \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$,

$f^{(4)}(x) = \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$ και γενικώς $f^{(\nu)}(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\nu\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$

Οπότε $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, $f'(0) = -\eta\mu 0 = 0$, $f''(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1$

$f'''(0) = \eta\mu 0 = 0$, $f^{(4)}(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, $\cdots$ $f^{(\nu)}(0) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)$.

Οπότε προκύπτει από τον τύπο του Mac-Laurin το ανάπτυγμα της

$$y = f(x) = \sigma\upsilon\nu x = 1+\frac{x}{1!}(0)+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^3}{3!}(0)+\frac{x^4}{4!}(1)+\cdots =$$

$$= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots+(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

2) Ομοίως για την $y = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ θα έχωμε:

$y' = f'(x) = (1-x)^{-2} = 1!\,(1-x)^{-2}$ $\qquad f(0) = 1$, $f'(0) = 1!$

$f''(x) = 2(1-x)^{-3} = 2!\,(1-x)^{-3}$ $\qquad f''(0) = 2!$

$f'''(x) = 6(1-x)^{-4} = 3!\,(1-x)^{-4}$ $\qquad f'''(0) = 3!$

$f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5} = 4!\,(1-x)^{-5}$ κ.τ.λ. $\qquad f^{(4)}(0) = 4!$ κ.τ.λ.

$f^{(\nu)}(x) = \nu!\,(1-x)^{-(\nu+1)}$ $\qquad f^{(\nu)}(0) = \nu!$

επομένως αν στον τύπο του Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(0)$$

θέσω τις τιμές των $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \cdots,\ f^{(\nu)}(0)$ θα έχω τελικά:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!}1! + \frac{x^2}{2!}\cdot 2! + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}\cdot \nu! = 1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu.$$

3). Η $y = \alpha^x$ γίνεται επίσης αναλόγως:

$y' = f'(x) = \alpha^x \log\alpha$ (εφαρμογή στις παραγώγους εκθετικών συναρτήσεων ε' περίπτωση), $f''(x) = \alpha^x \log\alpha\cdot\log\alpha = \alpha^x \log^2\alpha$, $f'''(x) = \alpha^x\log^2\alpha\cdot\log\alpha = \alpha^x\cdot\log^3\alpha$, $f^{(4)}(x) = \alpha^x\log^3\alpha\cdot\log\alpha = \alpha^x\cdot\log^4\alpha$ και γενικώς:

$f^{(\nu)}(x) = \alpha^x\log^\nu\alpha$. Οπότε θα έχουμε αντιστοίχως: $f(0) = \alpha^0 = 1$, $f'(0) = \alpha^0\cdot\log\alpha = \log\alpha$, $f''(0) = \alpha^0\cdot\log^2\alpha = \log^2\alpha, \cdots, f^{(\nu)}(0) = \log^\nu\alpha$.

Θέτοντας τις τιμές των $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(\nu)}(0)$ στον τύπο του Mac-Laurin θα έχουμε τελικά:

$$f(x) = \alpha^x = 1 + \frac{x\log\alpha}{1!} + \frac{x^2\log^2\alpha}{2!} + \frac{x^3\log^3\alpha}{3!} + \cdots + \frac{x^\nu\log^\nu\alpha}{\nu!}.$$

4.13. Να ευρεθούν τα 1) $\underset{x\to 0}{\text{όρ}}\dfrac{x - \text{τοξημ}x}{x^3}$, 2) $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\dfrac{\sqrt{2} - \text{ημ}x - \text{συν}x}{\log\text{ημ}2x}$.

Λύση

1) Είναι $\underset{x\to 0}{\text{όρ}}\dfrac{x - \text{τοξημ}x}{x^3} = \dfrac{0 - \text{τοξημ}0}{0^3} = \dfrac{0}{0}$ διότι έχω απροσδιόριστο μορφή. Εφαρμόζω τον κανόνα του L'Hospital και έχω:

$$\underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{(x - \text{τοξημ}x)'}{(x^3)'} = \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2\sqrt{1-x^2}} \text{ και } \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ άρα } \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)'}{(3x^2\sqrt{1-x^2})'} = \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{6x\sqrt{1-x^2} - \frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}} =$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{-x}{6x - 9x^3} = \frac{0}{0} \text{ άρα } \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{(-x)'}{(6x-9x^3)'} = \underset{x\to 0}{\text{όρ}}\frac{-1}{6-27x^2} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

2) Είναι $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\dfrac{\sqrt{2} - \text{ημ}x - \text{συν}x}{\log\text{ημ}2x} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2}{\log 1} = \dfrac{0}{0}$ άρα

$$\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\frac{(\sqrt{2} - \text{ημ}x - \text{συν}x)'}{(\log\text{ημ}2x)'} = \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\frac{-\text{συν}x + \text{ημ}x}{\frac{2\text{συν}2x}{\text{ημ}2x}} = \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\frac{(-\text{συν}x + \text{ημ}x)\text{ημ}2x}{2\text{συν}2x} = \frac{0}{0}$$

$$\text{άρα } \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\frac{((-\text{συν}x+\text{ημ}x)\text{ημ}2x)'}{(2\text{συν}2x)'} = \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{όρ}}\frac{(\text{ημ}x + \text{συν}x)\text{ημ}2x + (-\text{συν}x + \text{ημ}x)2\text{συν}2x}{-4\text{ημ}2x} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)1+0}{-4} = \frac{\sqrt{2}}{-4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4.14. Να υπολογισθούν επίσης τα όρια των συναρτήσεων:

1) $\underset{x\to 0}{\text{op}}\left(\frac{1}{1-\text{συν}x} - \frac{2}{x^2}\right)$ 2) $\underset{x\to 1}{\text{op}}(1-x)\,\text{εφ}\,\frac{\pi x}{2}$ 3) $\underset{x\to 0}{\text{op}}\; x^2 \log x$.

Λύση 1). Είναι $\underset{x\to 0}{\text{op}}\left(\frac{1}{1-\text{συν}x} - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{1-1} - \frac{2}{0^2} = \infty - \infty$ Αν τα κλάσματα γίνουν ομώνυμα η παράσταση λαμβάνει τη μορφή:

$\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{x^2-2+2\text{συν}x}{x^2(1-\text{συν}x)} = \frac{0}{0}$ Άρα $\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{(x^2-2+2\text{συν}x)'}{(x^2(1-\text{συν}x))'} = \underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{2x - 2\text{ημ}x}{2x(1-\text{συν}x)+x^2\text{ημ}x}$

$= \frac{0-0}{0+0} = \frac{0}{0}$ Άρα $\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{2(1-\text{συν}x)}{2(1-\text{συν}x)+2x\,\text{ημ}x+2x\,\text{ημ}x+x^2\text{συν}x}$

$\frac{0}{0+0+0+0} = \frac{0}{0}$ άρα $\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{(2(1-\text{συν}x))'}{(\text{συν}x(x^2-2)+4x\,\text{ημ}x+2)'} =$

$= \underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{2\text{ημ}x}{-\text{ημ}x(x^2-2)+\text{συν}x\cdot 2x+4\text{ημ}x+4x\,\text{συν}x} = \frac{0}{0+0+0+0} = \frac{0}{0}$ άρα

$\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{(2\text{ημ}x)'}{(\text{ημ}x(6-x^2)+6x\,\text{συν}x)'} = \underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{2\text{συν}x}{\text{συν}x(6-x^2)-2x\,\text{ημ}x+6\text{συν}x-6x\,\text{ημ}x}$

$= \frac{2\cdot 1}{1(6-0)-2\cdot 0+6\cdot 1-6\cdot 0} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$

2). Είναι $\underset{x\to 1}{\text{op}}\,(1-x)\,\text{εφ}\,\frac{\pi x}{2} = 0\cdot\infty$ Άρα γράφω την παράσταση ως εξ

$\underset{x\to 1}{\text{op}}\, \frac{(1-x)\,\text{ημ}\frac{\pi x}{2}}{\text{συν}\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$ οπότε $\underset{x\to 1}{\text{op}}\, \frac{-\text{ημ}\frac{\pi x}{2} + (1-x)\text{συν}\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{-\text{ημ}\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{-\text{ημ}\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$ 3). Είναι $\underset{x\to 0}{\text{op}}\, x^2\log x = 0\cdot\log 0 = 0\cdot(-\infty)$ οπότε

γράφω την παράσταση ως κλάσμα και έχω: $\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0}$ άρα

$\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \underset{x\to 0}{\text{op}} -\frac{x^3}{2x} = -\frac{0}{0}$ άρα έχω: $\underset{x\to 0}{\text{op}}\, \frac{-3x^2}{2} = \frac{0}{2} = 0.$

4.15. Ομοίως να ευρεθούν τα όρια των κάτωθι συναρτήσεων:

1) $\underset{x\to 0}{\text{op}}\,(\text{ημ}x)^{\text{ημ}x}$, 2) $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{op}}(\text{Εφ}x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$, 3) $\underset{x\to 1}{\text{op}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$.

Λύση 1). το $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(\eta\mu x)^{\eta\mu x} = 0^0$ Άρα λογαριθμίζοντας έχω αν παραστήσω με k την παράσταση: $\log k = \eta\mu x \cdot \log \eta\mu x$ οπότε $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\log k = \underset{x\to 0}{\text{ορ}}(\eta\mu x \cdot \log \eta\mu x) = 0\cdot(-\infty)$. Γράφω την παράσταση υπό μορφήν κλάσματος και έχω: $\log k = \dfrac{\log \eta\mu x}{\frac{1}{\eta\mu x}}$ οπότε $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\log k = \underset{x\to 0}{\text{ορ}}\dfrac{\log \eta\mu x}{\frac{1}{\eta\mu x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$ άρα

$$\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\log k = \underset{x\to 0}{\text{ορ}}\frac{(\log \eta\mu x)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)'} = \underset{x\to 0}{\text{ορ}}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}} = \underset{x\to 0}{\text{ορ}}(-\eta\mu x) = 0$$

Άρα $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\log k = 0$ Επομένως $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}k = e^0 = 1$.

2) Είναι $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} = 1^\infty$ Άρα πρώτα λογαριθμίζω και μετά υπολογίζω το όριο. Έχω αν παραστήσω με k την παράσταση:

$$\log k = \frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}\log \varepsilon\varphi x = \frac{\log \varepsilon\varphi x}{x-\frac{\pi}{4}} \quad \text{και} \quad \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}\log k = \frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0}$$

άρα θα είναι $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}\log k = \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}\dfrac{(1+\varepsilon\varphi^2 x)/\varepsilon\varphi x}{1} = \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}\dfrac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi x} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

Από $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}\log k = 2$ άρα $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{ορ}}k = e^2$

3) Είναι $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1} = \infty^0$ Άρα πρώτα λογαριθμίζω αφού αντικαταστήσω την παράσταση με k: $\log k = (x-1)\cdot\log\dfrac{1}{x-1} = (x-1)\cdot(-\log(x-1))$ ή $\log k = -(x-1)\log(x-1)$ και $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}\log k = -0\cdot(-\infty)$. Άρα γράφω την παράσταση υπό μορφήν κλάσματος: $\log k = -\dfrac{(\log(x-1))'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} = -\dfrac{1/x-1}{-1/(x-1)^2}$

και $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}\log k = \underset{x\to 1}{\text{ορ}}(x-1) = 0$ άρα $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}k = e^0 = 1$.

4.16. Να ευρεθούν οι άκροι τιμές των συναρτήσεων:

1) $f(x) = 5 - x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4$, 2) $f(x) = x^4$.

Λύση 1). Έχομε: $f'(x) = -2x - 3x^2 - x^3 = -x(x^2+3x+2)$ Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζες τις $x=0$, $x=-1$, $x=-2$. Η δευτέρα παράγωγος είναι $f''(x) = -2-6x-3x^2$. Δια $x=0$: $f''(0) = -2 < 0$, δια $x=-1$: $f''(-1) = 1 > 0$, δια $x=-2$: $f''(-2) = -2 < 0$. Επομένως η δοθείσα συνάρτηση έχει ένα ελάχιστο για $x=-1$ το $y_{\varepsilon\lambda} = f(-1) = 4\frac{3}{4}$ και δύο μέγιστα για $x=0$ το $y_{\mu\varepsilon\gamma} = f(0) = 5$ και για $x=-2$ το $y_{\mu\varepsilon\gamma} = f(-2) = 7$.

2). Έχομε: $f'(x)=4x^3$ Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ρίζα $x=0$.
Είναι $f''(x)=12x^2$ και $f''(0)=0$. $f'''(x)=24x$, $f'''(0)=0$.
$f^{(4)}(x)=24>0$ άρα επειδή η πρώτη μη μηδενιζομένη παράγωγος για $x=0$ είναι αρτίας τάξεως, η συνάρτηση έχει άκρα τιμή και μάλιστα ελάχιστο διότι $f^{(4)}(0)>0$ Είναι δε $y_{ελ}=f(0)=0$.

4.17. Ομοίως να ευρεθούν τα ακρότατα των κάτωθι συναρτήσεων
1) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$, 2) $y=συν2x-8συν^2x$.

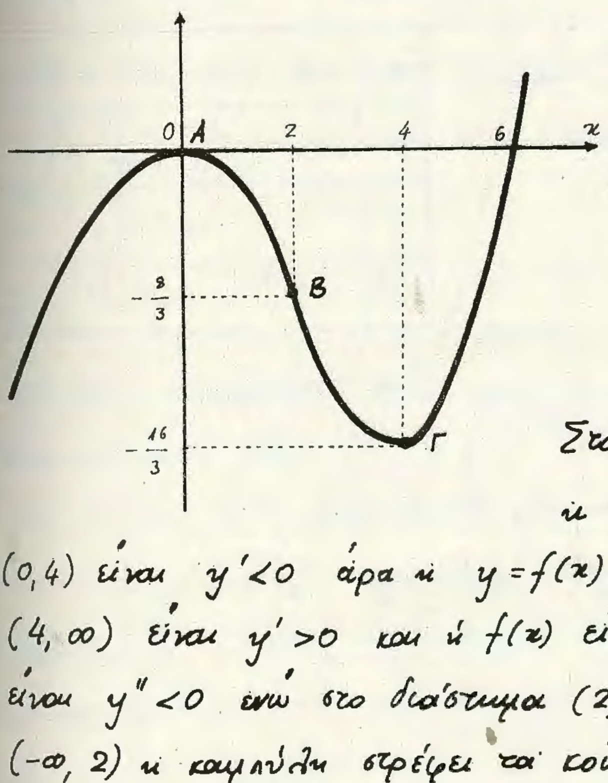
Λύση. 1). Έχομε: $y'=\dfrac{(x)'(x^2-5x+4)-x(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)^2}=\dfrac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$

Επίσης $y''=\dfrac{-2x(x^2-5x+4)^2-(-x^2+4)2(x^2-5x+4)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^4}$. Λύνομε την εξίσωση $y'=0$ Θα πρέπει: $x^2-5x+4\neq 0$ και $-x^2+4=0$ Οι ρίζες της τελευταίας είναι $x_1=2$ και $x_2=-2$ Για $x_1=2$ η y'' γίνεται αρνητική άρα για $x_1=2$ η y έχει μέγιστο το $y_{μεγ}=y(2)=-1$.
Ομοίως για $x_2=-2$ η y'' γίνεται θετική άρα για $x_2=-2$ η y έχει ελάχιστο το $y_{ελ}=y(-2)=-\frac{1}{9}$.

2). Είναι $y'=-2ημ2x-16συνx(-ημx)=-2ημ2x+8ημ2x=6ημ2x$
$y''=12συν2x$. Λύνομε την εξίσωση $y'=6ημ2x=0$ ή $ημ2x=0$.
Οι ρίζες αυτής είναι ως γνωστόν απ' την Τριγωνομετρία όλα τα τόξα: $2x_1=2kπ$ και $2x_2=(2k+1)π$. όπου $k\in Z$. $\Rightarrow x_1=kπ$ και $x_2=(2k+1)\frac{π}{2}$
Θέτομε τις τιμές αυτές των x_1, x_2 στην y'' και έχομε:
για $x_1=kπ$: $y''=12συν2\cdot kπ=12\cdot 1$ (διότι $συν2kπ=+1$). άρα $y''>0$ συνεπ. η y έχει ελάχιστο για $x=kπ$ το $y_{ελ}=y(kπ)=-7$
ομοίως για $x_2=(2k+1)\frac{π}{2}$: $y''=12\cdot συν\left(2\cdot(2k+1)\cdot\frac{π}{2}\right)=12συν(2k+1)π$
$=12(-1)=-12<0$ (διότι $συν(2k+1)π=-1$). Άρα η y έχει μέγιστο για $x_2=(2k+1)\frac{π}{2}$ το $y_{μεγ}=y\left((2k+1)\frac{π}{2}\right)=-1$.
Το $y_{ελ}=y(kπ)=-7$ διότι $y(kπ)=συν2\cdot kπ-8συν^2kπ=$
$=1-8=-7$ (επειδή συν$kπ$ θα είναι ή $+1$ ή -1 αναλόγως αν ο k είναι άρτιος ή περιττός. Το τετράγωνό του όμως είναι πάντα $+1$.). Ομοίως είναι
$y_{μεγ}=y\left((2k+1)\frac{π}{2}\right)=συν\left((2k+1)π\right)-8συν^2\left((2k+1)\frac{π}{2}\right)=-1-0=-1$.

4.18. Να μελετηθεί η μεταβολή της συναρτήσεως $y=\frac{x^3}{6}-x^2$ και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής.

Λύση. Προφανώς το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι το $(-\infty,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι πολυώνυμο και ως εκ τούτου συνεχής σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Βρίσκομε την πρώτη και δεύτερη παράγωγό της. Είναι: $y'=\frac{x^2}{2}-2x$, $y''=x-2$. Οι ρίζες της εξισώσεως $y'=0$ είναι $x=0$, $x=4$. Για $x=0$: $y''=-2<0$ δηλ. η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το $y_{μεγ}=0$. Για $x=4$: $y''=2>0$ δηλ. η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το $y_{ελ}=-\frac{16}{3}$. Είναι $y''=0$ δηλ. $x-2=0$ για $x=2$. Ενώ η $y'''=1$ για $x=2$ είναι διάφορος του μηδενός δηλ. $y'''(2)\neq 0$. Επομένως το σημείο $x=2$ είναι σημείο καμπής. Όταν $x\to-\infty$, $y\to-\infty$, όταν $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, επομένως δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτος. Κατόπιν τούτων καταρτίζομε τον ακόλουθο πίνακα μ' όλες τις χαρακτηριστικές τιμές.



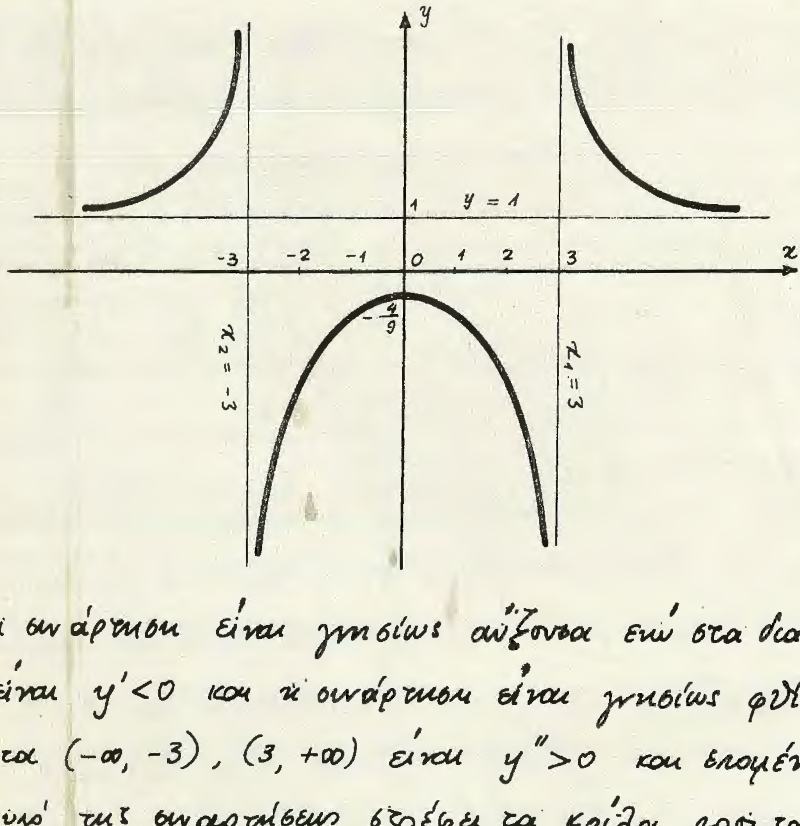
x	$-\infty$	0	2	4	6	$+\infty$
y	$-\infty$	$0_{μεγ}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{16}{3}$ ελ.	0	$+\infty$
y'	$+\nearrow$	0	$-\searrow$	0	$+\nearrow$	
y''	$-$	κοίλα κάτω	0	$+$	κοίλα άνω	

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι $y'>0$ επομένως η $y=f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, εις το $(0,4)$ είναι $y'<0$ άρα η $y=f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και εις το $(4,\infty)$ είναι $y'>0$ και η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο διάστημα $(-\infty,2)$ είναι $y''<0$ ενώ στο διάστημα $(2,+\infty)$ είναι $y''>0$. Επομένως εις το $(-\infty,2)$ η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ενώ στο $(2,+\infty)$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω. Κατόπιν όλων αυτών των συλλογισμών είναι εύκολη η σχεδίαση της γραφικής παραστάσεως. Το σημείο $A(0,0)$ είναι σημείο μεγίστου, το $B(2,-\frac{8}{3})$ είναι σημείο καμπής ενώ το σημείο $Γ(4,-\frac{16}{3})$ είναι σημείο ελαχίστου.

4.19. Να μελετηθή η μεταβολή της συναρτήσεως $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-9}$ και να γίνη η γραφική παράσταση αυτής.

Λύση. Πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι το σύνολο: $A = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ (δηλ. ολόκληρο το R εκτός των ριζών του παρονομαστού που είναι $x_1 = 3$, $x_2 = -3$). Έχομε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = 1$ δηλ. η ευθεία $y = 1$ είναι οριζοντία ασύμπτωτος. Οι ρίζες του παρονομαστού $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ είναι οι κατακόρυφοι ασύμπτωτοι διότι $\lim\limits_{x\to\pm 3} y = \infty$. Βρίσκομε την πρώτη και δευτέρα παράγωγο. Είναι: $y' = \dfrac{-26x}{(x^2-9)^2}$, $y'' = \dfrac{78(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$

Για $y' = 0$ έχομε $x = 0$ και $y'' < 0$ επομένως στο σημείο $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το $y_{μεγ} = -\dfrac{4}{9}$. Για κάθε $x \in A$ είναι $y'' \neq 0$ επομένως δεν παρουσιάζονται σημεία καμπής. Κατόπιν αυτών κατασκευάζομε τον ακόλουθο πίνακα με όλες τις χαρακτηριστικές τιμές.



x	$-\infty \qquad -3$	0	$+3 \qquad +\infty$
y	$1 \qquad +\infty$	$-\infty \quad -\frac{4}{9}$ μεγ. $\quad -\infty$	$+\infty$
y'	$+ \nearrow$	$+\nearrow \; 0 \; - \searrow$	$- \searrow$
y''	$+$ κοίλα άνω	$-$ κοίλα κάτω	$+$ κοίλα άνω

Στα διαστήματα $(-\infty, -3)$ και $(-3, 0)$ είναι $y' > 0$ επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ στα διαστήματα $(0, 3)$ και $(3, +\infty)$ είναι $y' < 0$ και η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Εξ άλλου στα διαστήματα $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$ είναι $y'' > 0$ και επομένως η γραμμή η οριζομένη υπό της συναρτήσεως στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ενώ στο διάστημα $(-3, 3)$ είναι $y'' < 0$ και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Κατόπιν των ανωτέρω η γραφική παράσταση της συναρτήσεως δίδεται από το παραπάνω σχήμα όπου οι λεπτές ευθείες $y = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ είναι οι ασύμπτωτοι της καμπύλης.

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

Β' ΜΕΡΟΣ

1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α. ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1.1. Ορισμοί

Με τον όρο "στοιχειώδεις συναρτήσεις" εννοούμε ένα σύνολο συναρτήσεων που περιέχει σαν στοιχεία:

1. Τη συνάρτηση $y = x$,

2. Τη συνάρτηση $y = a^x$, $a > 0$ και ειδικότερα τη συνάρτηση $y = e^x$,

3. Την αντίστροφη αυτής $y = \log_a |x|$,

4. Τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, $y = \varepsilon\varphi x$, $y = \sigma\varphi x$,

5. Τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \tau o\xi\,\eta\mu x$, $y = \tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu x$, $y = \tau o\xi\,\varepsilon\varphi x$, $y = \tau o\xi\,\sigma\varphi x$,

6. Τις υπερβολικές συναρτήσεις $y = sh x$, $y = ch x$, $y = th x$, $y = coth x$,

7. Τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις $y = \tau o\xi\, sh x$, $y = \tau o\xi\, sh x$, $y = \tau o\xi\, th x$, $y = \tau o\xi\, coth x$,

8. Όλες τις συναρτήσεις που παράγονται με τους πραγματικούς αριθμούς και τις παραπάνω συναρτήσεις, με πεπερασμένο πλήθος πράξεων,

9. Τις συναρτήσεις $\varphi(x) = e^{f(x)}$, $g(x) = \eta\mu(f(x))$ $\sigma(x) = \log|f(x)|$, $h(x) = sh(f(x))$ κ.τ.λ. όπου

η $y = f(x)$ είναι μια στοιχειώδης συνάρτηση.

Παρακάτω, οι συναρτήσεις που θα αναφερόμαστε θα εννοούνται στοιχειώδεις.

Έστω οι συναρτήσεις $F(x)$ και $f(x)$ ορισμένες στο διάστημα (α,β). Θα λέμε ότι η $F(x)$ είναι **παράγουσα** ή **αρχική** ή **αόριστο ολοκλήρωμα** της $f(x)$ στο διάστημα (α,β), όταν η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x)$$

Για τη συνάρτηση $F(x)$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Το σύμβολο $\int$ ονομάζεται σύμβολο της ολοκλήρωσης, η δε συνάρτηση $f(x)$ ολοκληρωτέα συνάρτηση.

Αν και μια άλλη συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι αρχική της $f(x)$ στο διάστημα (α,β), τότε, επειδή $\varphi'(x) = f(x)$, οπότε $\varphi'(x) = F'(x)$, προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $F(x)$ και $\varphi(x)$ διαφέρουν στο διάστημα (α,β) κατά σταθερή ποσότητα c. Άρα

$$\varphi(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Επομένως αν υπάρχει το $\int f(x)dx$, τότε όλες οι συναρτήσεις που διαφέρουν απ' την $F(x)$ κατά μια σταθερή c είναι ολοκληρώματα της $f(x)$, δηλ.

$$F(x) = \int f(x)\,dx + c, \quad x \in (\alpha,\beta) \qquad (1)$$

Γι' αυτό, επειδή παρουσιάζεται η απροσδιόριστη σταθερή κατά την εύρεση του αόριστου ολοκληρώματος, θα παίρνουμε ένα μόνο ολοκλήρωμα δίδοντας στη σταθερή c μια αυθαίρετη τιμή αλλά ορισμένη.

Η αναζήτηση της αρχικής συνάρτησης κάποιας δοσμένης συνάρτησης $f(x)$ λέγεται **ολοκλήρωση** και είναι πράξη αντίστροφη της διαφόρισης, διότι

$$d\int f(x)dx = d\left(F(x)-c\right) = f(x)dx \quad \text{και}$$

$$\int d(F(x)) = \int f(x)dx = F(x)$$

όπως προκύπτει από τη σχέση (1).

Δηλαδή τα σύμβολα d, $\int$ γραμμένα το ένα αμέσως μετά το άλλο αλληλοαναιρούνται.

Από όσα αναφέραμε παραπάνω δεν προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση έχει αρχική, δηλ. ότι πάντοτε το σύμβολο $\int f(x)dx$ έχει νόημα. Υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν μπορούν να ολοκληρωθούν. Επίσης ακόμα και όταν μια συνάρτηση έχει αόριστο ολοκλήρωμα, αυτό δεν είναι πάντα δυνατόν να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις, δηλ. το αόριστο ολοκλήρωμα μιας στοιχειώδους συνάρτησης δεν είναι πάντα στοιχειώδης συνάρτηση.

1.2. Ιδιότητες αόρ. ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα (α,β) και $F(x)$ μια αρχική αυτής, δηλ. $F'(x) = f(x)$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος:

1. Η παράγωγος ενός αόριστου ολοκληρώματος $\int f(x)dx$ είναι ίση με $f(x)$.

Απόδειξη.

Είναι $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x) = f(x)$.

2. Αν η $f(x)$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο διάστημα (α,β), τότε και η $c f(x)$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα και μάλιστα $\int c f(x)dx = c\int f(x)dx$, δηλ. η σταθερή c μπορεί να βγει σαν παράγοντας έξω από το ολοκλήρωμα.

Απόδειξη.

Έχουμε $\left(\int c f(x)dx\right)' = c f(x)$ και

$$\left(c\int f(x)dx\right)' = c\left(\int f(x)dx\right)' = c f(x).$$

3. Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ έχουν αόριστο ολοκλήρωμα στο διάστημα (α,β) τότε και η συνάρτηση $f(x)+g(x)$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο (α,β) και μάλιστα

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Απόδειξη

Έχουμε $\left(\int\left(f(x)+g(x)\right)dx\right)' = f(x)+g(x)$ και

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' =$$
$$= f(x)+g(x).$$

Η παραπάνω ιδιότητα γενικεύεται και για πεπερασμένο πλήθος προσθετέων, αν ληφθεί υπόψη και η ιδιότητα 2 ως εξής: $\int\left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)\right)dx =$ $c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + \cdots + c_n\int f_n(x)dx$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές και $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα (α,β).

Παρατηρήσεις.

1) Στο διαφορικό μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε μια σταθερή, χωρίς να αλλάξει το ολοκλήρωμα

π.χ. $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+c) = \int f(x)d(x-c)$.

2) Αν πολλαπλασιαστεί ή διαιρεθεί το διαφορικό με μια σταθερή, τότε πρέπει να διαιρεθεί ή να πολλαπλασιαστεί το ολοκλήρωμα με τη σταθερή αυτή για να παραμείνει αναλλοίωτο

π.χ. $\int f(x)dx = \frac{1}{c}\int f(x)d(cx) = c\int f(x)d\left(\frac{x}{c}\right)$

3) Στο διαφορικό μπορεί να εισαχθεί οποιαδήποτε παράσταση, αρκεί να βρεθεί το ολοκλήρωμα αυτής, το οποίο και εισάγεται στο διαφορικό.

π.χ. $\int x^2 ημx\, dx = \int ημx\, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \int x^2 d(-συνx)$

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad x \in R, \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{dx}{x} = \log x + c \quad , \quad x > 0 \quad (ή\ \log|x| + c, \ x \neq 0)$

3) $\int e^x dx = e^x + c \quad , \quad x \in R$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad , \quad x \in R, \quad 0 < a \neq 1$

5) $\int συνx\, dx = ημx + c \quad , \quad x \in R$

6) $\int ημx\, dx = -συνx + c, \quad x \in R$

7) $\int εφx\, dx = -\log(συνx) + c \quad , \quad x \in \left(2κπ - \frac{π}{2}, 2κπ + \frac{π}{2}\right)$

8) $\int σφx\, dx = \mathrm{Log}(ημx) + c \quad , \quad x \in (2κπ, 2κπ + π)$

9) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \int (1+\varepsilon\varphi^2 x)\,dx = \varepsilon\varphi x + c, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

10) $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = \int (1+\sigma\varphi^2 x)\,dx = -\sigma\varphi x + c, \quad x \neq k\pi$

12) $\int sh x\,dx = ch x + c, \quad x \in R$

13) $\int ch x\,dx = sh x + c, \quad x \in R$

14) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c, \quad x \in R$

15) $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c, \quad x \in R$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + c = -\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x + c, \quad x \in (-1,1)$

17) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + c = -\tau o\xi\sigma\varphi x + c, \quad x \in R$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \tau o\xi \sinh x + c = \log(x+\sqrt{x^2+1}), \quad x \in R$

19) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \tau o\xi \tanh x + c = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + c, \quad |x|<1$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \tau o\xi \cosh x + c = \log(x+\sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$

Μερικά άλυτα ολοκληρώματα

1) $\int \frac{dx}{\log x}$ $0<x\neq 1$, 2) $\int \frac{x\,dx}{\log x}$, 3) $\int \frac{e^x}{x}dx$ $x>0$, 4) $\int \frac{e^x}{x^\nu}dx$

5) $\int x^x dx$, 6) $\int e^{-x^2}dx$, 7) $\int e^{x^2}dx$, 8) $\int e^x \log x\,dx$ $x>0$

9) $\int \frac{\eta\mu x}{x^\nu}dx$, 10) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^\nu}dx$ $\nu \in N$, 11) $\int \eta\mu x^2 dx$, 12) $\int \sigma\upsilon\nu x^2 dx$

13) $\int \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\,dx$, 14) $\int \sqrt{\eta\mu x}\,dx$, 15) $\int \sqrt{x}\,\eta\mu x\,dx$, 16) $\int x\,\varepsilon\varphi x\,dx$,

17) $\int \eta\mu\sqrt{x}\,dx$, 18) $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$, 19) $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$, 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{1\pm x^3}}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1\pm x^4}}$, 22) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$, 23) $\int e^{\tau o\xi\varepsilon\varphi x}dx$, και άλλα.

1.3. Κανόνες ολοκλήρωσης.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η ολοκλήρωση συνάρτησης $f(x)$ είναι μια πράξη αντίστροφη της παραγώγισης. Κι όμως είναι δυσκολότερη από αυτή, γιατί δεν υπάρχει γενικός κανόνας που να μπορούμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της $f(x)$.

Παρακάτω θα δώσουμε μερικούς κανόνες, οι οποίοι σε συνδυασμό με τις ιδιότητες 1. 2. και 3. της παραγράφου 1.2 οδηγούν στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων ορισμένων κατηγοριών απ' τις στοιχειώδεις συναρτήσεις.

1. Ολοκλήρωση κατά μέρη.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3. της 1.2 έχουμε

$$\int\big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)dx = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx$$

Επομένως όταν η συνάρτηση είναι άθροισμα συναρτήσεων, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτής, ολοκληρώνουμε κατά μέρη.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int(3x^2-2x+1)dx$.

Είναι $\int(3x^2-2x+1)dx = 3\int x^2dx - 2\int xdx + \int dx =$

$= 3\cdot\dfrac{x^3}{3} - 2\cdot\dfrac{x^2}{2} + x + c = x^3 - x^2 + x + c$

2. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int f(x)dx$ ανάγεται πολλές φορές στον υπολογισμό ενός απλούστερου ολοκληρώματος με μια κατάλληλη αντικατάσταση $x=\varphi(t)$, που μπορεί να γίνει με βάση την παρακάτω πρόταση:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και η συνάρτηση $x=\varphi(t)$

α) είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\gamma,\delta]$ με $\varphi'(t)\neq 0$ (επομένως είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[\gamma,\delta]$),

β) παίρνει τις τιμές της στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει η αντίστροφη $t=\varphi^{-1}(x)$ της $x=\varphi(t)$ και η συνάρτηση $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα, και μάλιστα είναι $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$.

Παραδείγματα:

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int (2x+3)^5 dx$.

Θέτουμε $2x+3=t$ οπότε $x=\dfrac{t-3}{2}$ και $dx=\frac{1}{2}dt$.

Άρα $\int (2x+3)^5 dx = \int t^5\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}+c =$
$= \frac{1}{12}(2x+3)^6 + c.$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{συν\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, $x>0$.

Θέτουμε $\sqrt{x}=t$ οπότε $x=t^2$ και $dx=2tdt$. Άρα

$$\int \frac{συν\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{συν\,t}{t}\cdot 2tdt = 2\int συν\,t\,dt = 2\,ημ\,t + c = 2\,ημ\sqrt{x} + c.$$

3. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Πρόταση.

Αν οι συναρτήσεις $u(x)$ και $v(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int v(x)u'(x)dx$ τότε υπάρχει και το $\int u(x)v'(x)dx$ και μάλιστα

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ ή συντομώτερα $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

Πράγματι διαφορίζοντας την συνάρτηση $u \cdot v$ έχουμε $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$ και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη $\int d(u\cdot v) = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$ ή

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

Για τον υπολογισμό του $\int f(x)dx$ εφαρμόζοντας τον κανόνα της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, πρέπει η $f(x)$ να αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων, έτσι ώστε να είναι εύκολος ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος του ενός απ' τους δύο παράγοντες, οπότε το ολοκλήρωμα θα πάρει τη μορφή $\int f(x)dx = \int u\cdot dv$.

Παραδείγματα.

1) $$\int x\,\text{συν}x\,dx = \int x\,d(\text{ημ}x) = x\,\text{ημ}x - \int \text{ημ}x\,dx = x\,\text{ημ}x + \text{συν}x + c.$$

2) $$\int x e^x dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

3) $$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\,d(\log x) = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x + c.$$

Παρατήρηση.

Είναι δυνατόν στην κατά παράγοντες ολοκλήρωση, στο δεύτερο μέλος να εμφανίζεται το ζητούμενο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$. Θέτουμε τότε $\int f(x)dx = I$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς I.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int e^x\,\text{ημ}x\,dx$.

Είναι $I = \int e^x\,\text{ημ}x\,dx = \int \text{ημ}x\,d(e^x) =$

$$= e^x\,\text{ημ}x - \int e^x d(\text{ημ}x) = e^x\,\text{ημ}x - \int e^x\,\text{συν}x\,dx =$$

$$= e^x ημx - \int συνx\, d(e^x) =$$

$$= e^x ημx - \left[e^x συνx - \int e^x d(συνx)\right] =$$

$$= e^x ημx - e^x συνx - \int e^x ημx\, dx =$$

$$= e^x ημx - e^x συνx - I \quad \text{Άρα}$$

$$2I = e^x(ημx - συνx) \quad \text{και} \quad I = \frac{e^x(ημx - συνx)}{2}.$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int εφx\, dx$, β) $\int σφx\, dx$ γ) $\int ημ(5x-1)\, dx$

2) Επίσης τα ολοκληρώματα

α) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x-3}\right) dx$, β) $\int \frac{3}{(x+2)^3}\, dx$, γ) $\int \frac{ημx}{συνx+1}\, dx$

δ) $\int \frac{συν2x}{3+ημ2x}\, dx$, ε) $\int \frac{e^x}{(2+e^x)^3}\, dx$ στ) $\int \frac{\log x}{x}\, dx$.

3) Ακόμα τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int x^2 e^x dx$, β) $\int x \log x\, dx$, γ) $\int x^2 \log x\, dx$,

δ) $\int x^2 συνx\, dx$, ε) $\int x α^x dx$, στ) $\int x^2 α^x dx$

ζ) $\int \log^2 x\, dx$, η) $\int x \log(x+1)\, dx$, θ) $\int x^ν \log x\, dx$

ι) $\int e^{2x} ημx\, dx$, κ) $\int e^{x/2} συνx\, dx$, λ) $\int e^x συν3x\, dx$

μ) $\int τοξεφx\, dx$, ν) $\int x\, τοξεφx\, dx$, ξ) $\int x^2 τοξεφx\, dx$.

1.4. Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Έστω η ρητή συνάρτηση $P(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ όπου οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\varphi(x)$ είναι πολυώνυμα n και m βαθμού αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή και ότι τα πολυώνυμα $f(x)$ και $\varphi(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα. Αν έχουν διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τον Μ.Κ.Δ. των $f(x)$ και $\varphi(x)$.
Αν είναι $n \geq m$ διαιρώντας το $f(x)$ με το $\varphi(x)$ έχουμε $f(x)=\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου $\upsilon(x)\neq 0$ με βαθμό μικρότερο του m. Άρα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)}$ όπου τα $\upsilon(x)$ και $\varphi(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα και βαθ. αρ. < βαθ. παρ.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις υπάρχει πάντα το ολοκλήρωμα $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ σε κάθε διάστημα $[\alpha,\beta]$ που δεν υπάρχουν ρίζες του παρονομαστή.

Είναι γνωστό απ' την Άλγεβρα, ότι το κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ αναλύεται σε άθροισμα κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{A}{(x-\rho)^\lambda},\quad \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+kx+\mu)^\nu}\quad (k^2-4\mu<0)$$

Το πλήθος των κλασμάτων αυτών ορίζεται ως εξής:

α) Σε κάθε πραγματική ρίζα ρ, βαθμού πολλαπλότητας λ, δηλαδή σε κάθε παράγοντα $(x-\rho)^\lambda$ του $\varphi(x)$ αντιστοιχούν τα κλάσματα

$$\frac{A_1}{x-\rho},\quad \frac{A_2}{(x-\rho)^2},\quad \ldots,\quad \frac{A_\lambda}{(x-\rho)^\lambda}$$

β) Σε κάθε παράγοντα $(x^2+kx+\mu)^\nu$ του $\varphi(x)$ με μιγαδικές ρίζες αντιστοιχούν τα κλάσματα

$$\frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+kx+\mu},\ \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+kx+\mu)^2},\ \ldots,\ \frac{B_\nu x+\Gamma_\nu}{(x^2+kx+\mu)^\nu}$$

Ο προσδιορισμός των A_i, B_i, Γ_i γίνεται γενικά με απαλοιφή των παρονομαστών και εξίσωση των ίσων δυνάμεων του x. (Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών).

Επομένως ο υπολογισμός του $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ ανάγεται σε ολοκληρώματα της μορφής:

1) $$\int \frac{A}{(x-\rho)^\lambda}dx = A\int (x-\rho)^{-\lambda}d(x-\rho) = \begin{cases} \dfrac{A(x-\rho)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}, & \lambda \neq 1 \\ A\cdot \log|x-\rho|, & \lambda = 1 \end{cases}$$

2) $$\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+kx+\mu)^\nu}dx \quad \text{όπου } k^2-4\mu<0.$$

Για να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα εργαζόμαστε ως εξής: Μετασχηματίζουμε το τριώνυμο $x^2+kx+\mu$ σε άθροισμα τετραγώνων όπως ξέρουμε απ' την Άλγεβρα.

$$x^2+kx+\mu = x^2+2x\cdot\frac{k}{2}+\left(\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+\mu =$$

$$=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{4\mu-k^2}{4} = \left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4\mu-k^2}}{2}\right)^2,\quad 4\mu-k^2>0$$

Θέτουμε $x+\frac{k}{2} = \frac{\sqrt{4\mu-k^2}}{2}t = \delta t$ όπου $\delta = \frac{\sqrt{4\mu-k^2}}{2}$

οπότε $dx = \delta dt$ και $x^2+kx+\mu = \delta^2t^2+\delta^2 = \delta^2(t^2+1)$. Άρα

$$\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+kx+\mu)^\nu}dx = \int \frac{B(\delta t-\frac{k}{2})+\Gamma}{\delta^{2\nu}(t^2+1)^\nu}.\delta dt =$$

$$= \frac{B}{\delta^{2\nu-2}}\int \frac{t}{(t^2+1)^\nu}dt + \frac{\Gamma-\frac{Bk}{2}}{\delta^{2\nu-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^\nu}dt.$$

Αρκεί επομένως να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$J_\nu = \int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^\nu} \quad \text{και} \quad I_\nu = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\nu}.\ \text{Είναι}$$

$$J_\nu = \frac{1}{2}\int (1+t^2)^{-\nu} d(1+t^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}, & \nu \neq 1 \\ \frac{1}{2}\log(t^2+1), & \nu = 1 \end{cases}$$

$$I_\nu = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^\nu}dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\nu} =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2}\int t\,\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^\nu} = I_{\nu-1} - \frac{1}{2}\int t\, d\left(\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right) =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2}\left[t\cdot\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} - \int \frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}dt\right] =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2}t\cdot\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\nu}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu-1}}.$$ Δηλαδή

$$I_\nu = I_{\nu-1} + \frac{1}{2(1-\nu)}I_{\nu-1} - \frac{1}{2}t\,\frac{1}{(1-\nu)(1+t^2)^{\nu-1}}$$ ή τελικά

$$I_\nu = \int\frac{1}{(1+t^2)^\nu}dt = \frac{t}{2(\nu-1)(1+t^2)^{\nu-1}} + \frac{2\nu-3}{2(\nu-1)}I_{\nu-1},\quad \nu \geq 2$$

Παραδείγματα

1) Για $\nu = 1$ έχουμε $I_1 = \int\frac{dt}{(1+t^2)^1} = \text{τοξεφ}\, t + c$

άρα $$I_2 = \int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\, t + c.$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$.

Επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, διαιρώντας (αφού εκτελέσουμε τις πράξεις στον παρονομαστή) έχουμε

$$\frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = x+1+\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}.$$

Αναλύουμε τώρα το κλάσμα του δεύτερου μέλους σε άθροισμα κλασμάτων

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} + \frac{\Delta x + E}{(x^2+1)^2} \quad \text{Άρα}$$

$$3x^2+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+\Gamma)(x^2+1)(x-1) + (\Delta x+E)(x-1).$$

Εκτελώντας τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων βρίσκομε μετά τις πράξεις

$$A = 1, \quad B = \Gamma = -1, \quad \Delta = E = 1.$$

Επομένως $\dfrac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+1} + \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}.$

Άρα
$$\int \frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}$$

Είναι $\displaystyle\int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$, (η σταθερή c θα προστεθεί στο τελικό ολοκλήρωμα)

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \log|x-1|,$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+1} = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$= \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) +$ τοξεφ x. Και τέλος

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = J_2 + I_2$$

Αλλά $\displaystyle J_2 = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-2}d(x^2+1) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}$$

$$I_2 = \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2(2-1)}I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}I_1 =$$

$= \dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}$ τοξεφ x. Άρα τελικά

$$\int \frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) +$$
$$+ \frac{3}{2}\,\text{τοξεφ}\,x + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + c.$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{4x^2-6x+1}{x^3-x^2}\,dx$.

Παραγοντοποιώ πρώτα τον παρονομαστή.

$x^3-x^2 = x^2(x-1)$. Αναλύω τώρα το κλάσμα $\dfrac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Ο παράγοντας x^2 έχει σαν ρίζα το 0 βαθμού πολλαπλότητας 2, ενώ ο $x-1$ έχει το 1 σαν απλή ρίζα. Άρα η ανάλυση θα γίνει ως εξής: $\dfrac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{\Gamma}{x-1}$ $\quad ΕΚΠ = x^2(x-1)$

$$4x^2-6x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + \Gamma x^2 \iff \quad (1)$$
$$4x^2-6x+1 = Ax^2 - Ax + Bx - B + \Gamma x^2 \iff$$
$$4x^2-6x+1 = (A+\Gamma)x^2 + (B-A)x - B.$$

Επειδή τα πολυώνυμα αυτά είναι εκ ταυτότητος ίσα δηλ. αληθεύουν για κάθε τιμή του x, οι συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων τους, θα είναι ίσοι. Άρα

$$\left.\begin{aligned} A+\Gamma &= 4\\ B-A &= -6\\ -B &= 1\end{aligned}\right\}$$ Η λύση του συστήματος αυτού δίνει εύκολα τις τιμές των A, B, Γ που είναι $A = 5$, $B = -1$, $\Gamma = -1$.

Τις τιμές αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε και διαφορετικά. Θέτουμε και στα δύο μέλη της (1) τυχαίες τιμές του x, εφόσον αληθεύουν για κάθε τιμή του x, και σαν τέτοιες τιμές παίρνουμε εκείνα τα x που μηδενίζουν τις παραστάσεις των A, B, Γ της (1). Έτσι έχουμε:

για $x=0$: $\quad 1 = -B \implies B = -1$.

" $\quad x=1$: $\quad -1 = \Gamma \implies \Gamma = -1$

" $\quad x=2$: $\quad 5 = 2A + B + 4\Gamma \implies A = 5$. Επομένως

$\dfrac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x-1}$. Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int \frac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int\frac{5dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x-1} =$$
$$= 5\log|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \int\frac{d(x-1)}{x-1} = 5\log|x| + \frac{1}{x} - \log|x-1| + c$$

4). Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$.

Επειδή ο παρονομαστής δεν παραγοντοποιείται, εφόσον έχει διακρίνουσα αρνητική, θα το λύσουμε σύμφωνα με τη θεωρία που αναφέραμε, με αντικατάσταση, αφού μετασχηματίσαμε τον παρονομαστή σε άθροισμα τετραγώνων. Έτσι έχουμε.

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Θέτουμε $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt3}{2}t$ οπότε $dx = \frac{\sqrt3}{2}dt$ και $x = \frac{\sqrt3}{2}t - \frac{1}{2}$

Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int\frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int\frac{\frac{\sqrt3}{2}t-\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\,dt = \int\frac{\frac{3}{4}t+\frac{\sqrt3}{4}}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\,dt =$$
$$= \int\frac{\frac{3}{4}\left(t+\frac{\sqrt3}{3}\right)}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\,dt = \int\frac{t\,dt}{t^2+1} + \int\frac{\frac{\sqrt3}{3}dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1} + \frac{\sqrt3}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{\sqrt3}{3}\,\text{τοξεφ}\,t = \frac{1}{2}\log(t^2+1)+\frac{\sqrt3}{3}\,\text{τοξεφ}\,t + c.$$

Αντικαθιστώντας το t με το ίσο του $\frac{2x+1}{\sqrt3}$ απ' τη σχέση $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt3}{2}t$ βρίσκουμε τελικά:

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4x^2+4x+1}{3}+1\right) + \frac{\sqrt3}{3}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right] + \frac{\sqrt3}{3}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right) + c =$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{\sqrt3}{3}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right) + c =$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{\sqrt3}{3}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2x+1}{\sqrt3}\right) + C \quad \left(C = c + \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right).$$

Το παρακάτω ολοκλήρωμα το υπολογίζουμε στην πράξη πιο εύκολα ως εξής (υπό τον όρο ότι $\Delta < 0$):

Επειδή ο αριθμητής είναι πρωτοβάθμιος παράγοντας ως προς x, τον μετασχηματίζουμε έτσι ώστε να δημιουργήσουμε την παράγωγο του παρονομαστή που είναι $2x+1$ και κάποιο άλλο αριθμό. Στη συνέχεια διασπάμε το αρχικό ολοκλήρωμα σε δύο άλλα που λύνονται εύκολα. Έτσι έχουμε

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$ Το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με το γνωστό τρόπο που μάθαμε.

Θέτουμε $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ οπότε $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$. Άρα

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{τοξεφ}\,t.$$ Άρα

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

1.5. Ολοκληρώματα που ανάγονται με αντικατάσταση σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Θα εξετάσουμε τώρα διάφορες μορφές ολοκληρωμάτων που με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητής συνάρτησης.

1. Μορφή: $\int R(e^x)\,dx$, όπου $R(e^x)$ ρητή συνάρτηση του e^x.

Κάνουμε την αντικατάσταση $e^x = t$ οπότε $d(e^x) = dt$ ή

$e^x dx = dt$ ή $t\,dx = dt$ οπότε $dx = \frac{dt}{t}$. Τελικά προκύπτει ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t.

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$.

Θέτουμε $e^x = t$ οπότε το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+1} = \int \frac{t^3}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2dt}{t+1} = \int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

(μετά τη διαίρεση του t^2 με το $t+1$) $= \int t\,dt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1} =$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \log|t+1| + c = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \log(e^x+1) + c$$

2. Μορφή: $\int R(\text{ημ}x, \text{συν}x)\,dx$, όπου $R(\text{ημ}x, \text{συν}x)$ ρητή συνάρτηση των $\text{ημ}x$, $\text{συν}x$.

Γενικά εκτελούμε τον μετασχηματισμό $\text{εφ}\frac{x}{2} = t$ απ' όπου $\frac{x}{2} = \text{τοξεφ}\,t$, αφού εκφράσουμε τα $\text{ημ}x$, $\text{συν}x$ συναρτήσει της $\text{εφ}\frac{x}{2}$ από τους τύπους:

$$\text{ημ}x = \frac{2\,\text{εφ}\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{συν}x = \frac{1-\text{εφ}^2\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Απ' τη σχέση $x = 2\,\text{τοξεφ}\,t$ διαφορίζοντας παίρνουμε

$$dx = 2\,d(\text{τοξεφ}\,t) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Τελικά προκύπτει ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t.

Σε ειδικές περιπτώσεις ρητών συναρτήσεων του $\text{ημ}x$, $\text{συν}x$ είναι προτιμότερο, αντί της αντικατάστασης $\text{εφ}\frac{x}{2} = t$ να κάνουμε άλλες αντικαταστάσεις. Και μάλιστα:

α) Αν η $R(\text{ημ}x, \text{συν}x)$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς $\text{ημ}x$, θέτουμε $\text{συν}x = t$

β) Αν η $R(\text{ημ}x, \text{συν}x)$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς συνx, θέτουμε ημx = t

γ) Αν η R(ημx, συνx) είναι άρτια συνάρτηση ως προς ημx και συνx, θέτουμε εφx = t.

Και στις τρεις περιπτώσεις, το ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης του t.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{1+ημx+συνx}$.

Θέτουμε $εφ\frac{x}{2} = t$ και έχουμε $dx = 2dt/(1+t^2)$,

$$ημx = \frac{2t}{1+t^2}, \quad συνx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{άρα}$$

$$\int \frac{dx}{1+ημx+συνx} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2(1+t)} = \log|t+1|+c$$
$$= \log\left|εφ\frac{x}{2}+1\right|+c$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int ημ^3x\,συν^2x\,dx$.

Η συνάρτηση $ημ^3x\,συν^2x$ είναι περιττή ως προς ημx. Θέτουμε $συνx = t$ οπότε $d(συνx) = dt$ ή $-ημx\,dx = dt$ ή $ημx\,dx = -dt$. Έτσι έχουμε:

$$\int ημ^3x\,συν^2x\,dx = \int ημ^2x\,συν^2x\,ημx\,dx = \int (1-t^2)\cdot t^2(-dt) =$$
$$= -\int (t^2-t^4)\,dt = -\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c = -\frac{συν^3x}{3}+\frac{συν^5x}{5}+c$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{3συν^2x+2ημ^2x}$.

Η συνάρτηση R(ημx, συνx) είναι άρτια συνάρτηση ως προς ημx και συνx. Επομένως θέτουμε $εφx = t$ και έχουμε $d(εφx) = dt$ ή $(1+εφ^2x)dx = dt$ ή $(1+t^2)dx = dt$ άρα $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Εκφράζουμε τώρα τα $ημ^2x$, $συν^2x$ συναρτήσει της εφx από τους τύπους:

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Έτσι $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3\frac{1}{1+t^2} + 2\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3+2t^2} =$

$\displaystyle = \int \frac{dt}{2\left(t^2+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}$. Θέτω $t = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega$ άρα

$dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\,d\omega$ και $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\omega}{\frac{3}{2}(\omega^2+1)} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \int \frac{d\omega}{\omega^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{6}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\omega = \frac{\sqrt{6}}{6}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,t\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon\varphi x\right) + c$$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sigma\varphi x}$.

Θέτουμε $\varepsilon\varphi x = t$ οπότε $\sigma\varphi x = \frac{1}{t}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ Έτσι έχουμε

$$\int \frac{dx}{1+\sigma\varphi x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{t}} = \int \frac{t\,dt}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+\Gamma}{t^2+1} \Rightarrow t = A(t^2+1) + (Bt+\Gamma)(t+1)$$

ή $t = At^2 + A + Bt^2 + Bt + \Gamma t + \Gamma = (A+B)t^2 + (B+\Gamma)t + A+\Gamma$,

απ' όπου προκύπτει $A+B=0$, $B+\Gamma=1$, $A+\Gamma=0$

που δίνει τελικά $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $\Gamma=\frac{1}{2}$. Δηλαδή

$\displaystyle\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = -\frac{1}{2(t+1)} + \frac{t+1}{2(t^2+1)}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int\frac{t+1}{t^2+1}dt = -\frac{1}{2}\log|t+1| + \frac{1}{4}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|t+1| + \frac{1}{4}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\, t = -\frac{1}{2}\log|t+1| +$$

$$+\frac{1}{4}\log(t^2+1) + \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\, t = -\frac{1}{2}\log|\text{εφ}\, x+1| +$$

$$+\frac{1}{4}\log(\text{εφ}^2 x+1) + \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\,(\text{εφ} x) + C$$

3. Μορφή: $\int R\left(x, \sqrt[n]{\alpha x+\beta}\right)dx$ ή $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$

όπου $R\left(x, \sqrt[n]{\alpha x+\beta}\right)$, $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ ρητές συναρτήσεις.

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται πάντα, θέτοντας $\sqrt[n]{\alpha x+\beta} = t$ αντίστοιχα $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t$ απ' όπου προκύπτει $\alpha x+\beta = t^n$ αντίστοιχα $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^n$ ή λύνοντας ως προς x, $x = \frac{t^n-\beta}{\alpha}$ αντίστοιχα $x = \frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}$ και διαφορίζοντας $dx = \frac{n t^{n-1}dt}{\alpha}$ αντίστοιχα $dx = n(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}dt$ και μετά την αντικατάσταση καταλήγουν σε ολοκληρώματα ρητής συνάρτησης.

Παραδείγματα.

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{2x-3}\,dx$.

Θέτουμε $\sqrt{2x-3} = t$ και έχουμε $2x-3 = t^2$, $2dx = 2t\,dt$

$x = \frac{t^2+3}{2}$ άρα $\int x\sqrt{2x-3}\,dx = \int\frac{t^2+3}{2}\,t\cdot t\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\int(t^4+3t^2)dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + \frac{3}{2}\frac{t^3}{3} = \frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{2} =$$

$$= \frac{1}{10}(2x-3)^{5/2} + \frac{1}{2}(2x-3)^{3/2} + C$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Θέτοντας $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$ έχουμε $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ ή $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int t \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = -4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = -4\int\frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= -4\int\frac{dt}{1+t^2} + 4\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = -4\,\text{τοξεφ}\,t + 4I_2$$ όπου

$I_2 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\,t$ (παράδειγμα 1 σελίδα 13)

και τελικά $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -4\,\text{τοξεφ}\,t + \frac{2t}{1+t^2} + 2\,\text{τοξεφ}\,t =$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}} - 2\,\text{τοξεφ}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{1-x^2} - 2\,\text{τοξεφ}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c$$

4. Μορφή: $\int R(x, \sqrt[\nu_1]{\omega}, \sqrt[\nu_2]{\omega}, \dots, \sqrt[\nu_\kappa]{\omega})dx$ όπου

$R(x, \sqrt[\nu_1]{\omega}, \sqrt[\nu_2]{\omega}, \dots, \sqrt[\nu_\kappa]{\omega})$ ρητή συνάρτηση, $\omega = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$.

Αν ν είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$, θέτουμε $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/\nu} = t$ οπότε $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^\nu$ και εργαζόμενοι όπως προηγούμενα καταλήγουμε σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης.

Παράδειγμα

Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Θέτουμε $\sqrt[6]{1+x} = t$ (6 είναι το ΕΚΠ των 3 και 2) οπότε $1+x = t^6$ και $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{1+x} = \sqrt[6]{(1+x)^3} = t^3$, $\sqrt[3]{1+x} = \sqrt[6]{(1+x)^2} = t^2$ οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx = \int\frac{t^3}{1+t^2}6t^5dt = 6\int\frac{t^8dt}{1+t^2} =$$

$$=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+6\frac{t^3}{3}-6t+$$

$$+6\,\text{τοξεφ}\,t = \frac{6}{7}(1+x)^{7/6}-\frac{6}{5}(1+x)^{5/6}+2(1+x)^{1/2}-6(1+x)^{1/6}+$$

$$+6\,\text{τοξεφ}\left[(1+x)^{1/6}\right]+C.$$

5. Μορφή: i. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-\mu^2}\right)dx$, ii. $\int R\left(x,\sqrt{x^2+\mu^2}\right)dx$

όπου $R\left(x,\sqrt{x^2\pm\mu^2}\right)$ ρητή συνάρτηση των x, $\sqrt{x^2\pm\mu^2}$.

Και στις δύο περιπτώσεις αντικαθιστούμε τα ριζικά με $t-x$. Έτσι έχουμε:

i) $\sqrt{x^2-\mu^2}=t-x \Rightarrow x^2-\mu^2=t^2+x^2-2tx \Rightarrow x=\frac{t^2+\mu^2}{2t}$

άρα $\sqrt{x^2-\mu^2}=t-\frac{t^2+\mu^2}{2t}=\frac{t^2-\mu^2}{2t}$. Διαφορίζοντας τη σχέση $x=\frac{t^2+\mu^2}{2t}$ προκύπτει $dx=\frac{2t\cdot 2t-(t^2+\mu^2)\cdot 2}{4t^2}dt=$ $=\frac{t^2-\mu^2}{2t^2}dt$, οπότε καταλήγουμε σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης ως προς t.

ii) $\sqrt{x^2+\mu^2}=t-x \Rightarrow x^2+\mu^2=t^2+x^2-2tx \Rightarrow x=\frac{t^2-\mu^2}{2t}$

άρα $\sqrt{x^2+\mu^2}=t-\frac{t^2-\mu^2}{2t}=\frac{t^2+\mu^2}{2t}$. Διαφορίζοντας τη σχέση $x=\frac{t^2-\mu^2}{2t}$ προκύπτει $dx=\frac{2t\cdot 2t-(t^2-\mu^2)\cdot 2}{4t^2}dt=$ $=\frac{t^2+\mu^2}{2t^2}dt$ και καταλήγουμε πάλι σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης ως προς t.

Η δεύτερη περίπτωση μπορεί να αντιμετωπισθεί και διαφορετικά. Θέτουμε $x=\mu\cdot\text{εφ}\omega$ οπότε $dx=\mu(1+\text{εφ}^2\omega)d\omega$. Επίσης $\sqrt{x^2+\mu^2}=\sqrt{\mu^2\text{εφ}^2\omega+\mu^2}=\mu\sqrt{1+\text{εφ}^2\omega}=\frac{\mu}{\text{συν}\omega}$, και το ολοκλήρωμα ανάγεται σε υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παραδείγματα.

1). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$

Το ολοκλήρωμα γράφεται $\int \frac{dx}{\sqrt{3(x^2-\frac{2}{3})}}$ ή ακόμα

$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}}$. Θέτουμε $\sqrt{x^2-\frac{2}{3}} = t-x$ και έχουμε

$x^2-\frac{2}{3} = t^2+x^2-2tx$ ή $x = \frac{t^2+\frac{2}{3}}{2t}$ και $dx = \frac{t^2-\frac{2}{3}}{2t^2}dt$,

$\sqrt{x^2-\frac{2}{3}} = t - \frac{t^2+\frac{2}{3}}{2t} = \frac{t^2-\frac{2}{3}}{2t}$. Αντικαθιστώντας το ριζικό και το διαφορικό dx προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{t^2-2/3}{2t^2}dt}{\frac{t^2-2/3}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\log|t| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}+x\right| + c$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

Το ολοκλήρωμα γράφεται $\int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2+\frac{3}{2})}}$ ή ακόμα

$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}}$. Θέτουμε $\sqrt{x^2+\frac{3}{2}} = t-x$ και έχουμε

$x^2+\frac{3}{2} = t^2+x^2-2tx$ ή $x = \frac{t^2-\frac{3}{2}}{2t}$ και $dx = \frac{t^2+\frac{3}{2}}{2t^2}dt$,

$\sqrt{x^2+\frac{3}{2}} = t - \frac{t^2-\frac{3}{2}}{2t} = \frac{t^2+\frac{3}{2}}{2t}$. Αντικαθιστώντας το ριζικό και το διαφορικό dx προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{t^2+\frac{3}{2}}{2t^2}dt}{\frac{t^2+\frac{3}{2}}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log|t| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}+x\right| + c.$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Θέτουμε $x = 2εφω$, $dx = 2\frac{dω}{συν^2ω}$, $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{1+εφ^2ω} = 2\frac{1}{συνω}$. Αντικαθιστώντας το x^2, dx και το ριζικό στο αρχικό ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\int \frac{\frac{2\,dω}{συν^2ω}}{\frac{4ημ^2ω}{συν^2ω}\cdot\frac{2}{συνω}} = \frac{1}{4}\int\frac{συνω\,dω}{ημ^2ω} = \frac{1}{4}\int\frac{d(ημω)}{ημ^2ω} =$$

$$= \frac{1}{4}\int ημ^{-2}ω\,d(ημω) = \frac{1}{4}\,\frac{ημ^{-2+1}ω}{-2+1} = -\frac{1}{4ημω}.$$

Στην σχέση αυτή που φτάσαμε για να αντικαταστήσουμε το $ω$ χρησιμοποιούμε δύο τρόπους:

Ή λύνουμε τη σχέση $x = 2εφω$ ως προς το τόξο $ω$ οπότε έχουμε $\frac{x}{2} = εφω$ και $ω = τοξ\,εφ\,\frac{x}{2}$

Ή αντικαθιστούμε ολόκληρο το $ημω$ συναρτήσει της $εφω$, απ' τον τύπο $ημω = \frac{εφω}{\sqrt{1+εφ^2ω}} = \frac{x/2}{\sqrt{1+(x/2)^2}}$.

Έτσι το τελικό ολοκλήρωμα θα είναι

$$-\frac{1}{4ημ(τοξ\,εφ\,\frac{x}{2})} + c = -\frac{\sqrt{1+(x/2)^2}}{4\cdot x/2} + c$$

6. Μορφή: $\int R(x, \sqrt{μ^2-x^2})$, όπου $R(x, \sqrt{μ^2-x^2})$ είναι ρητή συνάρτηση των x, $\sqrt{μ^2-x^2}$.

Εδώ κάνουμε πάντα την αντικατάσταση $x = μ\cdot ημω$ οπότε $dx = μ\,συνω\,dω$, $\sqrt{μ^2-x^2} = μ\sqrt{1-ημ^2ω} = μ\,συνω$ δηλαδή το αρχικό ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Θέτουμε $x = 2\,ημω$, $dx = 2\,συνω\,dω$, $\sqrt{4-x^2} = 2\,συνω$. Άρα

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{4ημ^2ω+2ημω+1}{2συνω}\cdot 2συνω\,dω =$$

$$= \int (4ημ^2ω+2ημω+1)\,dω = 4\int ημ^2ω\,dω + 2\int ημω\,dω + \int dω =$$

$= 4\int ημ^2ω\,dω - 2συνω + ω$. Υπολογίζουμε τώρα το $\int ημ^2ω\,dω$

Απ' την Τριγωνομετρία ξέρουμε ότι $ημ^2ω = \dfrac{1-συν2ω}{2}$. Άρα

$$\int ημ^2ω\,dω = \int \frac{1-συν2ω}{2}\,dω = \int \frac{dω}{2} - \int \frac{συν2ω\,dω}{2} =$$

$$= \frac{ω}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{συν2ω\,d(2ω)}{2} = \frac{ω}{2} - \frac{1}{4}\,ημ2ω = \frac{ω}{2} - \frac{2ημω\,συνω}{4} =$$

$= \dfrac{ω}{2} - \dfrac{ημω\cdot συνω}{2}$. (Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε αναγωγικούς τύπους με τους οποίους υπολογίζονται τα ολοκληρώματα $\int ημ^ν x\,dx$, $\int συν^ν x\,dx$ $ν \geq 2$). Έτσι έχουμε τελικά

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3ω - 2ημω\,συνω - 2συνω =$$

$$= 3\,τοξημ\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \sqrt{4-x^2} + c$$

(απ' τη σχέση $x = 2ημω \Rightarrow ημω = \dfrac{x}{2} \Rightarrow ω = τοξημ\dfrac{x}{2}$)

7. Μορφή: $\int R\left(x, \sqrt{αx^2+βx+γ}\right)dx$ όπου $R\left(x, \sqrt{αx^2+βx+γ}\right)$ ρητή συνάρτηση των x, $\sqrt{αx^2+βx+γ}$.

Όπως είναι γνωστό από τη στοιχειώδη Άλγεβρα,

$$αx^2+βx+γ = α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{β^2-4αγ}}{2α}\right)^2\right] \quad \text{όταν } β^2-4αγ>0$$

$$αx^2+βx+γ = α\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2 \quad \text{όταν } β^2-4αγ=0$$

$$α^2+βx+γ = α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4αγ-β^2}}{2α}\right)^2\right] \quad \text{όταν } β^2-4αγ<0$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

$1^{η}$ περίπτωση όταν $α>0$.

α) Αν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, θέτουμε $\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\mu$, $x+\frac{\beta}{2\alpha}=t$ οπότε $x=t-\frac{\beta}{2\alpha}$ και $dx=dt$. Το ολοκλήρωμα γίνεται τότε $\int R\left(t-\frac{\beta}{2\alpha}, \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{t^2-\mu^2}\right)dt=\int R_1\left(t,\sqrt{t^2-\mu^2}\right)dt$ δηλαδή παίρνει τη μορφή 5i.

β) Αν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ τότε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha}\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ δηλαδή η συνάρτηση R είναι ρητή συνάρτηση του x.

γ) Αν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ η συνάρτηση R γίνεται όπως και στην α περίπτωση $R_1\left(t,\sqrt{t^2+\mu^2}\right)$ και το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή 5ii.

2η περίπτωση όταν $\alpha<0$

α) Αν $\beta^2-4\alpha\gamma\leq 0$ τότε το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γίνεται αρνητικό για $\forall x\in R$, επομένως το ριζικό δεν ορίζεται

β) Αν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=(-\alpha)\left[\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2-\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right] \text{ όπου } -\alpha>0$$

Θέτουμε $\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\mu$, $x+\frac{\beta}{2\alpha}=t$ οπότε $x=t-\frac{\beta}{2\alpha}$ και $dx=dt$, $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\mu^2-t^2}$ άρα

$$\int R\left(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)dx=\int R\left(t-\frac{\beta}{2\alpha},\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\mu^2-t^2}\right)dt=$$
$=\int R_1\left(t,\sqrt{\mu^2-t^2}\right)dt$ δηλαδή παίρνει τη μορφή 6.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

Το τριώνυμο στο ριζικό x^2+x-1 γράφεται

$$x^2+x-1=x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

Θέτουμε $x+\frac{1}{2}=t$ οπότε $x=t-\frac{1}{2}$, $dx=dt$ και το ολοκλήρωμα γράφεται $\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}$. Ακολουθούμε τώρα τον τρόπο επίλυσης ολοκληρωμάτων της μορφής 5i.

Θέτουμε $\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}=\omega-t$ οπότε $t^2-\frac{5}{4}=\omega^2+t^2-2\omega t$ ή

$t=\frac{\omega^2+\frac{5}{4}}{2\omega}$, $\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}=\omega-\frac{\omega^2+5/4}{2\omega}=\frac{\omega^2-\frac{5}{4}}{2\omega}$,

$dt=\frac{\omega^2-5/4}{2\omega^2}d\omega$, $t-\frac{1}{2}=\frac{\omega^2+5/4}{2\omega}-\frac{1}{2}=\frac{\omega^2-\omega+5/4}{2\omega}$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται με τις αντικαταστάσεις

$$\int \frac{\frac{\omega^2-5/4}{2\omega^2}\,d\omega}{\frac{\omega^2-\omega+5/4}{2\omega}\cdot\frac{\omega^2-5/4}{2\omega}}=2\int\frac{d\omega}{\omega^2-\omega+5/4}=2\int\frac{d\left(\omega-\frac{1}{2}\right)}{\left(\omega-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

επειδή $\omega^2-\omega+5/4=\omega^2-2\omega\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\left(\omega-\frac{1}{2}\right)^2+1$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι $2\,\text{τοξεφ}\left(\omega-\frac{1}{2}\right)=$

$=2\,\text{τοξεφ}\left(\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}+t-\frac{1}{2}\right)=2\,\text{τοξεφ}\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)+c$

2) Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2+4x+4}}$.

Εδώ είναι $\alpha=-1<0$ και $\beta^2-4\alpha\gamma=16+4\cdot4=32>0$. Άρα

$-x^2+4x+4=-x^2+2\cdot x\cdot 2-4+4+4=8-(x^2-4x+4)=$

$=8-(x-2)^2$. Θέτουμε $x-2=t$ οπότε $x=t+2$, $dx=dt$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$\int\frac{(t+2)\,dt}{\sqrt{8-t^2}}$ δηλ. ολοκλήρωμα της μορφής 6.

Θέτουμε $t=\sqrt{8}\,\text{ημ}\omega$, $dt=\sqrt{8}\,\text{συν}\omega\,d\omega$,

$\sqrt{8-t^2}=\sqrt{8}\sqrt{1-\text{ημ}^2\omega}=\sqrt{8}\,\text{συν}\omega$ και έχουμε

$$\int\frac{(t+2)\,dt}{\sqrt{8-t^2}}=\int\frac{(2+\sqrt{8}\,\text{ημ}\omega)\sqrt{8}\,\text{συν}\omega\,d\omega}{\sqrt{8}\,\text{συν}\omega}=2\int d\omega+\sqrt{8}\int\text{ημ}\omega\,d\omega=$$

$=2\omega-\sqrt{8}\,\text{συν}\omega$. Το ω και $\text{συν}\omega$ αντικαθιστούμε ως εξής

Απ' τη σχέση $t = \sqrt{8}\,ημω \Rightarrow ημω = \dfrac{t}{\sqrt{8}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{8}}$ άρα

$$ω = τοξημ\left(\frac{x-2}{\sqrt{8}}\right)$$

Πάλι απ' τη σχέση $t = \sqrt{8}\,ημω \Rightarrow t^2 = 8ημ^2ω = 8(1-συν^2ω)$

οπότε $8συν^2ω = 8-t^2$ και $συνω = \dfrac{\sqrt{8-t^2}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{-x^2+4x+4}}{\sqrt{8}}$

Άρα το τελικό ολοκλήρωμα γίνεται μετά τις αντικαταστάσεις $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-x^4+4x+4}} = 2τοξημ\left(\frac{x-2}{\sqrt{8}}\right) - \sqrt{-x^2+4x+4} + c$

8. Μορφή: $\int R\left(x, \sqrt{ax+β}, \sqrt{γx+δ}\right)dx$, όπου $R\left(x, \sqrt{ax+β}, \sqrt{γx+δ}\right)$ ρητή συνάρτηση του x και των ριζικών

Θέτουμε ένα από τα δύο ριζικά ίσο με t π.χ. $\sqrt{γx+δ} = t$ οπότε $x = \dfrac{t^2-δ}{γ}$, $dx = \dfrac{2t}{γ}dt$ και το άλλο ριζικό γίνεται $\sqrt{ax+β} = \sqrt{\dfrac{at^2-aδ}{γ}+β} = \sqrt{kt^2+λ}$ όπου $k = \dfrac{a}{γ}$, $λ = β - \dfrac{aδ}{γ}$. Δηλαδή το ολοκλήρωμα τελικά ανάγεται σε ολοκλήρωμα της μορφής 5ii.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

Θέτουμε $\sqrt{x+1} = t$ οπότε $x = t^2-1$, $dx = 2t\,dt$ και $\sqrt{x+2} = \sqrt{t^2+1}$. Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2+1}+t}$$ Θέτουμε $\sqrt{t^2+1} = t-ω$

οπότε $t^2+1 = t^2+ω^2-2tω$ ή $t = \dfrac{ω^2-1}{2ω}$, $dt = \dfrac{ω^2+1}{2ω^2}dω$

$\sqrt{t^2+1} = \dfrac{ω^2-1}{2ω} - ω = -\dfrac{ω^2+1}{2ω}$ Συνεπώς έχουμε

$$\int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2+1}+t} = \int \frac{2\,\frac{\omega^2-1}{2\omega}\cdot\frac{\omega^2+1}{2\omega^2}\,d\omega}{-\frac{\omega^2+1}{2\omega}+\frac{\omega^2-1}{2\omega}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\omega^4-1}{\omega^2}\,d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \omega^2 d\omega + \frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega^3}{3} - \frac{1}{2\omega} = -\frac{\omega^3}{6} - \frac{1}{2\omega} + c$$

όπου $\omega = t - \sqrt{t^2+1} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

1.6. Αναγωγικοί τύποι

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης υψωμένης σε δύναμη, οδηγεί πολλές φορές με κατάλληλους μετασχηματισμούς σε ολοκλήρωμα της ίδιας μορφής με το αρχικό αλλά με μικρότερο εκθέτη. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα συναντήσαμε στην παράγραφο 1.4. το $I_\nu = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\nu}$. Στην περίπτωση αυτή με επανειλημμένη εφαρμογή του τύπου που υπολογίσαμε αναγόμαστε τελικά σε γνωστά ολοκληρώματα. Τέτοιοι αναγωγικοί τύποι υπάρχουν σ' όλες τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που υψώνονται σε δύναμη ν. Σ' όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

1) $A_\nu = \int \eta\mu^\nu x\,dx$.

Είναι $A_\nu = \int \eta\mu^{\nu-1}x\cdot\eta\mu x\,dx = -\int \eta\mu^{\nu-1}x\,d(\sigma\upsilon\nu x) =$

$= -\left[\eta\mu^{\nu-1}x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \int \sigma\upsilon\nu x\,d(\eta\mu^{\nu-1}x)\right] = -\eta\mu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x +$

$+(\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu^{\nu-2}x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x +$

$+(\nu-1)\int (1-\eta\mu^2 x)\,\eta\mu^{\nu-2}x\,dx = -\eta\mu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x +$

$$+(\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx \;-\; (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu}x\,dx.$$

Αν θέσουμε $A_{\nu-2} = \int \eta\mu^{\nu-2}x\,dx$ έχουμε

$$A_\nu = -\eta\mu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)A_{\nu-2} - (\nu-1)A_\nu$$

λύνοντας ως προς A_ν την τελευταία εξίσωση έχουμε

$$A_\nu = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}A_{\nu-2}, \quad \nu \geqslant 2.$$

2) $\quad B_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx$

Παρόμοια έχουμε $B_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,d(\eta\mu x) =$

$$= \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x - \int \eta\mu x\,d(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x) = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x\; -$$

$$+(\nu-1)\int \eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\eta\mu x\,dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x\; +$$

$$+(\nu-1)\int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\,\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\,dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x\; +$$

$$+(\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\,dx - (\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx.$$

Θέτοντας πάλι $B_{\nu-2} = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\,dx$ έχουμε

$$B_\nu = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x + (\nu-1)B_{\nu-2} - (\nu-1)B_\nu \quad \text{ή τελικά}$$

$$B_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}B_{\nu-2}$$

3) $\quad \Gamma_\nu = \int \varepsilon\varphi^{\nu}x\,dx$

Είναι $\Gamma_\nu = \int \varepsilon\varphi^{\nu}x\,dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,\dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx =$

$$= \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,dx =$$

$$= \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,d\,\varepsilon\varphi x - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\,dx \quad \text{και τελικά}$$

$$\Gamma_\nu = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \Gamma_{\nu-2}$$

4) $\Delta_\nu = \int \sigma\varphi^\nu x\,dx$

Ανάλογα έχουμε $\Delta_\nu = \int \sigma\varphi^\nu x\,dx = \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\,\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}\,dx =$

$$= \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\,\frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}\,dx = \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\,\frac{dx}{\eta\mu^2 x} - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\,dx =$$

$$= -\int \sigma\varphi^{\nu-2}x\,d(\sigma\varphi x) - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x\,dx$$ και τελικά

$$\Delta_\nu = -\frac{\sigma\varphi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \Delta_{\nu-2}.$$

Παρατηρήσεις

1) Από τους αναγωγικούς τύπους που βρήκαμε για τα $A_\nu = \int \eta\mu^\nu x\,dx$ και $B_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x\,dx$ μπορούμε να υπολογίσουμε και τα $\int \frac{dx}{\eta\mu^\nu x} = \int \eta\mu^{-\nu}x\,dx$ και $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^\nu x} = \int \sigma\upsilon\nu^{-\nu}x\,dx$. Προς τούτο λύνουμε τους αναγωγικούς τύπους των A_ν και B_ν ως προς $A_{\nu-2}$ και $B_{\nu-2}$, όπου όμως τώρα ο ν υποτίθεται αρνητικός και $|\nu| \geq 3$. Έτσι παίρνουμε τελικά

$$A_{\nu-2} = \frac{\eta\mu^{\nu-1}x\,\sigma\upsilon\nu x}{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu-1}A_\nu \quad \text{και}$$

$$B_{\nu-2} = -\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x}{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu-1}B_\nu \qquad |\nu| \geq 3$$

π.χ για $\nu = -5$ θα έχουμε

$$A_{\nu-2} = A_{-7} = \int \eta\mu^{-7}x\,dx \quad \text{και} \quad A_\nu = A_{-5} = \int \eta\mu^{-5}x\,dx$$

$$B_{\nu-2} = B_{-7} = \int \sigma\upsilon\nu^{-7}x\,dx \quad \text{και} \quad B_\nu = B_{-5} = \int \sigma\upsilon\nu^{-5}x\,dx.$$

2) Τα ολοκληρώματα $\int \frac{dx}{\eta\mu x}$ και $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}$ υπολογίζονται κανονικά με τον γενικό τρόπο, θέτοντας $\epsilon\varphi\frac{x}{2} = t$, αφού εκφράσουμε τα $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ συναρτήσει της $\epsilon\varphi\frac{x}{2}$.

3) Όταν ο εκθέτης των ολοκληρωμάτων $\int ημ^{ν}x\,dx$, $\int συν^{ν}x\,dx$ είναι περιττός αριθμός, μπορούν να υπολογιστούν και διαφορετικά ως εξής: Αναλύουμε τον περιττό αριθμητή σε γινόμενο ενός άρτιου και ενός πρωτοβάθμιου όρου τον οποίο και εισάγουμε στο διαφορικό, μετατρέποντας τον άρτιο όρο στον τριγωνομετρικό αριθμό του διαφορικού από τη σχέση $ημ^2x + συν^2x = 1$.

π.χ $\int ημ^5x\,dx = \int ημ^4x \cdot ημx\,dx = -\int ημ^4x\,d(συνx) =$

$= -\int(1-συν^2x)^2 d(συνx) = -\int(1-2συν^2x+συν^4x)\,d(συνx) =$

$= -\int d(συνx) + 2\int συν^2x\,d(συνx) + \int συν^4x\,d(συνx) =$

$= -συνx + 2\dfrac{συν^3x}{3} + \dfrac{συν^5x}{5} + c$

4) Όταν ο εκθέτης των ολοκληρωμάτων $\int ημ^{ν}x\,dx$, $\int συν^{ν}x\,dx$ είναι άρτιος αριθμός, μπορούν να υπολογιστούν και διαφορετικά ως εξής: Χρησιμοποιώντας τον τύπο της Τριγωνομετρίας $συν2x = 2συν^2x - 1 = 1 - 2ημ^2x$ έχουμε

$ημ^2x = \dfrac{1-συν2x}{2}$, $συν^2x = \dfrac{1+συν2x}{2}$, υποβιβάζοντας έτσι τις δυνάμεις του $ημx$ και $συνx$.

π.χ $\int ημ^4x\,dx = \int(ημ^2x)^2dx = \int\left(\dfrac{1-συν2x}{2}\right)^2dx =$

$= \dfrac{1}{4}\int(1-2συν2x+συν^22x)\,dx = \dfrac{1}{4}\int dx - \dfrac{1}{4}\int συν2x\,d(2x) +$

$+ \dfrac{1}{4}\int\dfrac{1+συν4x}{2}dx = \dfrac{x}{4} - \dfrac{ημ2x}{4} + \dfrac{1}{8}\int(1+συν4x)dx =$

$= \dfrac{x}{4} - \dfrac{ημ2x}{4} + \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{32}\int συν4x\,d(4x) =$

$= \dfrac{3x}{8} - \dfrac{ημ2x}{4} + \dfrac{ημ4x}{32} + c.$

5) Όταν έχουμε συνδυασμό γινομένου των $ημx$, $συνx$ σε διαφορετικές δυνάμεις, της μορφής $\int ημ^{κ}x\,συν^{λ}x\,dx$ εφαρμόζουμε την παρακάτω διαδικασία:

α) Αν ένας απ' τους εκθέτες π.χ ο κ είναι περιττός τότε εκφράζουμε το $ημ^κ x$ σαν γινόμενο $ημ^{κ-1}x \cdot ημx$ ($κ-1$ άρτιος) και εισάγουμε το $ημx$ στο διαφορικό σαν $d(-συνx)$, οπότε εκφράζουμε και το $ημ^{κ-1}x$ συναρτήσει του $συνx$ και προκύπτει πολυωνυμικό ολοκλήρωμα.

β) Αν και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι, εκφράζουμε ένα από τους δύο (συνήθως εκείνο με τη μικρότερη δύναμη) συναρτήσει του άλλου και έχουμε τελικά ολοκληρώματα της μορφής $\int ημ^ν x\,dx$ ή $\int συν^ν x\,dx$.

6) Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int ημ(κx)συν(λx)dx$, $\int ημ(κx)ημ(λx)dx$, $\int συν(κx)συν(λx)dx$ εκφράζονται πάντα σε αθροίσματα ή διαφορές ολοκληρωμάτων απ' τους γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας:

$$ημα \cdot συνβ = \frac{1}{2}\left[ημ(α+β) + ημ(α-β)\right]$$
$$ημα \cdot ημβ = \frac{1}{2}\left[συν(α-β) - συν(α+β)\right]$$
$$συνα \cdot συνβ = \frac{1}{2}\left[συν(α+β) + συν(α-β)\right]$$

Παραδείγματα.

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int ημ^4x\, συν^5x\,dx$.

Είναι $\int ημ^4x\, συν^5x\,dx = \int ημ^4x\, συν^4x\, συνx\,dx = \int ημ^4x\, συν^4x\, d(ημx) =$
$= \int ημ^4x\,(1-ημ^2x)^2 d(ημx) = \int ημ^4x\,(1+ημ^4x-2ημ^2x)\,d(ημx) =$
$= \int ημ^4x\, d(ημx) + \int ημ^8x\, d(ημx) - 2\int ημ^6x\, d(ημx) =$
$= \dfrac{ημ^5x}{5} + \dfrac{ημ^9x}{9} - 2\,\dfrac{ημ^7x}{7} + c$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int ημ^2x\, συν^4x\,dx$

Είναι $\int (1-συν^2x)συν^4x\,dx = \int συν^4x\,dx - \int συν^6x\,dx$.

Εκφράζουμε πρώτα το $\int συν^4x\,dx$ με τον αναγωγικό τύπο $B_ν$

Είναι $\int συν^4x\,dx = \dfrac{συν^3x\, ημx}{4} + \dfrac{3}{4}\int συν^2x\,dx =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\ \eta\mu x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu x}{2} + \frac{1}{2}x\right).$$ Επίσης

$$\int \sigma\upsilon\nu^6 x\, dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x\ \eta\mu x}{6} + \frac{5}{6}\int \sigma\upsilon\nu^4 x\, dx =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x\ \eta\mu x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\ \eta\mu x}{4} + \frac{3}{8}\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{8}x\right).$$ Άρα

$$\int \sigma\upsilon\nu^4 x\, dx - \int \sigma\upsilon\nu^6 x\, dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x\ \eta\mu x}{6} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\ \eta\mu x}{24} +$$
$$+ \frac{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}{16} + \frac{x}{16} + c$$

3) Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 5x\, dx$.

Είναι $2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ Άρα

$$\int \sigma\upsilon\nu 4x\,\sigma\upsilon\nu 5x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sigma\upsilon\nu 4x\,\sigma\upsilon\nu 5x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sigma\upsilon\nu 9x + \sigma\upsilon\nu x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 9x\, dx + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu x\, dx = \frac{1}{18}\int \sigma\upsilon\nu 9x\, d(9x) + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu x\, dx =$$
$$= \frac{1}{18}\eta\mu 9x + \frac{1}{2}\eta\mu x + c.$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$, β) $\int \frac{dx}{x^2-9}$, γ) $\int \frac{dx}{x^3+x}$,

δ) $\int \frac{dx}{x^4-1}$, ε) $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$, στ) $\int \frac{(x+1)dx}{2x^2-3x+1}$,

ζ) $\int \frac{dx}{x^3+1}$, η) $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$, θ) $\int \frac{dx}{x^2+x^3}$

ι) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3-x^2-2x}$, κ) $\int \frac{(3x^2+x-2)dx}{(x-1)(x^2+1)}$, λ) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3}$

2) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$, β) $\int \frac{e^{3x}+e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}dx$, γ $\int \frac{dx}{e^x(e^x+1)^2}$, δ) $\int \frac{dx}{e^{x}(3+e^{-x})}$, ε) $\int \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}dx$, στ) $\int e^{x}\sqrt{1-e^{x}}\,dx$

3) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{ημ^{3}x\,συνx}$, β) $\int \frac{1+ημ^{2}x}{συν^{2}x}dx$, γ) $\int \frac{dx}{1+3συνx}$

δ) $\int \frac{συν2x\,dx}{ημ^{2}x\,συν^{2}x}$, ε) $\int \frac{dx}{συν\frac{x}{2}}$, στ) $\int \frac{dx}{3εφx-2}$

ζ) $\int \frac{dx}{εφ^{2}x}$, η) $\int συν^{3}(2x+3)\,dx$, θ) $\int \frac{εφ^{3}x}{συν^{4}x}dx$

4) Επίσης τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$, β) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, γ) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

δ) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$, ε) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$, στ) $\int \frac{1}{x(x-2)}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x}}\,dx$

5) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{x^{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$, β) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$, γ) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

6) Θέτοντας $x=αεφt$, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{(α^{2}+x^{2})^{2}}$, β) $\int \frac{dx}{\sqrt{α^{2}+x^{2}}}$, γ) $\int \frac{\sqrt{α^{2}+x^{2}}}{x}dx$

7) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{x^{2}dx}{\sqrt{x^{2}-4}}$, β) $\int \frac{x^{2}dx}{\sqrt{4-x^{2}}}$, γ) $\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x^{2}+1}}$

8) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

α) $\int (2x+3)\sqrt{x^2-3x+2}\,dx$, β) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$, γ) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

δ) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$, ε) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$, στ) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+4)}}$

9) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$, β) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}$, γ) $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}dx$

10) Να βρεθούν οι αναγωγικοί τύποι για τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $I_\nu = \int \log^\nu x\,dx$ $\left(\text{Απ. } I_\nu = \log^\nu x - \nu I_{\nu-1}\right)$

β) $I_\nu = \int e^{-x}x^\nu dx$ $\left(\text{Απ. } I_\nu = e^{-x}x^\nu + \nu I_{\nu-1},\ \nu \geq 1\right)$

γ) $I_\nu = \int (\text{τοξημ}x)^\nu dx$

$$\left(\text{Απ. } I_\nu = x(\text{τοξημ}x)^\nu + \nu\sqrt{1-x^2}(\text{τοξημ}x)^{\nu-1} - \nu(\nu-1)I_{\nu-2},\quad \nu \geq 2\right).$$

δ) $I_\nu = \int x^\nu \text{συν}x\,dx$

$\left(\text{Απ. } I_\nu = x^\nu \text{ημ}x + \nu x^{\nu-1}\text{συν}x - \nu(\nu-1)I_{\nu-2}\right)$

ε) $I_\nu = \int x^\nu \text{ημ}x\,dx$

$\left(\text{Απ. } I_\nu = -x^\nu \text{συν}x + \nu x^{\nu-1}\text{ημ}x - \nu(\nu-1)I_{\nu-2}\right)$

Β. ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1.7. Ορισμοί

Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Διαιρούμε το διάστημα αυτό σε ν υποδιαστήματα τα $l_1, l_2, \cdots, l_\nu$ παρεμβάλλοντας $\nu-1$ σημεία τα $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{\nu-1}$, όπου $\alpha < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{\nu-1} < \beta$ και θέτουμε $\alpha = \xi_0$ και $\beta = \xi_\nu$. Συμβολίζουμε το μήκος του υποδιαστήματος l_1 με $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$, του l_2 με $\Delta_2 x = \xi_2 - \xi_1, \cdots$, του l_ν με $\Delta_\nu x = \xi_\nu - \xi_{\nu-1}$. Σε κάθε υποδιάστημα εκλέγουμε ένα σημείο, x_1 στο $\Delta_1 x$, x_2 στο $\Delta_2 x, \cdots, x_\nu$ στο $\Delta_\nu x$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_\kappa)\Delta_\kappa x = f(x_1)\Delta_1 x + f(x_2)\Delta_2 x + \cdots + f(x_\nu)\Delta_\nu x$$

Έστω λ_ν το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος που εμφανίζεται στο άθροισμα S_ν. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των υποδιαστημάτων αυξάνεται απεριόριστα, έτσι ώστε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 0$. Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει το

$$\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_\kappa)\Delta_\kappa x$$

και είναι το ίδιο ανεξάρτητα απ' τον τρόπο υποδιαίρεσης του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ και την εκλογή των σημείων x_κ εφόσον το $\lambda_\nu \to 0$. Το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu$ λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** (ή ολοκλήρωμα κατά Riemann) της συνάρτησης $f(x)$ και συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Οι αριθμοί α και β λέγονται κατώτερο και ανώτερο όριο του ολοκληρώματος.

1.8. Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο συνεχείς συναρτήσεις στο κοινό διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$. Τότε με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

1) $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

2) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

3) $\int_\alpha^\beta k f(x)dx = k\int_\alpha^\beta f(x)dx$ όπου k σταθερή

4) $\int_\alpha^\beta \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \pm \int_\alpha^\beta g(x)dx$

5) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ όταν $\alpha<\gamma<\beta$

6) $\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta-\alpha)f(\xi)$ όπου $\alpha \leq \xi \leq \beta$

Η ιδιότητα 6. είναι γνωστή και σαν θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Αν το πέρας β του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται, τότε σε κάθε τιμή t του β, αντιστοιχεί και μια τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος η $\int_\alpha^t f(x)dx$. Έτσι δημιουργείται μια συνάρτηση για το ορισμένο ολοκλήρωμα που τη συμβολίζουμε με $F(t)$

δηλ. $F(t) = \int_{\alpha}^{t} f(x)dx$. Αποδεικνύεται ότι

$$[F(t)]' = f(t).$$

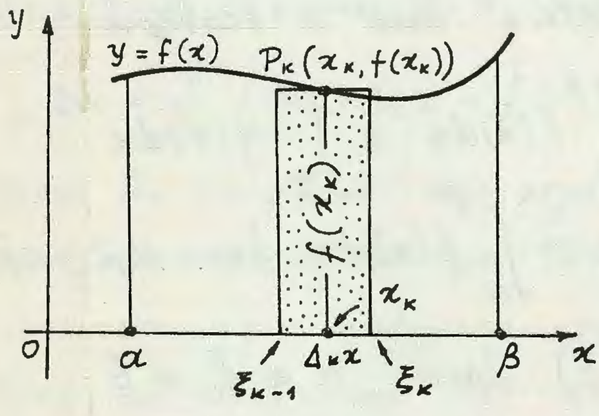
Με βάση την παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

"Αν $f(x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$, δηλ. $\int f(x)dx = F(x)$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)"$$

Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος.

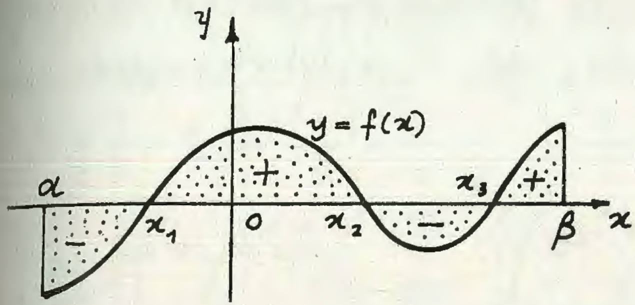
Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση συνεχής και μη αρνητική, δηλ. $f(x) \geq 0$, ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Έστω $\Delta_\kappa x$ μια από τις υποδιαιρέσεις του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και x_κ σημείο του διαστήματος αυτού. Αν $f(x_\kappa)$ η τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$ για $x = x_\kappa$ το $f(x_\kappa)$ παριστάνει το ύψος της ορθογώνιας λωρίδας με βάση το διάστημα $\Delta_\kappa x$. Δηλαδή το γινόμενο $f(x_\kappa)\Delta_\kappa x$ παριστάνει το εμβαδό της λωρίδας αυτής. Όταν το μήκος του διαστήματος αυτού τείνει στο 0 και αθροίσουμε όλα τα γινόμενα $f(x_\kappa)\Delta_\kappa x$, τότε θα πάρουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Επομένως γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς μη αρνητικής συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο διάστημα $[\alpha,\beta]$



Σχήμα 1

εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$, απ' τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ και από τον άξονα ox (Σχήμα 1).

Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, π.χ. στα σημεία x_1, x_2, x_3 όπως φαίνεται στο σχήμα 2, όπου $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < \beta$, τότε το χωρίο χωρίζεται σε μέρη τα οποία βρίσκονται άλλα μεν πάνω του ox άλλα κάτω αυτού. Και το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{\beta} f(x)dx$ ισούται προφανώς με το αλγεβρικό άθροισμα των προσημασμένων εμβαδών των μερών αυτού.

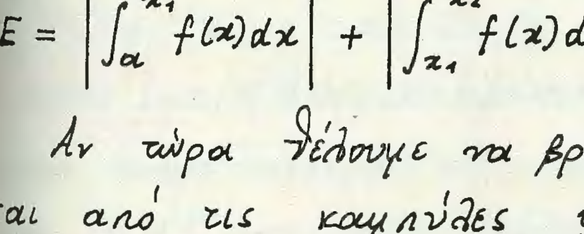


Σχ. 2

Αν όμως θέλουμε το εμβαδόν του χωρίου χωρίς το πρόσημο τότε θα έχουμε:

$$E = \left|\int_\alpha^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{\beta} f(x)dx\right|$$

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε το χωρίο που περιορίζεται από τις καμπύλες $y_1 = f_1(x)$ και $y_2 = f_2(x)$ και από τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ όπου $f_2(x) \leq f_1(x)$ για $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε προφανώς το εμβαδό του χωρίου αυτού θα είναι

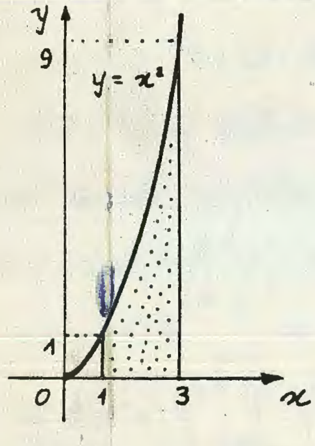


Σχ.3

$$E = \int_\alpha^\beta \left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx.$$

Παραδείγματα - Εφαρμογές

1) Να βρεθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ της καμπύλης $y = x^2$, του άξονα οx και των ευθειών $x = 1$ και $x = 3$.



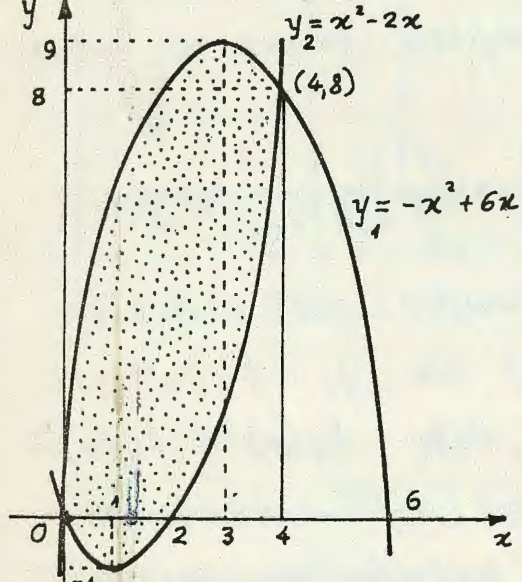
Σx.4

Το ζητούμενο εμβαδό είναι η εστιγμένη επιφάνεια και δίνεται όπως ξέρουμε από τη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος απ' το ολοκλήρωμα

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

τετραγωνικές μονάδες. (Η ολοκλήρωση έγινε κατά τον άξονα των x).

2) Να βρεθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ της παραβολής $y_1 = -x^2+6x$ και της παραβολής $y_2 = x^2-2x$.



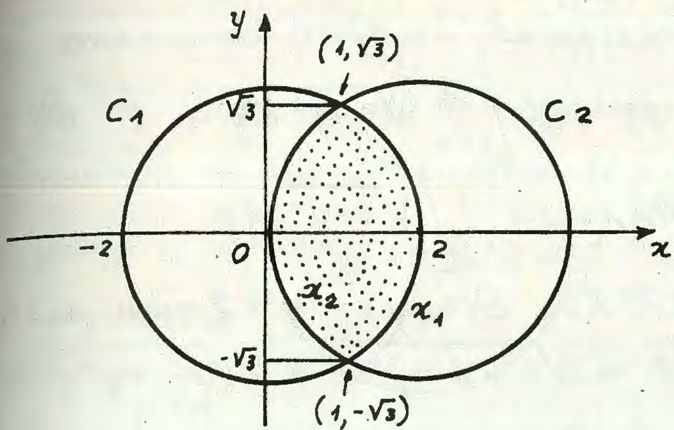
Σx. 5

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων των παραβολών βρίσκουμε $x=0$ και $x=4$ που δίνουν αντίστοιχα $y=0$ και $y=8$. Επομένως τα σημεία τομής των παραβολών είναι τα $(0,0)$ και $(4,8)$. Απ' τις γραφικές παραστάσεις των παραβολών φαίνεται ότι $x^2-2x \leq -x^2+6x$ για $\forall x \in [0,4]$. Άρα το εστιγμένο εμβαδό υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^4 (y_1 - y_2)dx =$

$$\int_0^4 (-2x^2+8x)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_0^4 = \left(-\frac{2}{3}\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2\right) - 0 = \frac{64}{3} \text{ τ.μ.}$$

3) Να βρεθεί η κοινή επιφάνεια των κύκλων

$C_1: x^2+y^2=4, \quad C_2: x^2+y^2=4x.$



Σχ. 6

Ο κύκλος c_1 έχει κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα 2, ενώ ο κύκλος c_2 έχει κέντρο το σημείο (2,0) και ακτίνα 2. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων των κύκλων βρίσκουμε τα κοινά σημεία τομής τους που είναι τα $(1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$. Φέρνοντας τις ευθείες $y=\sqrt{3}$ και $y=-\sqrt{3}$ παρατηρούμε ότι το κοινό εμβαδό που θέλουμε να υπολογίσουμε αποτελείται από το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $y=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$, του άξονα των y και του κύκλου C_1, μείον το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $y=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$ του άξονα των y και του κύκλου C_2.

Επομένως θα λύσουμε τις εξισώσεις των κύκλων ως προς x (θεωρώντας το y σαν ανεξάρτητη μεταβλητή) και θα ολοκληρώσουμε κατά τον άξονα των y.

Η εξίσωση του κύκλου c_1 δίνει $x^2=4-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$ και επειδή μας ενδιαφέρει το θετικό μέρος του c_1 παίρνουμε τη συνάρτηση $x_1=\sqrt{4-y^2}$. Η εξίσωση του κύκλου c_2 δίνει $x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{4-y^2}$ και επειδή μας ενδιαφέρει το μέρος του c_2 που περιέχει τα μικρότερα x παίρνουμε τη συνάρτηση $x_2=2-\sqrt{4-y^2}$. Επομένως το ορισμένο ολοκλήρωμα θα είναι $E=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x_1-x_2)\,dy=$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} - (2 - \sqrt{4-y^2}) \right) dy = 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} - 1 \right) dy$$ ή

επειδή το εμβαδό είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα ox

$$E = 4\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} - 1 \right) dy. = 4\left[\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2}\, dy - \int_0^{\sqrt{3}} dy \right].$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{4-y^2}\, dy$

Είναι της μορφής 6. σελ. 25. Θέτουμε $y = 2\,ημω$ οπότε $dy = 2\,συνω\,dω$ και $\sqrt{4-y^2} = \sqrt{4 - 4ημ^2ω} = 2\sqrt{1-ημ^2ω} = 2\,συνω$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \sqrt{4-y^2}\, dy = \int 2συνω \cdot 2συνω\, dω = \int 4συν^2ω\, dω = 4\int συν^2ω\, dω =$$

$$= 4\left(\frac{συνω\, ημω}{2} + \frac{ω}{2} \right) = 2\,ημω\,συνω + 2ω.$$ Όμως

απ' τη σχέση $y = 2ημω \Rightarrow ημω = \frac{y}{2}$ και $ω = τοξημ\frac{y}{2}$

Επίσης $2ημω \cdot συνω = \frac{1}{2} \cdot 2ημω \cdot 2συνω = \frac{y}{2} \cdot \sqrt{4-y^2}$.

Άρα $\int \sqrt{4-y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\,τοξημ\frac{y}{2}$.

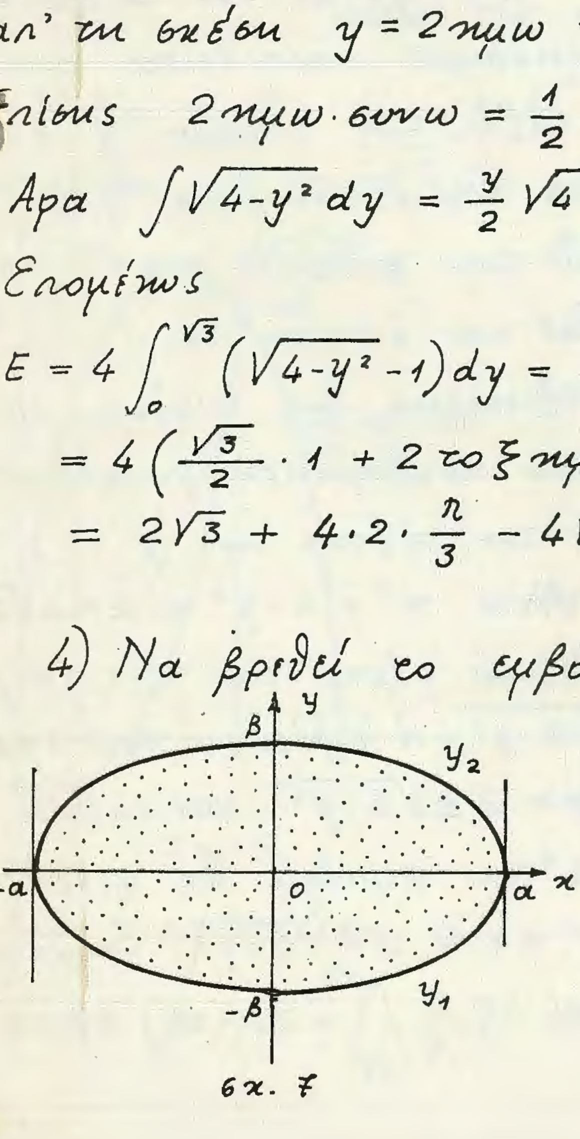
Επομένως

$$E = 4\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} - 1 \right) dy = 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\,τοξημ\frac{y}{2} - y \right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 2\,τοξημ\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right) - (0 + 2 \cdot 0 - 0) =$$

$$= 2\sqrt{3} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{π}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{8π}{3} - 2\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$$

4) Να βρεθεί το εμβαδό της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1$.



σχ. 7

Το εμβαδό της έλλειψης μπορεί να θεωρηθεί ότι περικλείεται από τις ευθείες $x = α$, $x = -α$ και από τις καμπύλες y_2 και y_1 όπου

$y_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ και $y_2 = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ αν λυθεί ως προς y. (Η καμπύλη y_1 έχει τεταγμένες αρνητικές, ενώ η y_2 έχει θετικές για $\forall x \in [-\alpha,\alpha]$).

Άρα $E = \int_{-\alpha}^{\alpha}(y_2-y_1)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)\right]dx =$

$= \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$. Το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$ υπολογίζεται όπως ακριβώς και το προηγούμενο, θέτοντας $x = \alpha\eta\mu\omega$. Έτσι $\int\sqrt{\alpha^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}$

Άρα $\frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} = \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$

$= \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu 1 - \frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu(-1)\right] =$

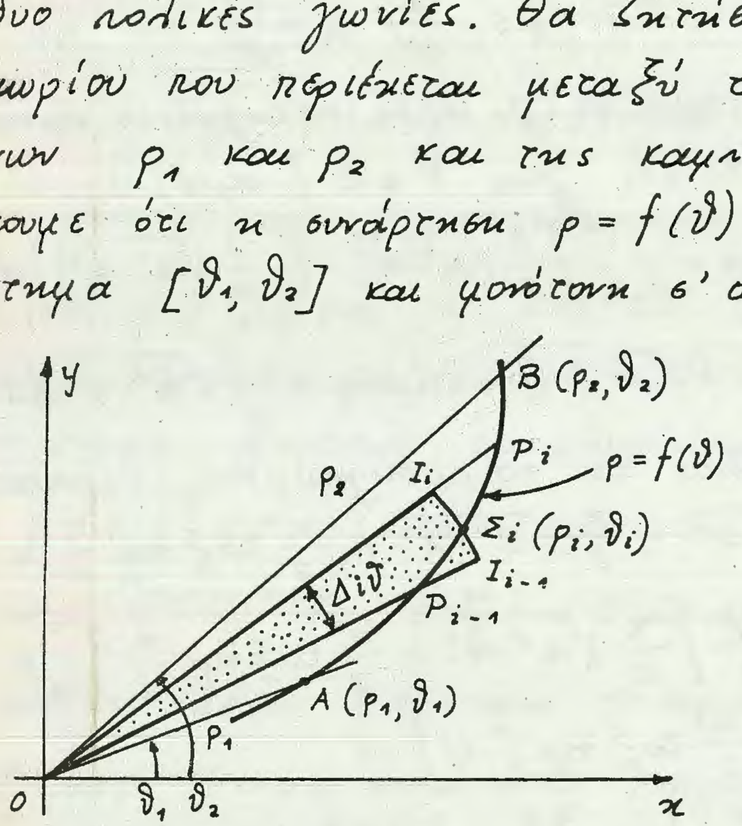
$= \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2\beta}{\alpha}\cdot\frac{2\pi\alpha^2}{4} = \pi\cdot\alpha\cdot\beta$

1.9. Εφαρμογές ορισμ. ολοκληρώματος

Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας καμπύλης $y = f(x)$ προκύπτουν διάφορες εφαρμογές του στον υπολογισμό εμβαδών, μήκους μιας καμπύλης, όγκων επιφανειών εκ περιστροφής κ.τ.λ. Θα αναφέρουμε μερικές τέτοιες εφαρμογές του.

α) Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Έστω $\rho = f(\vartheta)$ μια καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες και $A(\rho_1,\vartheta_1)$, $B(\rho_2,\vartheta_2)$ δύο σημεία της καμπύλης με $\rho=\rho_1$, $\rho=\rho_2$ δύο πολικές ακτίνες και $\vartheta=\vartheta_1$, $\vartheta=\vartheta_2$ δύο πολικές γωνίες. Θα ζητήσουμε το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των δύο πολικών ακτίνων ρ_1 και ρ_2 και της καμπύλης $\rho=f(\vartheta)$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\rho=f(\vartheta)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ και μονότονη σ' αυτό π.χ. αύξουσα.



Σχ. 8

Χωρίζουμε τη γωνία AOB σε ν υποδιαιρέσεις με τις πολικές ακτίνες $OP_0 = OA$, OP_1, OP_2, $\cdots$, OP_{i-1}, OP_i, $\cdots$, $OP_{\nu-1}$, $OP_\nu = OB$. Στο σχήμα 8 φαίνεται ένας αντιπροσωπευτικός τομέας $P_{i-1}OP_i$ γωνίας $\Delta i\vartheta$ και ο αντίστοιχος κυκλικός τομέας $I_{i-1}OI_i$ ακτίνας ρ_i με $\Sigma_i(\rho_i, \vartheta_i)$ εσωτερικό σημείο του τμήματος $P_{i-1}P_i$ της καμπύλης $\rho=f(\vartheta)$. Όπως ξέρουμε απ' τη Γεωμετρία, το εμβαδό ενός κυκλικού τομέα ακτίνας R και γωνίας ω (σε ακτίνια) είναι $E_{\kappa.\tau.} = \frac{1}{2}R^2\omega$. Δηλαδή το εμβαδό του κυκλικού τομέα $I_{i-1}OI_i$ θα είναι $\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta i\vartheta = \frac{1}{2}\left(f(\vartheta_i)\right)^2\Delta i\vartheta$. Όταν η γωνία $\Delta i\vartheta$ (σε ακτίνια) γίνει πολύ μικρή έτσι ώστε $\lim \Delta i\vartheta = 0$, κι αυτό γίνεται όταν οι υποδιαιρέσεις της γωνίας γίνουν πάρα πολλές οπότε το $\nu\to\infty$, τότε το εμβαδό του κυκλικού τομέα $I_{i-1}OI_i$ είναι ισοδύναμο με το εμβαδό του τομέα $P_{i-1}OP_i$ οπότε το εμβαδό που ζητάμε θα είναι

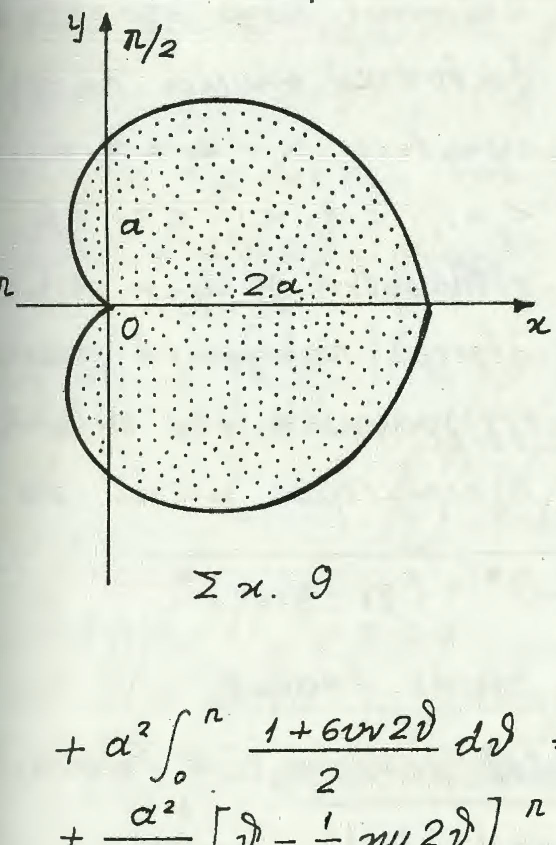
$$E = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2} \left(f(\vartheta_i)\right)^2 \Delta_i \vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1}{2} \left(f(\vartheta)\right)^2 d\vartheta =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \rho^2(\vartheta)\, d\vartheta .$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και όταν η $\rho = f(\vartheta)$ δεν είναι μονότονη σ' όλο το διάστημα $[\vartheta_1, \vartheta_2]$ αλλά μονότονη σε πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων αυτού.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το εμβαδό της καρδιοειδούς καμπύλης με εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες $\rho = \alpha(1+\text{συν}\vartheta)$

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > 0$, τότε στο διάστημα $[0, \pi]$ η $\rho = \alpha(1+\text{συν}\vartheta)$ είναι μονότονη (φθίνουσα). Λόγω συμμετρίας όπως φαίνεται στο σχήμα 9 αν υπολογίσουμε το πάνω μέρος, τότε το συνολικό εμβαδό θα είναι $E = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(\vartheta)\, d\vartheta =$



Σχ. 9

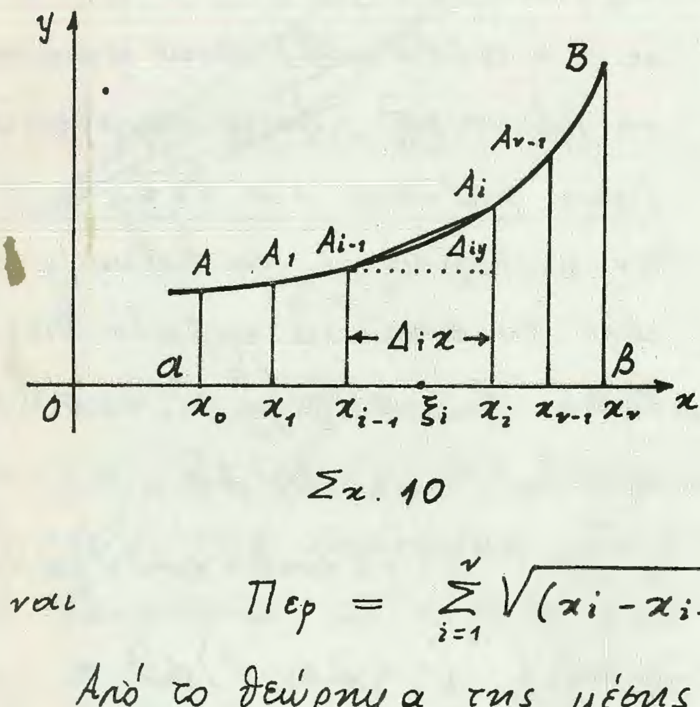
$$= \int_0^{\pi} \alpha^2 (1+\text{συν}\vartheta)^2 d\vartheta =$$
$$= \alpha^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\,\text{συν}\vartheta + \text{συν}^2\vartheta)\, d\vartheta =$$
$$= \alpha^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\,\text{συν}\vartheta)\, d\vartheta +$$
$$+ \alpha^2 \int_0^{\pi} \frac{1+\text{συν}2\vartheta}{2}\, d\vartheta = \alpha^2 \left[\vartheta - 2\,\text{ημ}\vartheta\right]_0^{\pi} +$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2} \left[\vartheta - \frac{1}{2}\,\text{ημ}2\vartheta\right]_0^{\pi} = \alpha^2 \pi + \frac{\alpha^2}{2}\pi = \frac{3\pi\alpha^2}{2} .$$

Η παρακάτω καμπύλη ανήκει στην κατηγορία των επικυκλοειδών και είναι η καμπύλη που γράφει ένα σταθερό σημείο Μ περιφέρειας κύκλου διαμέτρου α, ο οποίος κυλιέται (χωρίς τριβή) στο εξωτερικό ενός άλλου ίσου κύκλου.

β) Μήκος τόξου καμπύλης

Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ με πεπερασμένη παράγωγο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f'(x)$ συνεχή στο $[\alpha,\beta]$.

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη του τόξου της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο αυτού δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα oy και ο συντελεστής κατευθύνσεως της $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση της τετμημένης του σημείου επαφής. Θα ζητήσουμε να υπολογίσουμε το μήκος του τόξου AB της καμπύλης $y=f(x)$.



Σχ. 10

Παίρνουμε πάνω στο τόξο AB διαδοχικά σημεία A_i με τετμημένες $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_\nu = \beta$. Η τεθλασμένη γραμμή $AA_1A_2\cdots$ λέγεται πολυγωνική γραμμή εγγεγραμμένη στο τόξο AB. Η περίμετρος αυτής θα είναι

$$\Pi\varepsilon\rho = \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$y_i - y_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i) \quad \text{όπου} \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

άρα $\Pi\varepsilon\rho = \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [f(\xi_i)]^2}$

Το μήκος L του τόξου AB είναι η περίμετρος της πολυγωνικής γραμμής όταν $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x \to 0$ για $i=1,2,\cdots,\nu$.

Αλλά η συνάρτηση $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ επομένως κατά τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

$$L = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta i x = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Αν η καμπύλη c ορίζεται με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \varphi(t), \quad y = \sigma(t)$$

τότε ως γνωστό η παράγωγος της συνάρτησης y ως x είναι $y'_x = \dfrac{\sigma'(t)}{\varphi'(t)}$ και $dx = \varphi'(t)dt$. Άρα

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+\left[\frac{\sigma'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)dt \quad \text{ή}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\sigma'(t)]^2}\,dt .$$

Ειδικά αν η καμπύλη έχει εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες $\rho = \rho(\vartheta)$, $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ τότε επειδή

$$x = \rho\,\text{συν}\vartheta \quad \text{και} \quad y = \rho\,\text{ημ}\vartheta \quad \text{και}$$

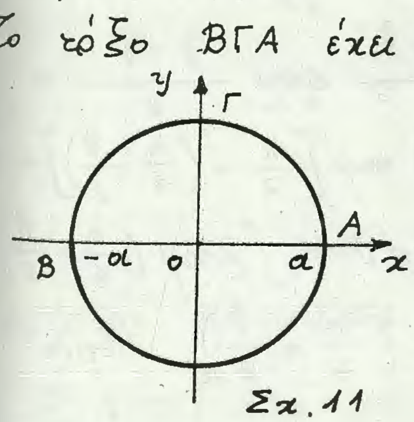
$$\frac{dx}{d\vartheta} = \rho'\text{συν}\vartheta - \rho\,\text{ημ}\vartheta, \quad \frac{dy}{d\vartheta} = \rho'\text{ημ}\vartheta + \rho\,\text{συν}\vartheta, \text{ είναι}$$

$$\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 = (\rho')^2+\rho^2 \quad \text{και επομένως}$$

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\vartheta \quad \left(\rho' = \frac{d\rho}{d\vartheta}\right)$$

Παραδείγματα.

1) Να βρεθεί το μήκος περιφέρειας κύκλου $x^2+y^2=\alpha^2$. Το τόξο ΒΓΑ έχει εξίσωση $y = \sqrt{\alpha^2-x^2}$. Έχουμε



Σχ.11

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \quad \text{και} \quad y'+1 =$$

$$= \frac{x^2}{\alpha^2-x^2}+1 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}. \text{ Άρα}$$

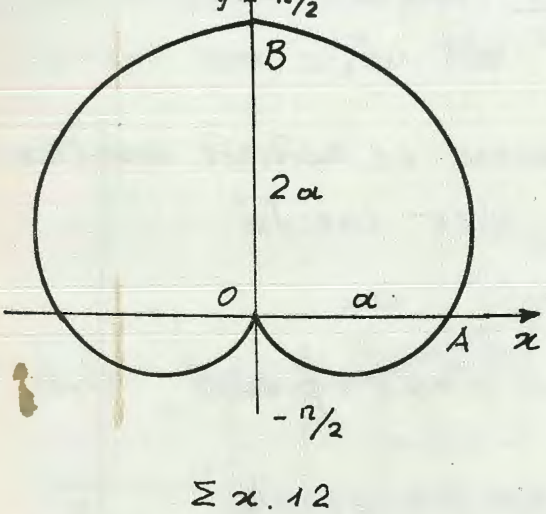
το μήκος του τόξου ΒΑΓ είναι

$$L=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-x^2}}\,dx=\alpha\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=$$

$$=\alpha\,\text{τοξημ}\,\frac{x}{\alpha}\Big|_{-\alpha}^{\alpha}=\alpha\left[\text{τοξημ}\,1-\text{τοξημ}(-1)\right]=\alpha\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$=\pi\cdot\alpha$. Άρα το μήκος της περιφέρειας είναι $2\pi\alpha$.

2) Να βρεθεί το μήκος της καρδιοειδούς $\rho=\alpha(1+\eta\mu\vartheta)$, όπου $\alpha>0$. Εδώ θα εφαρμόσουμε τον τύπο για πολικές συντεταγμένες $L=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\vartheta$.



Σχ. 12

Έχουμε $\frac{d\rho}{d\vartheta}=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$ και

$$\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2=\alpha^2(1+\eta\mu\vartheta)^2+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=$$

$$=\alpha^2(1+\eta\mu^2\vartheta+2\eta\mu\vartheta)+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=$$

$=2\alpha^2(1+\eta\mu\vartheta)$. Ολοκληρώνοντας από $-\frac{\pi}{2}$ μέχρι $\frac{\pi}{2}$ παίρνουμε το μήκος του κλάδου OAB. Επομένως το μήκος της καρδιοειδούς θα δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$L=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2\alpha^2(1+\eta\mu\vartheta)}\,d\vartheta=$$

$=2\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2(1+\eta\mu\vartheta)}\,d\vartheta$. Υπολογίζουμε το $\int\sqrt{2(1+\eta\mu\vartheta)}\,d\vartheta$

Είναι $1+\eta\mu\vartheta=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\eta\mu\vartheta=2\,\eta\mu\frac{\frac{\pi}{2}+\vartheta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{2}-\vartheta}{2}=$

$$=2\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\vartheta}{2}\right)=2\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot\eta\mu\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\vartheta}{2}\right)\right]=$$

$=2\,\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)$. Άρα $\int\sqrt{2(1+\eta\mu\vartheta)}\,d\vartheta=\int 2\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)d\vartheta=$

$=4\int\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)d\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)=-4\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)$. Άρα

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2(1+\eta\mu\vartheta)}\,d\vartheta = -4\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

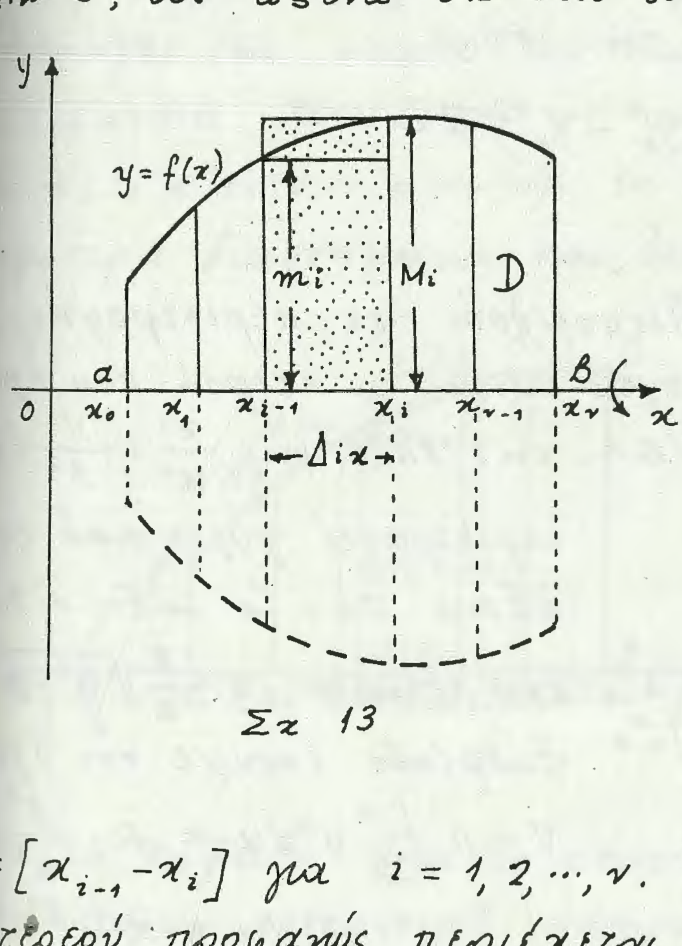
$$= -4\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -4(0-1) = 4.$$

Επομένως $L = 2\alpha\cdot 4 = 8\alpha$.

γ) Όγκος στερεού εκ περιστροφής

Έστω c μια επίπεδη καμπύλη με εξίσωση $y=f(x)$ όπου $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Θεωρούμε το χωρίο D που ορίζεται απ' την καμπύλη c, τον άξονα ox και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.



Σχ 13

Η περιστροφή αυτού γύρω από τον άξονα ox παράγει ένα στερεό. Θα υπολογίσουμε τον όγκο αυτού. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε μικρότερα διαστήματα με τα σημεία $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_\nu=\beta$. Έστω m_i και M_i οι άκρες τιμές της $f(x)$ σε κάθε ένα διάστημα $\Delta ix = [x_{i-1}-x_i]$ για $i=1,2,\dots,\nu$. Ο όγκος του παραγόμενου στερεού προφανώς περιέχεται μεταξύ των αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{\nu}\pi m_i^2\Delta ix$ και $\sum_{i=1}^{\nu}\pi M_i^2\Delta ix$ (Το $\pi m_i^2\Delta ix$ είναι

ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης m_i και ύψος $\Delta i x$.
Αλλά όταν $\Delta i x \to 0$ τα δύο αθροίσματα έχουν κοινό όριο που είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\pi \int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx$. Άρα ο όγκος του στερεού είναι

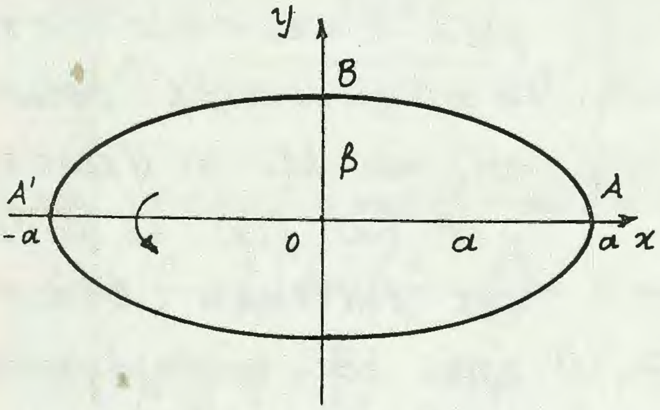
$$V = \pi \int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx$$

Αν $y_1 = f_1(x)$ και $y_2 = f_2(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι $y_2 > y_1$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ τότε ο όγκος του στερεού ο οποίος προκύπτει με περιστροφή γύρω από τον άξονα ox του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.
Ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι το στερεό που προκύπτει όταν το τόξο Α'ΒΑ της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα ox. Το τόξο Α'ΒΑ έχει εξίσωση $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Επομένως έχουμε τον όγκο



Σχ. 14

$$V = \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} y^2 dx = \pi \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 - x^2) dx = \pi \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\pi \cdot \beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} + \alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3}\right) = \frac{\pi \cdot \beta^2}{\alpha^2} \frac{4\alpha^3}{3} =$$

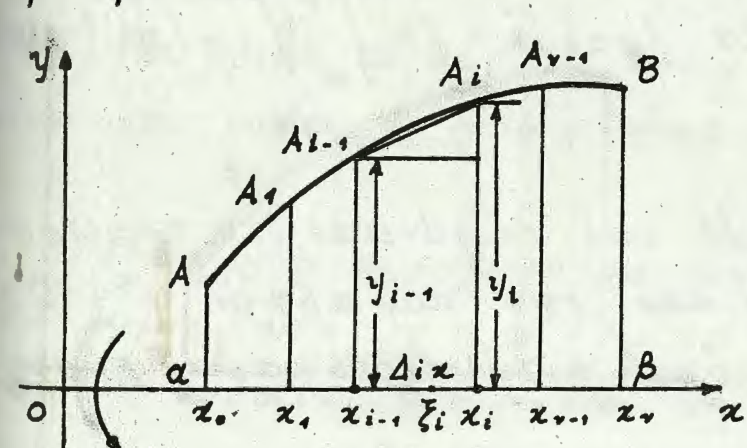
$$= \frac{4\pi\alpha\beta^2}{3}.$$

Παρατήρηση

Στην περίπτωση κύκλου ($\alpha=\beta$) ο όγκος της σφαίρας απ' την περιστροφή του κύκλου γύρω από τον ox είναι $\dfrac{4\pi\alpha^3}{3}$ όπου α η ακτίνα του κύκλου.

δ) Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής

Έστω c καμπύλη με εξίσωση $y=f(x)$, όπου $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με παράγωγο $f'(x)$ συνεχή συνάρτηση του x στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Η περιστροφή της καμπύλης c γύρω από τον άξονα ox παράγει ένα στερεό του οποίου θα υπολογίσουμε την επιφάνεια. Χωρίζουμε με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_\nu=\beta$ το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν μικρότερα διαστήματα και θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή $AA_1\cdots A_{i-1}A_i\cdots B$ που είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB. Η περιστροφή της πολυγωνικής γραμμής γύρω από τον άξονα ox παράγει στερεό με επιφάνεια S_n της οποίας το εμβαδό είναι το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων επιφανειών κόλουρων κώνων, επομένως είναι



Σχ 15

$$S_n=\sum_{i=1}^{\nu} 2\pi\cdot(A_{i-1}A_i)\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

Αλλά $(A_{i-1}A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ και σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$y_i - y_{i-1} = (x_i - x_{i-1})f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i \quad i=1,2,\dots,\nu$$

άρα $(A_{i-1}A_i) = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$ και επομένως

$$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})\,\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

Προφανώς το εμβαδό της επιφάνειας που γράφεται απ' το τόξο AB θα είναι το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_n$ όταν $(x_i - x_{i-1}) \to 0$. Αλλά τότε τα x_i και x_{i-1} τείνουν και τα δύο στο ξ_i και επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, θα είναι

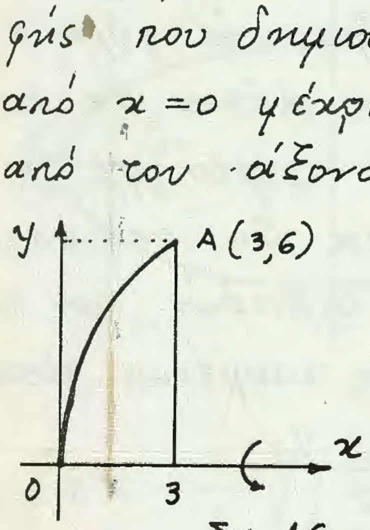
$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i).$$

Αλλά τότε απ' τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\nu} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot f(\xi_i)\,\Delta i x =$

$= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, f(x)dx$. Άρα $S = 2\pi \int_\alpha^\beta \sqrt{1+(y')^2}\, y\,dx$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας εκ περιστροφής που δημιουργείται από την παραβολή $y^2 = 12x$ από $x=0$ μέχρι $x=3$, όταν αυτή περιστραφεί γύρω από τον άξονα ox.



Σχ 16

Υπολογίζουμε πρώτα την παράσταση $1+(y')^2$. Είναι $2yy' = 12 \Rightarrow y' = \frac{6}{y}$ και $(y')^2 = \frac{36}{y^2}$. Άρα $1+(y')^2 = \frac{y^2+36}{y^2}$. Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο που βρήκαμε έχουμε

$$S = 2\pi\int_0^3 \sqrt{\frac{y^2+36}{y^2}}\; y\,dx = 2\pi\int_0^3\sqrt{y^2+36}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^3\sqrt{12x+36}\,dx = 4\sqrt{3}\pi\int_0^3\sqrt{x+3}\,dx$$ Είναι

$$\int\sqrt{x+3}\,dx = \int (x+3)^{1/2}d(x+3) = \frac{(x+3)^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3}$$

Άρα $$S = 4\sqrt{3}\pi\int_0^3\sqrt{x+3}\,dx = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\sqrt{(x+3)^3}\,\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\left(6\sqrt{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) = 24\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi \text{ τετρ. μ.}$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται πάνω από τον άξονα οx και κάτω από την παραβολή $y = -x^2+4x$.

2) Να βρεθεί το εμβαδό του μικρότερου από τα δύο μέρη που κόβει η ευθεία $x=3$ τον κύκλο $x^2+y^2=25$.

3) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $y = x^2-7x+6$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=2$ και $x=6$.

4) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την ευθεία $y=x$ και την παραβολή $y=x^2$

5) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περιλαμβάνε-

του εσωτερικού της καρδιοειδούς $\rho = 1 + συν\vartheta$ και εξωτερικά του κύκλου $\rho = 1$.

6) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = x^{3/2}$ από $x = 0$ μέχρι $x = 5$.

7) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης που δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2$, $y = t^3$ από $t = 0$ μέχρι $t = 4$.

8) Να βρεθεί το μήκος της σπείρας $\rho = e^{2\vartheta}$ από $\vartheta = 0$ μέχρι $\vartheta = 2\pi$.

9) Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής που παράγεται απ' την παραβολή $y^2 = 8x$ στο διάστημα $[0, 2]$ όταν αυτή περιστραφεί γύρω από τον άξονα ox.

10) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής που παράγεται όταν το χωρίο που δημιουργείται από την παραβολή $y = -x^2 - 3x + 6$ και την ευθεία $x + y - 3 = 0$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα ox

11) Να βρεθεί η επιφάνεια εκ περιστροφής της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ γύρω από τον άξονα των x και στη συνέχεια να υπολογιστεί η επιφάνεια εκ περιστροφής του κύκλου $x^2 + y^2 = \alpha^2$ γύρω από τον ίδιο άξονα

2. ΣΕΙΡΕΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1. Ορισμοί

Δίδεται η ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ ή (a_ν). Απ' αυτή σχηματίζουμε την παρακάτω ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_1, S_2, \dots, S_\nu, \dots$ ή (S_ν) όπου $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\dots$, $S_\nu = a_1 + a_2 + \dots + a_\nu$, $\dots$

Για την ακολουθία (S_ν) αντί του συμβολισμού αυτού χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\nu + \dots$ ή τον $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$. Το νέο αυτό σύμβολο ονομάζεται απεριόριστη σειρά ή απλά σ ε ι ρ ά.

Οι όροι της ακολουθίας (S_ν) δηλ. οι $S_1, S_2, \dots, S_\nu, \dots$ λέγονται μερικά αθροίσματα της σειράς, ενώ οι όροι της ακολουθίας (a_ν) δηλ. οι $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ λέγονται όροι της σειράς. Επομένως με τον όρο σειρά εννοούμε ένα σύμβολο που παριστάνει την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Κατά συνέπεια στις σειρές ισχύουν οι ορισμοί και οι ιδιότητες των ακολουθιών.

Αν η σειρά συγκλίνει και είναι S το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων αυτής, δηλ $\lim_{\nu \to \infty} S_\nu = S$, τότε το όριο αυτό λέγεται ά θ ρ ο ι σ μ α της σειράς και το σημειώνουμε με

$$a_1 + a_2 + \dots + a_\nu + \dots = S \quad \text{ή} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = S$$

Πρέπει να τονισθεί ιδιαίτερα ότι το άθροισμα σειράς δεν έχει την έννοια του εξαγόμενου της πρόσθεσης, διότι η πρόσθεση είναι μια εντελώς ορισμένη πράξη, που αφορά μόνο πεπερασμένου πλήθους προσθετέους. Το άθροισμα της σειράς είναι το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, εφόσον βέβαια η ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό απ' το γεγονός ότι οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης (αντιμεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα κ.λ.π) δεν ισχύουν γενικά πάντα, όπως αποδεικνύεται για τις συγκλίνουσες σειρές. Όπως αναφέραμε παραπάνω σειρά είναι ένα νέο σύμβολο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Αλλά και αντίστροφα κάθε ακολουθία (β_ν) μπορεί να παρασταθεί σαν ακολουθία μερικών αθροισμάτων, επομένως σαν σειρά. Πράγματι:

Έστω η ακολουθία $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu, \cdots$. Αν θέσουμε $a_1 = \beta_1$, $a_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} - \beta_\nu$ $(\nu \in N)$ και θεωρήσουμε τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \cdots = \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) + (\beta_3 - \beta_2) + \cdots + (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu) + \cdots = \beta_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\beta_{\nu+1} - \beta_\nu),$$

τότε μερικά αθροίσματα αυτής είναι τα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu, \cdots$ δηλ η ακολουθία (β_ν). Επομένως σε κάθε πρόταση που αφορά τη σύγκλιση ή απόκλιση ακολουθίας, αντιστοιχεί μία πρόταση που αφορά τη σύγκλιση ή απόκλιση σειράς. Έτσι για τη σύγκλιση σειρών έχουμε τα κριτήρια:

1) Κριτήριο της μονοτονίας

Μια σειρά με θετικούς όρους ή 0 (οπότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα) συγκλίνει τότε και μόνο τότε όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι περατωμένη πρός τα πάνω.

2) Κριτήριο του Cauchy

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ είναι, για κάθε $\varepsilon>0$ να υπάρχει $v_0 \in N$ τέτοιος ώστε για $\forall v>v_0$ και $\forall p \in N$ να είναι

$$|S_{v+p} - S_v| < \varepsilon$$

ή επειδή $S_{v+p} = S_v + a_{v+1} + a_{v+2} + \cdots + a_{v+p}$

$$|a_{v+1} + a_{v+2} + \cdots + a_{v+p}| < \varepsilon$$

Απ' το κριτήριο του Cauchy προκύπτει ότι αναγκαία συνθήκη, αλλά όχι ικανή για να συγκλίνει η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ είναι $\lim\limits_{v\to\infty} a_v = 0$. Πράγματι,

είναι $a_v = S_v - S_{v-1}$ και επειδή η σειρά είναι συγκλίνουσα $|a_v| = |S_v - S_{v-1}| < \varepsilon$ άρα $\lim\limits_{v\to\infty} a_v = 0$

Το ότι η συνθήκη δεν είναι ικανή (δηλ αν $\lim\limits_{v\to\infty} a_v = 0$ δεν προκύπτει αναγκαστικά ότι η σειρά είναι συγκλίνουσα) αποδεικνύεται με το παρακάτω παράδειγμα.

Έστω η σειρά $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{v} + \cdots$ που λέγεται και αρμονική σειρά, της οποίας $\lim\limits_{v\to\infty} a_v = \lim\limits_{v\to 0} \frac{1}{v} = 0$

Έχουμε $S_{2v} - S_v = \frac{1}{v+1} + \frac{1}{v+2} + \cdots + \frac{1}{v+v}$. Αλλά

$$\frac{1}{v+1} > \frac{1}{2v}$$

$$\frac{1}{v+2} > \frac{1}{2v}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

άρα $S_{2v} - S_v > v\,\frac{1}{2v} = \frac{1}{2}$ ώστε $S_{2v} - S_v > \frac{1}{2}$. Επομένως η αρμονική σειρά είναι αποκλίνουσα, γιατί για $v > v_0$

δεν είναι $|S_{2\nu} - S_\nu| < \varepsilon$ όπου $\varepsilon > 0$

Παρατήρηση

Η αρμονική σειρά είναι όπως λέμε "αργά αποκλίνουσα" γιατί, όπως αποδεικνύεται, το άθροισμα ενός εκατομμύριου όρων αυτής είναι μικρότερο του 15 δηλ $S_{1.000.000} < 15$

Κατόπιν αυτών μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω

Θεώρημα 2.1.1.

Αν k σταθερός αριθμός $\neq 0$ και αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει προς το S, τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} k a_\nu$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα συγκλίνει προς το kS, ενώ αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι αποκλίνουσα, τότε και η $\sum_{\nu=1}^{\infty} k a_\nu$ αποκλίνει.

Απόδειξη

Το άθροισμα των ν όρων της $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ (1) είναι

$S_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu$ Ενώ της $\sum_{\nu=1}^{\infty} k a_\nu$ (2)

$S'_\nu = ka_1 + ka_2 + ka_3 + \cdots + ka_\nu = kS_\nu$.

Αν η (1) συγκλίνει, τότε $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = S$.

Αλλά $\lim_{\nu\to\infty} S'_\nu = \lim_{\nu\to\infty} kS_\nu = k\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = kS$

δηλ. και η (2) συγκλίνει και μάλιστα στο kS.

Αν η (1) αποκλίνει, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu$, επομένως δεν υπάρχει και το $k\lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to\infty} kS_\nu = \lim_{\nu\to\infty} S'_\nu$, άρα η (2) αποκλίνει.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2\nu} + \cdots$

είναι αποκλίνουσα επειδή $\frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu}$ και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ αποκλίνει, άρα και η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu}$ θα αποκλίνει.

2.2. Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος

Από τη στοιχειώδη Άλγεβρα είναι γνωστές δύο χαρακτηριστικές σειρές, η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος.

Αριθμητική πρόοδος είναι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}[\alpha+(\nu-1)\omega] \quad \text{όπου } \alpha,\omega\in R \text{ και } \omega\neq 0.$$

Αυτή είναι πάντα αποκλίνουσα, επειδή το άθροισμα των ν όρων αυτής είναι

$$S_\nu=\frac{[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu}{2} \quad \text{και}$$

αν $\omega>0$ $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_\nu=+\infty$ ενώ αν $\omega<0$ $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_\nu=-\infty$

Γεωμετρική πρόοδος είναι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha\omega^{\nu-1} \quad \text{όπου } \alpha,\omega\in R \text{ και } \omega\neq 0$$

το άθροισμα των ν όρων αυτής είναι

$$S_\nu=\frac{\alpha\omega^\nu-\alpha}{\omega-1}=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$$

Αν $|\omega|<1$ τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\omega^\nu=0$ άρα

$$\lim_{\nu\to\infty}S_\nu=\lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}\right]=\frac{\alpha}{1-\omega}$$

επομένως η σειρά συγκλίνει. Ώστε η φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος είναι σειρά συγκλίνουσα.

Αν $|\omega|>1$ τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\omega^\nu=+\infty$ αν $\omega>0$

και αν $\alpha>0$ $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_\nu=+\infty$, αν $\alpha<0$ $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_\nu=-\infty$

Αν $|\omega|>1$ και $\omega<0$ τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\omega^\nu=+\infty$ αν $\nu=2\mu$ ενώ $\lim\limits_{\nu\to\infty}\omega^\nu=-\infty$ αν $\nu=2\mu+1$, επομένως η σειρά αποκλίνει αόριστα.

Αν $|\omega|=1$ τότε, αν $\omega=1$, η σειρά γίνεται

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha\omega^{\nu-1} = \alpha+\alpha+\alpha+\cdots+\alpha+\cdots$$

και επειδή $S_\nu = \nu\alpha$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu = +\infty$ αν $\alpha>0$ και $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu = -\infty$ αν $\alpha<0$. Ενώ αν $\omega=-1$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha\omega^{\nu-1} = \alpha-\alpha+\alpha-\alpha+\cdots$$

και αν $\nu=2\mu$ τότε $S_\nu=0$ ενώ αν $\nu=2\mu+1$, $S_\nu=\alpha$. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu$ άρα η σειρά αποκλίνει αόριστα.

Συνεπώς η γεωμετρική πρόοδος συγκλίνει όταν $|\omega|<1$ και αποκλίνει όταν $|\omega|\geq 1$

Παραδείγματα

1) Η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^\nu} = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^\nu}+\cdots$ είναι συγκλίνουσα επειδή είναι γεωμετρική πρόοδος με

$$\omega=\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad |\omega|<1$$

2) Η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 3^\nu} = \frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^\nu}+\cdots$ συγκλίνει επίσης, επειδή $\frac{1}{2\cdot 3^\nu}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^\nu}$ και η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{3^\nu}$ συγκλίνει. Είναι δε

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^\nu}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

2.3. Σειρές με θετικούς όρους

Έστω η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ (1) όπου $\alpha_\nu\geq 0$ $\forall \nu\in N$. Επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots$ είναι πάντα αύξουσα, η σειρά (1) συγκλίνει πάντα με ευρεία έννοια δηλ. ή θα είναι συγκλίνουσα, ή θα αποκλίνει ορισμένα στο $+\infty$.

Θα εξετάσουμε κάτω από ποιες συνθήκες οι σειρές με θετικούς όρους συγκλίνουν σε πεπερασμένο όριο ή αποκλίνουν ορισμένα στο $+\infty$. Η σύγκλιση ή η απόκλιση των σειρών με θετικούς όρους εξασφαλίζεται από τα παρακάτω θεωρήματα.

1) Κριτήριο σύγκρισης

Θεώρημα 2.3.1.

Αν η σειρά με θετικούς όρους $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ είναι συγκλίνουσα και αν $\forall \nu \in N$ είναι $0 \le \alpha_\nu \le \beta_\nu$, τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη

Είναι $S_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu \le \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu < S$ όπου $S = \lim \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$.

Επομένως η ακολουθία $S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots$ είναι αύξουσα και περατωμένη, άρα η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει.

Θεώρημα 2.3.2.

Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$ με θετικούς όρους είναι αποκλίνουσα και αν $\forall \nu \in N$ είναι $\alpha_\nu \ge \gamma_\nu$, τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ αποκλίνει ορισμένα προς το $+\infty$.

Απόδειξη

Έχουμε $S_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu \ge \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\nu = \Gamma_\nu$

Αλλά όταν $\nu\to\infty$ $\lim\limits_{\nu\to\infty}\Gamma_\nu = +\infty$ επειδή η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu$ αποκλίνει ορισμένα στο $+\infty$, άρα και

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = +\infty$$

Με τα παραπάνω θεωρήματα μπορούμε να διαπιστώνουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών με θετικούς όρους, συγκρίνοντας αυτές με σειρές γνωστές από άποψη σύγκλισης ή απόκλισης. Στις εφαρμογές σαν τέτοιες σειρές παίρνουμε:

1) Τη γεωμετρική πρόοδο που συγκλίνει όταν ο λόγος αυτής ω είναι τέτοιος ώστε $|\omega|<1$ και αποκλίνει όταν $|\omega| \geqslant 1$

2) Τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^k}$ η οποία

α) για $k<1$ αποκλίνει γιατί τότε $\frac{1}{\nu^k} > \frac{1}{\nu}$ $\forall \nu \in N$ δηλ. οι όροι της είναι μεγαλύτεροι των όρων της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ που αποκλίνει.

β) για $k=1$ αποκλίνει γιατί τότε είναι η αρμονική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$

γ) για $k>1$ συγκλίνει γιατί έχουμε

$$S_\nu = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{\nu^k},$$

$$S_{2\nu} = S_\nu + \frac{1}{(\nu+1)^k} + \frac{1}{(\nu+2)^k} + \cdots + \frac{1}{(2\nu)^k}$$

Άρα $S_{2\nu} - S_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^k} + \frac{1}{(\nu+2)^k} + \cdots + \frac{1}{(2\nu)^k}$ (1)

Αν όλοι οι όροι του β' μέλους της (1) αντικατασταθούν με $\frac{1}{\nu^k}$, προκύπτει η ανισότητα

$$S_{2\nu} - S_\nu < \frac{\nu}{\nu^k} \text{ ή } S_{2\nu} - S_\nu < \frac{1}{\nu^{k-1}} \quad (2)$$

Επειδή $k>1$ είναι $k=1+\alpha$ όπου $\alpha>0$ άρα $k-1=\alpha>0$ και η (2) γίνεται $S_{2\nu} - S_\nu < \frac{1}{\nu^\alpha}$ (3)

Θέτουμε στην (3) διαδοχικά όπου ν: $1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{\rho-1}$ και παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{lll} S_2 - S_1 & < & 1 \\ S_{2^2} - S_2 & < & \frac{1}{2^{\alpha}} \\ S_{2^3} - S_{2^2} & < & \frac{1}{2^{2\alpha}} \\ \cdots & & \\ S_{2^{\rho}} - S_{2^{\rho-1}} & < & \frac{1}{2^{(\rho-1)\alpha}} \end{array}\right\} (4)$$

Προσθέτοντας τις ανισότητες (4) κατά μέλη και απλοποιώντας προκύπτει

$$S_{2^{\rho}} - S_1 < 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{1}{2^{(\rho-1)\alpha}} \quad (5)$$

Το β' μέλος της (5) είναι το άθροισμα των ρ όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{2^{\alpha}}$ και επειδή $\alpha > 0$, προκύπτει $\frac{1}{2^{\alpha}} < 1$ άρα το άθροισμα της (5) είναι μικρότερο από το άθροισμα των απείρων όρων αυτής δηλ. από το $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha}}}$. Επομένως από την (5) προκύπτει

$$S_{2^{\rho}} < S_1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha}}} \quad \text{ή επειδή } S_1 = 1$$

$$S_{2^{\rho}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha}}} \quad (6).$$

Επειδή το β' μέλος της (6) είναι ένας πεπερασμένος αριθμός έστω A, είναι $S_{2^{\rho}} < A$ (7)

Από την (7) προκύπτει ότι αν δοθεί $\nu \in N$ μπορούμε πάντοτε να βρούμε φυσικό αριθμό $2^{\rho} > \nu$ έτσι ώστε $S_{\nu} < S_{2^{\rho}} < A$. Δηλαδή $\forall \nu \in N$ το $S_{\nu} < A$ άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_1, S_2, \cdots, S_{\nu}, \cdots$ είναι περατωμένη, άρα συγκλίνει, δηλ η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα

1) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$

είναι συγκλίνουσα γιατί $\forall \nu \in N$ είναι $\frac{1}{\nu(\nu+1)} < \frac{1}{\nu^2}$

και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ συγκλίνει

2) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu(\nu+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \dots$

είναι αποκλίνουσα γιατί $\forall \nu \in N$ είναι

$$\frac{1}{\sqrt{\nu(\nu+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+1)}} = \frac{1}{\nu+1}$$

και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1}$ αποκλίνει

2) Κριτήριο του D' Alembert

Έστω η σειρά θετικών όρων $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ (8)

Αν υπάρχει το $\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \rho$ και είναι

α) $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει

β) $\rho > 1$, η σειρά αποκλίνει

γ) $\rho = 1$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς.

Απόδειξη.

α) Έστω $\rho < 1$. Τότε υπάρχει $k \in R$ ώστε $\rho < k < 1$

Επειδή $\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \rho$, για $\nu > \nu_0$ θα έχουμε

$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} < k < 1$ Άρα

$$\left.\begin{array}{ll} & a_{\nu+1} < a_\nu k \\ a_{\nu+2} < a_{\nu+1} k \text{ ή } & a_{\nu+2} < a_\nu k^2 \\ \text{παρόμοια} & a_{\nu+3} < a_\nu k^3 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{\nu+m} < a_\nu k^m \\ & \dots\dots\dots \end{array}\right\} (9)$$

δηλ. για $\nu > \nu_0$ οι όροι της σειράς (8) είναι μικρότεροι από τους όρους της σειράς $\sum_{m=1}^{\infty} a_\nu k^m$ η οποία συγκλίνει επειδή είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο k και $|k|<1$. Άρα η σειρά (8) συγκλίνει.

β) Αν $\rho > 1$ τότε για $\nu > \nu_0$ έχουμε $\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu} > 1$ Επομένως προκύπτει

$$a_{\nu+1} > a_\nu$$
$$a_{\nu+2} > a_{\nu+1} > a_\nu$$
$$a_{\nu+3} > a_{\nu+2} > a_{\nu+1} > a_\nu$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

δηλαδή για $\nu > \nu_0$ οι όροι της σειράς είναι μεγαλύτεροι του a_ν και επομένως δεν μπορεί να είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ άρα (συνέπεια κριτηρίου Cauchy) η σειρά αποκλίνει.

γ) Αν $\rho = 1$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή την απόκλιση της σειράς, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

i) Έστω η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^2}$ Έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2}{(\nu+1)^2} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} = 1$$

Αλλά η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^2}$ είναι ως γνωστό συγκλίνουσα

ii) Για τη σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu}$ έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu+1}{\nu} = \lim \frac{1+\frac{1}{\nu}}{1} = 1$$

Αλλα η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu}$ είναι αποκλίνουσα.

3) Κριτήριο του Cauchy

Έστω η σειρά θετικών όρων $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ (10)

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = \rho$ και είναι:

α) $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει

β) $\rho > 1$, η σειρά αποκλίνει

γ) $\rho = 1$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς.

Απόδειξη.

α) Έστω $\rho<1$. Τότε υπάρχει $k \in R$ ώστε $\rho < k < 1$. Επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{a_\nu} = \rho$, για $\nu > \nu_0$ θα έχουμε $\sqrt[\nu]{a_\nu} < k < 1$. Άρα

$$a_\nu < k^\nu$$
$$a_{\nu+1} < k^{\nu+1}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{\nu+m} < k^{\nu+m}$$
$$\cdots\cdots$$

δηλ. για $\nu>\nu_0$ οι όροι της σειράς (10) θα είναι μικρότεροι των όρων της σειράς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} k^{\nu+m}$ η οποία συγκλίνει γιατί είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο k και $|k|<1$
Άρα η σειρά (10) συγκλίνει.

β) Αν $\rho > 1$ τότε για $\nu > \nu_0$ θα έχουμε:
$a_\nu > 1$, $a_{\nu+1} > 1$, $a_{\nu+2} > 1$, $\cdots$ δηλ. το $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$ δεν είναι 0, άρα η (10) αποκλίνει

2.4. Σειρές με όρους εναλλασόμενου σημείου

Έστω η σειρά $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^\nu a_\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ (1). όπου $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\nu, \cdots \geq 0$.
Η σειρά (1) είναι σειρά όρων εναλλασόμενου σημείου
Για τις σειρές αυτές ισχύει το εξής κριτήριο σύγκλισης.

Θεώρημα 2.4.1.

Κάθε σειρά όρων εναλλασσόμενου σημείου είναι συγκλίνουσα όταν η ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\nu, \cdots$ είναι φθίνουσα και $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$.

Απόδειξη

Για $\nu = 2\mu - 1$ έχουμε

$S_{2\mu-1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2\mu-2} - a_{2\mu-1})$.

Επειδή η ακολουθία (a_ν) είναι φθίνουσα οι διαφορές $(a_0 - a_1), (a_2 - a_3), \cdots$ είναι ≥ 0. Άρα

$$S_{2\mu-1} \geq a_0 - a_1 = S_1 .$$

Ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_1, S_3, S_5, \cdots, S_{2\mu-1}, \cdots (2)$ είναι αύξουσα.

Για $\nu = 2\mu$ έχουμε

$S_\nu = S_{2\mu} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2\mu-1} - a_{2\mu})$

και επειδή οι διαφορές $a_1 - a_2, a_3 - a_4, \cdots, a_{2\mu-1} - a_{2\mu}$ είναι ≥ 0 προκύπτει $S_{2\mu} \leq a_0 = S_0$.

Ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_0, S_2, S_4, \cdots, S_{2\mu}, \cdots$ (3) είναι φθίνουσα.

Εξ άλλου έχουμε $S_{2\mu-1} = S_{2\mu} - a_{2\mu} \leq S_{2\mu} \leq S_0 = a_0$

ή $S_{2\mu-1} \leq a_0$

Άρα η ακολουθία (2) είναι περατωμένη προς τα πάνω επομένως είναι συγκλίνουσα.

Παρόμοια έχουμε $S_{2\mu} = S_{2\mu-1} + a_{2\mu} \geq S_{2\mu-1} \geq S_1 =$

$= a_0 - a_1$ ή $S_{2\mu} \geq a_0 - a_1$

Άρα η ακολουθία (3) είναι περατωμένη προς τα κάτω επομένως είναι συγκλίνουσα.

Έστω τώρα ότι $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_{2\mu-1} = S'$ και $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_{2\mu} = S''$

Επειδή $S_{2\mu-1} = S_{2\mu} - a_{2\mu}$ θα έχουμε

$$\lim_{\mu\to\infty} S_{2\mu-1} = \lim_{\mu\to\infty} S_{2\mu} - \lim_{\mu\to\infty} a_{2\mu}$$

Αλλά απ' την υπόθεση είναι $\lim\limits_{\mu\to\infty} a_{2\mu} = 0$

άρα $\lim\limits_{\mu\to\infty} S_{2\mu-1} = \lim\limits_{\mu\to\infty} S_{2\mu}$ δηλ. $S' = S'' = S$

επομένως $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu = S$ και η (1) συγκλίνει.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

συγκλίνει επειδή η ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{\nu}, \dots$

είναι φθίνουσα και $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} = 0$.

2.5. Σειρές απόλυτα συγκλίνουσες

Έστω η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ (1) με όρους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς. Η σειρά (1) λέγεται απόλυτα συγκλίνουσα, όταν η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ (με όρους επομένως ≥ 0) είναι συγκλίνουσα. Για τις σειρές αυτές ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1.

Αν μια σειρά με όρους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς συγκλίνει απόλυτα, τότε θα είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη.

Έστω η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_1 + a_2 + \dots + a_\nu + \dots$ (2) και

η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_\nu| + \dots$ (3)

και έστω ότι η (3) είναι συγκλίνουσα με

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| = S$$

Παίρνουμε τους ν πρώτους όρους της (2) και αν a_ν είναι ένας θετικός όρος αυτής γράφουμε αυτόν σαν x_p, αν όμως είναι αρνητικός σαν $-y_q$ όπου $y_q > 0$. Κατόπιν αυτών το άθροισμα των ν όρων της (2) θα είναι

$$S_\nu' = A_p - B_q \qquad (4)$$

όπου A_p είναι το άθροισμα των x_p και B_q είναι το άθροισμα των y_q.

Το άθροισμα των ν όρων της (3) θα είναι

$$S_\nu'' = A_p + B_q \quad \text{επειδή} \quad |-y_q| = y_q$$

Επειδή όμως η σειρά (3) είναι συγκλίνουσα, όταν $\nu \to \infty$ (οπότε και $p, q \to \infty$) θα έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} S_\nu'' = \lim_{p\to\infty} A_p + \lim_{q\to\infty} B_q = S \qquad (5)$$

Απ' την (5) προκύπτει ότι υπάρχουν τα όρια των A_p, B_q. Έστω ότι $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ και $\lim\limits_{q\to\infty} B_q = B$

Απ' την (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu' = \lim\limits_{p\to\infty} A_p - \lim\limits_{q\to\infty} B_q =$
$= A - B$. Επομένως η σειρά (2) συγκλίνει.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή μπορεί μια σειρά να συγκλίνει, χωρίς να συγκλίνει απόλυτα.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \dfrac{1}{\nu}$ όπως δείξαμε παραπάνω συγκλίνει. Ενώ η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left|(-1)^{\nu+1} \dfrac{1}{\nu}\right| = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu}$ που είναι η αρμονική σειρά αποκλίνει, δηλαδή δεν συγκλίνει απόλυτα.

Ύστερα από αυτά μπορούμε να εφαρμόσουμε τα κριτήρια του D' Alembert και του Cauchy για σειρές με τυχόντες όρους ως εξής:

Αντί της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ (6) παίρνουμε τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ (7) που έχει όρους θετικούς και εφαρμόζουμε σ' αυτή τα παραπάνω κριτήρια. Τότε αν η (7) συγκλίνει, θα συγκλίνει και η (6)

2.6. Πράξεις στις σειρές

α) Πρόσθεση και αφαίρεση σειρών

Έστω οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$.

Άθροισμα αυτών λέγεται η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ όπου $\gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu$

Διαφορά αυτών λέγεται η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu$ όπου $\delta_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$

Αν οι δοθείσες σειρές είναι συγκλίνουσες και

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = A, \quad \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = B$$

τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ θα είναι συγκλίνουσα και μάλιστα

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu = A + B = \Gamma$$

Πράγματι

Έστω $A_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$

$$B_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu$$

Τότε επειδή οι σειρές είναι συγκλίνουσες έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu = A, \quad \lim_{\nu\to\infty} B_\nu = B$$

$$\Gamma_\nu = (\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_2+\beta_2) + \cdots + (\alpha_\nu+\beta_\nu) =$$
$$= (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu) + (\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)$$

δηλ. $\Gamma_\nu = A_\nu + B_\nu$

άρα $\lim\limits_{\nu\to\infty} \Gamma_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} A_\nu + \lim\limits_{\nu\to\infty} B_\nu = A + B$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι και $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu = A - B$

β) Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς σ ε ι ρ ώ ν

Έστω οι σειρές $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$

Γινόμενο αυτών λέγεται η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ της οποίας οι όροι είναι

$$\gamma_1 = \alpha_1\beta_1$$
$$\gamma_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$
$$\gamma_3 = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_\nu = \alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1}\beta_2 + \alpha_\nu\beta_1$$

δηλαδή $\gamma_\nu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_{\nu+1-i}$

Αναφέρουμε το παρακάτω θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Αν $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = A$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = B$ τότε και

$$\lim \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \right] = A \cdot B$$

Παραδείγματα

1) Οι σειρές $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ είναι συγκλίνουσες.

Άθροισμα αυτών είναι η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^2} \right) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu+1}{\nu^3}$

η οποία επίσης όπως εύκολα αποδεικνύεται είναι συγκλίνουσα.

2) Γινόμενο των παραπάνω σειρών είναι η σειρά που έχει όρους: $\gamma_1 = \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{1^3} \cdot \frac{1}{1^2} = 1$

$$\gamma_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$$

$$\gamma_3 = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} = \frac{155}{864}$$

. . . .

δηλαδή η σειρά

$$1 + \frac{3}{8} + \frac{155}{864} + \cdots + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{i^3}\cdot\frac{1}{(\nu+1-i)^2} + \cdots$$

2.7. Σειρές δυνάμεων

Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ και x τυχών πραγματικός αριθμός.

Η σειρά $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_\nu x^\nu + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$ (1) λέγεται σειρά δυνάμεων του x ή ακέραιη σειρά του x. Η σειρά (1) συγκλίνει πάντοτε για $x=0$ εφόσον όλοι οι όροι της εκτός απ' τον πρώτο α_0 είναι 0.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν κι άλλες τιμές του x για τις οποίες η σειρά (1) συγκλίνει και θα τις υπολογίσουμε.

Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε το κριτήριο του D' Alembert για τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu x^\nu|$ η οποία έχει $\forall x \in R$ όρους θετικούς.

Είναι $\left|\frac{\alpha_{\nu+1} x^{\nu+1}}{\alpha_\nu x^\nu}\right| = \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \cdot |x|$

Αν $\lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \rho$ τότε $\lim \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| |x| = \rho\cdot|x|$

i) $\rho\cdot|x| < 1$ δηλ $|x| < \frac{1}{\rho}$ τότε η σειρά (1) συγκλίνει απόλυτα, επομένως είναι συγκλίνουσα.

ii) $\rho\cdot|x| > 1$ δηλ $|x| > \frac{1}{\rho}$, η σειρά (1) αποκλίνει

iii) Αν $\rho\cdot|x| = 1$ δηλ $|x| = \frac{1}{\rho}$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η σειρά (1) συγκλίνει ή αποκλίνει. Η περίπτωση αυτή θα πρέπει να εξετάζεται ιδιαίτερα.

iv) Αν $\rho = 0$ τότε $\rho|x| < 1 \quad \forall x \in R$ οπότε η σειρά (1) συγκλίνει $\forall x \in R$.

v) Αν $\rho = +\infty$ τότε για $x \neq 0$ $\rho|x| > 1$, επομένως η σειρά (1) αποκλίνει για όλες τις τιμές του x εκτός από την τιμή $x = 0$

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ λέγεται ακτίνα σύγκλισης της σειράς και το διάστημα $\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)$ λέγεται διάστημα σύγκλισης.

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω έχουμε:

1) Αν είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \rho$, τότε η σειρά δυνάμεων $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα για $x \in \left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)$ και αποκλίνουσα για τιμές του x έξω απ' το διάστημα αυτό.

2) Αν $\lim\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = +\infty$, η σειρά αποκλίνει για όλες τις τιμές του x εκτός από την τιμή $x = 0$.

Παραδείγματα.

1) Η σειρά $1 + x + 2!x^2 + \cdots + \nu!x^\nu + \cdots = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu!x^\nu$ συγκλίνει μόνο για $x = 0$ και αποκλίνει για όλες τις άλλες τιμές του x γιατί

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\frac{(\nu+1)!}{\nu!} = \lim_{\nu\to\infty}(\nu+1) = \infty$$

2) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της σειράς

$$1+2x+4x^2+\cdots+2^\nu x^\nu+\cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu x^\nu .$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim \dfrac{2^{\nu+1}}{2^\nu} = 2.$

Ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι το $\frac{1}{2}$. Για $x=\frac{1}{2}$ η σειρά γίνεται $1+1+1+\cdots+1+\cdots$ και αποκλίνει. Για $x=-\frac{1}{2}$ γίνεται $1-1+1-1+\cdots+(-1)^\nu+\cdots$ και αποκλίνει. Άρα διάστημα σύγκλισης είναι το $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

3) Παρόμοια για τη σειρά

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^\nu\frac{x^\nu}{\nu}+\cdots=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^\nu}{\nu}$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\nu}{\nu+1}=1$. Για $x=1$ η σειρά γίνεται $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+(-1)^\nu\frac{1}{\nu}+\cdots$ και συγκλίνει. Για $x=-1$ γίνεται $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{\nu}+\cdots$ και αποκλίνει. Άρα διάστημα σύγκλισης της σειράς είναι το $(-1,\ 1]$.

4) Επίσης για τη σειρά

$$1+\frac{x}{2\cdot 1^2}+\frac{x^2}{4\cdot 2^2}+\frac{x^3}{8\cdot 3^2}+\cdots+\frac{x^\nu}{2^\nu\cdot\nu^2}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu}{2^\nu\nu^2}$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{2^\nu\cdot\nu^2}{2^{\nu+1}\cdot(\nu+1)^2} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{1}{2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 2.

Για $x=2$ η σειρά γίνεται $1+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\nu^2}+\cdots$ και συγκλίνει. Για $x=-2$ η σειρά γίνεται:

$1-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^\nu\frac{1}{\nu^2}+\cdots$ και συγκλίνει

Ἄρα διάστημα σύγκλισης της σειράς είναι το $[-2, 2]$.

5) Το ίδιο για τη σειρά

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\cdots=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|=\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\nu!}{(\nu+1)!}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu+1}=0$

Ἄρα η σειρά συγκλίνει για $\forall x\in R$. Δηλαδή διάστημα σύγκλισης είναι όλος ο άξονας των πραγματικών αριθμών $(-\infty, +\infty)$.

Ασκήσεις

1) Να μελετηθούν οι σειρές

α) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)^2}$, β) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$, γ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\nu}}$

2) Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

α) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu!}{3^\nu}$, β) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{3^\nu}$, γ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\nu}$,

δ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu+1}{2\nu+1}\right)^\nu$, ε) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+1}{\nu^3}$, στ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\nu-1)\cdot(2\nu)}{\nu!}$

ζ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}$, η) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2}{\nu!}$, θ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{e^\nu}$.

3) Να βρεθούν τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών

α) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}$, β) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu}{(\nu-1)\cdot\nu}$, γ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{\nu-1}}{(\nu-1)^2}$

δ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu!\,(x-1)^\nu$, ε) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(x+1)^\nu}{\sqrt{\nu}}$, στ) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(x-2)^\nu}{\nu}$.

2.8. Σειρά Taylor

Όπως είδαμε, κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η τιμή σε κάθε x του διαστήματος σύγκλισης δίνεται από τη σειρά

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = f(x)$$

Το πρόβλημα που δημιουργείται τώρα είναι, αν δοθεί μια συνάρτηση $f(x)$, να βρεθούν οι προϋποθέσεις, ώστε να μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά. Θα εξετάσουμε το πρόβλημα α) στην περιοχή του σημείου $x=\alpha$, β) στην περιοχή του σημείου $x=0$.

Την απάντηση δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.8.1.

Έστω ότι η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x=\alpha$, έχει παραγώγους κάθε τάξης στην περιοχή α και μπορεί να παρασταθεί σαν σειρά δυνάμεων του $x-\alpha$. Τότε η σειρά αυτή είναι η

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{(\nu-1)!}(x-\alpha)^{\nu-1} + \cdots \text{ (Σειρά Taylor)}$$

Απόδειξη

Έστω ότι η σειρά είναι η

$$f(x) = c_0 + c_1(x-\alpha) + c_2(x-\alpha)^2 + \cdots + c_{\nu-1}(x-\alpha)^{\nu-1} + \cdots \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά την (1) έχουμε

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-\alpha) + 3c_3(x-\alpha)^2 + 4c_4(x-\alpha)^3 + \cdots + \nu c_\nu (x-\alpha)^{\nu-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-\alpha) + 12c_4(x-\alpha)^2 + 20c_5(x-\alpha)^3 + \cdots$$

$$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-\alpha) + 60c_5(x-\alpha)^2 + \cdots (\nu-2)(\nu-1)\nu c_{\nu+2}(x-\alpha)^{\nu-1} + \cdots$$

Θέτοντας διαδοχικά στις $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, όπου x το α προκύπτει:

$$f(\alpha) = c_0$$
$$f'(\alpha) = c_1$$
$$f''(\alpha) = 2c_2 \quad \text{άρα} \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(\alpha)$$
$$f'''(\alpha) = 6c_3 \quad '' \quad c_3 = \frac{1}{3!} f'''(\alpha)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(\nu-1)}(\alpha) = 1\cdot 2\cdots(\nu-1)c_{\nu-1} \quad \text{άρα} \quad c_{\nu-1} = \frac{1}{(\nu-1)!} f^{(\nu-1)}(\alpha)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των c_i $(i=0,1,\cdots,\nu-1)$ στην (1) προκύπτει ο τύπος του Taylor.

Με τον τύπο του Taylor πετυχαίνουμε την προσέγγιση μιας συνάρτησης $f(x)$ με ένα πολυώνυμο.

Αν θέσουμε όπου $\alpha=0$, παίρνουμε μια άλλη έκφραση της σειράς Taylor, γνωστή σαν σειρά Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(\nu-1)}(0)}{(\nu-1)!}x^{\nu-1} + \cdots \quad (\text{Σειρά Mac Laurin})$$

Παραδείγματα

1) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $y = e^{-2x}$ σε σειρά Mac Laurin και να βρεθεί το διάστημα σύγκλισής της.

Είναι

$$f(x) = e^{-2x} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = -2e^{-2x} \qquad f'(0) = -2$$
$$f''(x) = 2^2 e^{-2x} \qquad f''(0) = 2^2$$
$$f'''(x) = -2^3 e^{-2x} \qquad f'''(0) = -2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu 2^\nu e^{-2x} \qquad f^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu 2^\nu.$$ Άρα

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^\nu \frac{2^\nu}{\nu!}x^\nu + \cdots$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{2^{\nu+1}\cdot\nu!}{(\nu+1)!\cdot 2^\nu} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{2}{\nu+1} = 0$

Άρα διάστημα σύγκλισης είναι όλο το R, $(-\infty, +\infty)$.

2) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $y = \log x$ σε σειρά Taylor κατά τις δυνάμεις του $x - 2$

Είναι $f(x) = \log x$, $\quad f(2) = \log 2$

$f'(x) = x^{-1}$, $\quad f'(2) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -x^{-2}$, $\quad f''(2) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = 2x^{-3}$, $\quad f'''(2) = \frac{1}{4}$

$f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$, $\quad f^{(4)}(2) = -\frac{3}{8}$

. . . .

$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,x^{-\nu}$, $f^{(\nu)}(2) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\cdot 2^{-\nu}$

Άρα $\log x = \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\nu\cdot 2^\nu}{(\nu+1)\cdot 2^{\nu+1}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{\nu+1} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = \rho$ Άρα ακτίνα σύγκλισης είναι $\frac{1}{\rho} = 2$

Δηλαδή το διάστημα σύγκλισης θα είναι (ανοικτό ή κλειστό)

$|x - 2| < 2$ ή $0 < x < 4$

Για $x = 0$ η σειρά γίνεται

$\log 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} + \cdots\right)$ και αποκλίνει

Για $x = 4$ η σειρά γίνεται

$\log 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)\frac{1}{\nu} + \cdots$ και συγκλίνει

(παράδειγμα της παραγρ. 2.4.) Άρα $0 < x \leq 4$ ή το διάστημα σύγκλισης είναι το $(0, 4]$.

3) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $y = \log(1+x)$ σε σειρά Mac Laurin κατά τις δυνάμεις του x.

Έχουμε

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \log(1+x) & f(0) = 0 \\
f'(x) = (1+x)^{-1} & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -(1+x)^{-2} & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = 2(1+x)^{-3} & f'''(0) = 2! \\
f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4} & f^{(4)}(0) = -3! \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!(1+x)^{-\nu} & f^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!
\end{array}
$$

Άρα
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + 2!\frac{x^3}{3!} - 3!\frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu} + \cdots$$

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\nu}{\nu+1} = 1 = \rho$ άρα $\dfrac{1}{\rho} = 1$

και το διάστημα σύγκλισης θα είναι (ανοικτό ή κλειστό) $(-1, 1)$. Για $x=-1$ η σειρά γίνεται $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{\nu}$ ή $-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu}\right)$ και αποκλίνει.

Για $x = 1$ γίνεται: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)\frac{1}{\nu}$ και συγκλίνει. Άρα τελικό διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1]$.

4) Να βρεθεί δυναμοσειρά της μορφής $y = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες: $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ και $y'' + 2y' = 0$.

Έστω
$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots && (1)\\
y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots && (2)\\
y'' &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^3 + 20a_5 x^4 + \cdots && (3)
\end{aligned}
$$

Επειδή $y(0) = 2$ η (1) δίνει $2 = a_0$ ή $a_0 = 2$.

Επειδή $y'(0)=1$ η (2) δίνει $1 = a_1$ ή $a_1 = 1$
Από τη σχέση $y''+2y'=0$ προκύπτει $y'' = -2y'$ ή

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\dots = -2a_1-4a_2x-6a_3x^2-8a_4x^3-\dots$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων του x βρίσκουμε τελικά

$$a_2 = -a_1 = -1,$$

$$a_3 = -\frac{4a_2}{6} = \frac{2}{3},$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{2} = -\frac{1}{3}, \dots$$

Έτσι παίρνουμε τελικά

$$y = 2 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \dots$$

Ασκήσεις

1) Να αναπτυχθούν κατά τις δυνάμεις του x οι συναρτήσεις α) $y = \eta\mu x$, β) $y = \sigma\upsilon\nu x$ και να βρεθούν τα διαστήματα σύγκλισής τους

2) Να αναπτυχθούν κατά τις δυνάμεις του x οι συναρτήσεις α) $y = e^x$, β) $y = e^{2x}$ και κατά τις δυνάμεις του $x-2$ η γ) $y = e^{x/2}$ και να βρεθούν τα διαστήματα σύγκλισης όλων αυτών

3) Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα των ασκήσεων 1α, 1β και 2α δείξτε τους παρακάτω τύπους:

α) $e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$ β) $e^{-ix} = \sigma\upsilon\nu x - i\eta\mu x$

γ) $\eta\mu x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, δ) $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, ε) $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

όπου $i = \sqrt{-1}$.

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

3.1. Πίνακες – Ορισμοί

Πίνακας (ή **μήτρα**) είναι ένα σύμβολο

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{ή σύντομα} \quad A = \left[\alpha_{ij}\right]_{\mu\times\nu},$$

όπου οι $\mu\cdot\nu$ σε πλήθος πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί α_{ij} $i=1,2,\cdots,\mu$, $j=1,2,\cdots,\nu$ τοποθετούνται σε μ οριζόντιες γραμμές και ν κατακόρυφες στήλες, τύπου $\mu\times\nu$.

Το σύνολο όλων των πινάκων τύπου $\mu\times\nu$ με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}_{\mu\times\nu}$ ή $\mathbb{C}_{\mu\times\nu}$.

Στα επόμενα, για χάρη γενικότητας, θα θεωρούμε ένα πίνακα A ότι ανήκει στο $\mathbb{C}_{\mu\times\nu}$. Εκτός αν ανήκει μόνο στο $\mathbb{R}_{\mu\times\nu}$, οπότε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

Ένας πίνακας που αποτελείται από μια γραμμή, δηλ. της μορφής $1\times\nu$ λέγεται πίνακας-γραμμή ή διάνυσμα-γραμμή και συμβολίζεται με Γ. Π.χ.

$$\Gamma_i = \left[\alpha_{i1} \;\; \alpha_{i2} \cdots \alpha_{i\nu}\right] \qquad i = 1,2,\cdots,\mu$$

είναι το i διάνυσμα-γραμμή του πίνακα A.

Ένας πίνακας που αποτελείται από μια στήλη, δηλ. της μορφής $\mu\times 1$, λέγεται πίνακας στήλη ή διάνυσμα-στήλη και συμβολίζεται με Σ.

Π.χ το j διάνυσμα-στήλη του πίνακα A είναι

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{\mu j} \end{bmatrix} \qquad j = 1, 2, \cdots, \nu$$

Έτσι ο πίνακας A που έχει γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\mu$ και στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu$ συμβολίζεται σύντομα με

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \end{bmatrix} \quad ή \quad A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \cdots \Sigma_\nu \end{bmatrix}$$

Δύο πίνακες λέγονται ίσοι όταν είναι του ίδιου τύπου και τα στοιχεία τους είναι ίσα και έχουν τις ίδιες θέσεις στους δύο πίνακες. Δηλαδή αν

$A = [a_{ij}]_{\mu\times\nu}$, $B = [\beta_{ij}]_{\kappa\times\lambda}$ τότε

$$[a_{ij}]_{\mu\times\nu} = [\beta_{ij}]_{\kappa\times\lambda} \Leftrightarrow \mu=\kappa,\ \nu=\lambda,\ a_{ij}=\beta_{ij} \ \forall i,j$$

Παραδείγματα

1) Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2i \\ i & 6 \end{bmatrix}$$

είναι της μορφής 2×3 και 2×2 και ανήκουν στα σύνολα $\mathbb{R}_{2\times 3}$ και $\mathbb{C}_{2\times 2}$ αντίστοιχα. Οι γραμμές των A και B είναι οι

$\Gamma_1 = [5 \ \ 0 \ \ -1]$, $\Gamma_2 = [3 \ \ 7 \ \ 2]$ και

$\Gamma_1' = [-1 \ \ -2i]$, $\Gamma_2' = [i \ \ 6]$ αντίστοιχα

Το στοιχείο α_{23} του πίνακα A που ανήκει στη δεύτερη γραμμή και τρίτη στήλη είναι το 2, ενώ το στοιχείο β_{12} του πίνακα B που ανήκει στην πρώτη γραμμή και δεύτερη στήλη είναι το $-2i$

2) Οι σπουδαστές μιας σχολής του Τ.Ε.Ι. κατά φύλο και εξάμηνο μπορούν να παρασταθούν με τον 2×6 πίνακα:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} A'\text{εξ.} & B'\text{εξ} & \Gamma'\text{εξ} & \Delta'\text{εξ} & E'\text{εξ} & \Sigma T'\text{εξ.} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 33 & 30 & 27 & 29 & 15 & 10 \\ 15 & 19 & 7 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{άντρες} \\ \text{γυναίκες} \end{array} \end{array}$$

3.2. Πράξεις πινάκων

Έστω $A = \left[\alpha_{ij}\right]_{\mu\times\nu}$ και $B = \left[\beta_{ij}\right]_{\mu\times\nu}$ δύο πίνακες του ίδιου τύπου που ανήκουν στο $\mathbb{R}_{\mu\times\nu}$ (ή το $\mathbb{C}_{\mu\times\nu}$). Ορίζουμε σαν άθροισμα (ή διαφορά) των πινάκων A και B τον πίνακα $\Gamma = A \pm B$ απ' την ισότητα

$$\left[\alpha_{ij}\right]_{\mu\times\nu} \pm \left[\beta_{ij}\right]_{\mu\times\nu} = \left[\alpha_{ij} \pm \beta_{ij}\right]_{\mu\times\nu} \quad (1)$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι δεν μπορούμε να προσθέσουμε δύο πίνακες, αν δέν είναι του ιδίου τύπου. Απ' την ισότητα (1) προκύπτει ότι για να προσθέσουμε δύο πίνακες (ή να τους αφαιρέσουμε) προσθέτουμε τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις (ή τα αφαιρούμε) και ο νέος πίνακας που παίρνουμε είναι του ίδιου τύπου με τους A, B.

Η πρόσθεση των πινάκων έχει τις εξής ιδιότητες:

α) $(A+B)+\Gamma = A+(B+\Gamma)$ $\forall A, B, \Gamma \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}$ (προσεταιρ.)

β) $A+B = B+A$ $\forall A, B \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}$ (αντιμεταθετική)

γ) $\exists\, O \in C_{\mu\times\nu} : \quad A+O = O+A = A \quad \forall A \in C_{\mu\times\nu}$
(ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου)

δ) $\forall A \in C_{\mu\times\nu} \quad \exists\, -A \in C_{\mu\times\nu} : \quad A+(-A) = (-A)+A = O$
(ύπαρξη αντίθετου στοιχείου)

ε) $A+\Gamma = B+\Gamma \Rightarrow A = B \quad \forall A, B, \Gamma \in C_{\mu\times\nu}$
(νόμος της απλοποίησης)

Ορίζουμε τώρα το γινόμενο $A\cdot B$ δύο πινάκων. Παίρνουμε πρώτα την ειδική περίπτωση πινάκων που ο πρώτος είναι πίνακας-γραμμή και ο δεύτερος πίνακας-στήλη.

Το γινόμενο $\Gamma\cdot\Sigma$ της γραμμής $\Gamma = [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_\nu]$ επί τη στήλη

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

ορίζεται μόνο όταν η γραμμή Γ και η στήλη Σ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, από την ισότητα

$$\Gamma\cdot\Sigma = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_\nu\beta_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i\beta_i .$$

Έστω τώρα δύο πίνακες $A = [\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}$, $B = [\beta_{ij}]_{\nu\times\lambda}$, όπου ο πίνακας B έχει τόσες γραμμές, όσες στήλες έχει ο A. Τότε το γινόμενο $A\cdot B$ των πινάκων αυτών, που ορίζεται μόνο σ' αυτή την περίπτωση, είναι ο πίνακας

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} \Gamma_1\Sigma_1' & \Gamma_1\Sigma_2' & \cdots & \Gamma_1\Sigma_\lambda' \\ \Gamma_2\Sigma_1' & \Gamma_2\Sigma_2' & \cdots & \Gamma_2\Sigma_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Gamma_\mu\Sigma_1' & \Gamma_\mu\Sigma_2' & \cdots & \Gamma_\mu\Sigma_\lambda' \end{bmatrix}_{\mu\times\lambda}$$

όπου $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\mu$ είναι οι γραμμές του πίνακα A και $\Sigma_1', \Sigma_2', \cdots, \Sigma_\lambda'$ είναι οι στήλες του πίνακα B. Τονίζουμε ότι ο πίνακας $A\cdot B$ έχει μ γραμμές και λ στήλες. Το στοιχείο $\Gamma_i \Sigma_j'$ του γινομένου $A\cdot B$ είναι το

$$\Gamma_i \Sigma_j' = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{\nu j} \end{bmatrix} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}$$

Το τετράγωνο $A^2 = A\cdot A$ ενός πίνακα ορίζεται μόνο όταν ο A έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών δηλ. είναι της μορφής $\mu\times\mu$.

Ο πολ/μός των πινάκων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $(A\cdot B)\cdot\Gamma = A\cdot(B\cdot\Gamma) \quad \forall A\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu},\ B\in\mathbb{C}_{\nu\times\lambda},\ \Gamma\in\mathbb{C}_{\lambda\times\kappa}$
(προσεταιριστική)

β) $A\cdot(B+\Gamma) = A\cdot B + A\cdot\Gamma \quad \forall A\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu},\ B,\Gamma\in\mathbb{C}_{\nu\times\lambda}$
$(A+B)\cdot\Gamma = A\cdot\Gamma + B\cdot\Gamma \quad \forall A,B\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu},\ \Gamma\in\mathbb{C}_{\nu\times\lambda}$
(επιμεριστική)

γ) Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολ/μό δηλ. $A\cdot B \neq B\cdot A$

δ) Από την ισότητα $A\cdot B = O$ δεν προκύπτει γενικά ότι $A=O$ ή $B=O$, μπορεί δηλ. να είναι $A,B\neq O$

Στη συνέχεια ορίζουμε σαν γινόμενο αριθμού λ επί τον πίνακα $A=\left[\alpha_{ij}\right]_{\mu\times\nu}$, τον πίνακα $\lambda\cdot A$ έτσι ώστε

$$\lambda\cdot A = A\cdot\lambda = \left[\lambda\alpha_{ij}\right]_{\mu\times\nu} = \left[\alpha_{ij}\lambda\right]_{\mu\times\nu}$$

δηλ τον πίνακα που προκύπτει, αν όλα τα στοιχεία του πολλαπλασιαστούν με το λ. ($\lambda\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$).

Ο πολ/μός αριθμού με πίνακα έχει τις επόμενες ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & (\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A \\ \beta) & \lambda\cdot(A+B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B \\ \gamma) & \lambda(\mu\cdot A) = (\lambda\mu)\cdot A \\ \delta) & 1\cdot A = A \end{array}\right\} \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C},\ A,B\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu}$$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

1) Το άθροισμα των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ x & 0 & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3x & -1 & -\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 7 \\ 4x & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει έννοια, γιατί οι πίνακες είναι του ίδιου τύπου.

2) Το γινόμενο των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$$

δεν ορίζεται γιατί ο δεύτερος πίνακας έχει δύο γραμμές και ο πρώτος έχει τρεις στήλες. Ενώ το

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1\Sigma_1' & \Gamma_1\Sigma_2' & \Gamma_1\Sigma_3' \\ \Gamma_2\Sigma_1' & \Gamma_2\Sigma_2' & \Gamma_2\Sigma_3' \\ \Gamma_3\Sigma_1' & \Gamma_3\Sigma_2' & \Gamma_3\Sigma_3' \end{bmatrix}_{3\times 3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot 5 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ (-2)\cdot 1 + 0\cdot 0 & (-2)\cdot 0 + 0\cdot 5 & (-2)(-1) + 0\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 0 & 4\cdot 0 + 6\cdot 5 & 4\cdot(-1) + 6\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 30 & 14 \end{bmatrix}$$

Ακόμα

$$5\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -5 \\ 35 & -10 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Θα δώσουμε τώρα μερικούς συμπληρωματικούς ορισμούς που αποτελούν ειδική κατηγορία πινάκων.

Όπως τονίσαμε παραπάνω, το τετράγωνο $A \cdot A = A^2$ ενός πίνακα ορίζεται μόνο όταν έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας λέγεται τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ό ς και είναι της μορφής $\mu \times \mu$. Γενικότερα ορίζουμε $A^3 = A^2 \cdot A$, $A^4 = A^3 \cdot A, \cdots, A^\nu = A^{\nu-1} \cdot A$.

Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{\nu\nu}$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A = [a_{ij}]_{\nu \times \nu}$ λέμε ότι αποτελούν την κ ύ ρ ι α δ ι α γ ώ ν ι ο, ενώ τα στοιχεία $a_{\nu 1}, a_{\nu-1,2}, \cdots, a_{1\nu}$ την δ ε υ τ ε ρ ε ύ ο υ σ α.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $D = [d_{ij}]_{\nu \times \nu}$ λέγεται δ ι α γ ώ ν ι ο ς όταν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται έξω απ' την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά, δηλαδή αν $d_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$. Ο διαγώνιος πίνακας D συμβολίζεται με $D = diag\{d_{11}\ d_{22} \cdots d_{\nu\nu}\}$

Ειδικότερα ένας διαγώνιος πίνακας $D = diag\{d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{\nu\nu}\}$ λέγεται μ ο ν α δ ι α ί ο ς όταν

$$d_{ii} = 1, \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, \nu$$

και συμβολίζεται με I_ν, ενώ λέγεται μ η δ ε ν ι κ ό ς

$$\text{όταν} \quad d_{ii} = 0, \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, \nu$$

Μια ιδιότητα του μοναδιαίου πίνακα είναι ότι

$$I_\nu \cdot A = A \cdot I_\nu = A, \quad \forall\, A \in \mathbb{C}_{\nu \times \nu}$$

δηλ. αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο στον πολλαπλασιασμό πινάκων της μορφής $\nu \times \nu$

Αν οι γραμμές ενός πίνακα $A = [a_{ij}]_{\mu \times \nu}$ γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, τότε προκύπτει ο $\nu \times \mu$ πίνακας $A^t = [a_{ji}]_{\nu \times \mu}$ και λέγεται α ν ά σ τ ρ ο φ ο ς του A.

Για τον ανάστροφο πίνακα A^t ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

α) $I_\nu^t = I_\nu$

β) $(A^t)^t = A \quad \forall A \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}$

γ) $(\lambda\cdot A)^t = \lambda\cdot A^t, \ \forall \lambda\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $A\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu}$

δ) $(A+B)^t = A^t + B^t, \ \forall A, B\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu}$

ε) $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t, \ \forall A\in\mathbb{C}_{\mu\times\nu}, B\in\mathbb{C}_{\nu\times\lambda}$

Ένας πίνακας $A = [a_{ij}]_{\nu\times\nu}$ τετραγωνικός λέγεται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ό ς (ή α ν τ ι σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ό ς) όταν $A^t = A$ (ή $A^t = -A$) δηλ. όταν

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1,2,\dots,\nu$ (ή $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i,j = 1,2,\dots,\nu$)

Ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}_{\nu\times\nu}$ λέγεται ο ρ θ ο γ ώ ν ι ο ς αν επαληθεύει την ισότητα $A\cdot A^t = I_\nu$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

1) Ο διαγώνιος πίνακας $diag\{1,-2,3\}$ είναι $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

επίσης $I_2 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ κ.τ.λ.

ακόμα $\begin{bmatrix}3&4\\-1&5\\0&2\end{bmatrix}_{3\times2}^t = \begin{bmatrix}3&-1&0\\4&5&2\end{bmatrix}_{2\times3}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix}2&4&-1\\4&6&7\\-1&7&8\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}0&-1&5\\1&0&-2\\-5&2&0\end{bmatrix}$

είναι ο A συμμετρικός ($A^t = A$) και ο B αντισυμμετρικός ($B^t = -B$). Η κύρια διαγώνιος ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι πάντα μηδενική.

2) Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} συνθ & -ημθ \\ ημθ & συνθ \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος

γιατί $A \cdot A^t = \begin{bmatrix} συνθ & -ημθ \\ ημθ & συνθ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} συνθ & ημθ \\ -ημθ & συνθ \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} συν^2θ + ημ^2θ & συνθημθ - ημθσυνθ \\ ημθσυνθ - συνθημθ & ημ^2θ + συν^2θ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Πολλές φορές για λόγους οικονομίας χώρου ο πίνακας-στήλη

$$Σ = \begin{bmatrix} α_1 \\ α_2 \\ \vdots \\ α_ν \end{bmatrix} \text{ συμβολίζεται με } Σ = \begin{bmatrix} α_1 & α_2 & \cdots & α_ν \end{bmatrix}^t$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι πραγματικοί $x, y, z, ω$, αν ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2x & -y \\ 3z & ω \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -4 \\ -1 & 2ω \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+ω & 3 \end{bmatrix}$$

2) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ και I_2, O ο μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας τύπου 2×2, δείξτε ότι $A^2 + 2A - 11I_2 = O$

3) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} α & α \\ α & α \end{bmatrix}$, όπου $α \in \mathbb{R} - \{0\}$, δείξτε ότι α) $A^ν = 2^{ν-1}A$, β) $B^ν = 2^{ν-1}α^ν A$.

4) Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του $x \in \mathbb{R}$ για την

οποία ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & x \end{bmatrix}$$

επαληθεύει την ισότητα

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0$$

5) Να βρεθούν όλοι οι πίνακες $X \in \mathbb{R}_{2\times 2}$ που επαληθεύουν την ισότητα $X^2 = I_2$

6) Να αποδειχθούν οι ισότητες πινάκων

i) $$\begin{bmatrix} συνα & ημα \\ ημα & -συνα \end{bmatrix}^2 = I_2$$

ii) $$\begin{bmatrix} συνα & ημα \\ ημα & -συνα \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} συνβ & ημβ \\ ημβ & -συνβ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} συν(α-β) & -ημ(α-β) \\ ημ(α-β) & συν(α-β) \end{bmatrix}$$

iii) $$\begin{bmatrix} συνα & -ημα \\ ημα & συνα \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} συν2α & -ημ2α \\ ημ2α & συν2α \end{bmatrix}$$

7) Να υπολογιστούν οι x και y από τις εξισώσεις

α) $$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$ β) $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3.3. Ορίζουσες - Ορισμοί

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_{\nu\times\nu}$. Καλούμε ορίζουσα του πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $|A|$ ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ δηλ ένα αριθμό που ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

Ορίζουσα του 1×1 πίνακα $|\alpha|$ λέγεται ο αριθμός α, δηλ.

$$|\alpha| = \alpha$$

Ορίζουσα του 2×2 πίνακα $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ λέγεται ο αριθμός $\alpha\delta-\beta\gamma$

$$\text{δηλ.} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Υποθέτουμε ότι έχει ορισθεί η ορίζουσα ενός $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα. Η ορίζουσα αυτή του $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα που προκύπτει από τον $\nu\times\nu$ πίνακα A, αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη, λέγεται (i,j)-ελάσσονα ορίζουσα του πίνακα A και συμβολίζεται με $M_{ij}(A)$ ή M_{ij}. Ύστερα από τον ορισμό της ελάσσονας ορίζουσας, ορίζουσα του $\nu\times\nu$ πίνακα $A=[\alpha_{ij}]$ λέγεται ο αριθμός

$$|A| = \alpha_{11}M_{11} - \alpha_{12}M_{12} + \alpha_{13}M_{13} - \cdots + (-1)^{1+\nu}\alpha_{1\nu}M_{1\nu}$$

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα ενός πίνακα $A=[\alpha_{ij}]_{\nu\times\nu}$ μπορεί να αναπτυχθεί κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης. Έτσι το αποτέλεσμα του αναπτύγματος είναι:

$$|A| = (-1)^{i+1}\alpha_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2}M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+\nu}\alpha_{i\nu}M_{i\nu} \qquad (1)$$

$$|A| = (-1)^{1+j}\alpha_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}\alpha_{2j}M_{2j} + \cdots + (-1)^{\nu+j}\alpha_{\nu j}M_{\nu j} \qquad (2)$$

Η σχέση (1) εκφράζει το ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της i-γραμμής, ενώ η (2) εκφράζει το ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της j-στήλης.

Έτσι αν έχουμε τον πίνακα 3×3

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

το ανάπτυγμα της $|A|$ κατά τα στοιχεία π.χ. της δεύτερης γραμμής δίνει

$$A = (-1)^{2+1}\alpha_{21}M_{21} + (-1)^{2+2}\alpha_{22}M_{22} + (-1)^{2+3}\alpha_{23}M_{23} =$$

$$= -\alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix} - \alpha_{23}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{32}) + \alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31}) -$$

$$- \alpha_{23}(\alpha_{11}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{31})$$

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα βρίσκεται και με τον επόμενο εμπειρικό κανόνα γνωστό σαν κανόνα του S a r r u s.

Γράφουμε δεξιά του πίνακα τις δύο πρώτες στήλες του και υπολογίζουμε τα γινόμενα των στοιχείων του κατά μήκος των εστιγμένων γραμμών του σχήματος και παίρνουμε θετικά τα γινόμενα που σημειώνονται με + στο πάνω μέρος πίνακα και αρνητικά αυτά που σημειώνονται με − στο κάτω μέρος του πίνακα.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Τονίζεται ότι ο κανόνας του Sarrus ισχύει μόνο για 3×3 πίνακες και όχι για 4×4 ή 5×5 κ.τ.λ.

Από τις σχέσεις (1) ή (2) που εκφράζουν το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας, παρατηρούμε ότι τα σημεία των όρων του αναπτύγματος $(-1)^{i+\kappa}\alpha_{i\kappa}M_{i\kappa}$ της (1) ή του $(-1)^{\kappa+j}\alpha_{\kappa j}M_{\kappa j}$ της (2), $\kappa = 1, 2, \cdots, \nu$ εναλλάσσονται. Αυτό σημαίνει ότι αν το σημείο του πρώτου όρου είναι +, τότε τα σημεία των όρων θα είναι +, −, +, −, ⋯ και αν είναι −, τότε τα σημεία των όρων θα είναι −, +, −, +, ⋯

Ένας πρακτικός τρόπος να υπολογίζουμε το πρώτο πρόσημο του αναπτύγματος αν θα είναι + ή - είναι:

Προσθέτουμε τη γραμμή και στήλη που ανήκει το στοιχείο που ξεκινάμε το ανάπτυγμα. Αν το άθροισμα είναι άρτιος ξεκινάμε το ανάπτυγμα με +, αν είναι περιττός με -.

Είναι φανερό ότι το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός $\nu\times\nu$ πίνακα ανάγεται στον υπολογισμό των οριζουσών ν πινάκων του τύπου $(\nu-1)\times(\nu-1)$ δηλ. των ελασσόνων οριζουσών $M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1\nu}$. Ο υπολογισμός κάθε ελάσσονας ορίζουσας ανάγεται πάλι στον υπολογισμό των οριζουσών $\nu-1$ πινάκων του τύπου $(\nu-2)\times(\nu-2)$. Εύκολα υπολογίζεται ότι ο υπολογισμός της $|A|$ ανάγεται τελικά στον υπολογισμό των οριζουσών $\nu(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdots 4\cdot 3$ πινάκων τύπου 2×2. Ο αριθμός αυτός αυξάνεται πολύ γρήγορα σε σχέση με το ν. π.χ για $\nu=4$ έχουμε $4\cdot 3=12$ ενώ για $\nu=6$ έχουμε $\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots 3 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$. Για να υπολογίσουμε δηλ. μια ορίζουσα ενός 6×6 πίνακα θα πρέπει να υπολογίσουμε τελικά 360 ορίζουσες τύπου 2×2.

Συνήθως προτιμούμε να αναπτύσσουμε μια ορίζουσα κατά εκείνη τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα στοιχεία της μηδενικά.

Ιδιότητες οριζουσών

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη μερικές από τις ιδιότητες των οριζουσών.

1η. Αν μια γραμμή (ή μια στήλη) του $\nu\times\nu$ πίνακα A είναι μηδενική, τότε $|A|=0$. Επίσης αν όλες οι ελάσσονες που αντιστοιχούν στα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) του $\nu \times \nu$ πίνακα A είναι ίσες με 0 τότε $|A| = 0$

2η. Αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (η στήλης) του $\nu \times \nu$ πίνακα A επί $\alpha \neq 0$, τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί α.

3η. Αν δύο γραμμές (ή στήλες) του $\nu \times \nu$ πίνακα A είναι ίσες $(\nu \geq 2)$, τότε $|A| = 0$

4η. Αν σε μια γραμμή (ή στήλη) του $\nu \times \nu$ πίνακα A προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε η ορίζουσά του δεν μεταβάλλεται.

5η. Αν δύο γραμμές (ή στήλες) του $\nu \times \nu$ πίνακα A είναι ανάλογες, δηλ αν $\Gamma_i = k\Gamma_j$ (ή $\Sigma_i = k\Sigma_j$) $i \neq j$, τότε $|A| = 0$

6η. Αν αλλάξουμε αμοιβαία τη θέση δύο γραμμών (ή στηλών) του $\nu \times \nu$ πίνακα A, τότε η ορίζουσα του πίνακα A αλλάζει σημείο.

7η. Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή στήλης) του $\nu \times \nu$ πίνακα A είναι άθροισμα δύο προσθετέων, τότε η ορίζουσα του πίνακα A ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών.

Μια ειδική κατηγορία τετραγωνικών πινάκων είναι οι τ ρ ι γ ω ν ι κ ο ί πίνακες. Ένας τετραγωνικός πίνακας του τύπου $\nu \times \nu$ $\nu \geq 2$ λέγεται πάνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός), όταν όλα τα στοιχεία του, που βρίσκονται πιο κάτω (ή πιο πάνω) από την κύρια διαγώνιο, είναι μηδενικά, δηλ αν $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$ (ή αν $a_{ij} = 0$ $\forall i < j$).

Το αξιοσημείωτο για τους πίνακες αυτούς είναι ότι η ορίζουσά τους υπολογίζεται πολύ εύκολα. Έτσι έχουμε μια ακόμα ιδιότητα

8η. Η ορίζουσα ενός πάνω τριγωνικού ή κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Αποδεικνύεται ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \neq 0$ μετατρέπεται σε πάνω τριγωνικό ή κάτω τριγωνικό πίνακα. Επομένως ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα, διαφορετικός από την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά μήκος κάποιας γραμμής ή στήλης, είναι ο μετασχηματισμός της ορίζουσας, με βάση τις ιδιότητες που αναφέραμε, σε ορίζουσα ενός πάνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα, οπότε το ανάπτυγμά της σύμφωνα με την ιδιότητα 8. θα είναι τό γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Παραδείγματα.

1) Να υπολογιστεί η ορίζουσα $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ με δύο τρόπους.

Με τον κανονικό τρόπο αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατα τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης π.χ της 1ης γραμμής. Έτσι έχουμε:

$$A = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2(3-4) +$$

$$+ 3(3+6) + 1(-2-3) = -2 + 27 - 5 = 20$$

Με τον άλλο τρόπο τη μετασχηματίζουμε σε ορίζουσα ενός πάνω τριγωνικού πίνακα. Γι αυτό εφαρμόζω τις ιδιότητες των οριζουσών. Έτσι εφαρμόζοντας την 4η ιδιότητα πολλαπλασιάζω την 1η γραμμή με $-\frac{1}{2}$ και την προσθέτω στη δεύτερη. Έτσι έχω:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω την 1η γραμμή με $-\frac{3}{2}$ και την προσθέτω στην τρίτη. Έτσι έχω

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω τη 2η γραμμή με -1 και την προσθέτω στην τρίτη γραμμή. Έτσι προκύπτει

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Άρα προέκυψε ορίζουσα ενός πάνω τριγωνικού πίνακα επομένως είναι $A = 2 \cdot 5/2 \cdot 4 = 20$.

2) Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Εφαρμόζοντας την 4η ιδιότητα προσθέτω στην 1η γραμμή όλες τις άλλες γραμμές (δηλ. η 4η ιδιότητα εφαρμόζεται διαδοχικά για κάθε μια από τις υπόλοιπες γραμμές 2η, 3η, 4η). Έτσι έχω

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Βγάζω το $x+3$ κοινό παράγοντα, εφαρμόζοντας τη $2^{η}$ ιδιότητα.

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Αφαιρώ από τη $2^{η}$, $3^{η}$, $4^{η}$ γραμμή την πρώτη και έχω:

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Η τελευταία ορίζουσα που έχει προκύψει είναι ορίζουσα ενός πάνω τριγωνικού πίνακα. Άρα

$(x+3)\cdot 1\cdot (x-1)^3 = 0$ απ' όπου προκύπτουν οι ρίζες

$x=-3$ απλή ή $x=1$ τριπλή ρίζα.

3) Να υπολογιστεί η ορίζουσα $|A| = \begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$

Η ορίζουσα γράφεται (ιδιότητα 7.)

$$\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta+0 & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma+0 & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ 0 & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ 0 & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$$

Υπολογίζουμε πρώτα την πρώτη ορίζουσα.

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το α από την πρώτη στήλη.

$$\text{Έτσι}\quad \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με β και την αφαιρούμε από την δεύτερη, καθώς επίσης πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με γ και την αφαιρούμε από την τρίτη στήλη. Έτσι έχουμε

$$\alpha \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\cdot\alpha\cdot 1\cdot 1 = \alpha^2$$

γιατί η τελευταία είναι ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού πίνακα.

Η δεύτερη ορίζουσα αν αναπτυχθεί κανονικά θα δώσει (κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης που υπάρχουν δύο μηδενικά)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ 0 & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ 0 & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta^2+1)(\gamma^2+1) - \beta^2\gamma^2 = 1+\beta^2+\gamma^2. \quad \text{Άρα } |A| = 1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

4) Να υπολογιστεί η $A = \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}$

Αν από την $4^η$ στήλη αφαιρέσουμε την $3^η$, από την $3^η$ στήλη αφαιρέσουμε τη $2^η$, από τη $2^η$ στήλη αφαιρέσουμε την $1^η$, προκύπτει η ισοδύναμη ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2\alpha+3 & 2\alpha+5 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2\beta+3 & 2\beta+5 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2\gamma+3 & 2\gamma+5 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2\delta+3 & 2\delta+5 \end{vmatrix}$$

Αν πάλι από την $4^η$ στήλη αφαιρέσουμε την $3^η$ και από την $3^η$ στήλη αφαιρέσουμε τη $2^η$, προκύπτει η

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2 & 2 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2 & 2 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2 & 2 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{κατά την } 5^{\underline{η}} \text{ ιδιότητα.}$$

5) Να υπολογιστεί η $A = \begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}$

Αν στην πρώτη γραμμή προσθέσουμε τη $2^η$ και $3^η$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}$$

Βγάζουμε το $\alpha+\beta+\gamma$ από την $1^η$ γραμμή κοινό παράγοντα

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}$$

Από την $3^η$ στήλη αφαιρούμε την $1^η$ και από τη $2^η$ στήλη αφαιρούμε πάλι την $1^η$ στήλη οπότε προκύπτει η ορίζουσα τριγωνικού κάτω πίνακα

$$(\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -(\alpha+\beta+\gamma) & 0 \\ 2\gamma & 0 & -(\alpha+\beta+\gamma) \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\cdot 1\cdot[-(\alpha+\beta+\gamma)]\cdot[-(\alpha+\beta+\gamma)] = (\alpha+\beta+\gamma)^3$$

6) Αν $a_i \neq 0$ $i=1,2,\cdots,\nu$ να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_\nu \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_\nu \left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_\nu}\right)$$

Αν βγάλουμε από την $1^η$ στήλη κοινό παράγοντα το a_1, από τη $2^η$ στήλη το a_2 $\cdots$ από τη $\nu^{στή}$ το a_ν προκύπτει

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_\nu \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_\nu \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1}+1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_\nu} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2}+1 & \cdots & \frac{1}{a_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_\nu}+1 \end{vmatrix}$$

Προσθέτουμε στην $1^η$ στήλη την $2^η, 3^η, \cdots, \nu^{στή}$ και έχουμε

$$a_1 a_2 \cdots a_\nu \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_\nu} \\ 1+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2}+1 & \cdots & \frac{1}{a_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_\nu}+1 \end{vmatrix}$$

Η πρώτη στήλη της νέας ορίζουσας είναι ίδια. Άρα βγάζουμε το άθροισμα $1+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{a_i}$ κοινό παράγοντα και έχουμε :

$$a_1 a_2 \cdots a_\nu \left(1+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_\nu} \\ 1 & \frac{1}{a_2}+1 & \cdots & \frac{1}{a_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_\nu}+1 \end{vmatrix}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την 1^{η} στήλη με $\frac{1}{a_2}$ και την αφαιρέσουμε από την 2^{η} στήλη, επίσης την 1^{η} στήλη με $\frac{1}{a_3}$ και την αφαιρέσουμε από την 3^{η}, $\cdots$, την 1^{η} στήλη με $\frac{1}{a_\nu}$ και την αφαιρέσουμε από την $\nu^{\text{στή}}$ προκύπτει

$$a_1 a_2 \cdots a_\nu \left(1+\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{a_i}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Η τελευταία είναι ορίζουσα τριγωνικού πίνακα και είναι ίση με $1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$.

Α σ κ ή σ ε ι ς

1) Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες.

α) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha+\beta \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, β) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$,

γ) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$, δ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha+2\beta \\ \alpha(\alpha+\beta) & (\alpha+\beta)(\alpha+2\beta) & (\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta) \end{vmatrix}$.

2) Να αποδειχθούν οι ισότητες με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών.

α) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta+2 & 1 \\ \beta & \alpha+2 & 1 \\ 2 & \alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$ β) $\begin{vmatrix} 1+\alpha x & 1+\alpha y & 1+\alpha z \\ 1+\beta x & 1+\beta y & 1+\beta z \\ 1+\gamma x & 1+\gamma y & 1+\gamma z \end{vmatrix} = 0$

γ) $$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & 1 & \alpha \\ \beta-\gamma & 1 & \beta \\ \gamma-\alpha & 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ \beta & 1 & \gamma \\ \gamma & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

3) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

α) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ β) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$

γ) $\begin{vmatrix} 2 & x & x & 1 \\ x & 2 & 1 & x \\ x & 1 & 2 & x \\ 1 & x & x & 2 \end{vmatrix} = 0$ δ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \nu-1-x \end{vmatrix} = 0$

4) Να αποδειχθούν οι σχέσεις

α) $$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & \cdots & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_2 & \cdots & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_\nu \end{vmatrix} = \nu!$$

όπου A_ν είναι το άθροισμα των ν φυσικών αριθμών.

β) $$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_\nu & a_\nu \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^\nu(\nu+1)\,a_1 a_2 \cdots a_\nu$$

γ) $$\begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu & \cdots & \nu \\ \nu & 2 & \nu & \cdots & \nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \nu & \nu & \nu & \cdots & \nu \end{vmatrix} = (-1)^{\nu-1}\cdot 1\cdot 2\cdots \nu = (-1)^{\nu-1}\cdot \nu!$$

3.4. Αντίστροφοι πίνακες

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}_{\nu\times\nu}$ λέγεται α ν τ ι σ τ ρ έ ψ ι μ ο ς ή ο μ α λ ό ς αν υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{C}_{\nu\times\nu}$ τέτοιος ώστε $A\cdot B = B\cdot A = I_\nu$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας B, τότε ο A λέγεται μη αντιστρέψιμος.

Αποδεικνύεται ότι αν ο πίνακας A είναι ομαλός, τότε ο πίνακας B που επαληθεύει την ισότητα $A\cdot B = B\cdot A = I_\nu$ είναι μοναδικός.

Πράγματι· αν υπήρχε και άλλος πίνακας B' τέτοιος ώστε $A\cdot B' = B'A = I_\nu$ τότε θα είχαμε

$B' = B'I_\nu = B'(A\cdot B) = (B'A)B = I_\nu B = B$. δηλ. $B' = B$.

Ο πίνακας A είναι ομαλός τότε και μόνο, αν $|A| \neq 0$. Ο πίνακας B που επαληθεύει τις ισότητες $A\cdot B = B\cdot A = I_\nu$ λέγεται α ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ς του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

δηλαδή $\quad A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_\nu$

Αποδεικνύεται ότι ο τύπος που δίνει τον αντίστροφο ενός πίνακα A είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ και M_{ij} είναι οι ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα A.

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τους αριθμούς $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ που λέγονται και αλγεβρικά συμπληρώματα του πίνακα A. Έτσι έχουμε

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

και $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

Η ορίζουσα του πίνακα A υπολογίζεται με τον κανόνα του Sarrus. Έτσι έχουμε

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 3\cdot4\cdot3 + 1\cdot1\cdot0 + 0\cdot2\cdot1 - 0\cdot4\cdot0 - 1\cdot1\cdot3 - 3\cdot2\cdot1 = 27.$$

οπότε ο τύπος που αναφέραμε παραπάνω δίνει

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11/27 & -3/27 & 1/27 \\ -6/27 & 9/27 & -3/27 \\ 2/27 & -3/27 & 10/27 \end{bmatrix}$$

3.5. Γραμμικά συστήματα

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_\nu x_\nu = \beta$$

λέγεται γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους τους $x_1, x_2, \dots, x_\nu$. Ένα πλήθος γραμμικών εξισώσεων λέγεται γραμμικό σύστημα. Ένα τέτοιο σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους είναι της μορφής:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}x_\nu=\beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}x_\nu=\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu1}x_1+\alpha_{\mu2}x_2+\cdots+\alpha_{\mu\nu}x_\nu=\beta_\mu \end{array} \qquad (1)$$

όπου α_{ij}, β_i $i=1,2,\cdots,\mu$, $j=1,2,\cdots,\nu$ είναι στοιχεία του συνόλου των μιγαδικών ή πραγματικών αριθμών.

Λύση του συστήματος (1) λέγεται κάθε διατεταγμένη ν-άδα $(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του.

Το σύστημα αυτό λέγεται συμβιβαστό όταν έχει τουλάχιστο μια λύση. Αν δεν έχει καμμία λύση λέγεται ασυμβίβαστο ή αδύνατο.

Δύο γραμμικά συστήματα με το ίδιο πλήθος αγνώστων λέγονται ισοδύναμα άν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Δηλαδή κάθε λύση του ενός είναι και λύση του άλλου.

Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

λέγεται πίνακας του συστήματος (1) και οι πίνακες-στήλες

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}.$$

λέγονται στήλη των αγνώστων και στήλη των σταθερών του συστήματος (1) αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί σαν εξίσωση πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ή σύντομα $A \cdot X = \Sigma$

επειδή το πρώτο μέλος κάθε εξίσωσης είναι γινόμενο του πίνακα-γραμμή των συντελεστών της με τον πίνακα στήλη των αγνώστων.

Ο πίνακας

$$[A \mid \Sigma] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array}\right]$$

λέγεται πίνακας όλων των συντελεστών του συστήματος ή ε π α υ ξ η μ έ ν ο ς πίνακας.

Πριν προχωρήσουμε στη λύση των γραμμικών συστημάτων είναι απαραίτητο να δώσουμε μερικούς ακόμα χρήσιμους ορισμούς:

Έστω πίνακας $A = [\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}$. Ονομάζουμε β α θ μ ό του πίνακα A και τον συμβολίζουμε με $\mathrm{rank}(A)$ ή $r(A)$ έναν φυσικό αριθμό $r \leq \mu, \nu$ τέτοιον ώστε, μια τουλάχιστον ορίζουσα του πίνακα A τάξεως r να είναι διάφορη του μηδενός, ενώ κάθε ορίζουσα του A τάξεως μεγαλύτερης του r να είναι ίση με μηδέν.

Π.χ. ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι βαθμού $r=2$ επειδή η ορίζουσα π.χ. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ και

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Στις ιδιότητες των οριζουσών δώσαμε τον ορισμό των τριγωνικών πινάκων. Αν ο πίνακας A δεν είναι τετραγωνικός και είναι τύπου $\mu \times \nu$, δηλ $A = [a_{ij}]_{\mu\times\nu}$, τότε ο A λέγεται π ά ν ω κ λ ι μ α κ ω τ ό ς (ή κάτω κλιμακωτός), αν $a_{ij}=0 \ \forall\, i>j$ (ή αν $a_{ij}=0 \ \forall\, i<j$).

Π.χ. οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ο A κλιμακωτός πάνω και ο B κλιμακωτός κάτω.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των οριζουσών που αναφέραμε, με τις οποίες μπορούμε πάντα να μετασχηματίσουμε μια ορίζουσα σε τριγωνική πάνω ή κάτω, με τις ίδιες ιδιότητες μπορούμε να μετατρέψουμε ένα πίνακα A

τύπου $\mu \times \nu$ σε ισοδύναμο κλιμακωτό πάνω ή κάτω. Ο τρόπος αυτός μετατροπής δεν είναι μοναδικός. Ωστόσο, οι διάφορες μορφές των ισοδύναμων κλιμακωτών πινάκων που παίρνουμε έχουν ένα σπουδαίο κοινό χαρακτηριστικό.

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των μή μηδενικών γραμμών (όχι στηλών) στις διάφορες κλιμακωτές πάνω μόνο μορφές του πίνακα A είναι σταθερό και ίσο με το βαθμό r του A (ο μετασχηματισμός γίνεται μόνο στις γραμμές).

Επομένως ο βαθμός ενός πίνακα βρίσκεται και με άλλο τρόπο εκτός από τον ορισμό, αρκεί να μετασχηματίσουμε αυτόν σε ισοδύναμο κλιμακωτό πάνω ή κάτω πίνακα.

Π. χ. ο βαθμός του προηγούμενου πίνακα που τον υπολογίσαμε με τις ορίζουσες, μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{9}{2} & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(Τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής πολλαπλασιάζονται με $-\frac{1}{2}$ και προστίθενται στα στοιχεία της $3^{ης}$ γραμμής. Στη συνέχεια τα στοιχεία της $2^{ης}$ γραμμής πολλαπλασιάζονται με $\frac{3}{2}$ και προστίθενται στα στοιχεία της $3^{ης}$ γραμμής). Έτσι ο τελευταίος πίνακας που είναι κλιμακωτός πάνω έχει 2 μή μηδενικές γραμμές, επομένως ο βαθμός r είναι 2.

Η μέθοδος επίλυσης ενός συστήματος μ εξισώσεων με ν αγνώστους, η γνωστή σαν μέθοδος των αντίθετων συντελεστών, ή μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών των αγνώστων, του Gauss, στηρίζεται σε ορισμένες στοιχειώδεις πράξεις, που το μετατρέπουν σε άλλο σύστημα ισοδύναμο προς το αρχικό. Τέτοιες στοιχειώδεις πράξεις είναι:

α) Αμοιβαία αλλαγή των θέσεων δύο εξισώσεων

β) Πολλαπλασιασμό μιας εξίσωσης με $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$

γ) Πρόσθεση σε μια εξίσωση ενός πολλαπλάσιου μιας άλλης.

Τις ίδιες στοιχειώδεις πράξεις εφαρμόζουμε και στη μετατροπή ενός πίνακα σε κλιμακωτό πίνακα.

Μπορούμε εύκολα να μεταφερθούμε από την έννοια του γραμμικού συστήματος στην έννοια του πίνακα, αρκεί να γράψουμε τους συντελεστές της ίδιας εξίσωσης στην ίδια γραμμή, τους συντελεστές του ίδιου άγνωστου στην ίδια κατακόρυφη στήλη και τους σταθερούς όρους στην τελευταία στήλη.

Π.χ. για το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 7 \\ 8x_2 - 4x_3 \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

ο αντίστοιχος πίνακας είναι

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 8 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ένα βασικό θεώρημα μας εξασφαλίζει, αν ένα σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους είναι συμβιβαστό ή όχι, δηλαδή αν έχει λύση (λύσεις) ή όχι.

Θεώρημα 3.5.1.

"Το γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους $A \cdot X = \Sigma$ είναι συμβιβαστό τότε και μόνο τότε, όταν $\text{rank}(A) = \text{rank}[A \mid \Sigma]$ ενώ είναι πάντα ασυμβίβαστο όταν $\text{rank}(A) \neq \text{rank}[A \mid \Sigma]$ δηλαδή $\text{rank}[A \mid \Sigma] = \text{rank}(A) + 1$."

Σχετικές παρατηρήσεις πάνω στο θεώρημα αυτό θα κάνουμε μετά από τις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε.

Για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (1) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) όταν $\mu = \nu$ δηλ. το πλήθος των εξισώσεων είναι όσο το πλήθος των αγνώστων.

Ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους λέγεται σύστημα Cramer όταν ο πίνακάς του είναι ομαλός, δηλ. όταν $|A| \neq 0$

Θα δείξουμε το παρακάτω **θεώρημα 3.5.2.**

"Το γραμμικό σύστημα Cramer $AX = \Sigma$ έχει μια και μοναδική λύση την $X = A^{-1}\Sigma$ που γράφεται αναλυτικά με τα στοιχεία της στήλης των αγνώστων

$$x_1 = \frac{|\Sigma\, \Sigma_2 \Sigma_3 \cdots \Sigma_\nu|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|\Sigma_1\, \Sigma\, \Sigma_3 \cdots \Sigma_\nu|}{A}, \quad \cdots,$$

$$x_\nu = \frac{|\Sigma_1 \Sigma_2 \cdots \Sigma_{\nu-1}\, \Sigma|}{|A|},$$

όπου $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu$ είναι οι στήλες του πίνακα A και Σ η στήλη των σταθερών".

Απόδειξη

Επειδή ο πίνακας A είναι ομαλός υπάρχει ο αντίστροφός του ο A^{-1}. Αν θέσουμε στο αρχικό σύστημα $AX = \Sigma$ όπου X τον πίνακα $A^{-1}\Sigma$ προκύπτει

$A(A^{-1}\Sigma) = (AA^{-1})\Sigma = I_\nu \Sigma = \Sigma$ δηλ ο πίνακας $X = A^{-1}\Sigma$ είναι λύση του συστήματος $AX = \Sigma$.

Η λύση αυτή είναι μοναδική. Πράγματι, έστω X' μια άλλη λύση του συστήματος $AX = \Sigma$ τότε θα είταν

$AX = \Sigma$ και $AX' = \Sigma$ δηλ. $AX = AX'$ άρα θα είταν

$$X' = I_\nu X' = (A^{-1}A)X' = A^{-1}(AX') = A^{-1}(AX) =$$
$$= (A^{-1}A)X = I_\nu X = X \quad \text{δηλ.} \quad X' = X.$$

Η λύση αυτή $X = A^{-1}\Sigma$ γράφεται αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{\nu 2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Απ' την ισότητα αυτή των πινάκων προκύπτει ότι

$$x_i = \left(A_{1i}\beta_i + A_{2i}\beta_i + \cdots + A_{\nu i}\beta_i\right)\Big/|A| = \frac{1}{|A|}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} A_{\kappa i}\beta_\kappa\right)$$

Το άθροισμα $\sum_{\kappa=1}^{\nu} A_{\kappa i}\beta_\kappa$ είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & \beta_1 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,i-1} & \beta_2 & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu,i-1} & \beta_\nu & \alpha_{\nu,i+1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

κατά μήκος της i-στήλης, όπου $A_{\kappa i}$ είναι τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων β_κ $(\kappa = 1, 2, \cdots, \nu)$.

δηλαδή η ορίζουσα $|\Sigma_1 \; \Sigma_2 \cdots \Sigma_{i-1} \; \Sigma \; \Sigma_{i+1} \cdots \Sigma_\nu|$ που προκύπτει από την $|A|$ αν αντικαταστήσουμε την i στήλη της με τη στήλη Σ των σταθερών του συστήματος.

2) όταν $\mu \neq \nu$ δηλ. το πλήθος των εξισώσεων είναι διαφορετικό από το πλήθος των αγνώστων.

Και οι δύο περιπτώσεις α) $\mu < \nu$ (εξισώσεις λιγότερες από τους αγνώστους) β) $\mu > \nu$ (εξισώσεις περισσότερες από τους αγνώστους), εξετάζονται με τον ίδιο τρόπο.

Είδαμε παραπάνω, ότι η μετάβαση από την έννοια του γραμμικού συστήματος στην έννοια του πίνακα, δημιουργεί μια αντιστοιχία $AX = \Sigma \longrightarrow [A \mid \Sigma]$ μεταξύ του συνόλου των γραμμικών συστημάτων της μορφής (1) και του συνόλου $\mathbb{R}_{\mu\times(\nu+1)}$ ή $C_{\mu\times(\nu+1)}$ των πινάκων του τύπου $\mu\times(\nu+1)$ η οποία είναι αμφιμονότιμη και επί. Δηλαδή ένα γραμμικό σύστημα περιγράφεται πλήρως με ένα επαυξημένο πίνακά του.

Έστω το σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους ($\mu \neq \nu$) $AX = \Sigma$. Συμβολίζουμε με $A_{(\kappa)}X = \Sigma_{(\kappa)}$ (α) το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \Sigma]$, όπου $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$ είναι ένας κλιμακωτός πάνω πίνακας του $[A \mid \Sigma]$. Το σύστημα (α) είναι ισοδύναμο με το αρχικό, επειδή ο πίνακας $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$ προκύπτει από τον $[A \mid \Sigma]$ με πεπερασμένο πλήθος πράξεων στις γραμμές του (όχι στήλες).

Παρατηρούμε ότι αν μια γραμμή του πίνακα $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$ είναι μηδενική, τότε η εξίσωση που αντιστοιχεί σ' αυτή η $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_\nu = 0$ είναι ταυτότητα ως προς x και άρα μπορεί να παραλειφθεί.

Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα 3.5.1. κάνουμε τα εξής:

Βρίσκουμε τους βαθμούς των πινάκων A και $[A \mid \Sigma]$. Έτσι μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \Sigma]$ σε κλιμακωτό πάνω οπότε μετατρέπεται ταυτόχρονα και ο A

Αν υποθέσουμε ότι οι r πρώτες γραμμές των πινάκων $A_{(\kappa)}$ και $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$, όπου $r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A \mid \Sigma]$, είναι μη μηδενικές, ενώ οι άλλες $\mu - r$ γραμμές είναι όλες μηδενικές, τότε οι εξισώσεις του συστήματος $A_{(\kappa)} X = \Sigma_{(\kappa)}$ που αντιστοιχούν στις μηδενικές γραμμές του πίνακα $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$ είναι ταυτότητες ως προς x και μπορούν να παραληφθούν. Έστω ότι τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία των r πρώτων γραμμών του πίνακα $A_{(\kappa)}$ βρίσκονται στις στήλες $j_1, j_2, \cdots j_r$ (Αν δεν συμβαίνει αυτό κάνουμε αμοιβαία αλλαγή γραμμών). Μεταφέρουμε στα $2^{α}$ μέλη όλους τους άλλους αγνώστους από την στήλη j_{r+1} και μετά, τους $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{\nu}$.

Η ορίζουσα του συστήματος που προκύπτει θα είναι $\neq 0$ επομένως στο νέο σύστημα οι άγνωστοι $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ υπολογίζονται μονότιμα, αν δώσουμε στους υπόλοιπους $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{\nu}$ οποιεσδήποτε αυθαίρετες τιμές, οπότε το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Αν $r = \nu$ τότε κανένας άγνωστος δεν παίρνει αυθαίρετες τιμές, δηλ το αρχικό σύστημα έχει μια λύση.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}[A \mid \Sigma]$ τότε προφανώς $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}[A \mid \Sigma]$ και επειδή ο επαυξημένος πίνακας έχει μια μόνο στήλη παραπάνω από τον A, θα είναι $\operatorname{rank}[A \mid \Sigma] = \operatorname{rank}(A) + 1$, δηλαδή η $r+1$ γραμμή του πίνακα $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$ θα είναι η

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \beta_{(\kappa)} \end{array}\right] \qquad (\beta_{(\kappa)} \neq 0)$$

Στη γραμμή αυτή αντιστοιχεί η εξίσωση

$$0 \cdot x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_\nu = \beta_{(\kappa)}$$

που είναι αδύνατη, γιαυτό και το αρχικό σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

Σχετικά με το θεώρημα 3.5.1. παρατηρούμε τώρα τα εξής (που απορρέουν σαν γενική διερεύνηση ενός συστήματος μ εξισώσεων με ν αγνώστους).

1) Το σύνολο των λύσεων του συμβιβαστού συστήματος $AX = \Sigma$ ($r = \text{rank}(A) = \text{rank}[A \mid \Sigma] < \mu, \nu$) είναι $(\nu - r)$ - παραμετρικό

2) Το συμβιβαστό σύστημα $AX = \Sigma$ έχει μια μόνο λύση όταν $r = \nu$ (ανεξάρτητα αν $r < \mu$) και άπειρες λύσεις αν $r < \nu$

3) Τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού πάνω πίνακα $[A_{(\kappa)} \mid \Sigma_{(\kappa)}]$ που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \Sigma]$ του συμβιβαστού συστήματος $AX = \Sigma$, τα οποία βρίσκονται στις στήλες $j_1, j_2, \cdots j_r$ σημαίνουν ότι οι άγνωστοι x_{j_1}, $x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ ορίζονται μονότιμα σαν συναρτήσεις των υπόλοιπων αγνώστων, που παίρνουν αυθαίρετες τιμές.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

1) Να λυθεί το σύστημα (με 2 τρόπους)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

1^{os} τρόπος

Υπολογίζουμε τα x_1, x_2, x_3 από τις σχέσεις

$$x_1 = \frac{|\Sigma\ \Sigma_2\ \Sigma_3|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|\Sigma_1\ \Sigma\ \Sigma_3|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma|}{|A|}$$

όπου $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι η $1^{η}$, $2^{η}$ και $3^{η}$ στήλη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Είναι $|A| = 20 \neq 0$, $|\Sigma\ \Sigma_2\ \Sigma_3| = 40$, $|\Sigma_1\ \Sigma\ \Sigma_3| = 20$, $|\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma| = -40$, άρα $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$

2^{os} τρόπος.

Βρίσκουμε τη λύση $X = A^{-1}\Sigma$ υπολογίζοντας τον αντίστροφο του πίνακα A. Έχουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -9 & 3 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Άρα}$$

$$X = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -9 & 3 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+49-10)/20 \\ (9+21-10)/20 \\ (5-35-10)/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Το παραπάνω ήταν ένα σύστημα Cramer αφού είναι $|A| = 20 \neq 0$

2) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 9x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Είναι $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \\ 9 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$ ($1^{η}$, $3^{η}$ γραμμή ανάλογες)

Βρίσκουμε τώρα τους βαθμούς των A και $[A \mid \Sigma]$

όπου $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \\ 9 & 6 & -6 \end{bmatrix}$ και $[A \mid \Sigma] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 6 \\ -6 & -4 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & -6 & -7 \end{array}\right]$

Είναι $[A \mid \Sigma] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 6 \\ -6 & -4 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & -6 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Η πρώτη γραμμή πολ/ζεται α) με 2 και προστίθεται στη δεύτερη β) με −3 και προστίθεται στην τρίτη. Στο δεύτερο πίνακα η δεύτερη γραμμή πολ/ζεται με 25/17 και προστίθεται στην τρίτη. Από τον τελευταίο πίνακα που είναι κλιμακωτος πάνω, βλέπουμε ότι ο βαθμός του A είναι $r = 1$, ενώ ο βαθμός του $[A \mid \Sigma]$ είναι $r = 2$.

Επομένως το αρχικό σύστημα δεν έχει λύση.

3) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Είναι $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ($2^{η}$, $3^{η}$ γραμμή ανάλογες)

Βρίσκουμε τώρα, όπως και προηγούμενα, τους βαθμούς των A και $[A \mid \Sigma]$. Είναι

$$[A \mid \Sigma] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -7 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Δηλαδή ο βαθμός του πίνακα A είναι 2 και του επαυξημένου πάλι 2. Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό και είναι $(3-2)$ παραμετρικό. (παράμετρος ο άγνωστος x_3)

Τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία του τελευταίου κλιμακωτού πάνω πίνακα είναι 2 και $-7/2$ και αντιστοιχούν στους αγνώστους x_1 και x_2. Επομένως το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει, το $A_{(\kappa)} X = \Sigma_{(\kappa)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -7/2\, x_2 + 5/2\, x_3 &= 3/2 \end{aligned}$$

αν λυθεί ως προς τους αγνώστους x_1, x_2, δίνει

$$x_2 = \left(3/2 - 5/2\, x_3\right) / -7/2 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{-3+5x_3}{7} \quad \text{και}$$

$$x_1 = \left(5 + x_3 - 3\cdot\frac{-3+5x_3}{7}\right) / 2 \quad \text{ή} \quad x_1 = \frac{22-4x_3}{7}.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι η διατεταγμένη τριάδα $\left(\frac{22-4x_3}{7}, \frac{-3+5x_3}{7}, x_3\right)$ x_3 αυθαίρετος.
δηλ. το σύστημα έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων.

4) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 6x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τους βαθμούς των πινάκων A και $[A|\Sigma]$

$$[A|\Sigma] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Πολ/ζουμε την $1^η$ γραμμή με -3, -6, -1 και την προσθέτουμε στις $2^η$, $3^η$ και $4^η$ γραμμή (για να μηδενιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης). Πολ/ζουμε τώρα τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του δεύτερου πίνακα με -1 και τα προσθέτουμε στην $3^η$ και $4^η$ γραμμή. (για να μηδενιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης). Έτσι ο βαθμός του A και του $[A \mid \Sigma]$ είναι 2. Επομένως το σύστημα έχει λύση (είναι συμβιβαστό), που προσδιορίζεται λύνοντας το σύστημα των 2 πρώτων εξισώσεων.

$$x_1 = \frac{|\Sigma\ \Sigma_2|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|\Sigma_1\ \Sigma|}{|A|} \quad \text{(σύστημα Cramer) όπου}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad |\Sigma\ \Sigma_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad |\Sigma_1\ \Sigma| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{άρα} \quad x_1 = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}.$$

5) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε το βαθμό των A και $[A \mid \Sigma]$ κατά τα γνωστά.

$$[A \mid \Sigma] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right]$$

δηλ. ο βαθμός του A είναι 2 και του $[A \mid \Sigma]$ πάλι 2.
Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 6 \\ -17x_4 &= -17 \end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα είναι $(4-2)$-παραμετρικό και οι άγνωστοι x_1 και x_4 (εδώ μόνο ο x_1) εκφράζονται συναρτήσει των x_2 καί x_3. Είναι $x_4 = 1$ και $x_1 = 1 + x_2 + 2x_3$

Άρα λύση του συστήματος είναι η διατεταγμένη τετράδα $(1+x_2+2x_3,\ x_2,\ x_3,\ 1)$ που αποτελεί διπαραμετρική απειρία λύσεων του αρχικού συστήματος.

6) Να εξεταστεί για ποιες τιμές του λ το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 &= 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

έχει i) μια λύση, ii) περισσότερες λύσεις, iii) είναι αδύνατο.

Είναι
$$[A \,|\, \Sigma] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda+3) & 2-\lambda \end{array}\right] = [A_{(\kappa)} \,|\, \Sigma_{(\kappa)}], \text{ όπου}$$

$$(\lambda+2)(1-\lambda)+4 = (2-\lambda)(\lambda+3) \quad \text{και} \quad 1-\lambda+1 = 2-\lambda$$

i) Το σύστημα έχει μια μόνο λύση όταν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A|\Sigma] = 3$, δηλ. αν $(2-\lambda)(\lambda+3) \neq 0$ ή αν $2-\lambda \neq 0$ και $\lambda+3 \neq 0$ δηλ. $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -3$

ii) Το σύστημα έχει περισσότερες λύσεις αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A|\Sigma] < 3$ δηλαδή αν $(2-\lambda)(\lambda+3) = 0$ και $2-\lambda = 0$. Οι δύο αυτές σχέσεις αληθεύουν ταυτόχρονα για $\lambda = 2$

iii) Το σύστημα είναι αδύνατο όταν $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}[A|\Sigma]$. Επειδή για όλες τις τιμές του λ είναι $\operatorname{rank}(A) \geq 2$ και $\operatorname{rank}[A|\Sigma] \leq 3$, το σύστημα γίνεται αδύνατο όταν $\operatorname{rank}(A) = 2$ και $\operatorname{rank}[A|\Sigma] = 3$. δηλ. αν $(2-\lambda)(\lambda+3) = 0$ και $2-\lambda \neq 0$. Οι δύο τελευταίες σχέσεις αληθεύουν για $\lambda = -3$

3.6. Ομογενή γραμμικά συστήματα

Μια ειδική κατηγορία γραμμικών συστημάτων είναι και τα ο μ ο γ ε ν ή γραμμικά συστήματα, δηλ. γραμμικά συστήματα που η στήλη των σταθερών όρων είναι ολόκληρη μηδενική. Αυτά είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\nu}x_\nu &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \cdots + a_{\mu\nu}x_\nu &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Μια βασική παρατήρηση σ' ένα ομογενές σύστημα της μορφής (2) είναι ότι αυτό έχει πάντα λύση δηλ. είναι συμβιβαστό γιατί όπως φαίνεται

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A \,|\, 0]$$

Μια λύση του είναι η μηδενική $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \cdots, x_\nu = 0$.

Κατά τα άλλα ισχύουν οι γενικές παρατηρήσεις του θεωρήματος 3.5.1. Δηλαδή:

1) Το ομογενές γραμμικό σύστημα (2) που γράφεται σύντομα $AX = 0$ λύνεται όπως και το σύστημα $AX = \Sigma$. Το σύνολο των λύσεων είναι $(\nu - r)$-παραμετρικό, όπου $r = \operatorname{rank}(A)$

2) Το σύστημα $AX = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση όταν $r = \nu$. Όταν $r < \nu$ έχει και μη μηδενικές λύσεις (απειρία λύσεων $(\nu - r)$-παραμετρική).

3) Αν το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από το πλήθος των αγνώστων, δηλ. αν $\mu < \nu$ τότε το σύ-

στημα (2) έχει πάντα και άλλες λύσεις μη μηδενικές γιατί τότε θα είναι $r \leq \mu$, $\mu < \nu$ άρα $r < \nu$.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\
2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\
3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Μηδενίζοντας κλιμακωτά τις $1^η$, $2^η$, $3^η$ κ.τ.λ. στήλη έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/5 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

πολ/ζουμε την $3^η$ γραμμή με $-\frac{10}{3}$ και την προσθέτουμε στην $4^η$ γραμμή

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/5 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = A_{(\kappa)}$$

Άρα $\operatorname{rank}(A) = 4$ και $\nu - r = 5 - 4 = 1$.. Δηλαδή το σύστημα έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων. Το ότι έχει απειρία λύσεων προκύπτει από την παρατήρηση 3. εφόσον είναι $\mu < \nu$ (μ = πλήθος εξισώσεων, ν = πλήθος αγνώστων) το σύστημα είναι επομένως ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -3/5\, x_3 - 3/5\, x_4 + 3/5\, x_5 &= 0 \\ 3x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$ ή το

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = x_5$ (όπου x_5 αυθαίρετο).

2) Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_2 + 6x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_{(\kappa)}$

Δηλαδή $\mathrm{rank}(A) = 4$. Επειδή και $\nu = 4$ είναι $r = \nu = 4$ άρα, σύμφωνα με την παρατήρηση 2., το αρχικό σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλ.

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$

Η μηδενική λύση ενός ομογενούς συστήματος λέγεται και τετριμμένη λύση.

Ασκήσεις

1) Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -6 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 \qquad + x_5 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -1 \end{aligned}$$

2) Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 9 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 4 \\ x_2 - 2x_4 - x_5 &= 1 \\ -x_1 + 5x_3 - 12x_4 - 17x_5 &= -4 \end{aligned}$$

3) Να λυθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 16 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4) Να λυθούν και να διερευνηθούν τα συστήματα

α) $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + \beta x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

γ) $$\begin{aligned} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 &= \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 &= 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

δ) $$\begin{aligned} (\lambda+4)x_1 + (2\lambda+1)x_2 &= 3\lambda-1 \\ (3\lambda+7)x_1 + (5\lambda+1)x_2 &= 2\lambda+2 \end{aligned}$$

4. ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

4.1. Γενικά - Ορισμοί

Η Άλγεβρα Boole μελετήθηκε και αναπτύχθηκε στην αρχή από τον Άγγλο μαθηματικό G. Boole (1815-1864). Εφαρμόζεται σε πολλές περιοχές της Τεχνικής, κυρίως δε στη σχεδίαση συστημάτων με λογικά κυκλώματα. Τελευταία όμως απέκτησε μεγάλη σπουδαιότητα με τη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, γιατί η δομή τους βασίζεται στους νόμους της άλγεβρας Boole.

Έστω ένα σύνολο $E \neq \phi$. Ορίζουμε σ' αυτό έναν ή περισσότερους νόμους εσωτερικής σύνθεσης, τους οποίους ονομάζουμε και διμελείς πράξεις (δηλαδή πράξεις μεταξύ δύο διατεταγμένων στοιχείων του) και τις συμβολίζουμε με $o, \cdot, *, +, \cdots$, έτσι ώστε το αποτέλεσμα των πράξεων αυτών να είναι πάλι ένα στοιχείο του E. Αν ορίσουμε στις εσωτερικές αυτές πράξεις και ιδιότητες που να τις διέπουν, π.χ. αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική, κ.τ.λ., τότε λέμε ότι το σύνολο E με τις πράξεις αυτές έχει μια αλγεβρική δομή (ή δομή) που χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες των πράξεων αυτών. Την δομή αυτή τη συμβολίζουμε με $(E, o, \cdot, *, +, \cdots)$

Μια άλγεβρα Boole είναι μια αλγεβρική δομή που αποτελείται από ένα βασικό σύνολο E, εφοδιασμένο με δύο διμελείς (εσωτερικές) πράξεις, τις οποίες θα συμβολίζουμε με + και · (το · πολλές φορές παραλείπεται). Οι πράξεις αυτές πληρούν τις παρακάτω τέσσερες ιδιότητες, γνωστές σαν αξιώματα του Huntington που έχουν το βασικό χαρακτηριστικό, ότι κανένα από τα αξιώματα αυτά δεν αποδεικνύεται με τη βοήθεια των άλλων:

1) Οι πράξεις + και · είναι αντιμεταθετικές, δηλαδή

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad \text{και} \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \quad \forall\, \alpha,\beta\in E$$

2) Για κάθε διμελή πράξη + αντίστοιχα · υπάρχει στο σύνολο E στοιχείο που συμβολίζεται με 0 αντίστοιχα 1 τέτοιο ώστε

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha, \ \text{αντίστ.} \ \alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha, \quad \forall\, \alpha\in E$$

3) Κάθε πράξη είναι επιμεριστική σε σχέση με την άλλη

δηλ. $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$ αντίστοιχα

$$\alpha+(\beta\cdot\gamma)=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma), \quad \forall\, \alpha,\beta,\gamma\in E$$

4) Για κάθε $\alpha\in E$, υπάρχει $\bar{\alpha}\in E$ τέτοιο ώστε

$$\alpha+\bar{\alpha}=1 \quad \text{και} \quad \alpha\cdot\bar{\alpha}=0$$

Τα στοιχεία 0 και 1 λέγονται ουδέτερα στοιχεία των πράξεων + και · αντίστοιχα, ενώ το $\bar{\alpha}$ λέγεται συμπληρωματικό του α. Μια τέτοια άλγεβρα Boole τη συμβολίζουμε με $B=(E,+,\cdot)$

Παραδείγματα αλγεβρών Boole

1) Το σύνολο $\mathcal{P}(M)$ όλων των υποσυνόλων ενός βασικού συνόλου $M\neq\emptyset$ το οποίο ($\mathcal{P}(M)$) είναι εφοδιασμέ-

νο με τις διμελείς πράξεις $\cup$ (ένωση) και $\cap$ (τομή) συνόλων και με ουδέτερα στοιχεία το ϕ (κενό σύνολο) και M αντίστοιχα αποτελεί μια άλγεβρα Boole επειδή πληροί τα 4 αξιώματα του Huntington. Πράγματι:

1) $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$, $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(M)$.

2) $A \cup \phi = \phi \cup A = A$, $A \cap M = M \cap A = A$, $\forall\ A \in \mathcal{P}(M)$

3) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ καθώς και
$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ $\forall\ A, B, \Gamma \in \mathcal{P}(M)$

γιατί η τομή επιμερίζεται ως προς την ένωση και αντίστροφα

4) $A \cup \bar{A} = M$ και $A \cap \bar{A} = \phi$ $\forall\ A \in \mathcal{P}(M)$

όπου $\bar{A}$ το συμπληρωματικό του συνόλου A ως προς το M.

2) Η πιο σημαντική από τις άλγεβρες του Boole είναι εκείνη της οποίας το βασικό σύνολο M έχει ακριβώς δύο στοιχεία, επομένως τα ουδέτερα στοιχεία θα είναι τα 0 και 1. Οι διμελείς πράξεις $+$ και $\cdot$ ορίζονται με τους παρακάτω πίνακες

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

επί πλέον ορίζουμε $\bar{0} = 1$ και $\bar{1} = 0$. Τότε η δομή $B = (M, +, \cdot)$ όπου $M = \{0, 1\}$ αποτελεί άλγεβρα Boole διότι πληρούνται οι 4 ιδιότητες (αξιώματα Huntington)

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ και $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για κάθε διατεταγμένο ζεύγος $(\alpha, \beta) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

2) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$, $\forall\ \alpha \in \{0, 1\}$

3) $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = (\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$ καθώς και
$\alpha+(\beta\cdot\gamma) = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)$ για κάθε διατεταγμένη τριάδα $(\alpha,\beta,\gamma)\in\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

4) $\alpha+\bar{\alpha}=1$ και $\alpha\cdot\bar{\alpha}=0$ $\quad\forall\,\alpha\in\{0,1\}$

Μια εφαρμογή της παραπάνω άλγεβρας Boole αποτελεί η άλγεβρα των προτασιακών τύπων της Μαθηματικής λογικής καθώς και η άλγεβρα των ηλεκτρ. κυκλωμάτων.

Όπως είναι γνωστό, σαν λογική πρόταση p εννοούμε (δεν ορίζουμε) μια έκφραση με πλήρες νόημα, που επιδέχεται έναν ακριβώς από τους χαρακτηρισμούς "αληθής" ή "ψευδής" που λέγονται τιμές αλήθειας της λογικής πρότασης p.

Αντιστοιχούμε στη λέξη "αληθής" το 1 και στη λέξη "ψευδής" το 0. Ορίζουμε τώρα σαν διμελείς (εσωτερικές) πράξεις δύο λογικών προτάσεων p και q την σύζευξη ($\wedge$) και την διάζευξη ($\vee$) που χαρακτηρίζονται ως εξής:

1) Η σύζευξη ($\wedge$) ως αληθής $\rightarrow 1$ όταν και οι δύο προτάσεις p, q είναι αληθείς $\rightarrow 1$, ως ψευδής $\rightarrow 0$ σε κάθε άλλη περίπτωση

2) Η διάζευξη ($\vee$) ως αληθής $\rightarrow 1$ όταν μια τουλάχιστον από τις p, q είναι αληθής $\rightarrow 1$, ως ψευδής $\rightarrow 0$ αν και η p και η q είναι ψευδείς $\rightarrow 0$.

Ακόμα αν p είναι μια λογική πρόταση με τον χαρακτηρισμό "αληθής", ορίζουμε την $\bar{p}$ (όχι p) με τον χαρακτηρισμό "ψευδής".

Τα αποτελέσματα των διμελών αυτών πράξεων φαίνονται στους παρακάτω πίνακες

$p \vee q$:

q \ p	0	1
0	0	1
1	1	1

, $p \wedge q$:

q \ p	0	1
0	0	0
1	0	1

Αν αντιστοιχίσουμε τώρα στη διάζευξη $\vee$ το σύμβολο $+$ και στη σύζευξη $\wedge$ το σύμβολο $\cdot$ τότε οι δύο τελευταίοι πίνακες ταυτίζονται με τους δύο προηγούμενους.

Η άλγεβρα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων αποτελεί επίσης ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της άλγεβρας Boole των δύο στοιχείων 0 και 1.

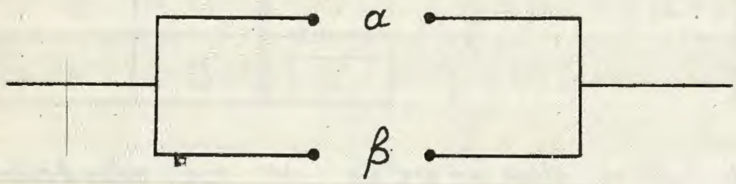
Το πιο απλό ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από ένα σύρμα που περιέχει έναν απλό διακόπτη α. Όταν ο διακόπτης α είναι κλειστός, τότε το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα και δίνουμε στο α την τιμή 1. Όταν ο διακόπτης α είναι ανοιχτός, τότε το σύρμα δεν διαρρέεται από ρεύμα και δίνουμε στο α την τιμή 0. Στην απλή αυτή περίπτωση το κύκλωμα έχει την τιμή 1 (διαρρέεται από ρεύμα) όταν και μόνο όταν ο α έχει τιμή 1 και το κύκλωμα έχει τιμή 0 (δεν διαρρέεται από ρεύμα) όταν και μόνο όταν ο α είναι 0.

Θεωρούμε τώρα ένα κύκλωμα που αποτελείται από δύο διακόπτες α και β. Όταν είναι συνδεδεμένο εν σειρά:

———• α •———• β •———

είναι προφανές ότι το κύκλωμα έχει την τιμή 1 αν και μόνο αν και οι δύο διακόπτες α και β έχουν την τιμή 1, ενώ το κύκλωμα έχει την τιμή 0 στις άλλες περιπτώσεις, που αντιστοιχεί με τη σύζευξη $p \wedge q$ δύο λογικών προτάσεων.

Όταν τώρα το κύκλωμα είναι συνδεδεμένο εν παραλλήλω:



θα έχει την τιμή 1 αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους α και β έχει την τιμή 1, ενώ θα έχει την τιμή 0 αν και μόνο αν και οι δύο διακόπτες α και β έχουν την τιμή 0, που αντιστοιχεί στη διάζευξη $p \vee q$ δύο λογικών προτάσεων. Και εδώ ισχύει $\bar{1}=0$, $\bar{0}=1$.

4.2. Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Με βάση τα τέσσερα αξιώματα του Huntington στα οποία βασίζεται η δομή της άλγεβρας Boole, μπορούμε να αποδείξουμε μια σειρά από θεωρήματα πολύ χρήσιμα στις διάφορες εφαρμογές.

Θεώρημα 4.2.1. (Αρχή του δυϊσμού).

Κάθε πρόταση ή αλγεβρική ταυτότητα που ισχύει σε μια άλγεβρα Boole, εξακολουθεί επίσης να ισχύει, όταν γίνει αμοιβαία ανταλλαγή των πράξεων + και · καθώς επίσης και των ουδέτερων στοιχείων 0 και 1.

Η απόδειξη του γενικού αυτού θεωρήματος προκύπτει αμέσως από την συμμετρία των αξιωμάτων της άλγεβρας Boole σε σχέση με τις πράξεις + και · καθώς και τα ουδέτερα στοιχεία 0 και 1.

Θεώρημα 4.2.2.

Έστω μια άλγεβρα Boole $B=(E,+,\cdot)$. Τότε

Απόδειξη

Στην αρχή θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\alpha\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) = \alpha\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) \qquad (1)$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\alpha\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) &= \alpha && (\Theta.\ 4.2.4)\\
&= \alpha+(\alpha\cdot\gamma) && (\Theta.\ 4.2.4)\\
&= \big(\alpha(\alpha+\beta)\big)+(\alpha\gamma) && (\Theta.\ 4.2.4)\\
&= \alpha\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) && (A\xi.\ 3)
\end{aligned}$$

Επίσης θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\bar{\alpha}\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) = \bar{\alpha}\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) \qquad (2)$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) &= \bar{\alpha}(\beta+\gamma) && (A\xi.\ 3 \text{ και } 4)\\
&= \bar{\alpha}\beta+\bar{\alpha}\gamma && (A\xi.\ 3)\\
&= (\bar{\alpha}\alpha+\bar{\alpha}\beta)+\bar{\alpha}\gamma && (A\xi.\ 4)\\
&= \bar{\alpha}\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) && (A\xi.\ 3)
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$\alpha\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big)+\bar{\alpha}\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) = \alpha\big((\alpha+\beta)+\gamma\big)+\bar{\alpha}\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) \qquad (3)$$

Το πρώτο μέλος της (3) γίνεται

$$\begin{aligned}
\alpha\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big)+\bar{\alpha}\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) &= (\alpha+\bar{\alpha})[\alpha+(\beta+\gamma)] && (A\xi.\ 3)\\
&= \alpha+(\beta+\gamma) && (A\xi.\ 4 \text{ και } 2)
\end{aligned}$$

Το δεύτερο μέλος της (3) γίνεται

$$\begin{aligned}
\alpha\big((\alpha+\beta)+\gamma\big)+\bar{\alpha}\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) &= (\alpha+\bar{\alpha})[(\alpha+\beta)+\gamma] && (A\xi.\ 3)\\
&= (\alpha+\beta)+\gamma && (A\xi.\ 4 \text{ και } 2)
\end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (3) γίνεται

$$\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$$

Θεώρημα 4.2.6.

Για κάθε $\alpha \in E$ υπάρχει ένα και μόνο ένα $\bar{\alpha} \in E$, τέτοιο ώστε $a+\bar{a}=1$ και δυϊκά $a\cdot\bar{a}=0$

Απόδειξη

Το γεγονός ότι υπάρχει $\bar{a}\in E$ φαίνεται από το αξίωμα 4. Θά δείξουμε ότι το $\bar{a}$ είναι μοναδικό.

Έστω ότι υπάρχουν δύο συμπληρωματικά στοιχεία τα $\bar{a}$ και $\bar{a}'$. Τότε θα έχουμε:

$$a+\bar{a}=1 \quad \text{και δυϊκά} \quad a\cdot\bar{a}=0$$

$$\text{και} \quad a+\bar{a}'=1 \quad \text{και δυϊκά} \quad a\cdot\bar{a}'=0.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= (a+\bar{a}')\bar{a} && (\text{Απ' την υπόθεση})\\
&= a\bar{a}+\bar{a}'\bar{a} && (\text{Αξίωμα } 3)\\
&= 0+\bar{a}'\cdot\bar{a} && (\text{Απ' την υπόθεση})\\
&= \bar{a}'\cdot\bar{a} && (\text{Αξίωμα } 2)\\
&= \bar{a}\cdot\bar{a}' && (\text{Αξίωμα } 1)\\
&= \bar{a}\cdot\bar{a}'+0 && (\text{Αξίωμα } 2)\\
&= \bar{a}\cdot\bar{a}'+a\cdot\bar{a}' && (\text{Απ' την υπόθεση})\\
&= (\bar{a}+a)\bar{a}' && (\text{Αξίωμα } 3)\\
&= 1\cdot\bar{a}' && (\text{Απ' την υπόθεση})\\
&= \bar{a}' && (\text{Αξίωμα } 2)
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2.7.

$\forall a\in E$ ισχύει $\overline{(\bar{a})}=a$ ή $\bar{\bar{a}}=a$

Απόδειξη

Είναι $a+\bar{a}=1$ και δυϊκά $a\cdot\bar{a}=0$ (Αξ. 4)

Επίσης $\bar{a}+a=1$ και δυϊκά $\bar{a}\cdot a=0$ (Αξ. 1)

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, χρησιμοποιώντας το αξίωμα 4 διαπιστώνουμε ότι το συμπληρωματικό του $\bar{a}$ είναι το a.

Επομένως $\overline{(\bar{a})}=a$ ή απλά $\bar{\bar{a}}=a$

$\forall \alpha \in E$ ισχύει $\alpha+\alpha=\alpha$ και δυϊκά $\alpha\cdot\alpha=\alpha$.

Απόδειξη

Είναι
$$\begin{aligned}
\alpha+\alpha &= (\alpha+\alpha)\cdot 1 && (\text{Αξίωμα } 2)\\
&= (\alpha+\alpha)\cdot(\alpha+\bar{\alpha}) && (\text{Αξίωμα } 4)\\
&= \alpha+(\alpha\cdot\bar{\alpha}) && (\text{Αξίωμα } 3)\\
&= \alpha+0 && (\text{Αξίωμα } 4)\\
&= \alpha && (\text{Αξίωμα } 2)
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2.3.

$\forall \alpha \in E$ ισχύει $\alpha+1=1$ και δυϊκά $\alpha\cdot 0=0$

Απόδειξη

Είναι
$$\begin{aligned}
\alpha+1 &= 1\cdot(\alpha+1) && (\text{Αξίωμα } 2)\\
&= (\alpha+\bar{\alpha})\cdot(\alpha+1) && (\text{Αξίωμα } 4)\\
&= \alpha+\bar{\alpha}\cdot 1 && (\text{Αξίωμα } 3)\\
&= \alpha+\bar{\alpha} && (\text{Αξίωμα } 2)\\
&= 1 && (\text{Αξίωμα } 4)
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2.4.

$\forall \alpha,\beta \in E$ ισχύει $\alpha+\alpha\beta=\alpha$ και δυϊκά $\alpha\cdot(\alpha+\beta)=\alpha$

Απόδειξη

Είναι
$$\begin{aligned}
\alpha+\alpha\cdot\beta &= \alpha\cdot 1+\alpha\cdot\beta && (\text{Αξίωμα } 2)\\
&= \alpha\cdot(1+\beta) && (\text{Αξίωμα } 3)\\
&= \alpha\cdot 1 && (\text{Θεώρ. } 4.2.3)\\
&= \alpha && (\text{Αξίωμα } 2)
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2.5.

$\forall \alpha,\beta,\gamma \in E$ ισχύει $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

και δυϊκά $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Θεώρημα 4. 2. 8.

Σε κάθε άλγεβρα Boole ισχύει $\bar{0}=1$ και $\bar{1}=0$.

Απόδειξη

Είναι $1+0=1$ και δυϊκά $1\cdot 0=0$ (Θεώρ. 4.2.3)

Άρα $1=\bar{0}$ ή $\bar{0}=1$ και $0=\bar{1}$ ή $\bar{1}=0$ (Θ. 4.2.6)

Θεώρημα 4. 2. 9. (τύποι του De Morgan)

$\forall \alpha,\beta \in E$ ισχύει $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ και δυϊκά $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$

Απόδειξη

$$
\begin{aligned}
\text{Είναι } (\alpha\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) &= \alpha\beta\bar{\alpha}+\alpha\beta\bar{\beta} \quad (\text{Αξίωμα } 3)\\
&= \alpha\bar{\alpha}\beta+\alpha 0\\
&= 0\cdot\beta+\alpha\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Επίσης } \alpha\cdot\beta+(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) &= \bar{\alpha}+\bar{\beta}+\alpha\cdot\beta\\
&= (\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\alpha)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\beta) \quad (\text{Αξ. } 3)\\
&= (1+\bar{\beta})\cdot(1+\bar{\alpha}) \quad (\text{Αξ. } 1,4)\\
&= 1 \quad (\text{Θεώρ. } 4.2.3.,\ \text{Αξ. } 1)
\end{aligned}
$$

Επομένως το $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ είναι το συμπληρωματικό του στοιχείου $\alpha\beta$ δηλ. $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

4.3. Συναρτήσεις Άλγεβρας Boole

Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει άλγεβρα Boole στην οποία το σύνολο E να περιέχει ακριβώς 3 στοιχεία, ή περιττό αριθμό στοιχείων. Επομένως κάθε πεπερασμένη άλγεβρα Boole θα έχει άρτιο αριθμό στοιχείων. Ο ελάχιστος αριθμός είναι επομένως 2 όπως είδαμε στο δεύτερο παράδειγμα (Άλγεβρα λογικών προτάσεων, άλγεβρα ηλεκτρικών κυκλωμάτων).

Έστω $B = (E, +, \cdot)$ μια άλγεβρα Boole όπου $E = \{0, 1, \alpha, \beta, \gamma, \dots\}$. Τα ουδέτερα στοιχεία αυτής 0, 1 ονομάζονται σταθερές, ενώ τα στοιχεία $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$ ονομάζονται μεταβλητές. Στην έκφραση $\bar{\alpha} + \beta \cdot \gamma$ θεωρείται φυσικό να καλέσουμε τους παράγοντες $\bar{\alpha}$, $\beta \cdot \gamma$ μονώνυμα, ενώ ολόκληρη την έκφραση πολυώνυμο. Μια τέτοια έκφραση που αποτελείται από συνδιασμούς των πράξεων + και $\cdot$ ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχείων μιας άλγεβρας Boole λέγεται συνάρτηση Boole. Ο αριθμός των μεταβλητών σε κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ο αριθμός των διακεκριμένων γραμμάτων που εμφανίζονται. Έτσι η παράσταση $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, ενώ η παράσταση $\alpha \cdot \beta$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Οι μεταβλητές $p, q, r, \dots$ σε μια άλγεβρα λογικών προτάσεων, ή οι μεταβλητές $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ σε μια άλγεβρα ηλεκτρικών κυκλωμάτων, μπορούν να πάρουν μια από τις τιμές 0 ή 1 γι'αυτό χαρακτηρίζονται συνήθως σαν δυαδικές μεταβλητές.

Αν αντικαταστήσουμε το + με το $\vee$ και το $\cdot$ με το $\wedge$, τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε λογικές προτάσεις με συνδιασμούς των μεταβλητών $p, q, r, \dots$ και να υπολογίζουμε τα αποτελέσματα των προτάσεων αυτών χρησιμοποιώντας πίνακες, γνωστούς σαν πίνακες αλήθειας, όπως φαίνεται στους παρακάτω δύο πίνακες:

p	q	$\alpha = p \wedge q$	$p \vee \bar{q}$	$\beta = (p \vee \bar{q}) \wedge q$	$\alpha \vee \bar{\beta}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1

Πίνακας 1

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta})$	$\alpha \vee \bar{\beta}$	$\bar{\alpha} \vee \beta$	$(\alpha \vee \bar{\beta}) \wedge (\bar{\alpha} \vee \beta)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

Πίνακας 2

Στον πρώτο πίνακα η συνάρτηση $\alpha \vee \bar{\beta}$ είναι ταυτότητα ως προς τις μεταβλητές (δυαδικές) p και q, δηλαδή αληθεύει για $\forall p, q \in \{0,1\}$, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha \vee \bar{\beta} = (p \wedge q) \vee \overline{(p \vee \bar{q}) \wedge q} = 1$$

Στον δεύτερο πίνακα παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $(\alpha \wedge \beta) \vee (\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta})$ και $(\alpha \vee \bar{\beta}) \wedge (\bar{\alpha} \vee \beta)$ έχουν τα ίδια αποτελέσματα για όλους τους δυνατούς συνδιασμούς των 0, 1. Δύο τέτοιες συναρτήσεις λέγονται ισοδύναμες.

Για συναρτήσεις τριών δυαδικών μεταβλητών p, q, r, όλοι οι δυνατοί συνδιασμοί των 0, 1 που υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών αυτών είναι $2^3 = 8$ οι παρακάτω:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Για ν μεταβλητές υπάρχουν 2^ν δυνατότητες σχηματισμού συνδιασμών των δυαδικών αυτών μεταβλητών.

4.4. Κανονικές μορφές συναρτήσεων Boole

Έστω μια συνάρτηση Boole με τρεις μεταβλητές δυαδικές

$$\bar{x}\cdot y + x\cdot\bar{y}\cdot z \qquad (1)$$

που περιέχει άθροισμα δύο γινομένων. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος περιέχει δύο μόνο μεταβλητές τις x, y. Σε πολλές περιπτώσεις, όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχει λόγος να αντικαθίσταται μια τέτοια έκφραση με μια άλλη πιο πολύπλοκη, η οποία όμως περιέχει όλες τις μεταβλητές x, y, z. Η αντικατάσταση αυτή γίνεται ως εξής $(a\cdot 1 = a,\ a+\bar{a} = 1)$

$$\begin{aligned}\bar{x}\cdot y + x\cdot\bar{y}\cdot z &= \bar{x}\cdot y\cdot 1 + x\cdot\bar{y}\cdot z = \\ &= \bar{x}\cdot y\cdot(z+\bar{z}) + x\cdot\bar{y}\cdot z = \\ &= \bar{x}\cdot y\cdot z + \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot z\end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση λέγεται κανονική μορφή ή προσθετική κανονική μορφή της συνάρτησης (1). Εύκολα διαπιστώνεται ότι η κανονική μορφή μιας συνάρτησης Boole με τρείς μεταβλητές περιέχει το πολύ 2^3 διακεκριμένους όρους:

$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z},\ \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z,\ \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z},\ \bar{x}\cdot y\cdot z,\ x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z},\ x\cdot\bar{y}\cdot z,\ x\cdot y\cdot\bar{z},\ x\cdot y\cdot z.$

Στην γενική περίπτωση μια συνάρτηση Boole με ν μεταβλητές περιέχει το πολύ 2^ν διακεκριμένους όρους. Η κανονική μορφή που περιέχει όλους τους 2^ν όρους λέγεται πλήρης κανονική μορφή (προσθετική) με ν μεταβλητές.

Έστω η πλήρης κανονική μορφή (προσθετική) 2 μεταβλητών

$$x\cdot y + x\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot y + \bar{x}\cdot\bar{y} \quad (x, y \text{ δυαδικές μεταβλητές})$$

Εφαρμόζοντες τις ιδιότητες και τα αξιώματα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}x\cdot y + x\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot y + \bar{x}\cdot\bar{y} &= (x\cdot y + x\cdot\bar{y}) + (\bar{x}\cdot y + \bar{x}\cdot\bar{y}) = \\ &= [x\cdot(y+\bar{y})] + [\bar{x}\cdot(y+\bar{y})] = x\cdot 1 + \bar{x}\cdot 1 = (x+\bar{x})\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Ανάλογα για την πλήρη κανονική μορφή 3 μεταβλητών έχουμε:

$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z} + \bar{x}\cdot y\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\bar{z} + x\cdot y\cdot z =$$
$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot(z+\bar{z}) + \bar{x}\cdot y\cdot(z+\bar{z}) + x\cdot\bar{y}\cdot(z+\bar{z}) + x\cdot y\cdot(z+\bar{z}) =$$
$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot 1 + \bar{x}\cdot y\cdot 1 + x\cdot\bar{y}\cdot 1 + x\cdot y\cdot 1 = \bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot y + x\cdot\bar{y} + x\cdot y = 1.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι η πλήρης κανονική μορφή ν μεταβλητών είναι πάντα εκ ταυτότητος ίση με 1.

Αν δοθεί μια συνάρτηση Boole F σε κανονική μορφή, τότε ορίζουμε σαν συμπληρωματική αυτής και την συμβολίζουμε με $\bar{F}$, την συνάρτηση που ορίζεται σαν το άθροισμα όλων των όρων της πλήρους κανονικής μορφής που δεν εμφανίζονται στην κανονική μορφή F. π.χ.

Αν $F = x\cdot y + \bar{x}\cdot y + \bar{x}\cdot\bar{y}$, τότε $\bar{F} = x\cdot\bar{y}$.

Για την προσθετική κανονική μορφή μιας συνάρτησης Boole ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 4.4.1.

Αν στην πλήρη κανονική μορφή (προσθετική) ν μεταβλητών, κάθε μεταβλητή παίρνει αυθαίρετα την τιμή 0 ή 1, τότε ακριβώς ένας όρος θα έχει την τιμή 1, ενώ όλοι οι άλλοι όροι θα έχουν την τιμή 0.

Θεώρημα 4.4.2.

Δύο συναρτήσεις Boole είναι ίσες, αν και μόνο αν οι αντίστοιχες κανονικές μορφές τους είναι ταυτόσημες, δηλ. περιέχουν τους ίδιους ακριβώς όρους.

Έστω τώρα μια συνάρτηση Boole με τρεις μεταβλητές

$$(x+y)\cdot(y+z)\cdot(\bar{x}+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}) \qquad (2)$$

που περιέχει γινόμενα τεσσάρων αθροισμάτων. Όπως και στην περίπτωση αθροίσματος γινομένων, έτσι κι εδώ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το γινόμενο αυτό με ένα άλλο, που κάθε παράγοντάς του να περιέχει όλες τις μεταβλητές x, y, z. Η αντικατάσταση αυτή γίνεται όπως και προηγούμενη παίρνοντας όμως τις δυϊκές μορφές των αξιωμάτων 2 και 4 του Huntington δηλ. $a+0=0+a=a$, $a\cdot\bar{a}=0$. Έτσι έχουμε:

$$(x+y)\cdot(y+z)\cdot(\bar{x}+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = (x+y+0)\cdot(y+z+0)\cdot(\bar{x}+z+0)\cdot$$
$$\cdot(\bar{x}+\bar{y}+0) = [(x+y)+(z\cdot\bar{z})]\cdot[(y+z)+(x\cdot\bar{x})]\cdot$$
$$\cdot[(\bar{x}+z)+(y\cdot\bar{y})]\cdot[(\bar{x}+\bar{y})+(z\cdot\bar{z})] =$$
$$=[(x+y+z)\cdot(x+y+\bar{z})]\cdot[(y+z+x)\cdot(y+z+\bar{x})]\cdot$$
$$\cdot[(\bar{x}+z+y)\cdot(\bar{x}+z+\bar{y})]\cdot[(\bar{x}+\bar{y}+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})] =$$
$$=(x+y+z)\cdot(x+y+\bar{z})\cdot(\bar{x}+y+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}) \quad (\Theta.4.2.2).$$

Η τελευταία έκφραση λέγεται δυϊκή κανονική μορφή ή γινομενική κανονική μορφή της συνάρτησης (2).
Η κανονική μορφή (γινομενική) μιας συνάρτησης Boole v μεταβλητών περιέχει το πολύ 2^v παράγοντες (δυϊκή λέξη του "όρου" είναι ο "παράγοντας"). Η δυϊκή κανονική μορφή που αποτελείται από όλους αυτούς τους παράγοντες λέγεται πλήρης δυϊκή κανονική μορφή ή πλήρης γινομενική κανονική μορφή v μεταβλητών.

Έστω η πλήρης κανονική μορφή (γινομενική) 2 μεταβλητών $(x+y)\cdot(x+\bar{y})\cdot(\bar{x}+y)\cdot(\bar{x}+\bar{y})$ (x, y δυαδικές μεταβλητές).
Εφαρμόζοντας και εδώ τα αξιώματα του Huntington έχουμε:

$$(x+y)\cdot(x+\bar{y})\cdot(\bar{x}+y)\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = [x+(y\cdot\bar{y})]\cdot[\bar{x}+(y\cdot\bar{y})]=$$
$$=(x+0)\cdot(\bar{x}+0) = x\cdot\bar{x} = 0.$$

Επίσης η πλήρης κανονική μορφή (γινομενική) 3 μεταβλητών είναι και αυτή ίσης εκ ταυτότητος με 0. Επαγωγικά αποδείχνεται ότι η πλήρης κανονική μορφή (γινομενική) ν μεταβλητών είναι εκ ταυτότητος ίση με 0.

Αν δοθεί μια συνάρτηση Boole F κανονικής μορφής σαν γινόμενο αθροισμάτων, τότε ορίζουμε σαν συμπληρωματική αυτής και την συμβολίζουμε με $\overline{F}$ τη συνάρτηση που ορίζεται σαν το γινόμενο όλων των παραγόντων της πλήρους κανονικής (γινομενικής) μορφής, που δεν εμφανίζονται στην κανονική μορφή F. π.χ. αν $F = (x+y)\cdot(\overline{x}+y)$ τότε $\overline{F} = (\overline{x}+\overline{y})\cdot(x+\overline{y})$.

Για την γινομενική κανονική μορφή μιας συνάρτησης Boole ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 4.4.3.

Αν στην πλήρη κανονική μορφή (γινομενική) ν μεταβλητών, κάθε μεταβλητή παίρνει αυθαίρετα την τιμή 0 ή 1, τότε ακριβώς ένας παράγοντας θα έχει την τιμή 0, ενώ όλοι οι άλλοι παράγοντες θα έχουν την τιμή 1.

Θεώρημα 4.4.4.

Δύο γινομενικές συναρτήσεις Boole είναι ίσες, αν και μόνο αν οι αντίστοιχες κανονικές μορφές τους είναι ταυτόσημες, δηλαδή περιέχουν τους ίδιους ακριβώς παράγοντες.

Οι κανονικές μορφές (προσθετική και γινομενική) μιας συνάρτησης Boole και τα θεωρήματα που αναφέρονται σ' αυτές, μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε (προσδιορίσουμε) τη συνάρτηση Boole, όταν δίνονται οι τιμές της συνάρτησης για όλες τις δυνατές τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές της.

Έστω για παράδειγμα $F(x,y,z)$ μια συνάρτηση Boole τριών μεταβλητών της οποίας οι τιμές για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των μεταβλητών x, y, z δίνονται από τον διπλανό πίνακα. Από το θεώρημα 4.4.1 γίνεται φανερό ότι οι όροι που εμφανίζονται στην κανονική μορφή της $F(x,y,z)$ είναι ακριβώς εκείνοι οι όροι της πλήρους κανονικής μορφής με τρείς μεταβλητές, οι οποίοι έχουν την τιμή 1 όταν $F(x,y,z)=1$. Π.χ. η πρώτη γραμμή του πίνακα δημιουργεί τον όρο $x\cdot y\cdot z$ και η τρίτη γραμμή τον όρο $x\cdot\bar{y}\cdot z$ της $F(x,y,z)$. Έτσι η συνάρτηση $F(x,y,z)$ θα είναι

x	y	z	$F(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

$$F(x,y,z) = x\cdot y\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} =$$
$$= x\cdot z\cdot(y+\bar{y}) + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot(z+\bar{z}) = x\cdot z\cdot 1 + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot 1 =$$
$$= x\cdot z + \bar{x}\cdot\bar{y}. \qquad (1)$$

Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να έχουμε και από το θεώρημα 4.4.3. Έτσι απ' το θεώρημα αυτό γίνεται φανερό ότι οι παράγοντες που εμφανίζονται στην δυϊκή κανονική μορφή της $F(x,y,z)$ είναι ακριβώς εκείνοι οι παράγοντες της πλήρους δυϊκής κανονικής μορφής με τρείς μεταβλητές, οι οποίοι έχουν την τιμή 0, όταν $F(x,y,z) = 0$. Έτσι η $F(x,y,z)$ είναι:

$$F(x,y,z) = (\bar{x}+\bar{y}+z)\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{x}+y+z)\cdot(x+\bar{y}+z) =$$
$$= \left[\bar{x}+z+(y\cdot\bar{y})\right]\cdot\left[x+\bar{y}+(z\cdot\bar{z})\right] =$$
$$= (\bar{x}+z+0)\cdot(x+\bar{y}+0) = (\bar{x}+z)\cdot(x+\bar{y}). \qquad (2)$$

(Χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα 4.2.9. $\overline{\alpha\cdot\beta} = \bar{\alpha}+\bar{\beta}$)

π.χ. η δεύτερη γραμμή του παραπάνω πίνακα $x\cdot y\cdot \bar{z}$ δίνει $\overline{x\cdot y\cdot \bar{z}} = \bar{x}+\bar{y}+z$, η τέταρτη $\bar{x}\cdot y\cdot z$ δίνει $\overline{\bar{x}\cdot y\cdot z} = \bar{x}+\bar{y}+z$ κ.τ.λ.

Οι σχέσεις (1) και (2) μας δίνουν τη μορφή της συνάρτησης $F(x,y,z)$ που επαληθεύει τον παραπάνω πίνακα. Και η μεν συνάρτηση (1) εκφράζεται σαν άθροισμα γινομένων των μεταβλητών, ενώ η συνάρτηση (2) εκφράζεται σαν γινόμενο αθροισμάτων αυτών. Πρέπει να τονισθεί ότι η συνάρτηση (2) δεν είναι δυϊκή της (1). Οι συναρτήσεις (1) και (2) είναι ίσες σύμφωνα με τα θεωρήματα 4.4.2 ή 4.4.4.

Ο παραπάνω τρόπος προσδιορισμού της συνάρτησης $F(x,y,z)$ μας βοηθάει και στον προσδιορισμό της δυϊκής (γινομενικής) κανονικής μορφής μιας συνάρτησης Boole που δίνεται σε μορφή αθροίσματος γινομένων και αντίστροφα, δηλ. στον προσδιορισμό της (προσθετικής) κανονικής μορφής, όταν η συνάρτηση δίνεται σε μορφή γινομένου αθροισμάτων.

Έτσι για να προσδιορίσουμε την δυϊκή κανονική μορφή μιας συνάρτησης Boole, βρίσκουμε πρώτα την κανονική της μορφή, στη συνέχεια την συμπληρωματική αυτής, οπότε η δυϊκή της συμπληρωματικής θα είναι η δυϊκή κανονική μορφή της αρχικής συνάρτησης.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η δυϊκή κανονική μορφή της συνάρτησης:

$F = x\cdot y\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + \bar{x}\cdot y\cdot z + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$. (κανονική μορφή).

Είναι $\bar{F} = x\cdot y\cdot z + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}$. Άρα Θ. 4.2.7. και 4.2.9. είναι $F = \bar{\bar{F}} = \overline{x\cdot y\cdot z + \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z + \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}} =$

$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot(x+y+\bar{z})\cdot(x+\bar{y}+z)$ δυϊκή κανονική μορφή.

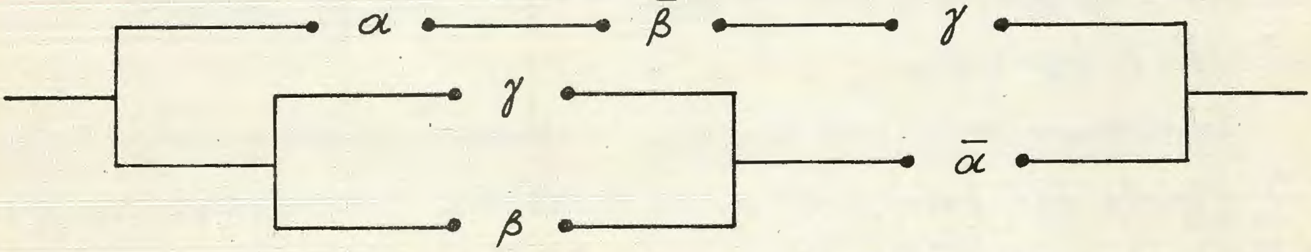
Παρατηρούμε ότι η τελευταία δυϊκή κανονική μορφή που έχει προκύψει για τη συνάρτηση F είναι πιο απλοποιημένη από την αρχική.

Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει τον μετασχηματισμό λογικών προτάσεων ή ηλεκτρικών κυκλωμάτων σε απλούστερες μορφές

Ας θεωρήσουμε π.χ. τη συνάρτηση Boole

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\cdot\bar{\beta}\cdot\gamma + (\beta+\gamma)\cdot\bar{\alpha} \qquad (1)$$

η οποία ορίζει ως γνωστό το παρακάτω ηλεκτρ. κύκλωμα



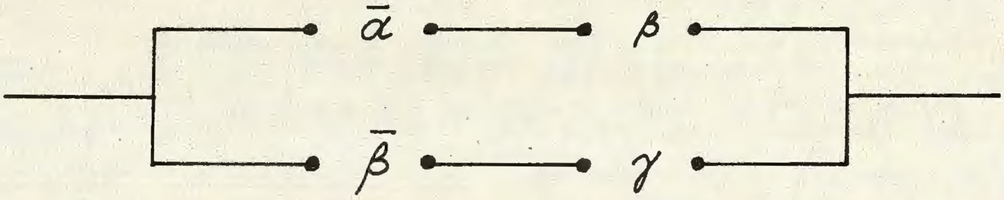
Αν πάρουμε τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης F έχουμε

α	β	γ	$\alpha\cdot\bar{\beta}\cdot\gamma$	$(\beta+\gamma)\cdot\bar{\alpha}$	F
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Όπως και προηγούμενα, χρησιμοποιούμε τις σειρές στις οποίες προκύπτει $F=1$ (το κύκλωμα διαρρέεται με ρεύμα)

$$F = \alpha\cdot\bar{\beta}\cdot\gamma + \bar{\alpha}\cdot\beta\cdot\gamma + \bar{\alpha}\cdot\beta\cdot\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\cdot\gamma =$$
$$= \bar{\alpha}\cdot\beta\cdot(\gamma+\bar{\gamma}) + \bar{\beta}\cdot\gamma\cdot(\alpha+\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}\cdot\beta\cdot 1 + \bar{\beta}\cdot\gamma\cdot 1 =$$
$$= \bar{\alpha}\cdot\beta + \bar{\beta}\cdot\gamma$$

Η τελευταία απλοποιημένη συνάρτηση $F = \bar{\alpha}\cdot\beta + \bar{\beta}\cdot\gamma$ αντιστοιχεί στο απλούστερο ισοδύναμο ηλεκτρ. κύκλωμα



το οποίο διαρρέεται από ρεύμα, όταν και το αρχικό κύκλωμα διαρρέεται.

Παρατήρηση.

Το γεγονός ότι ένας από τους διακόπτες του τελευταίου κυκλώματος συμβολίζεται με $\bar{\alpha}$, ενώ δεν υπάρχει διακόπτης που να συμβολίζεται με α, δεν έχει σημασία. Πράγματι αν στο αρχικό κύκλωμα γίνει αμοιβαία ανταλλαγή των διακοπτών α και $\bar{\alpha}$ μεταξύ τους, τότε προκύπτει σαν αποτέλεσμα στο τελευταίο κύκλωμα ο α και όχι ο $\bar{\alpha}$.

Παραδείγματα - Εφαρμογές

1) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση Boole

$$F(x,y,z) = \left[x + \overline{(\bar{x}+y)}\right]\cdot\left[x + \left(\overline{\bar{y}\cdot\bar{z}}\right)\right]$$

Είναι $F = [x + (x\cdot\bar{y})]\cdot[x + (y+z)]$ (Θ. 4.2.9, 4.2.7.)

$$= x\cdot x + x\cdot(y+z) + (x\cdot\bar{y})\cdot x + (x\cdot\bar{y})\cdot(y+z) =$$
$$= x + x\cdot y + x\cdot z + (x\cdot x)\cdot\bar{y} + x\cdot\bar{y}\cdot y + x\cdot\bar{y}\cdot z =$$
$$= x + xy + xz + x\bar{y} + x\bar{y}z \quad (x\cdot x = x,\ \bar{y}\cdot y = 0)$$

$$= x + x(y+\bar{y}) + xz + x\bar{y}z =$$
$$= x + x\cdot 1 + xz + x\bar{y}z =$$
$$= x + xz + x\bar{y}z \qquad (\Theta.\ 4.2.2)$$
$$= x + xz \qquad (\text{διότι } xz + xz\bar{y} = xz \quad \Theta.\ 4.2.4)$$
$$= x \qquad (\Theta.\ 4.2.4).$$

2) Να βρεθεί η κανονική μορφή της προηγούμενης συνάρτησης F.

Είναι $F = x = x\cdot(y+\bar{y})\cdot(z+\bar{z}) = (x\cdot y + x\cdot\bar{y})\cdot(z+\bar{z}) =$
$$= x\cdot y\cdot z + x\cdot y\cdot\bar{z} + x\cdot\bar{y}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}.$$

3) Να βρεθεί η συνάρτηση Boole που ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα αλήθειας.

x	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Είναι προφανές, σύμφωνα με προηγούμενο παράδειγμα, ότι η κανονική μορφή της F θα αποτελείται από 5 όρους (όσες είναι οι μονάδες της F) ενώ η δυϊκή κανονική μορφή θα αποτελείται από 3 παράγοντες (όσα είναι τα μηδενικά της F). Χρησιμοποιούμε την τελευταία μορφή που είναι πιο απλή. Έτσι

$$F = (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})\cdot(x+y+\bar{z}) =$$
$$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot[(x+\bar{z})+\bar{y}]\cdot[(x+\bar{z})+y] =$$
$$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot[(x+\bar{z})+y\cdot\bar{y}] = (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot(x+\bar{z}) =$$
$$= \bar{x}x + \bar{y}x + \bar{z}x + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{z} = \bar{y}x + \bar{z}(x+\bar{x}) + \bar{z} =$$

$= \bar{y}x + \bar{z}\cdot 1 + \bar{z} = \bar{y}x + \bar{z}$

επειδή $x\cdot\bar{x} = 0$, $\bar{z}\cdot\bar{z} = \bar{z}$ και $x + \bar{x} = 1$.

4) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση Boole

$$F = (y\cdot\bar{z} + \bar{y}\cdot z)\cdot(\bar{x}\cdot y + \bar{x}\cdot z + x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z})$$

αφού μετασχηματιστεί από την κανονική μορφή στη δυϊκή κανονική μορφή και αντίστροφα.

Θέτουμε $F_1 = y\cdot\bar{z} + \bar{y}\cdot z$ και $F_2 = \bar{x}\cdot y + \bar{x}\cdot z + x\bar{y}\bar{z}$.

Τότε $F_1 = y\bar{z}(x+\bar{x}) + \bar{y}z(x+\bar{x}) =$

$= y\bar{z}x + y\bar{z}\bar{x} + \bar{y}zx + \bar{y}z\bar{x}$ (κανονική μορφή)

οπότε η συμπληρωματική αυτής η $\bar{F_1}$ θα είναι

$\bar{F_1} = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + x\bar{y}\bar{z}$. Άρα

$F_1 = \bar{\bar{F_1}} = \overline{\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + x\bar{y}\bar{z}} =$

$= (x + \bar{y} + \bar{z})\cdot(x + y + z)\cdot(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})\cdot(\bar{x} + y + z)$

(δυϊκή κανονική μορφή της F_1).

Επίσης $F_2 = \bar{x}y + \bar{x}z + x\bar{y}\bar{z} = \bar{x}y(z+\bar{z}) + \bar{x}z(y+\bar{y}) + x\bar{y}\bar{z} =$

$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}zy + \bar{x}z\bar{y} + x\bar{y}\bar{z} =$

$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}z\bar{y} + x\bar{y}\bar{z}$ (κανονική μορφή)

και η συμπληρωματική αυτής η $\bar{F_2}$ θα είναι

$\bar{F_2} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$ Άρα

$F_2 = \bar{\bar{F_2}} = \overline{\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z}} =$

$= (x + y + z)\cdot(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})\cdot(\bar{x} + y + \bar{z})\cdot(\bar{x} + \bar{y} + z)$

(δυϊκή κανονική μορφή της F_2)

Οπότε $F = F_1\cdot F_2 =$

$= (x + y + z)\cdot(x + \bar{y} + \bar{z})\cdot(\bar{x} + y + z)\cdot(\bar{x} + y + \bar{z})\cdot$

$\cdot(\bar{x} + \bar{y} + z)\cdot(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

καί η συμπληρωματική αυτής η $\bar{F}$ θα είναι

$\bar{F} = (x+\bar{y}+z)\cdot(x+y+\bar{z})$ Άρα η F θα είναι τελικά

$$F = \bar{\bar{F}} = \overline{(x+\bar{y}+z)\cdot(x+y+\bar{z})} =$$
$$= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}\cdot(y\bar{z}+\bar{y}z)$$

5) Να βρεθεί η κανονική μορφή της συνάρτησης

$$F = (x+y+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

Είναι $\bar{F} = \overline{(x+y+z)\cdot(\bar{x}+\bar{y}+z)} =$

$$= \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} + x\cdot y\cdot\bar{z} \quad (\text{Θ. } 4.2.9)$$

και η συμπληρωματική της $\bar{F}$ η $\bar{\bar{F}} = F$ θα είναι

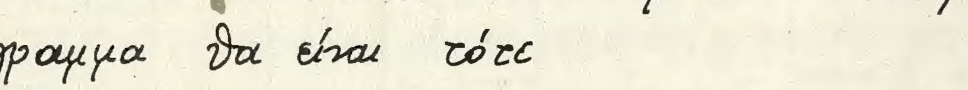
$$F = xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z}$$

(Το άθροισμα όλων των όρων της πλήρους κανονικής μορφής, που δεν εμφανίζονται στην $\bar{F}$).

6) Βρείτε όλα τα δυνατά ηλεκτρικά κυκλώματα που αποτελούνται από τρείς διακόπτες α, β, γ.

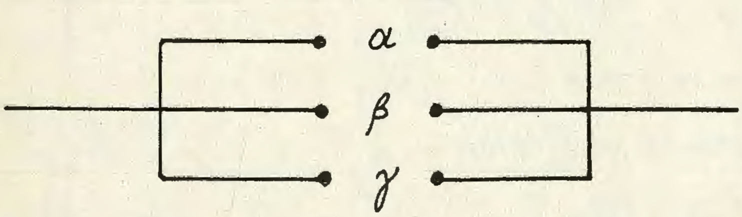
Υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) Οι διακόπτες είναι όλοι συνδεδεμένοι εν σειρά. Το διάγραμμα θα είναι τότε



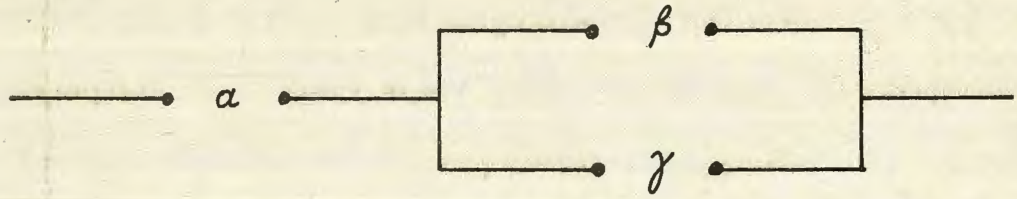
με την αντίστοιχη συνάρτηση $F = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

ii) Οι διακόπτες είναι όλοι συνδεδεμένοι εν παραλλήλω. Το διάγραμμα θα είναι τότε



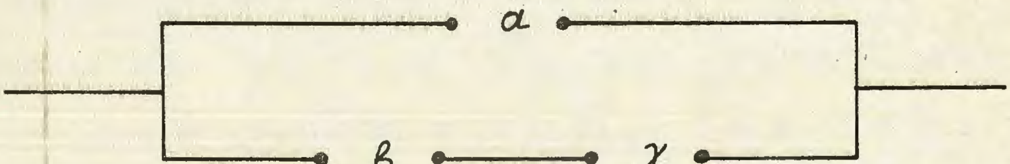
με την αντίστοιχη συνάρτηση $F = \alpha+\beta+\gamma$

iii) Οι δύο εν παραλλήλω και το σύστημα αυτών εν σειρά με τον άλλο. Το διάγραμμα θα είναι τότε



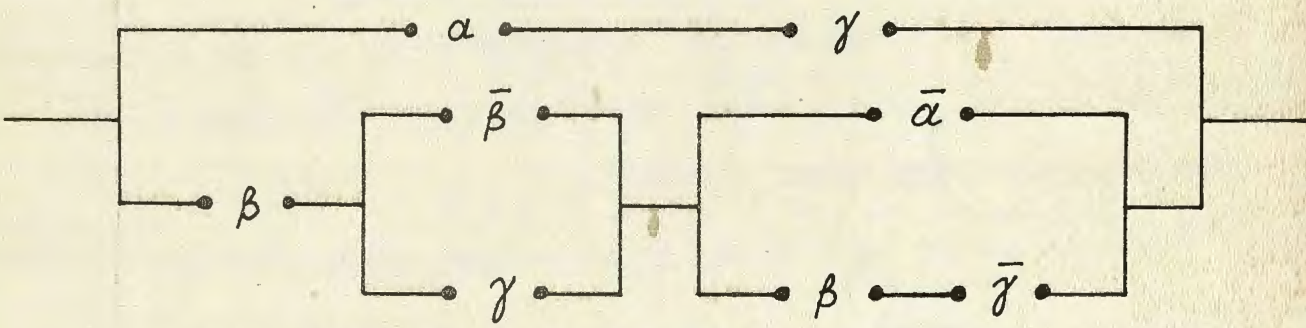
με συνάρτηση $F = \alpha\cdot(\beta+\gamma)$

iv) Οι δύο διακόπτες εν σειρά και το σύστημα αυτών εν παραλλήλω με τον άλλο. Το διάγραμμα θα είναι τότε



με την αντίστοιχη συνάρτηση $\alpha + \beta\cdot\gamma$

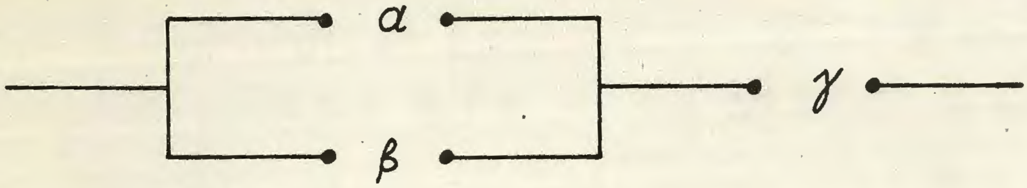
7) Να αντικατασταθεί το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα με ένα απλούστερο ισοδύναμό του αν είναι δυνατόν.



Η συνάρτηση Boole για το ηλεκτρ. κύκλωμα είναι:

$$
\begin{aligned}
F &= \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot(\bar{\beta}+\gamma)\cdot(\bar{\alpha}+\beta\cdot\bar{\gamma}) = \\
&= \alpha\cdot\gamma + (\beta\cdot\bar{\beta}+\beta\gamma)\cdot(\bar{\alpha}+\beta\bar{\gamma}) = \\
&= \alpha\cdot\gamma + (0+\beta\gamma)\cdot(\bar{\alpha}+\beta\cdot\bar{\gamma}) = \\
&= \alpha\gamma + \beta\gamma\bar{\alpha} + \beta\gamma\cdot\beta\bar{\gamma} = \alpha\gamma + \beta\gamma\bar{\alpha} = \\
&= \gamma(\alpha+\beta\bar{\alpha}) = \gamma\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\bar{\alpha}) = \\
&= \gamma\cdot(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

Η τελευταία απλοποιημένη συνάρτηση αντιστοιχεί στο κύκλωμα



Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι το σύνολο $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ με εσωτερικές πράξεις + και • που ορίζονται από τους παρακάτω πίνακες είναι άλγεβρα Boole

+	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	β	δ	δ
γ	γ	δ	γ	δ
δ	δ	δ	δ	δ

•	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β	α	β
γ	α	α	γ	γ
δ	α	β	γ	δ

2) Έστω το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Ορίζουμε στο σύνολο αυτό για κάθε $\alpha, \beta \in A$ δύο πράξεις εσωτερικές τις + και • τέτοιες ώστε το $\alpha+\beta$ παριστάνει το Ε.Κ.Π και το $\alpha\cdot\beta$ τον Μ.Κ.Δ των στοιχείων α, β για κάθε $\alpha, \beta \in A$. Να δειχθεί ότι η δομή $B = (A, +, \cdot)$ ορίζει μια άλγεβρα Boole.

3) Χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας δείξτε ότι:

α) $\alpha\cdot\bar{\beta} + \beta\cdot\bar{\alpha} = (\alpha+\beta)\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

β) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\alpha$

4) Να απλοποιηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $(\alpha+\beta)\cdot\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ Απ. 0

β) $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma+\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}$ Απ. 1

γ) $\alpha\cdot\beta+[\gamma\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\beta})]$ Απ. $\alpha\cdot\beta+\gamma$

δ) $(\alpha+\bar{\alpha}\cdot\beta)\cdot(\beta+\beta\cdot\gamma)$ Απ. β

ε) $(\overline{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}+\gamma})\cdot(\overline{\alpha+\bar{\beta}})$ Απ. $\bar{\alpha}\cdot\beta$

στ) $(\alpha+\bar{\beta})\cdot(\bar{\alpha}+\beta)\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$ Απ. $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$

ζ) $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\bar{\beta})+\beta\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})$ Απ. $\alpha+\beta$

5) Να εκφραστούν οι παρακάτω συναρτήσεις στην κανονική τους μορφή και την δυϊκή κανονική μορφή τους.

α) $x+\bar{x}\cdot y$

β) $x\cdot(y+z)+x\cdot(y+\bar{z})$

γ) $(x+y+z)\cdot(xy+\bar{x}z)$

δ) $xyz+(x+y)\cdot(x+z)$

ε) $(x+y)\cdot(x+\bar{z})\cdot(\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+z)$

6) Βρείτε τη συνάρτηση Boole με τρεις μεταβλητές της οποίας η τιμή είναι 1 στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) αν και μόνο αν δύο από τις μεταβλητές της είναι 1 και η άλλη 0 (Απ. $F=xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz$)

β) αν και μόνο αν περισσότερες από μια μεταβλητές έχουν την τιμή 1. (Απ. $F=x\cdot(y+z)+yz$)

7) Βρείτε τη συνάρτηση Boole με τρεις μεταβλητές της οποίας η τιμή είναι 0 στις παρακάτω περιπτώσεις

α) αν και μόνο αν δύο από τις μεταβλητές της είναι 0 και η άλλη 1 (Απ. F = δυϊκή της 6α)

β) αν και μόνο αν περισσότερες από μια μεταβλητές έχουν την τιμή 0 (Απ. F = δυϊκή της 6β).

8) Βρείτε τις απλοποιημένες μορφές των συναρτήσεων Boole $F_1, F_2, \cdots, F_8$ που ορίζονται από τον παρακάτω πίνακα.

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0

9) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων που αντιπροσωπεύονται από τις συναρτήσεις

$$F_1 = \alpha + \bar{\alpha}\cdot\beta \quad \text{και} \quad F_2 = \alpha + \beta$$

και δείξτε χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας ότι είναι ισοδύναμα. Επίσης να σχεδιαστούν τα διαγράμματα των παρακάτω ηλεκτρικών κυκλωμάτων

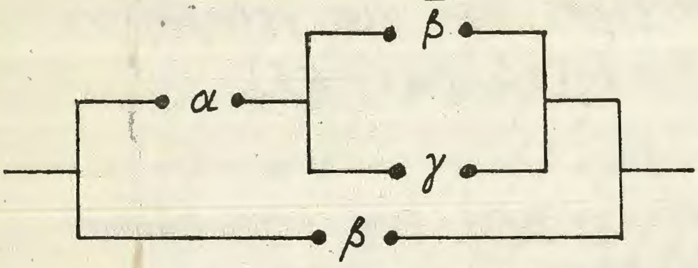
α) $(\alpha+\bar{\beta})\cdot(\bar{\alpha}+\beta)\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

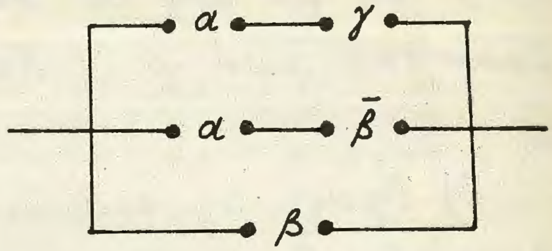
β) $\alpha\cdot\beta + \gamma\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

γ) $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\bar{\beta}) + \beta\cdot(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})$

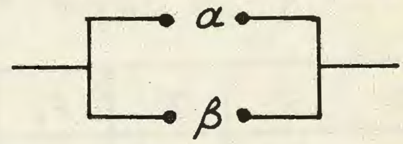
δ) $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma + \bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}$ και να απλοποιηθούν.

10) Δείξτε ότι τα παρακάτω ηλεκτρικά κυκλώματα

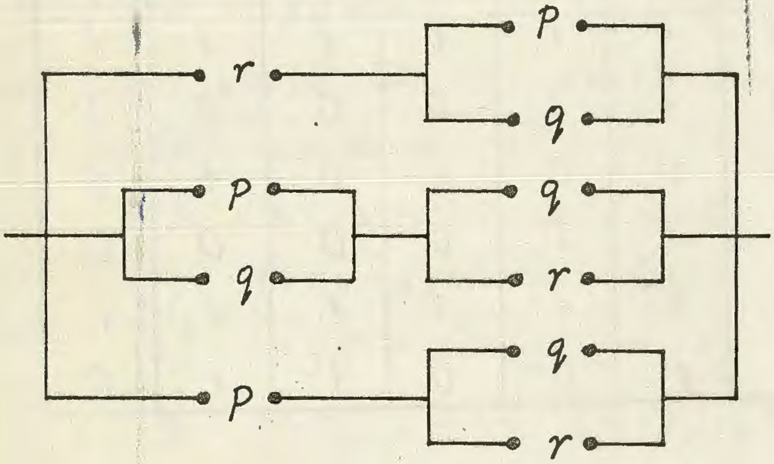




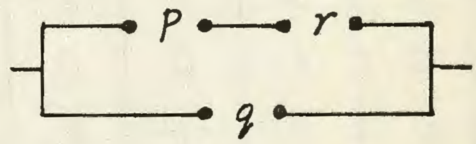
είναι ισοδύναμα με το κύκλωμα

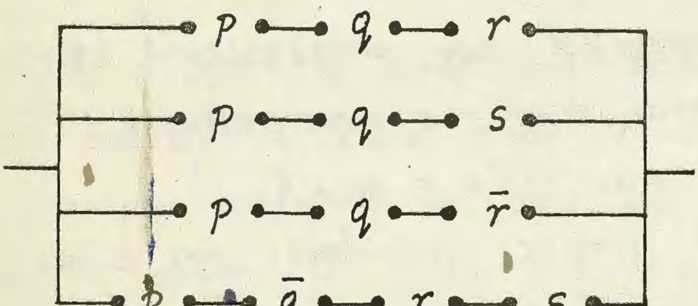


11) Να απλοποιηθούν τα παρακάτω ηλεκτρ. κυκλώματα

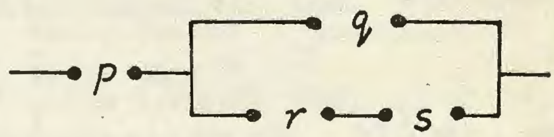


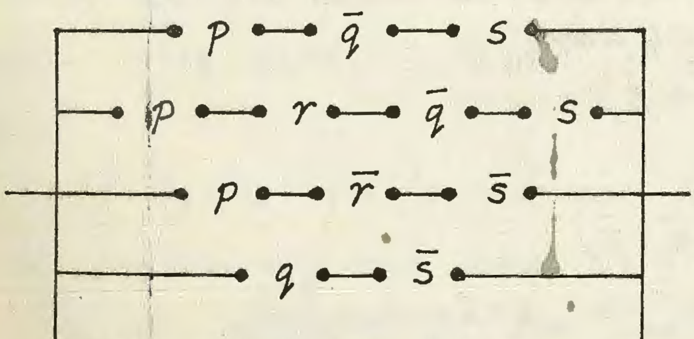
, Απάντηση





, Απάντηση





, Απάντηση