Τ.Ε.Ι. ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Β΄ Έκδοση

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ
M.Sc. U.M.I.S.T. ΑΓΓΛΙΑΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΕΙ/Λ

Λάρισα 1990

Εισαγωγή

Σκοπός των Μαθηματικών υπήρξε πάντα η εύρεση διάφορων θεωριών και τύπων, για τη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων με αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα, χωρίς να ενδιαφέρει, κατά πόσο αυτές οι μέθοδοι επίλυσής τους μπορούσαν να είναι πρακτικές και χρήσιμες.

Σ' όλους τους τομείς της επιστήμης και τεχνικής, για κάθε πρόβλημα, δημιουργείται μια μαθηματική διατύπωση σαν πρώτο στάδιο, απαραίτητη για την αριθμητική του επίλυση. Επειδή όμως για κάθε φυσικό πρόβλημα δεν υπάρχει μια μόνο μαθηματική έκφραση, γι' αυτό έχει μεγάλη σημασία η εύρεση της πιο κατάλληλης μαθηματικής διατύπωσης, καθώς και η εκλογή της πιο καλής αριθμητικής μεθόδου για την επίλυσή του. Τα κριτήρια όμως εκλογής της αριθμητικής μεθόδου δεν είναι πάντα απλά και συγκεκριμένα, έτσι ώστε η επιλογή αυτή να αποτελεί το πιο δύσκολο στάδιο της επεξεργασίας του προβλήματος.

Ο σκοπός της Αριθμητικής Ανάλυσης, είναι η ανάπτυξη και αξιολόγηση μεθόδων για τον υπολογισμό αριθμητικών αποτελεσμάτων από αριθμητικά δεδομένα. Επομένως η Αριθμητική Ανάλυση είναι ένα είδος επεξεργασίας πληροφοριών. Τα δεδομένα αποτελούν τις πληροφορίες εισόδου, τα αποτελέσματα τις πληροφορίες εξόδου και η μέθοδος υπολογισμού τον αλγόριθμο.

Αυτή η μέθοδος απαιτεί συνήθως ένα τεράστιο πλήθος αριθμητικών πράξεων, και εδώ πρέπει να τονιστεί η συμβολή των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην ανάπτυξη της Αριθμητικής Ανάλυσης.

Η επίλυση ενός προβλήματος με ηλεκτρονικό υπολογιστή επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός προγράμματος, δηλ. μιας σειράς εντολών που αποτελούν τον αλγόριθμο του προβλήματος. Οι εντολές αυτές γράφονται σε μια γλώσσα κατανοητή απ' τον υπολογιστή, ή σε μια άλλη ενδιάμεση γλώσσα, οπότε προηγείται μια μετάφραση σε γλώσσα της μηχανής (compiler) πριν την εκτέλεση του προγράμματος.

Έτσι οι υπολογιστές έχουν γίνει σήμερα το πιο απαραίτητο εργαλείο για τη συστηματική μελέτη της σύγχρονης Αριθμητικής Ανάλυσης.

1. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

1.1. Γενικά

Αν ξεκινήσουμε απ το σύνολο των φυσικών αριθμών βλέπουμε ότι δεν είναι πεπερασμένο. Έτσι για κάθε φυσικό αριθμό είναι αδύνατο να έχουμε ιδιαίτερο όνομα και ιδιαίτερο σύμβολο. Γιαυτό γεννήθηκε η ανάγκη να βρεθεί τρόπος να μπορούμε να απαγγείλουμε τους φυσικούς αριθμούς με λίγες σχετικά λέξεις και να μπορούμε να τους γράφουμε με λίγα σύμβολα. Το σύνολο των κανόνων που διέπουν την ονομασία και γραφή των φυσικών αριθμών λέγεται *σύστημα αρίθμησης*.

Το πιό διαδεδομένο σήμερα σύστημα αρίθμησης είναι το δεκαδικό. Οι νόμοι που διέπουν το σύστημα αυτό είναι:

1) Οι αριθμοί 0, 1, 2, ..., 9 αποτελούν τις μονάδες πρώτης τάξης αυτού του συστήματος.
2) Δέκα μονάδες πρώτης τάξης σχηματίζουν μια μονάδα δεύτερης τάξης που λέγεται δεκάδα.
3) Δέκα μονάδες δεύτερης τάξης σχηματίζουν μια μονάδα τρίτης τάξης που λέγεται εκατοντάδα κ.ο.κ.

Ο αριθμός 10 που εκφράζει πόσες μονάδες μιας τάξης σχηματίζουν μια μονάδα της αμέσως ανώτερης, λέγεται *βάση* του συστήματος και το σύστημα *δεκαδικό*. Ανάλογα μπορούν να σχηματιστούν και άλλα συστήματα όπως το *δυαδικό* που χρησιμοποιεί σα μονάδες πρώτης τάξης τους αριθμούς 0, 1 και η βάση του είναι το 2, το *οκταδικό* που χρησιμοποιεί των μονάδες πρώτης τάξης τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5,6,7 με βάση το 8, το δεκαεξαδικό που χρησιμοποιεί σαν μονάδες πρώτης τάξης τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F με βάση το 16 και άλλα.

Το δυαδικό σύστημα είναι το σύστημα με το ελάχιστο πλήθος διαφορετικών ψηφίων (0,1). Η ιδιότητα αυτή αποτελεί ένα πολύ βασικό πλεονέκτημα του δυαδικού συστήματος, γιατί επιτρέπει την εύκολη εφαρμογή του σ' ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Αρκούν δηλ. δύο διαφορετικές καταστάσεις για τη δημιουργία ψηφίων.

Για παράδειγμα δίνουμε τις παραστάσεις των αριθμών απ το 0 ως το 32 στα τέσσερα αυτά συστήματα.

10-δ.	2-δικό	8-δ.	16-δ.	10-δ.	2-δικό	8-δ.	16-δ.	10-δ.	2-δικό	8-δ.	16-δ.
0	0	0	0	11	1011	13	B	22	10110	26	16
1	1	1	1	12	1100	14	C	23	10111	27	17
2	10	2	2	13	1101	15	D	24	11000	30	18
3	11	3	3	14	1110	16	E	25	11001	31	19
4	100	4	4	15	1111	17	F	26	11010	32	1A
5	101	5	5	16	10000	20	10	27	11011	33	1B
6	110	6	6	17	10001	21	11	28	11100	34	1C
7	111	7	7	18	10010	22	12	29	11101	35	1D
8	1000	10	8	19	10011	23	13	30	11110	36	1E
9	1001	11	9	20	10100	24	14	31	11111	37	1F
10	1010	12	A	21	10101	25	15	32	100000	40	20

Πίνακας παράστασης αριθμών απ' το 0 ως το 32 στα συστήματα: δεκαδικό, δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό.

1.2. Παράσταση πραγματικών αριθμών

Όπως είναι γνωστό κάθε πραγματικός αριθμός x παριστάνεται σ' ένα σύστημα αριθμών με βάση $\beta \geq 2$ ως εξής:

$$x = \pm \sum_{\lambda=\nu}^{-\infty} y_\lambda \cdot \beta^\lambda$$

όπου οι συντελεστές y_λ της δυναμοσειράς αυτής είναι στοιχεία απ' το σύνολο $\{0, 1, 2, \cdots, \beta-1\}$ και ονομάζονται ψηφία του αριθμού x.

Π.χ. ο αριθμός $x = -2.834,509$ στο δεκαδικό σύστημα ($\beta=10$) γράφεται:

$$x = -(2\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 4\cdot10^0 + 5\cdot10^{-1} + 0\cdot10^{-2} + 9\cdot10^{-3})$$

Το λ παίρνει τιμές απ' το 3 μέχρι το -3.

Στην πράξη περιοριζόμαστε σε αριθμούς με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, επομένως μόνο ένα πεπερασμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών μπορούμε να παραστήσουμε ακριβώς.

Ως σημαντικά, χαρακτηρίζονται όλα τα δεδομένα ψηφία ενός πραγματικού αριθμού εκτός απ' τα μηδενικά ψηφία στην αρχή του. Π.χ. ο αριθμός 0,005481 ($\beta=10$) έχει 4 σημαντικά ψηφία, 6 ψηφία μετά την υποδιαστολή και πρώτο σημαντικό το 5. Προφανώς όλα τα ψηφία ενός φυσικού αριθμού είναι σημαντικά.

1.3. Πράξεις στα συστήματα αρίθμησης

Είναι προφανές ότι η εκτέλεση των βασικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολ/μός, διαίρεση) με αριθμούς σ' ένα σύστημα με βάση β, δεν παρουσιάζει καμιά ιδιαίτερη δυσκολία, γιατί οι πράξεις γίνονται με τη βοήθεια των γνωστών κανόνων που γίνονται και για αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα. Το μόνο που θέλει προσοχή είναι η υ π έ ρ β α σ η (τα κρατούμενα) που εξαρτάται απ' τη βάση. Είναι θέμα κατάλληλης εξάσκησης.

Για διευκόλυνση δίνουμε ένα παράδειγμα για κάθε πράξη στο δυαδικό και παρόμοιο παράδειγμα στο δεκαδικό σύστημα.

Δυαδικό σύστημα	Δεκαδικό σύστημα.
111001,101	17,32
+10010,0111	+ 5,983
1001100,0001	23,303
1011,1	8,72
× 10,1	× 3,41
10111	872
00000	3488
10111	2616
11100,11	29,7352
111001,101	25,841
− 10100,010	− 16,398
100101,011	9,443

```
 11001 | 101            315 | 5
 -101  |-----           -30 |----
 ----  | 101            --- | 63
   101                   15
  -101                  -15
  ----                  ---
   000                   00
```

1.4. Μετατροπή αριθμού από ένα σύστημα σε άλλο

Δίνονται δύο συστήματα με βάσεις Β και β και ένας αριθμός x σ' ένα απ' τα δύο συστήματα. Ζητείται η παράσταση αυτού στο άλλο σύστημα αρίθμησης.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Μετατροπή ενός ακέραιου απ' το δεκαδικό σε άλλο σύστημα

Ο Αλγόριθμος που ακολουθούμε, δηλ. η σειρά πεπερασμένου πλήθους διαδικασιών που εφαρμόζουμε, είναι:

Εκτελούμε τη διαίρεση του αριθμού αυτού x με τη βάση του συστήματος που θέλουμε. Αυτή δίνει ένα πηλίκο π_1 και ένα υπόλοιπο υ_1. Στη συνέχεια διαιρούμε το νέο πηλίκο πάλι με τη βάση και έχουμε ένα νέο πηλίκο π_2 και υπόλοιπο υ_2 κ.ο.κ. μέχρι να βρούμε ένα πηλίκο 0 και υπόλοιπο υ_ν (εκτελώντας ν διαιρέσεις). Τότε ο αριθμός x_{10} θα αντιστοιχεί στον $(\upsilon_\nu \upsilon_{\nu-1} \cdots \upsilon_2 \upsilon_1)_\beta$.

Όλα τα υπόλοιπα που βρίσκουμε είναι οπωσδήποτε στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 2, \cdots, \beta-1\}$ διότι είναι πάντα μικρότερα του β.

Εφαρμογή

Να μετατραπεί ο αριθμός $(23250)_{10}$ στο δεκαεξαδικό.

23250	16			
72	1453	16		
85	13	90	16	
50	13	10	5	16
$\upsilon_1 = 2$	$\upsilon_2 = D$	$\upsilon_3 = A$	$\upsilon_4 = 5$	0

Άρα $(23250)_{10} = (5AD2)_{16}$

β) Μετατροπή του δεκαδικού μέρους από δεκαδικό σε άλλο σύστημα

Πολλαπλασιάζουμε το δεκαδικό μέρος του αριθμού x με τη βάση του συστήματος β που θέλουμε και το ακέραιο μέρος του γινομένου που βρίσκουμε αποτελεί το πρώτο ψηφίο μετά την υποδιαστολή του ζητούμενου αριθμού. Στη συνέχεια πολ/ζουμε το δεκαδικό μέρος του πρώτου γινομένου με τη βάση β και το ακέραιο μέρος του νέου γινομένου αποτελεί το δεύτερο ψηφίο μετά την υποδιαστολή κ.ο.κ. συνεχίζοντας με όση ακρίβεια θέλουμε. (Το ακέραιο μέρος του γινομένου που βρίσκουμε κάθε φορά, είναι πάντα ένας αριθμός μεταξύ 0 και $\beta-1$).

Εφαρμογή

Να μετατραπεί ο αριθμός $(0,853)_{10}$ στο δεκαεξαδικό.

Είναι
$0,853 \cdot 16 = 13,648$ (Το 13 αντιστοιχεί στο D)
$0,648 \cdot 16 = 10,368$ (Το 10 " " A)
$0,368 \cdot 16 = 5,888$
$0,888 \cdot 16 = 14,208$ (Το 14 " " E)
$0,208 \cdot 16 = 3,328$ κ.ο.κ.

Άρα $(0,853)_{10} \simeq (0,DA5E3)_{16}$

γ) Μετατροπή από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό

Γράφουμε τον αριθμό του συστήματος αυτού σαν δυναμοσειρά της μορφής

$$x = \pm \sum_{\lambda=\nu}^{-\infty} y_\lambda \beta^\lambda$$

με βάση β τη βάση του συστήματος που έχουμε και προσθέτουμε τους επί μέρους παράγοντες της δυναμοσειράς.

(Αν το σύστημα είναι ανώτερο του δεκαδικού, τότε τα ψηφία με αριθμό πάνω από 9 τα γράφουμε με τα αντίστοιχα του δεκαδικού).

Εφαρμογές

1) Να μετατραπεί ο αριθμός $(11101,01)_2$ στο δεκαδικό.

Είναι $(11101,01)_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} +$

$+ 1\cdot 2^{-2} = 16 + 8 + 4 + 1 + 0,25 = 29,25$

Άρα $(11101,01)_2 = (29,25)_{10}$

2) Να μετατραπεί ο $(5AD2)_{16}$ στο δεκαδικό.

Είναι $(5AD2)_{16} = 5\cdot 16^3 + A\cdot 16^2 + D\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0 =$

$= 5\cdot 16^3 + 10\cdot 16^2 + 13\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0 =$

$= 20480 + 2560 + 208 + 2 = 23250$

Άρα $(5AD2)_{16} = (23250)_{10}$

δ) Μετατροπή ενός αριθμού από οποιοδήποτε σύστημα σε άλλο

Εδώ μπορεί η μετατροπή να γίνει μέσω του δεκαδικού συστήματος σε δύο στάδια (ή τρία, αν περιέχει και δεκαδικό μέρος). Πρώτα μετατρέπεται ο αριθμός απ' το σύστημα με την αρχική βάση στο δεκαδικό σύμφωνα με την περίπτωση (γ) και στη συνέχεια απ' το δεκαδικό, στο σύστημα με την τελική βάση, σύμφωνα με τις περιπτώσεις (α) και (β) αν υπάρχει και δεκαδικό μέρος.

Εφαρμογή

Να μετατραπεί ο αριθμός $(A4,C)_{16}$ στο οκταδικό σύστημα.

α) Μετατρέπουμε πρώτα τον $(A4,C)_{16}$ στο δεκαδικό.

$(A4,C)_{16} = A\cdot 16^1 + 4\cdot 16^0 + C\cdot 16^{-1} = 10\cdot 16^1 + 4\cdot 16^0 + 12\cdot 16^{-1} =$

$= 160 + 4 + \frac{12}{16} = (164,75)_{10}$

β) Μετατρέπουμε τώρα τον $(164,75)_{10}$ στο οκταδικό.
Στην αρχή μετασχηματίζουμε πρώτα τον 164.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
164 & 8 & & \\
\hline
04 & 20 & 8 & \\
\cline{3-4}
4 & 4 & 2 & 8 \\
\cline{4-4}
 & & 2 & 0
\end{array}
$$

Άρα $(164)_{10} = (244)_8$

Τώρα μετατρέπουμε τον $(0,75)_{10}$ στο οκταδικό.

$0,75 \cdot 8 = 6,00$ άρα $(0,75)_{10} = (0,6)_8$

και τελικά $(A4,C)_{16} = (244,6)_8$.

ε) Ειδική περίπτωση της μορφής $B = \beta^p$

Όταν υπάρχει φυσικός p τέτοιος ώστε $B = \beta^p$ όπου B, β είναι οι βάσεις δύο οποιωνδήποτε συστημάτων, τότε η μετατροπή γίνεται αμέσως απ' το ένα σύστημα στο άλλο χωρίς τη μεσολάβηση του δεκαδικού ως εξής:

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα αντιστοιχίας, όπου οι αριθμοί στο σύστημα με βάση β έχουν p ψηφία (αν έχουν λιγότερα συμπληρώνουμε με 0 στην αρχή).

i) Αν θέλουμε απ' τον x_β να μεταβούμε στον y_B, χωρίζουμε τον αριθμό σε ομάδες p ψηφίων αρχίζοντας απ' την υποδιαστολή και προς τα δεξιά καθώς και προς τα αριστερά. Αν οι ακραίες ομάδες έχουν λιγότερα από p ψηφία, τις συμπληρώνουμε με 0 στην αρχή για την αριστερή ομάδα και στό τέλος για τη δεξιά.

Εφαρμογή

Ο αριθμός $(111001101,10110)_2$ να μετατραπεί στο οκταδικό σύστημα.

Εδώ είναι $B = 8$, $\beta = 2$, $8 = 2^3$ άρα $p = 3$

...ουμε ..ν πίνακα

$\beta=2$	000	001	010	011	100	101	110	111
$B=8$	0	1	2	3	4	5	6	7

Χωρίζοντας τον αριθμό σε ομάδες τριών ψηφίων, συμπληρώνοντας δύο μηδενικά στην αρχή και ένα στο τέλος έχουμε

$$\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5},\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{100}_{4} \quad \text{δηλ.}$$

$$(1111001101,1011)_2 = (1715,54)_8$$

ii) Αν θέλουμε απ' τον y_B να πάμε στον x_β, χρησιμοποιώντας πάλι τον πίνακα, γράφουμε κάθε ψηφίο του οκταδικού με το αντίστοιχό του στο δυαδικό με τρία πάντα ψηφία.

Π.χ. ο $(35,2)_8$ μετατρέπεται στο δυαδικό ως εξής:

$$\overbrace{011}^{3}\ \overbrace{101}^{5}\ ,\ \overbrace{010}^{2} \quad \text{δηλ.}$$

$$\therefore (35,2)_8 = (11101,01)_2$$

Ασκήσεις

1) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις στο δυαδικό σύστημα

α) $(1001101)_2 + (1010001)_2$

β) $(111100)_2 - (101101)_2$

γ) $(100101)_2 \times (11001)_2$

δ) $(1011011)_2 : (101)_2$

β) Μετατρέπουμε τώρα τον $(164,75)_{10}$ στο οκταδικό.
Στην αρχή μετασχηματίζουμε πρώτα τον 164.

$$\begin{array}{r|r|r|l} 164 & 8 & & \\ \hline 04 & 20 & 8 & \\ \cline{3-3} 4 & 4 & 2 & 8 \\ \cline{4-4} & & 2 & 0 \end{array}$$

Άρα $(164)_{10} = (244)_8$

Τώρα μετατρέπουμε τον $(0,75)_{10}$ στο οκταδικό.
$0,75 \cdot 8 = 6,00$ άρα $(0,75)_{10} = (0,6)_8$
και τελικά $(A4,C)_{16} = (244,6)_8$.

ε) Ειδική περίπτωση της μορφής $B=\beta^p$

Όταν υπάρχει φυσικός p τέτοιος ώστε $B=\beta^p$ όπου B, β είναι οι βάσεις δύο οποιωνδήποτε συστημάτων, τότε η μετατροπή γίνεται αμέσως απ' το ένα σύστημα στο άλλο χωρίς τη μεσολάβηση του δεκαδικού ως εξής:
Κατασκευάζουμε ένα πίνακα αντιστοιχίας, όπου οι αριθμοί στο σύστημα με βάση β έχουν p ψηφία (αν έχουν λιγότερα συμπληρώνουμε με 0 στην αρχή).
i) Αν θέλουμε απ' τον x_β να μεταβούμε στον y_B, χωρίζουμε τον αριθμό σε ομάδες p ψηφίων αρχίζοντας απ' την υποδιαστολή και προς τα δεξιά καθώς και προς τα αριστερά. Αν οι ακραίες ομάδες έχουν λιγότερα από p ψηφία, τις συμπληρώνουμε με 0 στην αρχή για την αριστερή ομάδα και στο τέλος για τη δεξιά.

Εφαρμογή

Ο αριθμός $(111001101,10110)_2$ να μετατραπεί στο οκταδικό σύστημα.
Εδώ είναι $B=8$, $\beta=2$, $8=2^3$ άρα $p=3$

Έχουμε τον πίνακα

$\beta=2$	000	001	010	011	100	101	110	111
$B=8$	0	1	2	3	4	5	6	7

Χωρίζοντας τον αριθμό σε ομάδες τριών ψηφίων, συμπληρώνοντας δύο μηδενικά στην αρχή και ένα στο τέλος έχουμε

$$\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5},\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{100}_{4} \quad \text{δηλ.}$$

$$(1111001101,1011)_2 = (1715,54)_8$$

ii) Αν θέλουμε απ' τον y_B να πάμε στον x_β, χρησιμοποιώντας πάλι τον πίνακα, γράφουμε κάθε ψηφίο του οκταδικού με το αντίστοιχό του στο δυαδικό με τρία πάντα ψηφία.

Π.χ. ο $(35,2)_8$ μετατρέπεται στο δυαδικό ως εξής:

$$\overbrace{011}^{3}\ \overbrace{101}^{5},\ \overbrace{010}^{2} \quad \text{δηλ.}$$

$$\therefore (35,2)_8 = (11101,01)_2$$

Ασκήσεις

1) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις στο δυαδικό σύστημα

α) $(1001101)_2 + (1010001)_2$

β) $(111100)_2 - (101101)_2$

γ) $(100101)_2 \times (11001)_2$

δ) $(1011011)_2 : (101)_2$

2) Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις στο οκταδικό σύστημα

α) $(2,6152)_8 + (4,3241)_8 + (6,4322)_8 - (4,1243)_8$

β) $[(423,2)_8 + (242,3)_8] \times (2,41)_8$

γ) $(464)_8 : (115)_8$

3) Να μετατραπούν οι παρακάτω αριθμοί σε δεκαδικούς:

α) $(101011101,110011)_2$

β) $(3521,24)_6$

γ) $(1243,36)_{12}$

4) Να μετατραπούν οι παρακάτω αριθμοί σε δυαδικούς:

α) $(54,32)_8$

β) $(421,32)_5$

γ) $(A8,C)_{16}$

5) Να γίνουν οι παρακάτω μετατροπές στα αντίστοιχα συστήματα:

α) $(832,36)_{10}$ → οκταδικό

β) $(75,064)_8$ → δεκαδικό

γ) $(1734,346)_8$ → δωδεκαδικό

δ) $(8472,64)_9$ → τριαδικό

2. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ

2.1. Γενικά

Όπως έχουμε αναφέρει, κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται μόνο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων· και αν έχουμε ένα μέσο επεξεργασίας αριθμών π.χ. ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή, τότε κάθε αριθμός που υπεισέρχεται σ' ένα αριθμητικό υπολογισμό είτε ως δεδομένο, είτε ως αποτέλεσμα μιας πράξης, πρέπει να προσεγγιστεί μ' έναν αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. (Ο μεγαλύτερος αριθμός ψηφίων αποτελεί και τη σταθερή κάθε υπολογιστή).

Άμεση συνέπεια της προσέγγισης αυτής είναι το καλούμενο σ φ ά λ μ α σ τ ρ ο γ γ ύ λ ε υ σ η ς. Κατά τη στρογγύλευση του αριθμού, βασική επιδίωξη είναι η ελαχιστοποίηση του σφάλματος στρογγύλευσης. Μια συνηθισμένη μέθοδος στρογγύλευσης ενός αριθμού που δίνεται με δεκαδική (αντίστοιχα δυαδική) μορφή είναι η εξής. Απορρίπτουμε τα ψηφία που περισσεύουν, αν το πρώτο απ' αυτά είναι το 0,1,2,3,4 για το δεκαδικό (αντίστοιχα το 0 για το δυαδικό) σύστημα, ή αυξάνουμε το τελευταίο ψηφίο πριν την αποκοπή για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις και στα δύο συστήματα. Π.χ. αν ο δεκαδικός αριθμός 681,745 στρογγυλευθεί σε 3 ή 4 ή 5 ψηφία με την παραπάνω μέθοδο γίνεται αντίστοιχα 682 ή 681,7 ή 681,75.

Σ' ένα υπολογισμό συναντούμε τα παρακάτω είδη σφαλμάτων:

α) Σφάλμα στρογγύλευσης, όπως αναφέρθηκε παραπάνω β) Σφάλμα που προέρχεται απ' τη φύση της χρησιμοποιούμενης μεθόδου. Π.χ. κατά τον υπολογισμό της τιμής μιας σειράς, αντικαθιστούμε αυτή μ' ένα μερικό άθροισμά της

γ) Σφάλμα από αμέλεια

δ) Σφάλμα που υπάρχει στα δεδομένα.

Η ανάγκη χρησιμοποίησης αριθμών με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων έχει σαν άμεση συνέπεια, να μην ισχύουν πάντοτε οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών π.χ. η αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική κ.λ.π. Έτσι η εκτέλεση των πράξεων για την επίλυση ενός αριθμητικού προβλήματος, μπορεί να επηρεάσει σημαντικά το αποτέλεσμα όπως φαίνεται στο παρακάτω

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα

$$0,62243x + 0,51824y = 0,70524 \qquad (1)$$

$$0,71497x + 0,59496y = 0,80996 \qquad (2)$$

εφαρμόζοντας αριθμητική 5 σημαντικών θέσεων.

Λύση. Απ' την (1) διαιρώντας με το συντελεστή του x προκύπτει $x + 0,83261y = 1,1330 \qquad (3)$

Αντικαθιστώντας απ' τη σχέση αυτή το x στη (2) προκύπτει $-0,00033y = -0,00010$ ή

$$y = 0,30303 \quad \text{και απ' την (3)}$$

$$x = 0,88069$$

Αν τώρα διαιρέσουμε τη (2) με το συντελεστή του y προκύπτει $y = -1,2017x + 1,3614 \qquad (4)$

Αντικαθιστώντας το y στην (1) παίρνουμε

$$-0,00034x = -0,00029 \quad \text{ή}$$

$$x = 0,85294 \quad \text{και απ' την (4)}$$

$$y = 0,33642$$

Οι λύσεις $x = 0,88069$, $y = 0,30303$ και
$x = 0,85294$, $y = 0,33642$
διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους αλλά και από την ακριβή λύση πού είναι $x = 0,8$, $y = 0,4$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι δεν πρέπει να εκπλαγεί κανείς αν χρησιμοποιώντας τον ίδιο υπολογιστή και μαθηματικά ισοδύναμες μεθόδους καταλήξει σε διαφορετικά αποτελέσματα. Τέτοια σφάλματα μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές μεταβολές στα αποτελέσματα κυρίως σε επιστημονικο-τεχνικές εφαρμογές, που έχουμε συνήθως τεράστιο πλήθος πράξεων. Γι' αυτό η ανάλυση και συστηματική μελέτη του σφάλματος στρογγύλευσης αποτελεί ιδιαίτερο και πολύ ενδιαφέρον πεδίο της Αριθμητικής Ανάλυσης. Η προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος με παράλληλη εύρεση, εκτός της προσεγγιστικής λύσης (μέσω του υπολογιστή) και ενός διαστήματος που να περιέχει με σιγουριά τη λύση του προβλήματος, είχε σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη και θεμελίωση μιας αριθμητικής διαστημάτων που χρησιμοποιεί αντί για αριθμούς διαστήματα.

2.2. Αριθμητική ενός υπολογιστή

Για την παράσταση ενος αριθμού σ' ένα υπολογιστή χρειαζόμαστε τα εξής στοιχεία.

α) τα ψηφία του
β) το πρόσημό του
γ) τη θέση της υποδιαστολής

Ένα μέρος της λέξης (πλήθος διαθέσιμων στοιχείων) του υπολογιστή χρησιμοποιείται για την τοποθέτηση του αριθμού. Ο αριθμός μετατρέπεται σε δυαδικό και τοποθετείται στις κατάλληλες θέσεις της λέξης. Οπότε, αν το πλήθος των ψηφίων του αριθμού είναι μεγαλύτερο απ' τον αριθμό των θέσεων, τότε στρογγυλεύεται ο αριθμός, αφού απορριφθούν ορισμένα στοιχεία του. Αν το πλήθος των ψηφίων όμως είναι μικρότερο απ' τον αριθμό των θέσεων, τότε προστίθενται μηδενικά στις αριστερές θέσεις (τις αντίστοιχες για την τοποθέτησή του). Για το πρόσημο αρκεί μόνο μια θέση και μάλιστα 0 για το (+) και 1 για το (−)

Για την περίπτωση της υποδιαστολής διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Σταθερή υποδιαστολή (fixed point)

Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι η υποδιαστολή βρίσκεται πάντα σε μια ορισμένη θέση της λέξης. Επειδή για ένα συγκεκριμένο υπολογιστή η θέση αυτή είναι σταθερή, η πληροφορία της θέσης της υποδιαστολής είναι περιττή. Συνήθως η θέση της υποδιαστολής είναι στο αριστερό άκρο, οπότε όλοι οι αριθμοί είναι κλασματικοί, απολύτως μικρότεροι του 1, ή στο δεξιό άκρο, οπότε όλοι οι αριθμοί είναι ακέραιοι. Λόγω του ότι ο αριθμός των λέξεων είναι περιορισμένος, περιορίζεται και η περιοχή των αριθμών που μπορούμε να παραστήσουμε στον υπολογιστή. Οι δυσκολίες αυτές αντιμετωπίζονται συνήθως με χρησιμοποίηση κατάλληλων μετασχηματισμών (scaling) έτσι ώστε όλα τα δεδομένα, τα ενδιάμεσα και τα τελικά αποτελέσματα, να βρίσκονται στην περιοχή των αριθμών της μηχανής.—

2) Κινητή υποδιαστολή (floating point)

Για επιστημονικο-τεχνικά προβλήματα όπου οι αριθμοί μεταβάλλονται σε ευρύτερα πεδία, η παράσταση με σταθερή υποδιαστολή περιορίζει την ακρίβεια και κάνει δύσκολο τον προγραμματισμό. Γιαυτό χρησιμοποιούμε παράσταση των αριθμών με κινητή υποδιαστολή. Έτσι ορίζουμε σαν κ α ν ο ν ι κ ο π ο ί η σ η ενός αριθμού τη μετακίνηση της υποδιαστολής προς τα αριστερά ή δεξιά αντίστοιχα μέχρι το πρώτο σημαντικό ψηφίο (πολλές φορές η υποδιαστολή πάει αμέσως μετά το πρώτο σημαντικό ψηφίο).

Η μετακίνηση αυτή συνδέεται με πολλαπλασιασμό της μορφής $B^{\pm e}$ όπου B η βάση του συστήματος, + για μετακίνηση προς τα αριστερά, − για μετακίνηση προς τα δεξιά και e ο αριθμός των θέσεων της μετακίνησης της υποδιαστολής. Π.χ. οι αριθμοί 0,003641 και −2547 στο δεκαδικό κανονικοποιούνται στους αριθμούς $0{,}3641 \cdot 10^{-2}$ και $-0{,}2547 \cdot 10^{4}$ αντίστοιχα.

Έτσι ένας αριθμός α που παριστάνεται με κινητή υποδιαστολή δίδεται στη μορφή

$$a = \pm m \cdot B^{e}$$

Το m λέγεται m a n t i s s a, είναι μικρότερο του 1 και με κανονική μορφή. Το e λέγεται ε κ θ έ τ η ς, που για κάθε υπολογιστή είναι $|e| \leq E$ όπου E σταθερή του υπολογιστή. Κατά την παράσταση ενός αριθμού με σταθερή υποδιαστολή ο παράγοντας B^{e} δεν εμφανίζεται στον υπολογιστή. Για να εξοικονομήσουμε την πληροφορία του προσήμου προσθέτουμε στον εκθέτη τον αριθμό E, οπότε ο νέος εκθέτης ονομάζεται χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ή.

Η αριθμητική με κινητή υποδιαστολή παρέχει μεγαλύτερη άνεση, γιαυτό έχει επικρατήσει σ'όλους τους ηλεκτ. υπολογιστές.

2.3. Μετάδοση σφάλματος στις πράξεις

Κατ' αρχή ορίζουμε τις έννοιες του σχετικού και απόλυτου σφάλματος.

Απόλυτο σφάλμα ενός αριθμού x, είναι η απόλυτη διαφορά της πραγματικής τιμής του x (που υποτίθεται γνωστή) από μια δεδομένη προσεγγιστική τιμή αυτού την $\bar{x}$.
Η διαφορά $x-\bar{x}$ συμβολίζεται με ε_x δηλ. $x-\bar{x}=\varepsilon_x$
Σχετικό σφάλμα του x είναι το πηλίκο

$$\frac{|x-\bar{x}|}{|\bar{x}|} \quad \text{όπου} \quad \bar{x}\neq 0$$

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Αριθμητικής Ανάλυσης είναι ο έλεγχος του σφάλματος στους διάφορους αριθμητικούς υπολογισμούς. Θα αναζητήσουμε παρακάτω τύπους για τη μετάδοση του απόλυτου και σχετικού σφάλματος, για καθεμιά απ' τις τέσσερες βασικές πράξεις.

Πρόσθεση

Έστω x, y δύο αριθμοί με $\bar{x}, \bar{y}$ τις προσεγγίσεις αυτών. Τότε έχουμε

$$x+y = \bar{x}+\varepsilon_x+\bar{y}+\varepsilon_y = (\bar{x}+\bar{y})+(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Αν πάρουμε σαν προσέγγιση του αριθμού $x+y$ τον $\bar{x}+\bar{y}$, έχουμε

$$(x+y)-(\bar{x}+\bar{y}) = \varepsilon_x+\varepsilon_y \quad \text{οπότε βάσει του ορισμού}$$

$$|\varepsilon_{x+y}| = |\varepsilon_x+\varepsilon_y|$$

Αφαίρεση

Ανάλογα αν σκεφτούμε, προκύπτει

$$x - y = (\bar{x} + \varepsilon_x) - (\bar{y} + \varepsilon_y) = (\bar{x} - \bar{y}) + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \quad \text{ή}$$

$$(x - y) - (\bar{x} - \bar{y}) = \varepsilon_x - \varepsilon_y$$

Και αν πάρουμε πάλι σαν προσέγγιση του αριθμού $x - y$ τον $\bar{x} - \bar{y}$ δηλ. $(x - y) - (\bar{x} - \bar{y}) = \varepsilon_{x-y}$ προκύπτει

$$|\varepsilon_{x-y}| = |\varepsilon_x - \varepsilon_y|$$

Πολλαπλασιασμός.

Για το γινόμενο θα έχουμε

$$xy = (\bar{x} + \varepsilon_x)(\bar{y} + \varepsilon_y) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\varepsilon_y + \bar{y}\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι τα σφάλματα ε_x, ε_y είναι πολύ μικρά απολύτως, σε σχέση με τις προσεγγιστικές τιμές τους $\bar{x}$ και $\bar{y}$, τότε μπορούμε να παραλείψουμε το γινόμενο $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y$ οπότε θα έχουμε

$$xy \simeq \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\varepsilon_y + \bar{y}\varepsilon_x$$

οπότε θέτοντας $xy - \bar{x}\cdot\bar{y} = \varepsilon_{xy}$ προκύπτει

$$|\varepsilon_{xy}| \simeq |\bar{x}\varepsilon_y + \bar{y}\varepsilon_x|$$

Διαίρεση

Έχουμε πάλι $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\bar{x} + \varepsilon_x}{\bar{y} + \varepsilon_y}$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το δεύτερο μέλος με $\bar{y}$

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + \varepsilon_x}{\bar{y}} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{y} + \varepsilon_y} = \frac{\bar{x} + \varepsilon_x}{\bar{y}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}} =$$

$$= \frac{\bar{x} + \varepsilon_x}{\bar{y}} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right)}$$

Υπό τον όρο ότι $\left|\dfrac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right| < 1$ (που ισχύει πάντα), ο όρος $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right)}$ είναι το άθροισμα απείρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

$$1+\left(-\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right)+\left(-\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right)^2+\left(-\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right)^3+\cdots$$

με πρώτο όρο τον 1 και λόγο $\omega = -\dfrac{\varepsilon_y}{\bar{y}}$. Άρα

$$\frac{x}{y}=\frac{\bar{x}+\varepsilon_x}{\bar{y}}\left[1-\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}+\left(\frac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right)^2-\cdots\right]$$

Υποθέτοντας ότι τα ε_x, ε_y είναι πολύ μικρά σε σχέση με το $\bar{y}$ μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους δεύτερης τάξης και πάνω, οπότε προκύπτει

$$\frac{x}{y}\simeq\frac{\bar{x}}{\bar{y}}+\frac{\varepsilon_x}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}\cdot\varepsilon_y$$

Επομένως αν πάρουμε σαν προσεγγιστική τιμή του $\dfrac{x}{y}$ το $\dfrac{\bar{x}}{\bar{y}}$, βρίσκουμε

$$\left|\varepsilon_{x/y}\right|\simeq\left|\frac{\bar{y}\cdot\varepsilon_x-\bar{x}\cdot\varepsilon_y}{\bar{y}^2}\right| .$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων και τον ορισμό του σχετικού σφάλματος βρίσκουμε ανάλογους τύπους για το σχετικό σφάλμα, για καθεμιά απ' τις τέσσερες πράξεις (διαιρώντας κάθε φορά με την εκάστοτε προσέγγιση)

Για την πρόσθεση: $\left|\dfrac{\varepsilon_{x+y}}{\bar{x}+\bar{y}}\right|=\left|\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}\cdot\dfrac{\varepsilon_x}{\bar{x}}+\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}\cdot\dfrac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right|$

Για την αφαίρεση: $\left|\dfrac{\varepsilon_{x-y}}{\bar{x}-\bar{y}}\right|=\left|\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}}\cdot\dfrac{\varepsilon_x}{\bar{x}}-\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}\cdot\dfrac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right|$

Για τον πολλαπλασιασμό: $\left|\dfrac{\varepsilon_{xy}}{\bar{x}\cdot\bar{y}}\right|\simeq\left|\dfrac{\varepsilon_x}{\bar{x}}+\dfrac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right|$

Για τη διαίρεση: $\left|\dfrac{\varepsilon_{x/y}}{\bar{x}/\bar{y}}\right|\simeq\left|\dfrac{\varepsilon_x}{\bar{x}}-\dfrac{\varepsilon_y}{\bar{y}}\right|$

2.4. Αριθμητική διαστημάτων

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, βάζοντας σα στόχο όχι μόνο την εύρεση μιας προσεγγιστικής τιμής της λύσης, αλλά και την εύρεση ενός διαστήματος που να περιέχει με σιγουριά τη λύση του προβλήματος οδηγούμαστε σε μια αριθμητική διαστημάτων που χρησιμοποιεί αντί για αριθμούς διαστήματα, όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου 2.

Για να ορίσουμε πράξεις διαστημάτων, περιοριζόμαστε σε διαστήματα πραγματικών αριθμών.

Έστω $\mathbb{I}(\mathbb{R}) = \{ A / A = [\alpha_1, \alpha_2],\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha_1 \leq \alpha_2 \}$ το σύνολο όλων των κλειστών διαστημάτων A στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Αν $A = [\alpha_1, \alpha_2]$ και $B = [\beta_1, \beta_2] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ τότε ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις διαστημάτων.

1. $[\alpha_1, \alpha_2] + [\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2]$

2. $[\alpha_1, \alpha_2] - [\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1 - \beta_2,\ \alpha_2 - \beta_1]$

3. $[\alpha_1, \alpha_2] \cdot [\beta_1, \beta_2] = [\min(\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2),$
$, \max(\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2)]$

4. $[\alpha_1, \alpha_2] : [\beta_1, \beta_2] \doteq [\alpha_1, \alpha_2] \cdot \left[\frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\beta_1}\right]$

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτουν ορισμένες βασικές ιδιότητες στην αριθμητική των διαστημάτων.

1) Το σύνολο όλων των διαστημάτων $[\alpha, \alpha]$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

είναι ισοδύναμο με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

2) Για τις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ισχύουν η προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα. Δηλ.

$$A + (B+\Gamma) = (A+B) + \Gamma \qquad\qquad A\cdot(B\cdot\Gamma) = (A\cdot B)\cdot\Gamma$$
$$A+B = B+A \qquad \text{και} \qquad A\cdot B = B\cdot A$$

3) Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού είναι το διάστημα $[0,0]$. αντίστοιχα $[1,1]$.

4) Για κάθε διάστημα $A = [\alpha_1, \alpha_2] \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ υπάρχει αντίθετο ως προς την πρόσθεση ένα διάστημα $B = [\beta_1, \beta_2]$ τέτοιο ώστε $A + B = [0,0]$, τότε και μόνο όταν $\alpha_1 = \alpha_2$, οπότε θα είναι το διάστημα $B = [-\alpha_1, -\alpha_1]$.

5) Για κάθε διάστημα $A = [\alpha_1, \alpha_2]$ υπάρχει αντίστροφο ως προς τον πολ/μό ένα διάστημα $B = [\beta_1, \beta_2]$ τέτοιο ώστε $A\cdot B = [1,1]$, τότε και μόνο όταν $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$, οπότε θα είναι το διάστημα $B = [1/\alpha_1,\ 1/\alpha_1]$

6) Δεν ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα. Αντί αυτής όμως ισχύει η λεγόμενη ημιεπιμεριστική ιδιότητα. δηλ. $A\cdot(B+\Gamma) \subseteq A\cdot B + A\cdot\Gamma$

Βέβαια η εισαγωγή μιας αριθμητικής διαστημάτων δεν λύνει αυτόματα το πρόβλημα του ελέγχου του σφάλματος στρογγύλευσης κατά την επίλυση ενός προβλήματος με τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Θα πρέπει ο υπολογιστής να διαθέτει αντίστοιχη αριθμητική διαστημάτων, ώστε να μπορεί να εφαρμόσει στρογγύλευση ενός διαστήματος.

Η συστηματική ανάπτυξη της αριθμητικής των διαστημάτων συνέβαλε τελευταία πολύ αποτελεσματικά σ' όλους τους τομείς της Αριθμητικής Ανάλυσης. Έτσι ο έλεγχος του σφάλματος στρογγύλευσης έγινε πιο προσιτός.

2.5. Εφαρμογές στο κεφάλαιο 2

1) Να βρεθεί η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $x^2-20x+1=0$ με αριθμητική τριών ψηφίων.

Λύση

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{99}$.
Η μικρότερη, με αριθμητική τριών ψηφίων είναι
$10-\sqrt{99} \simeq 10{,}0 - 09{,}9 = 00{,}1$.
Βλέπουμε ότι η ακρίβεια των τριών ψηφίων χάθηκε. Αυτό συμβαίνει συχνά όταν αφαιρούμε περίπου ίσους αριθμούς.

2) Να υπολογισθεί η ίδια ρίζα της προηγούμενης εφαρμογής πάλι με αριθμητική τριών ψηφίων, απ' τη σχέση: $10-\sqrt{99} = 1/(10+\sqrt{99})$

Λύση

Είναι $10+\sqrt{99} \simeq 10{,}0+09{,}9 = 19{,}9$ οπότε

$$10-\sqrt{99} = \frac{1{,}00}{19{,}9} \simeq 0{,}0503$$

Οι περισσότερες σύγχρονες μηχανές τοποθετούν, αν χρειάζεται, μηδενικά στην αρχή μετά από πολ/μούς και διαιρέσεις, διατηρώντας σταθερό το πλήθος των ψηφίων (εδώ τρία). Γενικά αυτό δεν συμβαίνει στην πρόσθεση

Η σχετική θεωρία στα ριζικά μας πρόσφερε ένα διαφορετικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της ρίζας. Αν αναλύσουμε το σφάλμα, βλέπουμε ότι το νέο αποτέλεσμα έχει τρία τουλάχιστο δεκαδικά ψηφία σωστά. Άρα ο νέος αλγόριθμος είναι καλύτερος απ' τον προηγούμενο.

3) Αν οι αριθμοί $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_\nu$ είναι προσεγγίσεις των αριθμών $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ και αν σε κάθε περίπτωση

το μέγιστο δυνατό σφάλμα είναι ε, δείξτε ότι το μέγιστο δυνατό σφάλμα στο άθροισμα $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_\nu$ είναι $\nu\varepsilon$.

Λύση

Επειδή το μέγιστο δυνατό σφάλμα είναι ε έχουμε

$|x_i-\bar{x}_i|\leq\varepsilon \iff \bar{x}_i-\varepsilon\leq x_i\leq\bar{x}_i+\varepsilon$ οπότε αθροίζοντας κατά μέλη: $\Sigma\bar{x}_i-\nu\varepsilon\leq\Sigma x_i\leq\Sigma\bar{x}_i+\nu\varepsilon$ ή

$-\nu\varepsilon\leq\Sigma x_i-\Sigma\bar{x}_i\leq\nu\varepsilon$ δηλ $\left|\Sigma x_i-\Sigma\bar{x}_i\right|\leq\nu\varepsilon$ δηλ

$\left|(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)-(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_\nu)\right|\leq\nu\varepsilon.$

4) Στη Στατιστική αποδεικνύεται ότι, αν Ν αριθμοί προστίθενται, το "πιθανό σφάλμα" ισούται με $\sqrt{N}\,E$ όπου Ε είναι το μέγιστο δυνατό σφάλμα για καθένα απ' τους αριθμούς. Να βρεθεί το "πιθανό σφάλμα" για το άθροισμα

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}.$$

Λύση

Παίρνοντας από ένα πίνακα όλους τους αριθμούς που είναι ρίζες των $1,2,\cdots,100$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων π.χ. 1,00, 1,41, 1,73, 2,00 κ.τ.λ και προσθέτοντάς τους βρίσκουμε άθροισμα 671,27. Προφανώς ο υπολογισμός αυτός απαιτεί αριθμητική πέντε ψηφίων.

Εδώ έχουμε $N=100$ και $E=0{,}005$ εφόσον έχουμε ακρίβεια 2 ψηφίων. Επομένως το πιθανό σφάλμα είναι

$$\sqrt{N}\,E=10\cdot 0{,}005=0{,}05$$

Επειδή έγιναν 100 στρογγυλεύσεις, το αποτέλεσμα είναι πολύ αβέβαιο. Απέχει πολύ από ένα υπολογισμό με ακρίβεια 5 δεκ ψηφίων που είναι 671,36385.

5) Αν η προσέγγιση ενός αριθμού x είναι 3,32 και ενός άλλου y είναι 5,39, υπολογίστε τις προσεγγίσεις των

$x+y$, $x+0{,}1y$, $x+0{,}01y$ με "πρόσθεση τριών ψηφίων.

Λύση

Εδώ έχουμε πάλι υπολογιστικό πρόβλημα, που δείχνει την παρουσία σφάλματος. Είναι

$$\begin{array}{r} 3{,}32 \\ 5{,}39 \\ \hline x+y \simeq 8{,}71 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}32 \\ 0{,}54 \\ \hline x+0{,}1y \simeq 3{,}86 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}32 \\ 0{,}05 \\ \hline x+0{,}01y \simeq 3{,}37 \end{array}$$

Σ' όλους τους αριθμούς κρατήσαμε τρία ψηφία, στρογγυλεύοντας τον αριθμό, όπου είναι απαραίτητο, ή προσθέτοντας μηδενικά στην αρχή. Όπως έχουμε αναφέρει, οι μηχανές κρατούν και κάνουν πράξεις με ένα ορισμένο πλήθος ψηφίων, συνήθως έξι ή περισσότερα

6) Δείξτε ότι, αν $x-\bar{x}=\varepsilon$, όπου x η αληθής τιμή ενός αριθμού, $\bar{x}$ η προσεγγιστική τιμή του, τότε θα είναι

$$\sqrt{x}-\sqrt{\bar{x}} \simeq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}}$$

Λύση

Απ τη διαφορά $x-\bar{x}=\varepsilon$ προκύπτει

$$x-\bar{x}=(\sqrt{x}-\sqrt{\bar{x}})(\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}})=\varepsilon \quad \text{ή}$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{\bar{x}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}+\sqrt{\bar{x}}} \simeq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}}$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων

α) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, β) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, γ) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, δ) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

με ακρίβεια τεσσάρων σημαντικών ψηφίων.

2) Θεωρούμε το σύστημα

$$x + 5{,}0y = 17{,}0$$
$$1{,}5x + 7{,}501\,y = 25{,}503$$

του οποίου η ακριβής λύση είναι $x = 2$, $y = 3$.
Δίνουμε στο συντελεστή 25,503 μια αλλαγή κατά $-0{,}004$. Βρείτε τη λύση του νέου συστήματος, λύνοντας πρώτα ως προς x και μετά ως προς y, χρησιμοποιώντας αριθμητική 6 σημαντικών ψηφίων.

3) Δίδονται οι αριθμοί

$$a_1 = 0{,}2897 \cdot 10^0 \qquad a_6 = 0{,}6249 \cdot 10^2$$
$$a_2 = 0{,}4976 \cdot 10^0 \qquad a_7 = 0{,}2162 \cdot 10^3$$
$$a_3 = 0{,}2488 \cdot 10^1 \qquad a_8 = 0{,}5233 \cdot 10^3$$
$$a_4 = 0{,}7259 \cdot 10^1 \qquad a_9 = 0{,}1403 \cdot 10^4$$
$$a_5 = 0{,}1638 \cdot 10^2 \qquad a_{10} = 0{,}5291 \cdot 10^4$$

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

α) $\left(\cdots\left(\left(a_1 + a_2\right) + a_3\right) + a_4 \cdots\right) + a_{10}$

β) $\left(\cdots\left(\left(a_{10} + a_9\right) + a_8\right) + a_7 \cdots\right) + a_1$

χρησιμοποιώντας αριθμητική 4 σημαντικών θέσεων κινητής υποδιαστολής. Επίσης βρείτε το αποτέλεσμα με αριθμητική 8 σημαντικών θέσεων. Ποιό είναι το απόλυτο σφάλμα καί στις δύο περιπτώσεις;

4) Δίνονται οι ισοδύναμες παραστάσεις

α) $\left(0{,}23371258 \cdot 10^{-4} + 0{,}33678429 \cdot 10^2\right) - 0{,}33677811 \cdot 10^2$

β) $0{,}23371258 \cdot 10^{-4} + \left(0{,}33678429 \cdot 10^2 - 0{,}33677811 \cdot 10^2\right)$

Βρείτε τα αποτελέσματα με αριθμητική κινητής υποδιαστολής 8 σημαντικών ψηφίων και συγκρίνετέ τα μεταξύ τους.

3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

3.1. Γενικά

Η λύση των εξισώσεων αποτελεί ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο της Αριθμητικής Ανάλυσης. Πάρα πολλά θέματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών καταλήγουν στην αναζήτηση των μηδενικών σημείων, δηλ των ριζών μιας συνάρτησης. Εδώ θα ασχοληθούμε με την αριθμητική λύση μη γραμμικών εξισώσεων με ένα άγνωστο. Θεωρούμε μια μονότιμη πραγματική συνάρτηση $f(x)$ πραγματικής μεταβλητής x που ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Θα εξετάσουμε διάφορες μεθόδους για την αριθμητική εύρεση των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

3.2. Εύρεση προσεγγιστικών τιμών των ριζών

Για τον εντοπισμό των πραγματικών ριζών μιας εξίσωσης $f(x)=0$ χρειαζόμαστε γενικά να ξέρουμε προηγουμένως τις κατα προσέγγιση τιμές αυτών.

Αυτό επιτυγχάνεται συνήθως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων xoy, μπορούμε να έχουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Είναι προφανές ότι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x δίνουν τις ρίζες της συνάρτησης. Δεν είναι βέβαια αναγκαίο να πάρουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σ' όλο το πεδίο ορισμού της, παρά μόνο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ που ορίζεται. Απ τη θεωρία των πραγματικών συναρτήσεων συνήθως μπορούμε να έχουμε κριτήρια ενός πρώτου εντοπισμού των ριζών της συνάρτησης, όπως π.χ. από το επόμενο

Θεώρημα 3.2.1.

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), είναι τέτοια ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

Στη συνέχεια παίρνουμε μια κατά το δυνατό πιο αναλυτική γραφική παράσταση στην περιοχή των ριζών που αναζητούμε.

Πολλές φορές είναι σκόπιμο να διασπάσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ σε διαφορά δύο συναρτήσεων δηλ.

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

Τότε η εξίσωση $f(x)=0$ γίνεται

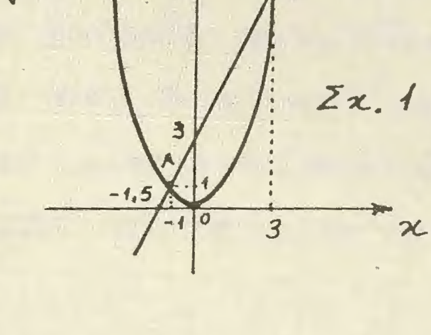
$$f_1(x)-f_2(x)=0 \quad ή \quad f_1(x)=f_2(x)$$

Παίρνουμε στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των δύο συναρτήσεων, δίνουν προφανώς τις ρίζες της $f(x)=0$

Παραδείγματα

1) Να βρεθούν γραφικά οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x-3=0$ στο διάστημα $(-4, 4)$.

Λύση



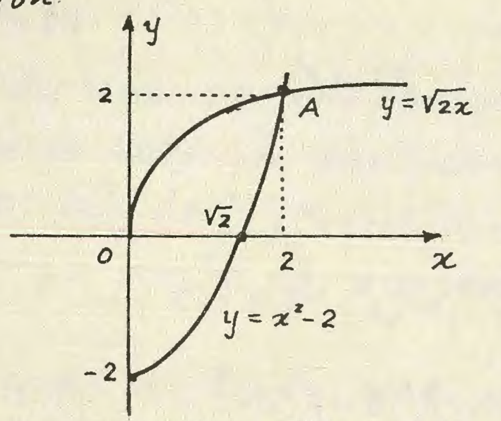
Σχ. 1

Αυτή γράφεται $x^2 = 2x+3$ Κατασκευάζουμε την παραβολή $y=x^2$ και την ευθεία $y=2x+3$. Αυτές τέμνονται στα σημεία $A(-1,1)$ και $B(3,9)$. Οι τετμημένες -1

και 3 των σημείων αυτών είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x-3=0$

2) Να βρεθούν γραφικά οι ρίζες της $x^2-\sqrt{2x}-2=0$ στο διάστημα $[0,+\infty)$

Λύση



Σχ. 2

Η εξίσωση γράφεται $x^2-2=\sqrt{2x}$ και αν εργαστούμε παρόμοια για τις δύο συναρτήσεις $y=x^2-2$ (παραβολή), $y=\sqrt{2x}$ (παραβολή) αντίστροφη της $y=\frac{1}{2}x^2$ άρα συμμετρική αυτής ως προς τη διχοτόμο $y=x$, θα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις αυτών που τέμνονται στο σημείο $A(2,2)$. Άρα η εξίσωση $x^2-\sqrt{2x}-2=0$ έχει μια ρίζα για $x=2$.

3.3. Επαναληπτικές μέθοδοι

Οι επαναληπτικές μέθοδοι έχουν τεράστια σημασία στην Αριθμητική Ανάλυση. Συναντώνται σε πολλούς τομείς των Καθαρών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, όπως συναρτησιακή Ανάλυση, διαφορικές και ολοκληρωτικές εξισώσεις κ.τ.λ. Όμως, πριν εξετάσουμε διάφορες επαναληπτικές μεθόδους, θα διατυπώσουμε μερικούς ορισμούς και θα αποδείξουμε βασικά θεωρήματα που θα μας χρησιμεύσουν στη κατανόηση των μεθόδων αυτών

Κατ' αρχάς το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ ορισμένων στο σύνολο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους μέχρι ν τάξης στο $\mathbb{R}$ θα το συμβολίζουμε με $C^{\nu}(\mathbb{R})$ ενώ με $C(\mathbb{R})$

θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.3.1.

Έστω συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ δηλαδή $f(x)\in C([\alpha,\beta])$ · και $\alpha \leq f(x) \leq \beta \ \ \forall x\in[\alpha,\beta]$. Τότε λέμε ότι η $f(x)$ έχει ένα σταθερό σημείο, δηλ υπάρχει σημείο $\xi\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-f(x)$. Παρατηρούμε ότι η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επιπλέον

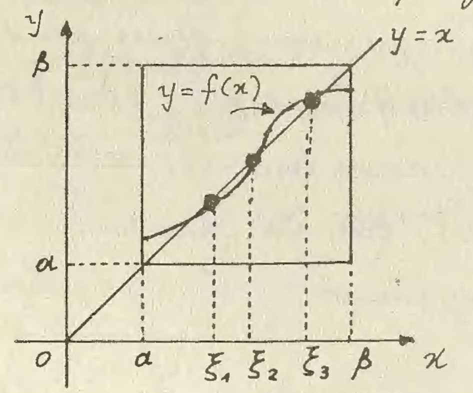
$g(\alpha)\cdot g(\beta)=[\alpha-f(\alpha)][\beta-f(\beta)]\leq 0$ διότι απ' τη σχέση $\alpha\leq f(x)\leq\beta$ προκύπτει

$$\alpha-f(\alpha)\leq 0$$
$$\beta-f(\beta)\geq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta].$$

δηλ ισχύει το θεώρημα 3.2.1. επομένως υπάρχει σημείο $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$ δηλ $\xi-f(\xi)=0$ άρα $f(\xi)=\xi$. (Σημειώνεται $\xi\in[\alpha,\beta]$ επειδή $g(\alpha)\cdot g(\beta)\leq 0$).

Παρατήρηση

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος φαίνεται εύκολα και απ τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, σύμφωνα με τα δεδομένα του θεωρήματος 3.3.1.



Σχ. 3

Ωστόσο δεν εξασφαλίζεται η μοναδικότητα αυτού του σημείου· δηλ μπορεί μ' αυτές τις προυποθέσεις να υπάρχουν και άλλα σημεία σταθερά. Το θεώρημα που ακολουθεί παρακάτω εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ακριβώς σταθερού σημείου.

Θεώρημα 3.3.2.

Έστω $f(x) \in C([\alpha,\beta])$ δηλ. η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, με $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ και επιπλέον υπάρχει η $f'(x)$ τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq L$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ όπου $0<L<1$. Τότε η $f(x)$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία τα ξ_1, ξ_2 με $\xi_1<\xi_2$. Τότε από το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_1)-f(\xi_2)=(\xi_1-\xi_2)f'(\xi)$$

Επειδή όμως τα ξ_1, ξ_2 είναι σταθερά σημεία, θα είναι

$$f(\xi_1)=\xi_1,\ f(\xi_2)=\xi_2 \ \text{άρα}\ f(\xi_1)-f(\xi_2)=\xi_1-\xi_2.\ \text{δηλ.}$$

$$\xi_1-\xi_2=(\xi_1-\xi_2)f'(\xi) \ \text{ή}\ f'(\xi)=1 \ \text{άτοπο}$$

γιατί $|f'(\xi)| \leq L<1$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$ δηλ. $|f'(\xi)|<1$

Το ίδιο θεώρημα ισχύει και με διαφορετικές υποθέσεις, αφού δώσουμε όμως τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ πληρεί τη **συνθήκη Lipschitz**, αν υπάρχει σταθερή M τέτοια ώστε $|f(x_1)-f(x_2)| < M|x_1-x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$.

Μια συνάρτηση που πληρεί τη συνθήκη Lipschitz είναι συνεχής. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Επομένως το θεώρημα 3.3.2 μπορεί τώρα να διατυπωθεί διαφορετικά ως εξής:

" Αν η $f(x)$ πληρεί στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τη συνθήκη Lipschitz με μια σταθερή $0<L<1$ δηλ. αν

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq L|x_1-x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [\alpha,\beta],$$

τότε έχει ένα ακριβώς σημείο σταθερό στο διάστημα $[\alpha,\beta]$".

Σημείωση:

Δεν χρειάζεται να τονισθεί ότι η $f(x)$ είναι συνεχής γιατί αφού πληρεί τη συνθήκη Lipschitz είναι συνεχής όπως ειπώθηκε παραπάνω.

Θεωρούμε τώρα για τη συνάρτηση $f(x)$ την παρακάτω επαναληπτική μέθοδο

$$x_{\nu+1} = f(x_\nu) \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots$$

όπου x_ν είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_\nu \in [\alpha, \beta]$.

Θα δείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.3.3.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοια ώστε $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$· επιπλέον δε η $f(x)$ πληρεί τη συνθήκη Lipschitz με μια σταθερά $L<1$ δηλ

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L\,|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [\alpha,\beta].$$

Τότε η επαναληπτική μέθοδος $x_{\nu+1} = f(x_\nu)$ (i) $\nu = 1, 2, \cdots$ ορίζει για $\forall x_0 \in [\alpha,\beta]$ μια ακολουθία x_ν, $\nu = 1, 2, \cdots$ τέτοια ώστε $x_\nu \in [\alpha,\beta]$, η οποία είναι συγκλίνουσα με όριο το μοναδικό σταθερό σημείο ξ της $f(x)$ δηλ $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi$.

Απόδειξη.

Επειδή η $f(x)$ πληρεί τη συνθήκη Lipschitz, έχει στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ένα και μοναδικό σημείο ξ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \xi$$

Απ' τη σχέση αυτή και τη (i) προκύπτει

$$x_{\nu+1} - \xi = f(x_\nu) - \xi$$

ή λόγω της συνθήκης Lipschitz

$$|x_{\nu+1} - \xi| = |f(x_\nu) - \xi| = |f(x_\nu) - f(\xi)| < L\,|x_\nu - \xi|$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τη σχέση αυτή για όλους τους όρους της ακολουθίας x_ν έχουμε

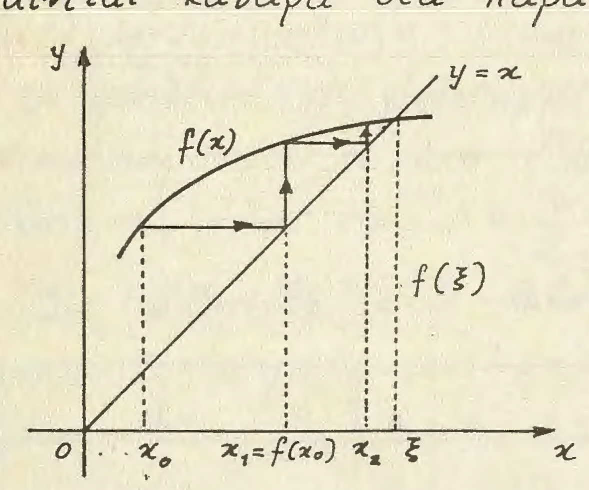
$$\nu+1 \text{ όροι } \left\{ \begin{array}{lcl} |x_{\nu+1}-\xi| & < & L\,|x_\nu-\xi| \\ |x_\nu-\xi| & < & L\,|x_{\nu-1}-\xi| \\ |x_{\nu-1}-\xi| & < & L\,|x_{\nu-2}-\xi| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |x_1-\xi| & < & L\,|x_0-\xi| \end{array} \right.$$

. Πολ/ζοντας κατά μέλη προκύπτει $|x_{\nu+1}-\xi| < L^{\nu+1}|x_0-\xi|$

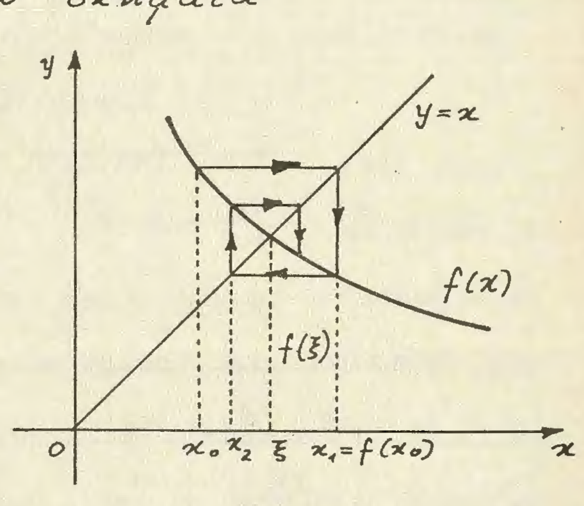
και επειδή $L<1$ προκύπτει $\lim\limits_{\nu\to\infty} L^{\nu+1}=0$

άρα και $\lim\limits_{\nu\to\infty}|x_{\nu+1}-\xi|=0$ δηλ. $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu=\xi$.

Ο μηχανισμός της επαναληπτικής μεθόδου $x_{\nu+1}=f(x_\nu)$ φαίνεται καθαρά στα παρακάτω σχήματα



Σχ 4



Σχ. 5

Στο σχήμα 4 η $f(x)$ είναι αύξουσα άρα $0<f'(x)<1$ ενώ στο σχήμα 5 η $f(x)$ είναι φθίνουσα άρα $-1<f'(x)<0$ έτσι ώστε και στις δύο περιπτώσεις να ισχύει $|f'(x)|<1$.

Αν σταματήσουμε την επαναληπτική μέθοδο μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων ν τότε θα είναι $x_\nu \neq \xi$. Θα βρούμε ένα απόλυτο φράγμα της διαφοράς $x_\nu-\xi$ όταν ξέρουμε δύο αρχικές τιμές τις x_0, x_1 συναρτήσει του ν υπό τον όρο ότι εργαζόμαστε χωρίς στρογγύλευση.

Απ' τη σχέση $|x_{\nu+1}-\xi| < L|x_\nu-\xi|$ θέτοντας διαδοχικά αντί ξ τα $x_\nu, x_{\nu-1}, \cdots, x_1, x_0$ έχουμε

$$|x_{\nu+1}-x_\nu| < L|x_\nu - x_{\nu-1}| < L^2|x_{\nu-1}-x_{\nu-2}| < \cdots < L^\nu|x_1-x_0| \quad (1)$$

Αν πάρουμε ένα φυσικό $\kappa>\nu$ προφανώς θα ισχύει η σχέση

$$x_\kappa - x_\nu = (x_\kappa - x_{\kappa-1}) + (x_{\kappa-1}-x_{\kappa-2}) + \cdots + (x_{\nu+1}-x_\nu)$$

Παίρνοντας τις απόλυτες τιμές και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad \text{έχουμε}$$

$$|x_\kappa - x_\nu| \leq |x_\kappa - x_{\kappa-1}| + |x_{\kappa-1}-x_{\kappa-2}| + \cdots + |x_{\nu-1}-x_\nu| \quad (2)$$

Απ την (1) θέτοντας διαδοχικά $\kappa, \kappa-1, \kappa-2, \cdots, \nu$ προκύπτει

$$|x_\kappa - x_{\kappa-1}| < L^{\kappa-1}|x_1-x_0|$$

$$|x_{\kappa-1}-x_{\kappa-2}| < L^{\kappa-2}|x_1-x_0| \quad \text{Προσθέτοντας κατά}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad \text{μέλη λόγω της (2)}$$

$$|x_{\nu+1}-x_\nu| < L^\nu|x_1-x_0|$$

$$|x_\kappa - x_\nu| < \left(L^{\kappa-1}+L^{\kappa-2}+\cdots+L^\nu\right)|x_1-x_0| \quad (3)$$

Το άθροισμα μέσα στην παρένθεση είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha = L^\nu$ και λόγο $\omega = L$ όπου $0<L<1$. Άρα απ' τον τύπο $\Sigma_\infty = \dfrac{\alpha}{1-\omega}$ που ισχύει για άπειρο πλήθος όρων (ενώ εδώ έχουμε πεπερασμένο) προκύπτει

$$L^\nu + L^{\nu+1} + \cdots + L^{\kappa-2} + L^{\kappa-1} < \frac{L^\nu}{1-L}$$

οπότε η (3) γράφεται

$$|x_\kappa - x_\nu| < \frac{L^\nu}{1-L}|x_1-x_0|$$

και όταν $\kappa \to \infty$

$$|x_\nu - \xi| < \frac{L^\nu}{1-L}|x_1-x_0|$$

που αποτελεί και το απόλυτο φράγμα της διαφοράς $x_\nu-\xi$.

Παράδειγμα

Βρείτε τα σταθερά σημεία της $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ στο $[0,+\infty)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι φθίνουσα και μονότονη συνάρτηση στο διάστημα $[0,+\infty)$ διότι η $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ είναι αρνητική σε κάθε σημείο $x \in [0,+\infty)$.

Έστω ένα διάστημα $I=[0,1]$. Τότε για κάθε $x \in [0,1]$

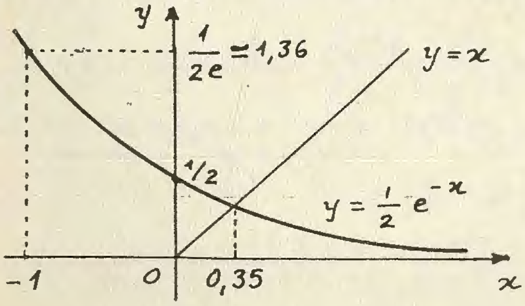
$f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$, $f(0) = \frac{1}{2}e^{-0} = \frac{1}{2}$ και λόγω του ότι είναι φθίνουσα και μονότονη, $f(x) \in \left[\frac{1}{2e}, \frac{1}{2}\right] \subseteq [0,1]$

Επιπλέον ισχύει $\left|f'(x)\right| = \left|-\frac{1}{2}e^{-x}\right| \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.2 έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο διάστημα $[0,1]$ το οποίο, επειδή η $f(x)$ είναι μονότονη σ' όλο το διάστημα $[0,+\infty)$, είναι και το μοναδικό στο διάστημα αυτό

Στον παρακάτω πίνακα δίδονται μερικές τιμές της ακολουθίας x_ν, όπου $x_{\nu+1} = \frac{1}{2}e^{-x_\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$ ξεκινώντας απ την τιμή $x_0 = 0{,}5 \in [0,1]$

ν	x_ν	ν	x_ν	ν	x_ν
0	0,500000	5	0,350978	10	0,351738
1	0,303265	6	0,351999	11	0,351732
2	0,369201	7	0,351640	12	0,351734
3	0,345643	8	0,351767	13	0,3517335
4	0,353882	9	0,351722	14	0,3517337



Σχ 6

Όπως φαίνεται απ τον πίνακα και τη γραφική παράσταση, η συνάρτηση $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ακολουθεί το παράδειγμα του σχήματος 5 δηλ. υπάρχουν αυξομειώσεις του x, όταν το ν μεγαλώνει.

3.4. Ταχύτητα σύγκλισης

Έστω η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ συγκλίνει στην τιμή ξ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει φυσικός κ τέτοιος ώστε

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{x_{\nu+1}-\xi}{(x_\nu-\xi)^\kappa} = \lambda \quad \text{όπου } \lambda \neq 0$$

$$\text{εγώ} \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{x_{\nu+1}-\xi}{(x_\nu-\xi)^p} = 0 \quad \forall p = 1,2,3,\cdots,\kappa-1.$$

1) Αν $\kappa=1$ και $|\lambda|<1$ η σύγκλιση λέγεται γ ρ α μ μ ι κ ή ή π ρ ώ τ η ς τ ά ξ η ς.

2) Αν $\kappa>1$ η σύγκλιση λέγεται κ - τ ά ξ η ς. Ειδικά για $\kappa=2$ λέγεται τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ή.

Αποδεικνύουμε τώρα τα επόμενα θεωρήματα σύγκλισης.

Θεώρημα 3.4.1.

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο σ' ένα διάστημα I πεπερασμένο ή άπειρο δηλ $f\in C^1(I)$. Επίσης η $f(x)$ έχει ένα σταθερό σημείο ξ στο εσωτερικό του I με $f'(\xi)=0$.

Τότε υπάρχει $\delta>0$, τέτοιος ώστε η επαναληπτική μέθοδος $x_{\nu+1}=f(x_\nu)$, $\nu=1,2,\cdots$ ορίζει μια ακολουθία x_ν που συγκλίνει στην τιμή ξ $\forall x_0\in I$ με $|x_0-\xi|<\delta$.

Απόδειξη

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, υπάρχει $\delta_0>0$ τέτοιος ώστε $[\xi-\delta_0, \xi+\delta_0]\subseteq I$.

Έστω $L>0$ με $0<L<1$. Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I, άρα και στο ξ, σημαίνει ότι υπάρχει $\delta>0$ με $\delta\leq\delta_0$ τέτοιο ώστε όταν $|x-\xi|<\delta$ (ή όταν $x\in[\xi-\delta, \xi+\delta]$) να προκύπτει ότι $|f'(x)-f'(\xi)|<L$ ή

$|f'(x)-0| < L$ γιατί $f'(\xi)=0$ (ορισμός συνέχειας συνάρτησης $f(x)$ σε σημείο της ξ).

Απ' την τελευταία σχέση $|f'(x)|<L$ για x πολύ κοντά στο ξ, αν η παράγωγος ληφθεί σαν πηλίκο διαφορών προκύπτει $|f(x)-f(\xi)|<L|x-\xi|<L\delta<\delta$ δηλ $f(x)\in[\xi-\delta, \xi+\delta]$ ή $\xi-\delta \leq f(x) \leq \xi+\delta$ όταν $|x-\xi|<\delta$.

Άρα πληρούνται όλες οι προυποθέσεις του θεωρήματος 3.3.3. στο διάστημα $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ επομένως υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$ και είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi$.

Πόρισμα 3.4.2.

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η $f(x)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\xi-\delta, \xi+\delta]$, δηλ $f(x)\in C^2([\xi-\delta, \xi+\delta])$ και $f''(x)\neq 0$ $\forall x\in[\xi-\delta, \xi+\delta]$ τότε $\forall x_0\in[\xi-\delta, \xi+\delta]$ με $x_0\neq\xi$ είναι $x_\nu\neq\xi$ και η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Απόδειξη

Απ' το θεώρημα του Taylor έχουμε

$$x_{\nu+1}-\xi = f(x_\nu)-f(\xi) = (x_\nu-\xi)f'(\xi)+\frac{(x_\nu-\xi)^2}{2}f''(\xi+\vartheta(x_\nu-\xi))$$

όπου $0<\vartheta<1$ και επειδή $f'(\xi)=0$ έχουμε

$$x_{\nu+1}-\xi = \frac{(x_\nu-\xi)^2}{2}f''(\xi+\vartheta(x_\nu-\xi))$$

και επειδή η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ δηλ $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi$, ο παράγοντας $\vartheta(x_\nu-\xi)$ μηδενίζεται, άρα

$$x_{\nu+1}-\xi = \frac{(x_\nu-\xi)^2}{2}f''(\xi), \text{ οπότε}$$

$$\lim \frac{x_{\nu+1}-\xi}{(x_\nu-\xi)^2} = \frac{1}{2}f''(\xi)\neq 0, \text{ άρα απ' τον}$$

ορισμό προκύπτει ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Όπως προκύπτει απ' τα προηγούμενα, η επαναληπτική μέθοδος $x_{\nu+1} = f(x_\nu)$ $\nu = 1, 2, \cdots$ ορίζει μια ακολουθία x_ν η οποία όταν για ένα αριθμό x_0 συγκλίνει τετραγωνικά στο ξ, τότε πρέπει να είναι $f'(\xi) = 0$.

Η υπόθεση αυτή δεν ισχύει γενικά. Θα εξετάσουμε παρακάτω μια άλλη επαναληπτική μέθοδο (τη μέθοδο των Newton - Raphson) όπου αν και $f'(\xi) \neq 0$, η αντίστοιχη ακολουθία x_ν συγκλίνει τετραγωνικά προς τη ρίζα της $f(x)$ την ξ.

3.5. Επαναληπτική μέθοδος Newton - Raphson

Αυτή στηρίζεται στο παρακάτω.

Θεώρημα 3.5.1.

Έστω συνάρτηση $f(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, δηλ. $f(x) \in C^2([\alpha,\beta])$. Αν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

1) $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ (δηλ. η $f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ εφόσον δεν θα υπάρχουν ακρότατα, τον αριθμό ξ με $f(\xi) = 0$)

2) η $f''(x)$ δεν αλλάζει σημείο στο $[\alpha, \beta]$ (δηλ. η $f(x)$ είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$)

3) $\left| \dfrac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} \right| \leq \beta - \alpha$ όπου γ είναι στοιχείο του συνόλου $\{\alpha, \beta\}$ με $|f'(\gamma)| = \min\{|f'(\alpha)|, |f'(\beta)|\}$, τότε η επαναληπτική μέθοδος των Newton-Raphson $x_{\nu+1} = x_\nu - \dfrac{f(x_\nu)}{f'(x)}$ $\nu = 1, 2, \cdots$ ορίζει μια ακολουθία x_ν, που συγκλίνει τετραγωνικά στη ρίζα ξ της $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για κάθε $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Μια εύκολη απόδειξη του θεωρήματος είναι η εξής:
Απ' τον τύπο του Taylor

$$f(\xi) = f(x_\nu) + (\xi - x_\nu) f'(x_\nu) + \frac{1}{2}(\xi - x_\nu)^2 f''(\zeta) \quad (1)$$

όπου $\xi < \zeta < x_\nu$, κρατάμε μόνο το γραμμικό μέρος και θέτουμε $f(\xi)=0$. Δεχόμαστε ότι η εξίσωση που μένει δίνει το $x_{\nu+1}$ αντί του ξ. Οπότε

$$0 = f(x_\nu) + (x_{\nu+1} - x_\nu) f'(x_\nu) \quad (2)$$

ή
$$\xi \simeq x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$$

Αφαιρώντας τώρα τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$0 = (\xi - x_{\nu+1}) f'(x_\nu) + \frac{1}{2}(\xi - x_\nu)^2 f''(\zeta)$$

ή θέτοντας $\varepsilon_{\nu+1} = \xi - x_{\nu+1}$, $\varepsilon_\nu = \xi - x_\nu$

$$0 = \varepsilon_{\nu+1} f'(x_\nu) + \frac{1}{2}\varepsilon_\nu^2 f''(\zeta)$$

Αν δεχθούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει και θέσουμε ξ αντί του x_ν και του ζ, έχουμε

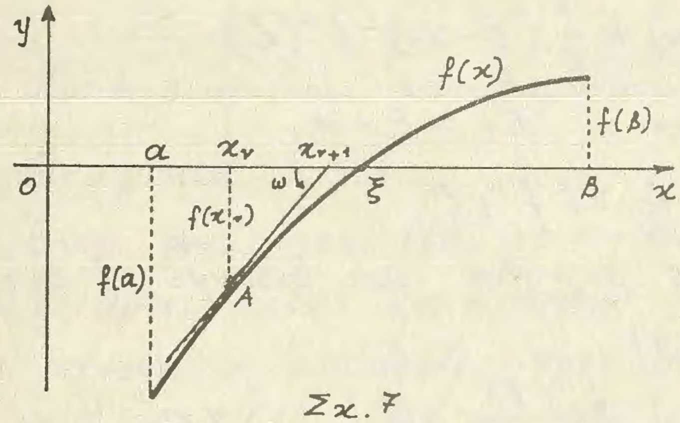
$$\varepsilon_{\nu+1} \simeq - \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \varepsilon_\nu^2 \quad (3)$$

δηλ. κάθε σφάλμα είναι ανάλογο προς το τετράγωνο του προηγούμενου σφάλματος, οπότε έχουμε δευτεροβάθμια σύγκλιση. Δηλ. αν το σφάλμα μιας προσέγγισης, είναι της τάξης του 0,0001, το επόμενο θα είναι της τάξης 0,00000001. Η μεγάλη ταχύτητα της μεθόδου των Newton-Raphson δείχνει ότι χρειάζεται μια λογική εκτίμηση της ρίζας για αρχική τιμή. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος αυτός δεν δίνει καλή προσέγγιση, όταν η αρχική τιμή βρίσκεται κοντά σε σημείο μεγίστου ή ελαχίστου της καμπύλης, όπως θα δούμε σε εφαρμογές του κεφαλαίου 4.

Παρακάτω θα ακολουθήσει μια αυστηρότερη απόδειξη.

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα αυτό, για να γίνει πιο καταληπτό, δίνουμε μια γεωμετρική του ερμηνεία παίρνοντας (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) την περίπτωση π.χ. όπου $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, οπότε η $f(x)$ θα είναι αύξουσα, άρα $f'(x)\geq 0$, $f''(x)\leq 0$ δηλ. η συνάρτηση $f(x)$ θα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και $\gamma=\beta$. Οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται σ' αυτή αν θέσουμε $-f(x)$ αντί $f(x)$ ή $-x$ αντί x.

Στο σχήμα 7 η συνάρτηση πληρεί τις παραπάνω περιπτώσεις. Από τυχαίο σημείο $x_\nu\in[\alpha,\beta]$, φέρουμε κάθετη στον οx που τέμνει την καμπύλη στο A. Στο σημείο αυτό φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης που τέμνει τον οx στο σημείο με τετμημένη $x_{\nu+1}$. Απ' το σχηματιζόμενο τρίγωνο προκύπτει $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{Ax_\nu}{x_\nu-x_{\nu+1}}$



Σχ. 7

Αλλά $\varepsilon\varphi\omega=f'(x_\nu)$ και $Ax_\nu=f(x_\nu)$ οπότε

$$f'(x_\nu)=\frac{f(x_\nu)}{x_\nu-x_{\nu+1}} \quad \text{ή} \quad x_{\nu+1}=x_\nu-\frac{f(x)}{f'(x)}$$ τύπος της επαναληπτικής μεθόδου.

Απόδειξη

Απ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού έχουμε: $0-f(x)=f(\xi)-f(x)=(\xi-x)f'(\zeta)$ (1)

όπου $x<\zeta<\xi$.

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω περιπτώσεις

α) $\alpha\leq x_0\leq\xi$. $(f(x_0)\leq 0)$

Επειδή $f(x_0)\leq 0$ και η $f(x)$ είναι αύξουσα δηλ $f'(x_0)>0$, προκύπτει ότι $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geqslant x_0$

δηλ. βρίσκουμε ότι $x_0 \leqslant \xi$, ενώ $x_1 \geqslant x_0$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 7. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$x_{\nu+1} \geqslant x_\nu \quad \text{και} \quad x_\nu \leqslant \xi \quad \nu = 1,2,\cdots \quad (2)$$

Για $\nu = 0$ όπως δείξαμε προηγουμένως ισχύουν.
Έστω ότι ισχύουν για $\nu = k$ δηλ. $x_{k+1} \geqslant x_k$ και $x_k \leqslant \xi$.
Θα δείξουμε ότι ισχύουν και για $\nu = k+1$ δηλ ότι

$$x_{k+2} \geqslant x_{k+1} \quad \text{και} \quad x_{k+1} \leqslant \xi.$$

Απ την ειδική περίπτωση που εξετάζουμε έχουμε
$f''(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$ άρα η $f'(x)$ είναι φθίνουσα ή σταθερή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε παίρνοντας το διάστημα
$x = x_k \leqslant \zeta \leqslant \xi$ προκύπτει $f'(\zeta) < f'(x_k)$
Απ τον τύπο (1) για $x = x_k$ προκύπτει.

$$0 - f(x_k) \leqslant (\xi - x_k) f'(x_k) \quad \text{και επειδή} \quad f'(x_k) > 0$$

$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \leqslant \xi - x_k \quad \text{και η} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{γίνεται}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \leqslant x_k + (\xi - x_k) = \xi$$

$$\text{δηλ} \quad x_{k+1} \leqslant \xi$$

Επειδή τώρα η $f(x)$ έχει στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ακριβώς μια ρίζα την ξ και επειδή $f(\alpha) < 0$ προκύπτει $f(x_{k+1}) \leqslant 0$

άρα $x_{k+2} = x_{k+1} - \dfrac{f(x_{k+1})}{f'(x_{k+1})} \geqslant x_{k+1}$

$$\text{δηλ} \quad x_{k+2} \geqslant x_{k+1}.$$

Αποδείξαμε επομένως ότι ισχύουν οι σχέσεις (2).
Απ τις σχέσεις αυτές προκύπτει αμέσως ότι υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$. Έστω δε ότι είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi_1$. Θα δείξουμε ότι $\xi = \xi_1$.

Παίρνοντας τα όρια όταν $\nu \to \infty$ και στα δύο μέλη του επαναληπτικού τύπου $x_{\nu+1} = x_\nu - \dfrac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$ έχουμε

$$\lim(x_{\nu+1}) = \lim(x_\nu) - \frac{\lim f(x_\nu)}{\lim f'(x_\nu)} \quad \text{ή}$$

$$\xi_1 = \xi_1 - \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)} \quad \text{Άρα θα πρέπει } f(\xi_1)=0$$

Επειδή όμως η $f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι $\xi_1 = \xi$.

β) $\xi < x_0 \leq \beta$ δηλ. $f(x_0) > 0$

Απ' τη σχέση (1) προκύπτει για $x = x_0$

$f(x_0) - f(\xi) = f(x_0) - 0 = (x_0 - \xi)f'(\zeta)$ όπου $\xi < \zeta < x_0$

και επειδή η $f'(x)$ είναι φθίνουσα δηλ. $f'(\zeta) > f'(x_0)$ είναι $(x_0 - \xi)f'(\zeta) \geq (x_0 - \xi)f'(x_0)$ οπότε η σχέση $f(x_0) = (x_0 - \xi)f'(\zeta)$ γράφεται

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0 - \xi \quad \text{ή} \quad -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq -(x_0 - \xi)$$

οπότε $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0 - (x_0 - \xi) = \xi$

$$\text{δηλ.} \quad x_1 \leq \xi \qquad (3)$$

Είναι τώρα $f(x_0) - f(\beta) = (x_0 - \beta)f'(\zeta_1)$, $x_0 \leq \zeta_1 \leq \beta$ και επειδή $f'(\beta) \leq f'(\zeta_1)$ διότι η $f'(x)$ είναι φθίνουσα ή σταθερή, ενώ $x_0 - \beta < 0$ προκύπτει

$$f(x_0) = f(\beta) + (x_0 - \beta)f'(\zeta_1) \leq f(\beta) + (x_0 - \beta)f'(\beta)$$

οπότε $\quad \dfrac{f(x_0)}{f'(\beta)} \leq \dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)} + x_0 - \beta$ ή $-\dfrac{f(x_0)}{f'(\beta)} \geq -\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)} + (\beta - x_0)$

άρα $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \geq x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(\beta)} \geq x_0 - \dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \beta - x_0$

Αλλά λόγω της συνθήκης $\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right| \leq \beta - \alpha$ $(\gamma = \beta)$ προκύπτει $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \leq \beta - \alpha$ ($f(\beta)$, $f'(\beta)$ είναι θετικά)

άρα $x_1 \geq x_0 - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \beta - x_0 \geq x_0 + (\alpha - \beta) + \beta - x_0 = \alpha$

διότι απ' την $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \leq \beta - \alpha$ συνεπάγεται $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \geq \alpha - \beta$.

συνεπώς $x_1 \geq \alpha$ (4)

Απ' τις σχέσεις (3) και (4) φαίνεται ότι, αν θέσουμε $x_0 = x_1$, επιστρέφουμε στην περίπτωση (α) που αποδείχτηκε.

Μένει τέλος να αποδείξουμε ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(οπότε η επαναληπτική μέθοδος μετατίθεται στην $x_{r+1} = g(x_r)$).

Αν δείξουμε ότι $g(\xi) = \xi$ και $g'(\xi) = 0$, τότε σύμφωνα με τα θεωρήματα 3.4.1. και 3.4.2. η σύγκλιση θα είναι τετραγωνική.

Είναι $g(\xi) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = \xi - \frac{0}{f'(\xi)} = \xi$ και

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad \text{οπότε}$$

$$g'(\xi) = 1 - \frac{[f'(\xi)]^2 - f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2} = 0 \quad \text{διότι } f(\xi) = 0.$$

Παρατήρηση

Στη μέθοδο των Newton-Raphson θεωρούμε τώρα την περίπτωση $f'(\xi) = 0$ και υποθέτουμε ότι για $x = \xi$ έχουμε

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(\kappa-1)}(\xi) = 0 \quad \text{ενώ } f^{(\kappa)}(\xi) \neq 0$$

όπου $\kappa \geq 2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{a\,f(x)}{f'(x)} \quad \text{με } x \neq \xi,\ a \neq 0$$

την οποία επεκτείνουμε στη θέση $x = \xi$ ορίζοντας σαν

$$g(x) = \begin{cases} x - \dfrac{a\,f(x)}{f'(x)} & \text{για } x \neq \xi,\ a \neq 0 \\ \xi & \text{"} \quad x = \xi \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει τιμή του a και είναι $a = k$ έτσι ώστε η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{\nu+1} = g(x_\nu)$$

να συγκλίνει τετραγωνικά στη ρίζα ξ της $f(x)$ για x_0 πολύ κοντά στο ξ.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 2$ ορισμένη στο διάστημα $[0,1]$ με $f(x) \in C^2([0,1])$.

Παρατηρούμε ότι:

1) $f(0)\cdot f(1) = 2\cdot(-3) = -6 < 0$ και $f'(x) = 2x - 6 \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.
2) $f''(x) = 2 \neq 0$ δεν αλλάζει σημείο στο $[0,1]$
3) $|f'(\gamma)| = \min\{|f'(0)|, |f'(1)|\} = \min\{6, 4\} = 4$

   δηλ. απ' την $|f'(1)| = 4$ προκύπτει ότι $\gamma = 1$, οπότε

   $$\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right| = \frac{3}{4} < 1 - 0 = 1.$$

Άρα πληρούνται οι συνθήκες του θεωρήματος 3.5.1. και επομένως η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} = x_\nu - \frac{x_\nu^2 - 6x_\nu + 2}{2x_\nu - 6} = \frac{x_\nu^2 - 2}{2x_\nu - 6}$$

ορίζει μια ακολουθία x_ν που συγκλίνει στη μοναδική ρίζα της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$.

Θέτοντας σαν αρχική τιμή $x_0 = 0,4$ έχουμε τις επόμενες τιμές.

$x_1 = 0,3538461538$ $x_2 = 0,3542486583$	$x_3 = 0,3542486889$ $x_4 = 0,3542486889$

3.6 Επαναληπτική μέθοδος regula-falsi

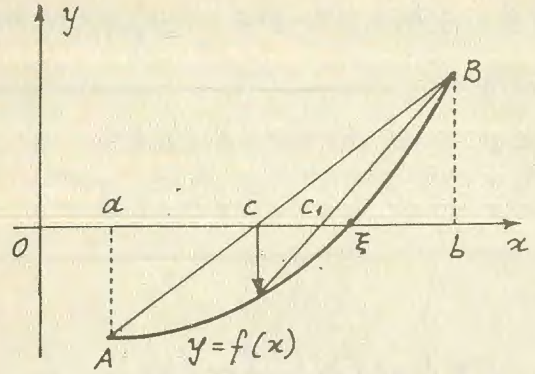
Για την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου των Newton - Raphson προϋποτίθεται ο υπολογισμός της παραγώγου της συνάρτησης. Αυτό μπορεί να προκαλέσει σε ορισμένες περιπτώσεις σημαντικές δυσκολίες. Για να παρακαμφθούν αυτές οι δυσκολίες βρέθηκαν άλλες μέθοδοι που έχουν σαν βασικό χαρακτηριστικό την αντικατάσταση της παραγώγου στη μέθοδο των Newton-Raphson με άλλες παραστάσεις. Μια απ' αυτές τις μεθόδους είναι και η μέθοδος r e g u l a f a l s i. Βασικά είναι ίδια με την προηγούμενη μόνο που αντικαθίσταται η παράγωγος $f'(x_\nu)$ με το πηλίκο διαφορών $\left(f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\right)/(x_\nu - x_{\nu-1})$, οπότε η επαναληπτική μέθοδος παίρνει τη μορφή:

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{(x_\nu - x_{\nu-1})\, f(x_\nu)}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}$$

Μια γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου regula falsi είναι η παρακάτω:

Θέτοντας σαν αρχικές τιμές όπου $x_1 = a$, $x_0 = b$, $x_2 = c$ αρκεί να δείξουμε τον τύπο: $c = a - \dfrac{(a-b)\, f(a)}{f(a) - f(b)}$ (1)

Η γραμμική συνάρτηση $y = f(a) + \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a)$ (2)



Σχ. 8

που είναι της μορφής:
$y = \mu + \lambda(x-\alpha)$, για $x = \alpha$ δίνει $y = f(\alpha) + \dfrac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha - b}(\alpha-\alpha) = f(\alpha)$ · ενώ για $x = b$ δίνει $y = f(\alpha) + \dfrac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha - b}(b-\alpha) = f(b)$. Δηλ. η ευθεία (2) και η καμπύλη $y=f(x)$ έχουν κοινά τα άκρα A και B.

Αρχική προϋπόθεση είναι ότι οι δύο αρχικές προσεγγίσεις α και b βρίσκονται αριστερά και δεξιά της ρίζας ξ της $f(x)$. Η ευθεία (2) μηδενίζεται για $x = c$ ($y=0$) δηλ.

$$0 = f(\alpha) + \frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha - b}(c-\alpha)$$ ή μετά τις πράξεις

$$0 = \alpha f(\alpha) - b f(\alpha) + \left(f(\alpha)-f(b)\right)c - \alpha f(\alpha) + \alpha f(b)$$ ή

$$c = \frac{b f(\alpha) - \alpha f(b)}{f(\alpha) - f(b)}$$ η οποία είναι ισοδύναμη με την (1).

Το c που βρήκαμε αντικαθιστά στο επόμενο βήμα το α ή b έτσι, ώστε πάλι να έχουμε αντίθετα πρόσημα (στο σχήμα 8 αντικαθιστά το α). Έτσι δημιουργείται η ακολουθία

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{(x_\nu - x_{\nu-1})\, f(x_\nu)}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}$$

με αρχικές τιμές τα $x_0 = \alpha$, $x_1 = b$.

Αποδεικνύεται ότι κι αυτή συγκλίνει στη μοναδική ρίζα ξ της $f(x)$ στο διάστημα [α,β]. Η ταχύτητα σύγκλισης αυτής υπολογίζεται ότι είναι ο αριθμός $m = (1+\sqrt{5})/2 \simeq 1{,}618$. Επομένως είναι κάπως βραδύτερη απ' τη μέθοδο των Newton-Raphson που συγκλίνει τετραγωνικά ($\kappa=2$). Έχει όμως το πλεονέκτημα ότι δεν κάνει χρήση παραγώγου.

3.7. Μέθοδος Δ^2 του Aitken

Ως γνωστό με την επαναληπτική μέθοδο $x_{\nu+1} = f(x_\nu)$, τα αποτελέσματα συγκλίνουν σε μια ρίζα ξ αν

$$|f'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Αν συμβολίσουμε με $\varepsilon_{\nu+1} = \xi - x_{\nu+1}$ το σφάλμα στην $\nu+1$ προσέγγιση, τότε απ' το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού προκύπτει

$$\varepsilon_{\nu+1} = \xi - x_{\nu+1} = f(\xi) - f(x_\nu) = (\xi - x_\nu) f'(\zeta)$$

όπου $\xi < \zeta < x_\nu$ ή $x_\nu < \zeta < \xi$. Και επειδή η $f'(x)$ υποτίθεται συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα είναι $f'(\xi) \simeq f'(\zeta)$. Άρα

$$\varepsilon_{\nu+1} = f'(\xi)\varepsilon_\nu. \quad (\text{θέσαμε } \varepsilon_\nu = \xi - x_\nu)$$

Δηλαδή κάθε βήμα μειώνει το σφάλμα κατά ένα ποσοστό $f'(\xi)$ περίπου, μια που $|f'(x)| < 1$ ή $-1 < f'(x) < 1$. Αν η $f'(\xi)$ δεν διαφέρει πολύ απ τη μονάδα, τότε έχουμε αργή σύγκλιση.

Η μέθοδος Δ^2 του Aitken μπορεί να χρησιμοποιηθεί, γενικά όταν ξέρουμε πώς συμπεριφέρεται το σφάλμα σ' ένα αλγόριθμο. Εδώ έχουμε $\varepsilon_{\nu+1} = f'(\xi)\varepsilon_\nu$. Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την $f'(\xi)$ έχουμε διαδοχικά

$$\xi - x_{\nu+1} = f'(\xi)(\xi - x_\nu)$$
$$\xi - x_{\nu+2} = f'(\xi)(\xi - x_{\nu+1})$$

και διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{\xi - x_{\nu+1}}{\xi - x_{\nu+2}} = \frac{\xi - x_\nu}{\xi - x_{\nu+1}} \quad \text{ή} \quad \xi = \frac{x_\nu \cdot x_{\nu+2} - x_{\nu+1}^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu}.$$ Για $\xi = x_{\nu+3}$

γίνεται $$x_{\nu+3} = x_{\nu+2} - \frac{(x_{\nu+2} - x_{\nu+1})^2}{x_{\nu+2} - 2x_{\nu+1} + x_\nu} = x_{\nu+2} - \frac{(\Delta x_{\nu+1})^2}{\Delta^2 x_\nu}.$$

Η συστηματική εφαρμογή της μεθόδου επέκτασης στο όριο μετά από κάθε τρείς επαναλήψεις, είναι η μέθοδος Steffensen.

3.8. Πεπερασμένες διαφορές

Με αφορμή τον τύπο του Aitken που υπολογίσαμε προηγούμενα, θα δώσουμε μια γενικότερη εξήγηση των συμβόλων $\Delta x_{\nu+1}$, $\Delta^2 x_\nu$ που συναντήσαμε, ορίζοντας τις πεπερασμένες διαφορές.

Έστω πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f(x)$ και $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ $\nu+1$ θέσεις ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους στο πεδίο ορισμού της έτσι, ώστε να ισαπέχουν μεταξύ τους, δηλ. η ποσότητα $x_{k+1}-x_k=h$ είναι σταθερή $\forall k=0,1,2,\cdots \nu-1$. Έστω ακόμα οι αντίστοιχες τιμές των x_k είναι y_k δηλ

$$y_k=f(x_k) \quad k=0,1,2,\cdots,\nu-1$$

Καλούμε ανιούσα διαφορά $1^{ης}$ τάξης της συνάρτησης $f(x)$ στη θέση x_k την ποσότητα

$$\Delta y_k = y_{k+1}-y_k$$

Το σύμβολο Δ καλείται τελεστής διαφοράς.

Την ανιούσα διαφορά των πρώτων διαφορών την ορίζουμε:

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k =$$
$$=(y_{k+2}-y_{k+1})-(y_{k+1}-y_k) = y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k.$$

Γενικά ορίζουμε αναγωγικά την ανιούσα διαφορά $n^{στής}$ τάξης με τον τύπο

$$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$$

Ο παρακάτω πίνακας διαφορών παρουσιάζει αυτές τις διαφορές διατεταγμένες. Κάθε στοιχείο του, (εκτός από τα στοιχεία x_k, y_k), είναι η διαφορά των δύο πλησιέστερων στοιχείων της προηγούμενης στήλης

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \Delta y_0 & & & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
 & & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
x_3 & y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \\
 & & \Delta y_3 & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}
$$

Κάθε διαφορά είναι ένας συνδυασμός των y_i της δεύτερης στήλης $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

π.χ. $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) =$

$= [(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)] - [(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)] =$

$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$.

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1) - $$
$$ - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

Γενικά το $\Delta^k y_0$ παρακολουθεί τους συντελεστές του διωνύμου του Νεύτωνα $(\alpha - \beta)^n$, ενώ ο δείκτης του y ξεκινάει από το k και καταλήγει στο 0. Ο γενικός τύπος είναι

$$\Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{k-i}$$

όπου $\binom{k}{i}$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής $\dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}$

Ανάλογα ορίζουμε αναγωγικά τις κατιούσες διαφορές n-οστής τάξης – και τις συμβολίζουμε με $\nabla^n y_k$ – που ορίζονται από τον τύπο

$$\nabla^n y_k = y_k - y_{k-1}$$

Αποδεικνύεται ότι $\nabla^n y_k = \Delta^n y_{k-n}$

Ιδιότητες των διαφορών.

1) Οι διαφορές μιας σταθερής συνάρτησης είναι 0. Δηλ.

$$\Delta C = 0.$$

Πράγματι· έστω $y_k = C \ \forall k$ τότε θα είναι

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = C - C = 0.$$

2) Οι διαφορές αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούνται με το άθροισμα των διαφορών δηλ.

$$\Delta(u_k + v_k) = \Delta u_k + \Delta v_k$$

Είναι $\Delta(u_k + v_k) = (u_{k+1} + v_{k+1}) - (u_k + v_k) =$

$$= (u_{k+1} - u_k) + (v_{k+1} - v_k) = \Delta u_k + \Delta v_k$$

3) Ισχύει $\Delta(C y_k) = C \Delta y_k$

Διότι $\Delta(C y_k) = C y_{k+1} - C y_k = C(y_{k+1} - y_k) = C \Delta y_k$

4) Αν $z_k = C_1 u_k + C_2 v_k$ τότε $\Delta z_k = C_1 \Delta u_k + C_2 \Delta v_k$

Είναι συνδιασμός των ιδιοτήτων 2 και 3.

5) Αν $z_k = u_k \cdot v_k$ τότε $\Delta z_k = u_k \Delta v_k + v_{k+1} \Delta u_k$

Έχουμε $\Delta z_k = u_{k+1} v_{k+1} - u_k v_k =$

$$= u_{k+1} v_{k+1} - u_k v_{k+1} + u_k v_{k+1} - u_k v_k =$$

$$= v_{k+1}(u_{k+1} - u_k) + u_k (v_{k+1} - v_k) =$$

$$= u_k \Delta v_k + v_{k+1} \Delta u_k$$

Επίσης $\Delta z_k = u_{k+1} \Delta v_k + v_k \Delta u_k$

Ανάλογα αποδεικνύονται και άλλες ιδιότητες όπως

6) $\Delta\left(u_\kappa / v_\kappa\right) = \left(v_\kappa \Delta u_\kappa - u_\kappa \Delta v_\kappa\right) / v_{\kappa+1} v_\kappa$

7) $\Delta\left(\log x_\kappa\right) = \log\left(1 + h/x_\kappa\right)$ όπου $x_\kappa = x_0 + \kappa h$

Παραδείγματα

1) Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση που όλες οι τιμές της είναι μηδέν εκτός από μια, που είναι ίση με 1, το "μοναδιαίο σφάλμα". Πώς αυτό το σφάλμα επηρεάζει τις διαφορές;

Λύση

Σχηματίζουμε τον πίνακα της "συνάρτησης σφάλματος".

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & & & \\
x_1 & 0 & & 0 & & \\
 & & 0 & & 0 & \\
x_2 & 0 & & 0 & & 1 \\
 & & 0 & & 1 & \\
x_3 & 0 & & 1 & & -4 \\
 & & 1 & & -3 & \\
x_4 & 1 & & -2 & & 6 \\
 & & -1 & & 3 & \\
x_5 & 0 & & 1 & & -4 \\
 & & 0 & & -1 & \\
x_6 & 0 & & 0 & & 1 \\
 & & 0 & & 0 & \\
x_7 & 0 & & 0 & & \Delta^4 y_\kappa \\
 & & 0 & & \Delta^3 y_\kappa & \\
x_8 & 0 & & \Delta^2 y_\kappa & & \\
 & & \Delta y_\kappa & & & \\
x_\kappa & y_\kappa & & & &
\end{array}
$$

Παρατηρούμε ότι το μοναδιαίο σφάλμα επηρεάζει μια τριγωνική περιοχή και αυξάνεται στις διαφορές ανώτερης τάξης και μάλιστα δημιουργεί συντελεστές του διωνύμου του Νεύτωνα, όπως π.χ η $\Delta^2 y_\kappa$ δημιουργεί τους 1, -2, 1. Τέτοια σφάλματα επηρεάζουν τα αποτελέσματα στον αλγόριθμο των πηλίκων και διαφορών, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

2) Δείξτε ότι αν $y_\kappa = 2^\kappa$ τότε $\Delta y_\kappa = y_\kappa$

Πράγματι είναι $\Delta y_\kappa = y_{\kappa+1} - y_\kappa = 2^{\kappa+1} - 2^\kappa =$

$= 2^\kappa \cdot 2 - 2^\kappa = 2^\kappa$

3) Δείξτε ότι αν $y_\kappa = \kappa^4$, τότε $\Delta^4 y_\kappa = 24$

Λαμβάνοντας υπόψη το παράδειγμα που δώσαμε στην αρχή $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\Delta^4 y_k = y_{k+4} - 4y_{k+3} + 6y_{k+2} - 4y_{k+1} + y_k =$$
$$= (k+4)^4 - 4(k+3)^4 + 6(k+2)^4 - 4(k+1)^4 + k^4 =$$
$$= k^4 + 4k^3\cdot 4 + 6k^2\cdot 4^2 + 4\cdot k\cdot 4^3 + 4^4 -$$
$$- 4(k^4 + 4k^3\cdot 3 + 6k^2\cdot 3^2 + 4\cdot k\cdot 3^3 + 3^4) +$$
$$+ 6(k^4 + 4\cdot k^3\cdot 2 + 6k^2\cdot 2^2 + 4\cdot k\cdot 2^3 + 2^4) -$$
$$- 4(k^4 + 4\cdot k^3\cdot 1 + 6\cdot k^2\cdot 1^2 + 4\cdot k\cdot 1^3 + 1^4) +$$
$$+ k^4 = 24$$

4) Αποδείξτε τον τύπο $\Delta y_k = C^k(C-1)$ όταν $y_k = C^k$. Με βάση τον τύπο αυτό να βρεθεί συνάρτηση y_k για την οποία να ισχύει: α) $\Delta y_k = 2y_k$

β) $\Delta^2 y_k = 9y_k$

Επειδή $y_k = C^k$ προκύπτει $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = C^{k+1} - C^k =$
$= C^k\cdot C - C^k = C^k(C-1)$.

Δηλαδή όταν η συνάρτηση είναι της μορφής $y_k = C^k$, η διαφορά 1ης τάξης είναι $(C-1)C^k$. Άρα απ' τη σχέση $\Delta y_k = 2y_k$ προκύπτει ότι $y_k = 3^k$, ενώ απ' τη σχέση $\Delta^2 y_k = 9y_k$ προκύπτει $\Delta(\Delta y_k) = 9y_k$ ή $\Delta y_k = 10^k$ οπότε προκύπτει $y_k = 11^k$

5) Δείξτε ότι $\Delta(\log x_k) = \log(1 + h/x_k)$ όπου $x_k = x_0 + kh$

Είναι $\Delta(\log x_k) = \log x_{k+1} - \log x_k = \log \dfrac{x_{k+1}}{x_k} =$

$$= \log \frac{x_0 + (k+1)h}{x_0 + kh} = \log \frac{x_0 + kh + h}{x_0 + kh} =$$

$$= \log\left(1 + \frac{h}{x_0 + kh}\right) = \log\left(1 + \frac{h}{x_k}\right).$$

3.9. Εφαρμογές στο κεφάλαιο 3

1) Δείξτε ότι ο τύπος για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών $x_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{Q}{x_\nu} \right)$

είναι ειδική περίπτωση της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson και με τη βοήθεια αυτού υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα του 2 $(Q=2)$

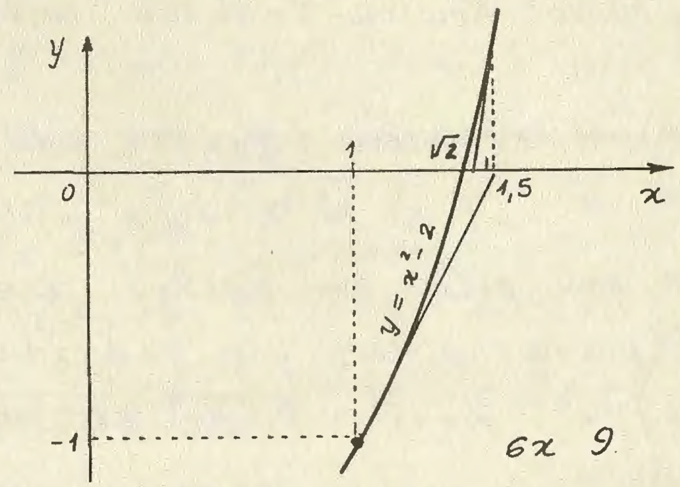
Λύση

Για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του Q λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$ όπου $f(x) = x^2 - Q$. Επειδή $f'(x)=2x$ ο τύπος των Newton-Raphson γίνεται

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu^2 - Q}{2x_\nu} = \frac{1}{2}\left(2x_\nu - x_\nu + \frac{Q}{x_\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{Q}{x_\nu}\right).$$

Αρχίζοντας με $x_0=1$ έχουμε τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα. Επειδή η αρχική προσέγγιση ήταν στο

ν	x_ν
1	1,5
2	1,416666667
3	1,414215686
4	1,414213562
5	1,414213562



σχ 9.

κοίλο μέρος της $y=x^2-2$, η επόμενη προσέγγιση θα είναι από το άλλο μέρος της ρίζας (σχ 9). Μετά η ακολουθία συγκλίνει μονότονα

2) Δείξτε τον τύπο $x_{\nu+1} = x_\nu - \dfrac{x_\nu^{k} - Q}{k \cdot x_\nu^{k-1}}$ για τον

υπολογισμό της k ρίζας του Q δηλ $\sqrt[k]{Q}$. Στη συνέχεια υπολογίστε την κυβική ρίζα του 2.

Λύση

Εδώ έχουμε $f(x) = x^k - Q$ και $f'(x) = kx^{k-1}$ οπότε ο τύπος των Newton-Raphson δίνει τον παραπάνω τύπο.

Για $Q = 2$ και $k = 3$, ο επαναληπτικός τύπος γίνεται

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu^k - Q}{k x_\nu^{k-1}} = x_\nu - \frac{x_\nu^3 - 2}{3x_\nu^2} = \frac{1}{3}\left(3x_\nu - x_\nu + \frac{2}{x_\nu^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x_\nu + \frac{1}{x_\nu^2}\right)$$

Ξεκινώντας με $x_0 = 1$ βρίσκουμε $x_1 = 4/3$

$x_2 = 1,263\,888\,889$, $x_3 = 1,259\,933\,493$

$x_4 = 1,259921049$, $x_5 = 1,259\,921\,049$

Τόσο στο παράδειγμα αυτό όσο και στο προηγούμενο, παρατηρούμε ότι με 5 διαδοχικές προσεγγίσεις έχουμε πολύ καλά αποτελέσματα κι αυτό γιατί, όπως αποδείξαμε, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει τετραγωνικά.

3) Η εξίσωση (γνωστή σαν εξίσωση Leonardo)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

έχει σαν ρίζα τον αριθμό $x = 1,368808107$.

Χρησιμοποιήστε μια επαναληπτική μέθοδο της μορφής $x_{\nu+1} = F(x_\nu)$ και υπολογίστε τη ρίζα x.

Λύση.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι που μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση αυτή στη μορφή $x = F(x)$. π.χ.

$x(x^2 + 2x + 10) = 20 \implies x = 20/(x^2 + 2x + 10) = F(x)$

οπότε θα έχουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$x_{\nu+1} = \frac{20}{x_\nu^2 + 2x_\nu + 10}$$

Για $x_0 = 1$ βρίσκουμε $x_1 = \frac{20}{13} \simeq 1,538461538$. Συνεχίζοντας βρίσκουμε τη ρίζα x μετά από 24 προσεγγίσεις, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ν	x_ν	ν	x_ν	ν	x_ν
1	1,538461538	9	1,369059812	17	1,368808486
2	1,295019157	10	1,368696397	18	1,368807940
3	1,401825309	11	1,368857688	19	1,368808181
4	1,354209390	12	1,368786102	20	1,368808075
5	1,375298092	13	1,368817874	21	1,368808122
6	1,365929788	14	1,368803773	22	1,368808101
7	1,370086003	15	1,368810031	23	1,368808110
8	1,368241023	16	1,368807254	24	1,368808107

Βλέπουμε δηλαδή ότι η σύγκλιση γίνεται πολύ αργά. Αυτό εξηγείται ως εξής:

Αν θέσουμε $\varepsilon_{\nu+1} = \xi - x_{\nu+1} = F(\xi) - F(x_\nu)$, τότε απ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού έχουμε $F(\xi) - F(x_\nu) = (\xi - x_\nu)\cdot F'(\zeta) = \varepsilon_\nu F'(\zeta)$ και υποθέτοντας ότι $F'(\xi) = F'(\zeta)$ προκύπτει

$$\varepsilon_{\nu+1} = F'(\xi)\cdot \varepsilon_\nu$$

Αλλά $$f'(\xi) = \frac{-40(\xi+1)}{(\xi^2+2\xi+10)^2} \simeq -0,4438$$

δηλ κάθε σφάλμα είναι $-0,4438$ του προηγούμενου. Γι' αυτό υπάρχουν αυξομειώσεις στις προσεγγίσεις.

4) Δείξτε ότι αν η εξίσωση του Leonardo γραφεί στη μορφή $x = F(x)$ με τη σχέση:

$$x = \frac{20 - 2x^2 - x^3}{10},$$

τότε δεν συγκλίνει στη ρίζα $x = 1,368808107$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο $x_{\nu+1} = F(x_\nu)$ έχουμε $x_{\nu+1} = \dfrac{20 - 2x_\nu^2 - x_\nu^3}{10}$, οπότε αρχίζοντας με $x_0 = 1$ έχουμε

$x_1 \simeq 1,70$, $x_2 \simeq 0,93$, $x_3 \simeq 1,75$, $x_4 \simeq 0,85$,

$x_5 \simeq 1,79$, $x_6 \simeq 0,79$, $x_7 \simeq 1,83$, $x_8 \simeq 0,72$ κ.ο.κ.

Βλέπουμε δηλ. ότι η ακολουθία αυτή των αριθμών $x_1, x_2, \ldots$ δεν συγκλίνει. Αυτό εξηγείται απ' το γεγονός ότι η παράγωγος της $F(x)$ στη θέση ξ είναι

$$F'(\xi) = \frac{-4\xi - 3\xi^2}{10} \simeq -1,1096 < -1,$$ ενώ

απ' το θεώρημα 3.3.2 πρέπει $|F'(\xi)| < 1$ δηλ.

$$-1 < F'(\xi) < 1$$

5) Εφαρμόστε την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson, και υπολογίστε τη ρίζα της εξίσωσης του Leonardo $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Λύση

Έστω $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ η συνάρτηση της οποίας ζητάμε τη ρίζα. Είναι

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ άρα ο τύπος των Newton-Raphson $x_{\nu+1} = x_\nu - \dfrac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$ δίνει

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu^3 + 2x_\nu^2 + 10x_\nu - 20}{3x_\nu^2 + 4x_\nu + 10}$$

Ξεκινώντας με $x_0 = 1$ έχουμε:

$x_1 = 1,411764706$, $x_2 = 1,369336471$

$x_3 = 1,308808189$, $x_4 = 1,308808108$

και μάλιστα παρατηρούμε ότι

$f(1,368808107) \simeq -0,000000016$ ενώ $f(1,368808108) \simeq -0,000000005$ δηλ. το αποτέλεσμα απ' τον τύπο των Newton-Raphson είναι καλύτερο.

Επομένως για την αριθμητική λύση ενός προβλήματος, έχει σημασία ο αλγόριθμος που θα διαλέξουμε για να το επιλύσουμε.

6) Εφαρμόστε την επαναληπτική μέθοδο regula-falsi για τη λύση της εξίσωσης του Leonardo.

Λύση

Απ' τον τύπο $x_{\nu+1} = x_\nu - \dfrac{(x_\nu - x_{\nu-1}) f(x_\nu)}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}$

αρχίζοντας με $x_0 = 1$ και $x_1 = 1,5$

βρίσκουμε $x_2 \simeq 1,5 - \dfrac{0,5 \cdot 2,875}{9,875} \simeq 1,35$

$$x_3 \simeq 1,35 - \frac{(-0,15)\cdot(-0,3946)}{-3,2696} \simeq 1,368$$

Όπως αναφέραμε, συγκλίνει πιο αργά απ τη μέθοδο των Newton-Raphson, αλλά είναι οπωσδήποτε καλύτερη απ' την πρώτη μέθοδο που εφαρμόσαμε $x_{\nu+1} = F(x_\nu)$.

7) Εφαρμόστε τη μέθοδο του Aitken, καθώς και τη μέθοδο Steffensen για τη λύση της εξίσωσης του Leonardo

Λύση

Αν πάρουμε απ τον πίνακα της εφαρμογής 3 τις τιμές των x_{10}, x_{11}, x_{12} και τις εφαρμόσουμε στον τύπο του Aitken, θα έχουμε

$$x_{13} = 1,368786102 - \frac{(0,00071586)^2}{-0,000232877} \simeq 1,368808107$$

δηλ. το αποτέλεσμα του x_{24} με τις μισές επαναλήψεις. Προφανώς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο νωρίτερα και να επιτύχουμε τη σύγκλιση. Όμως τις 3 πρώτες τιμές τις παίρνουμε υποχρεωτικά απ' τον πίνακα.

Με τη μέθοδο του Steffensen εργαζόμαστε ως εξής:
Με τις τιμές x_0, x_1, x_2, έχουμε από τον τύπο του Aitken:

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} \doteq 1,370813882$$

Με την επαναληπτική μέθοδο $x_{v+1} = F(x_v)$ βρίσκουμε

$$x_4 = F(x_3) = 1,367918090$$

$$x_5 = F(x_4) = 1,369203162$$

Πάλι απ' τον τύπο του Aitken έχουμε

$$x_6 = x_5 - \frac{(x_5 - x_4)^2}{x_5 - 2x_4 + x_3} = 1,368808169$$

Και πάλι απ την επαναληπτική μέθοδο

$$x_7 = F(x_6) = 1,368808080$$

$$x_8 = F(x_7) = 1,368808120$$

Ο τύπος του Aitken δίνει τελικά

$$x_9 = x_8 - \frac{(x_8 - x_7)^2}{x_8 - 2x_7 + x_6} = 1,368808108.$$

8) Αποδείξτε ότι η εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου regula falsi έχει ταχύτητα σύγκλισης

$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618.$$

Λύση

Θέτουμε $x_v = \xi + \varepsilon_v$, $x_{v+1} = \xi + \varepsilon_{v+1}$ όπου ε_v, ε_{v+1} είναι τα σφάλματα στην x_v και x_{v+1} προσέγγιση. Απ' τον τύπο της επαναληπτικής μεθόδου regula falsi

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{(x_\nu - x_{\nu-1})f(x_\nu)}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}$$

έχουμε $\quad \xi + \varepsilon_{\nu+1} = \xi + \varepsilon_\nu - \dfrac{(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f(\xi + \varepsilon_\nu)}{f(\xi+\varepsilon_\nu) - f(\xi + \varepsilon_{\nu-1})}$

ή μετά τις πράξεις

$$\varepsilon_{\nu+1} = \frac{\varepsilon_{\nu-1} f(\xi+\varepsilon_\nu) - \varepsilon_\nu f(\xi + \varepsilon_{\nu-1})}{f(\xi+\varepsilon_\nu) - f(\xi+\varepsilon_{\nu-1})} \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Taylor έχουμε

(2) $f(\xi+\varepsilon_\nu) - f(\xi) = \varepsilon_\nu f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_\nu^2 f''(\zeta)$ για τους δύο πρώτους όρους όπου $\xi + \varepsilon_\nu < \zeta < \xi$ και $f(\xi)=0$ διότι το ξ είναι ρίζα της $f(x)$. Επειδή η $f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, γράφουμε $f''(\zeta) \simeq f''(\xi)$.

Ανάλογη σχέση προκύπτει και για την $f(\xi + \varepsilon_{\nu-1})$:

(3) $f(\xi+\varepsilon_{\nu-1}) - f(\xi) = \varepsilon_{\nu-1} f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu-1}^2 f''(\xi)$. Επίσης

$$f(\xi+\varepsilon_\nu) - f(\xi+\varepsilon_{\nu-1}) = (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f'(\xi+\varepsilon_{\nu-1}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1})^2 f''(\xi+\varepsilon_{\nu-1})$$

και επειδή $\quad f''(\xi+\varepsilon_{\nu-1}) \simeq f''(\xi)$

$$f(\xi+\varepsilon_\nu) - f(\xi+\varepsilon_{\nu-1}) = (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f'(\xi) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1})^2 f''(\xi)$$

ή ακόμα παραλείποντας τον όρο $\frac{1}{2}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1})^2 f''(\xi)$ ως απειροστό δεύτερης τάξης

(4) $f(\xi+\varepsilon_\nu) - f(\xi+\varepsilon_{\nu-1}) \simeq (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f'(\xi)$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των (2), (3), (4) στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $f(\xi)=0$ έχουμε

$$\varepsilon_{\nu+1} = \frac{\varepsilon_{\nu-1}\left(\varepsilon_\nu f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_\nu^2 f''(\xi)\right) - \varepsilon_\nu\left(\varepsilon_{\nu-1} f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu-1}^2 f''(\xi)\right)}{(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f'(\xi)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{\nu-1}\varepsilon_\nu \left(f'(\xi) + \frac{1}{2}\varepsilon_\nu f''(\xi) - f'(\xi) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu-1} f''(\xi)\right)}{(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f'(\xi)}$$

ή τελικά

$$\varepsilon_{\nu+1} = \frac{\varepsilon_{\nu-1}\,\varepsilon_\nu\, f''(\xi)}{2 f'(\xi)} = \varepsilon_{\nu-1}\,\varepsilon_\nu \cdot \lambda \quad (5)$$

όπου $\lambda = \dfrac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$.

Αν υποθέσουμε, ότι ο ορισμός της τάξης σύγκλισης που δώσαμε στην παράγραφο 3.4 επεκτείνεται και για ρητή τάξη, τότε θα ζητήσουμε ένα $m>0$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon_{\nu+1} \simeq A\,\varepsilon_\nu^{m} \quad \text{όπου } A \text{ σταθερή} \quad (6)$$

όπως και στον τύπο (3), στην εύκολη απόδειξη του θεωρήματος της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson (σελ 39)

Απ τη σχέση (6) ή την ισοδύναμή της

$\varepsilon_\nu \simeq A\,\varepsilon_{\nu-1}^{m}$ λύνοντας ως προς $\varepsilon_{\nu-1}$ προκύπτει

$\varepsilon_{\nu-1} = \left(\dfrac{\varepsilon_\nu}{A}\right)^{1/m}$. Αντικαθιστώντας την τελευταία αυτή σχέση στην (5) προκύπτει :

$$\varepsilon_{\nu+1} = \lambda\,\varepsilon_\nu \left(\frac{\varepsilon_\nu}{A}\right)^{1/m} = \lambda \cdot A^{-\frac{1}{m}}\, \varepsilon_\nu^{1+\frac{1}{m}}$$

Απ την τελευταία σχέση και την (6) προκύπτει

$$\lambda \cdot A^{-\frac{1}{m}} \cdot \varepsilon_\nu^{1+\frac{1}{m}} \simeq A\,\varepsilon_\nu^{m}$$

άρα θα πρέπει οι δυνάμεις των ε_ν στα δύο μέλη να είναι ίσες

δηλ $1 + \dfrac{1}{m} = m$ απ την οποία προκύπτει

$m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ και επειδή $m>0$ άρα $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ασκήσεις

1) Να λυθούν γραφικά οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 2 = \log x$, β) $x^2 - 1 = \dfrac{1}{x}$, γ) $\eta\mu\, x = 1 - \dfrac{1}{x}$.

2) Δείξτε ότι η $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο στο διάστημα $[1, 2]$. Εφαρμόστε την επαναληπτική μέθοδο $x_{r+1} = f(x_r)$ και βρείτε τους 3 πρώτους όρους της ακολουθίας x_r, ξεκινώντας με $x_0 = 1,5$.

3) Υπολογίστε με τη μέθοδο $x_{r+1} = f(x_r)$ τη ρίζα της εξίσωσης $x = e^{-x}$ που είναι κοντά στο $x = 0,5$, αρχίζοντας με $x_0 = 0,5$ και διαπιστώστε ότι τα x_{10}, x_{11} έχουν τρία δεκαδικά 0,567 κοινά.

4) Στην προηγούμενη άσκηση 3 εφαρμόστε τη μέθοδο επιτάχυνσης της σύγκλισης του Aitken.

5) Βρείτε τη μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$x^3 = x^2 + x + 1$$

φέρνοντάς την στη μορφή

$$x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

και χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο $x_{r+1} = f(x_r)$.

6) Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Newton-Raphson για τη λύση της εξίσωσης $x = e^{-x}$. Πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για ακρίβεια τριών δεκαδικών; Έξι δεκαδικών;

7) Δείξτε ότι η μέθοδος των Newton-Raphson δίνει για την $f(x) = \frac{1}{x} - Q = 0$ τον επαναληπτικό τύπο:

$$x_{r+1} = x_r\left(2 - Q \cdot x_r\right)$$

για τον υπολογισμό των αντιστρόφων χωρίς διαίρεση. Εφαρμόστε τον τύπο αυτό για $Q = e \simeq 2,7182818$, αρχίζοντας με $x_0 = 0,3$ και με $x_0 = 1$. Μια από τις αρχικές προσεγγίσεις είναι αρκετά κοντά στο αποτέλεσμα, ώστε να συγκλίνει η ακολουθία.

8) Βρείτε την τετραγωνική ρίζα του 3 με έξη δεκαδικά ψηφία σωστά.

9) Βρείτε την έκτη ρίζα του 3 με έξη δεκαδικά ψηφία σωστά

10) Εφαρμόστε τη μέθοδο regula falsi στην εξίσωση $x = e^{-x}$ αρχίζοντας με 0 και 1.

11) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - e^{1/x}$$

Βρείτε μια ρίζα αυτής, χρησιμοποιώντας επαναληπτική μέθοδο των Newton - Raphson. Σταματείστε τις προσεγγίσεις, όταν το σφάλμα γίνει μικρότερο του 0,00000001.

12) Εφαρμόστε την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson για τη λύση της εξίσωσης

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

επιτυγχάνοντας ακρίβεια έξη δεκαδικών ψηφίων.

13) Δείξτε ότι $\Delta\left(\dfrac{u_k}{v_k}\right) = \dfrac{v_k \Delta u_k - u_k \Delta v_k}{v_{k+1} \cdot v_k}$.

14) Αν είναι $y_k = k^3$, τότε δείξτε τις σχέσεις:

α) $\Delta y_k = 3k^2 + 3k + 1$, β') $\Delta^2 y_k = 6k + 6$

γ) $\Delta^3 y_k = 6$

4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

4.1. Γενικά

Όλες οι επαναληπτικές μέθοδοι που αναφέραμε προηγουμένως μπορούν προφανώς να εφαρμοστούν και για τον υπολογισμό των πραγματικών ριζών ενός πολυωνύμου.

Επειδή όμως είναι δυνατόν να έχουμε σ' ένα πολυώνυμο και μιγαδικές ρίζες, γι' αυτό θα αναπτύξουμε και άλλες μεθόδους εύρεσης ριζών που εφαρμόζονται αποκλειστικά σε πολυώνυμα και μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε όλες τις ρίζες, πραγματικές και μιγαδικές.

Θεωρούμε το ακέραιο πολυώνυμο

$$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

όπου $\nu \geqslant 1$, $a_\nu \neq 0$ και $a_i \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών).

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη μεθόδων επίλυσης πολυωνύμων, θα αναφέρουμε μερικά θεωρήματα που ισχύουν στα πολυώνυμα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.1.1.
(Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας)

Κάθε ακέραιο πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών μία τουλάχιστον ρίζα.

Έστω την c_1. Επομένως θα γράφεται στη μορφή:

$$P(x) = (x - c_1)\, P_1(x)$$

όπου $P_1(x)$ πολυώνυμο βαθμού κατά μονάδα μικρότερου του $P(x)$. Αν σκεφτούμε τα ίδια για το $P_1(x)$ κ.τ.λ., καταλήγουμε να θέσουμε το $P(x)$ στη μορφή:

$$P(x) = a_\nu(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_\nu)$$

που είναι και η παραγοντοποιημένη μορφή του $P(x)$.

Αν το $P(x)$ τίθεται στη μορφή:

$$P(x) = (x-c)^k P_1(x) \quad \text{με } P_1(x) \neq 0 \text{ και } k \text{ φυσικός}$$

τότε το c λέγεται ρίζα του $P(x)$ βαθμού πολλαπλότητος k.

Θεώρημα 4.1.2.

Αν $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ τότε ισχύουν οι γνωστοί τύποι του Vieta:

$$S_1 = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_\nu = -\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}$$

$$S_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_1c_\nu + c_2c_3 + \cdots + c_{\nu-1}c_\nu = \frac{a_{\nu-2}}{a_\nu}$$

$$S_3 = c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \cdots + c_{\nu-2}\cdot c_{\nu-1}\cdot c_\nu = -\frac{a_{\nu-3}}{a_\nu}$$

. . . .

$$S_\nu = c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdots c_\nu = (-1)^\nu\frac{a_0}{a_\nu}$$

Με τις σχέσεις αυτές που συνδέουν τις ρίζες ενός πολυωνύμου και τους συντελεστές του, μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο του οποίου έχουν δοθεί οι ρίζες.

Θεώρημα 4.1.3.

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές που έχει μια μιγαδική ρίζα, έχει και την συζυγή αυτής σαν ρίζα και μάλιστα με την ίδια πολλαπλότητα.

Επομένως ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Θεώρημα 4.1.4.

Αν ένα πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές έχει ρίζα τον άρρητο $\alpha+\sqrt{\beta}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{\beta}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, τότε θα έχει σαν ρίζα και τον $\alpha-\sqrt{\beta}$.

Θεώρημα 4.1.5.

Αν ένα πολυώνυμο

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0$$

όπου $\alpha_\nu\cdot\alpha_0\neq 0$ με ακέραιους συντελεστές, έχει για ρίζα του τον ρητό $\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου το κλάσμα είναι ανάγωγο, δηλ οι κ, λ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε ο κ θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 του $f(x)$ και ο λ διαιρέτης του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου α_ν του πολυωνύμου.

Απ' το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι:

Αν το πολυώνυμο

$$f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0$$

με $\alpha_0\neq 0$ (εδώ $\alpha_\nu=1$) με ακέραιους συντελεστές, έχει ρητές ρίζες, τότε αυτές θα είναι ακέραιοι αριθμοί.

Βασική παρατήρηση

Το αντίστροφο του θεωρήματος 4.1.5. δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή

Αν οι αριθμοί κ και λ είναι διαιρέτες των συντελεστών α_0 και α_ν αντίστοιχα του πολυωνύμου

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0,$$

αυτό δεν σημαίνει πάντα ότι το $f(x)$ έχει σαν ρίζα τον τον αριθμό $\frac{\kappa}{\lambda}$.

Θεώρημα 4.1.6.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και μ ο αριθμός των μεταβολών του σημείου των συντελεστών $a_\nu, a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, \dots, a_1, a_0$ (μηδενικοί συντελεστές παραλείπονται). Τότε ο αριθμός k των θετικών πραγματικών ριζών του $P(x)$ ισούται με

$$k = \mu - 2\lambda$$

όπου λ είναι φυσικός ή μηδέν με την ιδιότητα $0 \le \lambda \le \frac{\mu}{2}$.

Π.χ. στο πολυώνυμο

$$x^4 - 2x^3 + 3x - 1$$ έχουμε

$$a_4 = 1 \quad , \quad a_3 = -2 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_1 = 3 \quad , \quad a_0 = -1$$

1^{η} μεταβολή $\qquad$ 2^{η} μεταβολή $\qquad$ 3^{η} μεταβολή

δηλ. $\mu = 3$ άρα $0 \le \lambda \le \frac{3}{2}$ οπότε $\lambda = 0$ ή 1.

άρα το πολυώνυμο έχει $\mu = 3 - 2\cdot 0 = 3$ ή $\mu = 3 - 2\cdot 1 = 1$ θετικές ρίζες.

Θεώρημα 4.1.7.

Για κάθε ρίζα του πολυωνύμου ισχύει η σχέση:

$$|c| \le \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|}{|a_\nu|}$$

που αποτελεί και ένα άνω φράγμα.

4.2. Σχήμα Horner

Ως γνωστό, αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ ν βαθμού, έχει τον αριθμό ξ σαν ρίζα του, τότε διαιρείται ακριβώς με τον παράγοντα $x - \xi$. Το πηλίκο της διαίρεσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\nu - 1$, που έχει ρίζες τις υπόλοιπες ρίζες του πολυωνύμου. Με κάθε γνωστή ρίζα υποβιβάζεται ο βαθμός του πολυωνύμου κατά 1.

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - \xi$ μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του σχήματος Horner, και μάλιστα ισχύει ανεξάρτητα αν το ξ είναι ή όχι ρίζα του πολυωνύμου. Αν το ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ως γνωστό το $P(\xi) = a_0'$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\xi):(x-\xi)$. Το σχήμα αυτό βασίζεται στη διαδοχική παραγοντοποίηση που μπορεί να γίνει στο

$$P(\xi) = a_\nu \xi^\nu + a_{\nu-1}\xi^{\nu-1} + a_{\nu-2}\xi^{\nu-2} + \cdots + a_1\xi + a_0 =$$
$$= \Big(\cdots\cdots\big(a_\nu\xi + a_{\nu-1}\big)\xi + a_{\nu-2}\Big)\xi + \cdots + a_1\Big)\xi + a_0 .$$

Έχει δε την παρακάτω μορφή:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_\nu & a_{\nu-1} & a_{\nu-2} & \cdots\cdots & a_1 & a_0 \\
x=\xi & & +\xi a_\nu & +\xi a_{\nu-1} & & +\xi a_2' & +\xi a_1' \\
\hline
 & a_\nu & a_{\nu-1}' & a_{\nu-2}' & & a_1' & \boxed{a_0'}
\end{array}$$

Δηλαδή τοποθετούμε τους συντελεστές a_i $(i=0,1,\cdots,\nu)$ του πολυωνύμου σε μια οριζόντια γραμμή. Οι συντελεστές που λείπουν αντικαθίστανται με 0. Πολλαπλασιάζουμε το a_ν με ξ και το προσθέτουμε στο $a_{\nu-1}$ βρίσκοντας το $a_{\nu-1}'$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το $a_{\nu-1}'$ με ξ και το προσθέτουμε στο $a_{\nu-2}$ βρίσκοντας $a_{\nu-2}'$ κ.ο.κ. Ο συντελεστής a_0' είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $x-\xi$. Αν το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε είναι $a_0' = 0$. Οι υπόλοιποι συντελεστές $a_\nu, a_{\nu-1}', a_{\nu-2}', \ldots, a_1'$ είναι οι συντελεστές του πηλίκου του $P(x):(x-\xi)$ που όπως είπαμε είναι βαθμού κατά μονάδα μικρότερου απ το βαθμό του $P(x)$.

Δηλ. αν θέσουμε $P_1(x) = a_\nu x^{\nu-1} + a_{\nu-1}' x^{\nu-2} + \cdots + a_1'$, έχουμε

$$P(x) = (x-\xi)P_1(x) + a_0'$$

και παραγωγίζοντας στη θέση $x=\xi$ έχουμε

$$P'(\xi) = P_1(\xi)$$

Δηλαδή εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το πολυώνυμο $P_1(x)$ στη θέση $x=\xi$ βρίσκουμε την τιμή της παραγώγου τού $P(x)$ στη θέση ξ. Κατ' αυτό τον τρόπο βρίσκουμε, με διαδοχικές εφαρμογές του σχήματος Horner την τιμή της συνάρτησης και των παραγώγων αυτής.

Σημείωση

Επειδή το σχήμα Horner είναι εύκολο για τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης και των παραγώγων αυτής, γιαυτό χρησιμοποιείται κατά την επίλυση μιάς πολυωνυμικής εξίσωσης με την επαναληπτική μέθοδο των Newton - Raphson.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι όλες οι ρίζες του πολυωνύμου

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 24$$

είναι πραγματικές και να υπολογιστούν.

Λύση

Είναι $p(-\infty) = -\infty$, $p(1) = 12$, $p(2) = -2$, $p(+\infty) = +\infty$ όπου οι τιμές 1 και 2 είναι αυθαίρετες. Επειδή $p(-\infty)\cdot p(1) < 0$, $p(1)\cdot p(2) < 0$, $p(2)\cdot p(\infty) < 0$ σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.1., θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο σε καθένα απ' τα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ τέτοιο ώστε $P(\xi) = 0$ και επειδή το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού θα έχει ακριβώς ένα σημείο σε καθένα διάστημα.

Έστω ξ_1 η ρίζα στο $(-\infty, 1)$, ξ_2 στο $(1,2)$ και ξ_3 στο $(2, +\infty)$. Υπολογίζουμε πρώτα με την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson την ξ_2 στο διάστημα $[1,2]$ θέτοντας $x_0 = 1,8$ (Προφανώς πληρούνται όλες οι συνθήκες).

Για τον προσδιορισμό των $P(x_0)$, $P'(x_0)$ χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner, όπως τονίσαμε παραπάνω.

$$\begin{array}{l|rrr|l}
 & 1 & -4 & -9 & 24 \\
x_0=1,8 & & 1,8 & -3,96 & -23,328 \\
\hline
 & 1 & -2,2 & -12,96 & \boxed{0,672} = P(x_0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rr|l}
 & 1 & -2,2 & -12,96 \\
x_0=1,8 & & 1,8 & -0,72 \\
\hline
 & 1 & -0,4 & \boxed{-13,68} = P'(x_0)
\end{array}$$

Έτσι έχουμε σαν πρώτη προσέγγιση την

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = 1,8 - \frac{0,672}{-13,68} \simeq 1,849.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το σχήμα Horner για $x_1 = 1,849$

$$\begin{array}{l|rrr|l}
 & 1 & -4 & -9 & 24 \\
x_1=1,849 & & 1,849 & -3,977 & -23,995 \\
\hline
 & 1 & -2,151 & -12,977 & \boxed{0,00516} = P(x_1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rr|l}
 & 1 & -2,151 & -12,977 \\
x_1=1,849 & & 1,849 & -0,5584 \\
\hline
 & 1 & -0,302 & \boxed{-13,5354} = P'(x_1)
\end{array}$$

έχουμε μια δεύτερη προσέγγιση της ρίζας ξ_2 την

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = 1,849 - \frac{0,00517}{-13,5354} \simeq 1,8494$$

Διαιρώντας τώρα το $P(x)$ με τη διαφορά $x-1,8494$ χρησιμοποιώντας πάλι το σχήμα Horner και παραλείποντας το υπόλοιπο βρίσκουμε

	1	-4	-9	24
$x=1,8494$		1,8494	-3,97732	-24,000255
	1	-2,1506	-12,97732	$-0,000255 \simeq 0$

δηλ. την εξίσωση $x^2 - 2,1506x - 12,97732 = 0$ απ' την οποία βρίσκουμε τις άλλες δύο ρίζες εφαρμόζοντας τον τύπο των δευτεροβάθμιων εξισώσεων απ τον οποίο προκύπτουν

$$\xi_1 = -2,6841, \quad \xi_3 = 4,8347$$

4.3 Λύση πολυωνύμων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού

Η αναζήτηση μεθόδων για την εύρεση ριζών μιας αλγεβρικής εξίσωσης ν βαθμού γενικής μορφής, συνίσταται στην εύρεση γενικών τύπων με τους οποίους οι ρίζες της εξίσωσης εκφράζονται συναρτήσει των συντελεστών της με τις πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης και εξαγωγής ριζικών. Ο Abel απέδειξε ότι δεν είναι δυνατόν να βρεθούν σε κάθε περίπτωση γενικοί τύποι για τις εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4. Έτσι οι μόνες εξισώσεις που επιλύονται πάντα είναι μέχρι τέταρτου βαθμού.
Θα δώσουμε μια μέθοδο αριθμητικού υπολογισμού των ριζών ενός πολυωνύμου τρίτου και τέταρτου βαθμού.

$3^{ου}$ βαθμού

Η γενική μορφή της εξίσωσης $3^{ου}$ βαθμού είναι

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Προφανώς η εξίσωση αυτή έχει τουλάχιστο μια πραγματική ρίζα (θεώρημα 4.1.3).

Εκτελώντας το μετασχηματισμό $x = z - \frac{\alpha}{3}$, χάνεται ο δευτεροβάθμιος όρος, οπότε η εξίσωση

$$\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)^3+\alpha\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)^2+\beta\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)+\gamma=0$$

γίνεται μετά τις πράξεις $z^3+pz+q=0$ (1)

όπου $p=\beta-\frac{\alpha^2}{3}$, $q=\gamma-\frac{\alpha\beta}{3}+\frac{2\alpha^2}{27}$

(Οι συντελεστές p, q μπορούν να υπολογιστούν και με το σχήμα Horner ως εξής

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & \alpha & \beta & \gamma \\
x=-\frac{\alpha}{3} & & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{2\alpha^2}{9} & -\frac{\alpha\beta}{3}+\frac{2\alpha^3}{27} \\
\hline
 & 1 & \frac{2\alpha}{3} & \beta-\frac{2\alpha^2}{9} & \boxed{\gamma-\frac{\alpha\beta}{3}-\frac{2\alpha^3}{27}}=q \\
x=-\frac{\alpha}{3} & & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha^2}{9} & \\
\hline
 & 1 & \frac{\alpha}{3} & \boxed{\beta-\frac{\alpha^2}{3}}=p & \\
x=-\frac{\alpha}{3} & & -\frac{\alpha}{3} & & \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}$$

Δηλαδή τα q, p, 0 θεωρούνται τα υπόλοιπα της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^3+ax^2+\beta x+\gamma$ και των πηλίκων του με $x+\frac{\alpha}{3}$).

Η εξίσωση (1) γράφεται $z^3=-pz-q$.

Κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=z^3$, $y=-pz-q$ βρίσκουμε εύκολα μια πρώτη προσέγγιση το μιάς των πραγματικών ριζών την οποία βελτιώνουμε με μια από τις προηγούμενες μεθόδους π.χ. τη μέθοδο Newton-Raphson. Αν z_ν είναι η βελτιωμένη προσέγγιση, έχουμε την αντίστοιχη ρίζα του x που θα είναι η $\xi = z_\nu - \frac{\alpha}{3}$. Διαιρούμε στη συνέχεια το αρχικό πολυώνυμο με τη διαφορά $x-\xi$ (σχήμα

Horner) και βρίσκουμε ένα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού του οποίου βρίσκουμε τις δύο ρίζες του.

$4^{ου}$ βαθμού

Η γενική μορφή της εξίσωσης τέταρτου βαθμού είναι

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Εκτελώντας τώρα το μετασχηματισμό $x = z - \frac{\alpha}{4}$, χάνεται ο τριτοβάθμιος όρος οπότε, η εξίσωση

$$\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)^4+\alpha\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)^3+\beta\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)^2+\gamma\left(z-\frac{\alpha}{3}\right)+\delta$$

γίνεται μετά τις πράξεις $z^4+pz^2+qz+s=0$ (2)

όπου $p=\beta-\frac{3\alpha^2}{8}$, $q=\gamma-\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha^3}{8}$, $s=\delta-\frac{\alpha\gamma}{4}+\frac{\alpha^2\beta}{16}-\frac{3\alpha^4}{256}$

(Οι συντελεστές p, q, s μπορούν να υπολογιστούν όπως και προηγουμένως με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\
x=-\frac{\alpha}{4} & & -\frac{\alpha}{4} & -\frac{3\alpha^2}{16} & -\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{3\alpha^3}{64} & -\frac{\alpha\gamma}{4}+\frac{\alpha^2\beta}{16}-\frac{3\alpha^4}{256} \\
\hline
 & 1 & \frac{3\alpha}{4} & \beta-\frac{3\alpha^2}{16} & \gamma-\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{3\alpha^3}{64} & \boxed{\delta-\frac{\alpha\gamma}{4}+\frac{\alpha^2\beta}{16}-\frac{3\alpha^4}{256}=s} \\
x=-\frac{\alpha}{4} & & -\frac{\alpha}{4} & -\frac{\alpha^2}{8} & -\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{5\alpha^3}{64} & \\
\hline
 & 1 & \frac{\alpha}{2} & \beta-\frac{5\alpha^2}{16} & \boxed{\gamma-\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\alpha^3}{8}=q} & \\
x=-\frac{\alpha}{4} & & -\frac{\alpha}{4} & -\frac{\alpha^2}{16} & & \\
\hline
 & 1 & \frac{\alpha}{4} & \boxed{\beta-\frac{3\alpha^2}{8}=p} & & \\
x=-\alpha/4 & & -\alpha/4 & & & \\
\hline
 & & 0 & & &
\end{array}$$

)

Επειδή τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, το αρχικό πολυώνυμο θα έχει 0 ή 2 ή 4 πραγματικές ρίζες (Θεώρ. 4.1.3) Άρα μπορεί πάντα να τεθεί με μορφή γινομένου δύο παραγόντων δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και μάλιστα επειδή έχουμε τρείς αγνώστους τους p, q, s μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$\left(z^2+2\lambda z+\mu\right)\left(z^2-2\lambda z+\nu\right) = z^4+pz^2+qz+s \quad (3)$$

Με την αντικατάσταση αυτή ο τριτοβάθμιος όρος του πρώτου μέλους της (3) χάνεται.

Πολλαπλασιάζοντας και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων προκύπτει μετά τις πράξεις

$$\begin{aligned} \mu+\nu-4\lambda^2 &= p \\ 2\lambda(\nu-\mu) &= q \\ \mu\nu &= s \end{aligned}$$

Λύνοντας τις δύο πρώτες ως προς μ, ν και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην τρίτη, αφού προηγουμένως θέσουμε $\lambda^2=\omega$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\omega^3+a_1\omega^2+a_2\omega+a_3=0 \qquad (4)$$

όπου $a_1=\dfrac{p}{2}$, $a_2=\dfrac{p^2-4s}{16}$, $a_3=-\dfrac{q^2}{64}$

Επειδή $a_3 \leq 0$, η εξίσωση (4) θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα ≥ 0 σύμφωνα με το θεώρημα 4.1.6., επομένως απ την αντικατάσταση $\lambda^2=\omega$ υπάρχουν πραγματικές τιμές για το λ οι $\pm\sqrt{\omega}$, άρα και για τα μ και ν. Επομένως το αρχικό <u>πρόβλημα</u> ανάγεται στη λύση μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, της (4) και δύο δευτεροβάθμιων των $z^2+2\lambda z+\mu=0$, $z^2-2\lambda z+\nu=0$.

4.4. Ακολουθία συναρτήσεων του Sturm.

Ορισμός 4.4.1.

Έστω οι συναρτήσεις

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots f_\nu(x)$$

που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και πληρούν τις παρακάτω συνθήκες:

1) Οι $f_i(x)$ $i=0,1,2,\cdots,\nu$ είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$,

2) $f_0(\alpha), f_0(\beta) \neq 0$ καθώς και $f_\nu(x)\neq 0$ $\forall x[\alpha,\beta]$ δηλ. η $f_\nu(x)$ έχει σταθερό πρόσημο $\forall x \in [\alpha,\beta]$,

3) Αν για ένα $\xi \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $f_i(\xi)=0$, τότε να ισχύει $f_{i-1}(\xi)\cdot f_{i+1}(\xi) < 0$ όπου $1 \leq i \leq \nu-1$

4) Αν γιά $\xi \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f_0(\xi)=0$, τότε να ισχύουν $f_0(\xi-h)\cdot f_1(\xi-h)<0$ και $f_0(\xi+h).f_1(\xi+h)>0$ για κάθε h θετικό και αρκετά μικρό.

Τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις $f_i(x)$ $i=0,1,2,\cdots,\nu$ αποτελούν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ακολουθία Sturm.

Θα αναφέρουμε παρακάτω χωρίς απόδειξη δύο θεωρήματα σχετικά με την ακολουθία συναρτήσεων του Sturm τα οποία χρησιμεύουν για τον εντοπισμό όλων των πραγματικών ριζών ενός πραγματικού πολυωνύμου, που βρίσκονται σ'ένα δεδομένο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα 4.4.2

Αν οι συναρτήσεις $f_i(x)$, $i=0,1,2,\cdots,\nu$ αποτελούν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ μια ακολουθία του Sturm ~~και~~ συμβολίσουμε με $S(\xi)$ το πλήθος των μεταβολών του προσήμου στην ακολουθία των αριθμών $f_0(\xi), f_1(\xi), f_2(\xi),\cdots, f_\nu(\xi)$, τότε η διαφορά $S(\alpha)-S(\beta)$ είναι ίση με τον αριθμό των ριζών της $f_0(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα 4.4.3.

Έστω $P_\nu(x)$ ένα πραγματικό πολυώνυμο ν βαθμού χωρίς πολλαπλές ρίζες.

Θέτουμε $f_1(x)=f_0'(x)$ και κατασκευάζουμε την ακολουθία των συναρτήσεων υπολοίπων με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη ως εξής:

$$f_0(x)=f_1(x)\pi_1(x)-f_2(x)$$
$$f_1(x)=f_2(x)\pi_2(x)-f_3(x)$$
$$f_2(x)=f_3(x)\pi_3(x)-f_4(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{\nu-2}(x)=f_{\nu-1}(x)\pi_{\nu-1}(x)-f_\nu(x)$$

όπου $\pi_i(x)$ είναι πολυώνυμα $1^{ου}$ βαθμού.

Τότε η ακολουθία των συναρτήσεων $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_\nu(x)$ είναι ακολουθία του Sturm σε κάθε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f_0(\alpha), f_0(\beta)\neq 0$.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που το πολυώνυμο $f_0(x)$ έχει στο διάστημα (α,β) πολλαπλές ρίζες, τότε πάλι μπορούμε να κατασκευάσουμε τις συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_\kappa(x)$ όπου $\kappa<\nu$ με $f_{\kappa+1}(x)=0$. Τότε βέβαια δεν σχηματίζεται ακολουθία του Sturm. Ισχύει όμως πάλι ότι η διαφορά $S(\alpha)-S(\beta)$ είναι ίση με το πλήθος των ριζών της $f_0(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο καθεμιά απ' τις ρίζες παίρνεται μια φορά, ανεξάρτητα από το βαθμό πολλαπλότητας.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$

Να εντοπιστούν όλες οι ρίζες της συνάρτησης αυτής.

Λύση

Θέτουμε $P(x) = f_0(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ και

$$f_0'(x) = f_1(x) = 3x^2 - 6x + 6$$

Εκτελώντας τη διαίρεση του $f_0(x)$ με το $f_1(x)$ βρίσκουμε πηλίκο $\pi_1(x)$ και υπόλοιπο $-f_2(x)$. Διαιρώντας πάλι το $f_1(x)$ με το $f_2(x)$ βρίσκουμε ένα νέο πηλίκο $\pi_2(x)$ και νέο υπόλοιπο $-f_3(x)$ που στην περίπτωση του παραδείγματος θα είναι σταθερό. Οι πράξεις αυτές φαίνονται παρακάτω.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 6x - 3 & 3x^2 - 6x + 6 \\
\hline
-x^3 + 2x^2 - 2x & \underbrace{\frac{x}{3} - \frac{1}{3}}_{\pi_1(x)} \\
\hline
-x^2 + 4x - 3 & \\
+x^2 - 2x + 2 & \\
\hline
-(\underbrace{-2x+1}_{f_2(x)}) = 2x - 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3x^2 - 6x + 6 & -2x + 1 \\
\hline
-3x^2 + \frac{3x}{2} & \underbrace{-\frac{3x}{2} + \frac{9}{4}}_{\pi_2(x)} \\
\hline
-\frac{9x}{2} + 6 & \\
+\frac{9x}{2} - \frac{9}{4} & \\
\hline
-(\underbrace{-\frac{15}{4}}_{f_3(x)}) = \frac{15}{4} &
\end{array}
$$

Οι συναρτήσεις $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ που βρίκαμε, αποτελούν σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.3 ακολουθία Sturm. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα 4.4.2. για τυχαίες τιμές του x, π.χ. $-\infty$, 0, 1, $+\infty$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$S(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\frac{15}{4}$	2
0	-3	6	1	$-\frac{15}{4}$	2
1	1	3	-1	$-\frac{15}{4}$	1
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{15}{4}$	1

Άρα $S(-\infty) - S(0) = 2-2=0$

$S(0) - S(1) = 2-1=1$

$S(1) - S(+\infty) = 1-1=0$

Επομένως η $f(x)$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$. Δίνοντας επομένως στο x για πρώτη προσέγγιση π.χ. $x_0 = 0,4$ και εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson έχουμε $x_1 = x_0 - \dfrac{P(x_0)}{P'(x_0)}$, όπου τα $P(x_0)$, $P'(x_0)$ υπολογίζουμε απ' το σχήμα Horner.

	1	-3	6	-3
$x_0=0,4$		0,4	-1,04	1,984
	1	-2,6	4,96	$\boxed{-1,016}$
				$P(x_0)$

	1	-2,6	4,96
$x_0=0,4$		0,4	-0,88
	1	-2,2	$\boxed{4,08}$
			$P'(x_0)$

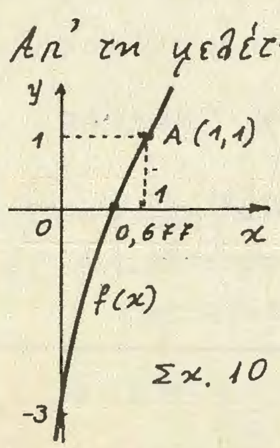
άρα $x_1 = 0,4 - \dfrac{-1,016}{4,08} \simeq 0,649$

Υπολογίζουμε ξανά για δεύτερη προσέγγιση $x_2 = x_1 - \dfrac{P(x_1)}{P'(x_1)}$

	1	-3	6	-3
$x_1=0,649$		0,649	-1,5258	2,903756
	1	-2,351	4,4742	$\boxed{-0,096244}$
				$P(x_1)$
$x_1=0,649$		0,649	-1,104598	
	1	-1,702	$\boxed{3,369602}$	
			$P'(x_1)$	

άρα $x_2 = 0,649 - \dfrac{-0,096244}{3,369602} \simeq 0,677582$ κ.ο.κ.

Απ' τη μελέτη της γραφικής παράστασης της $P(x)$ προκύπτει $P'(x) = 3x^2-6x+6$ με μιγαδικές ρίζες και $P'(x)>0$ $\forall x \in R$ δηλ. η $P(x)$ είναι αύξουσα, χωρίς ακρότατα. $P''(x) = \underline{6x-6}$. Η $P''(x)=0$ δίνει το σημείο $A(1,1)$ σαν σημείο καμπής και $P(0)=-3$, ενώ η ρίζα $\xi \simeq 0,677$.



Σχ. 10

4.5. Μέθοδος του Bernoulli

Έστω το πολυώνυμο

$$P_\nu(x) = c_\nu x^\nu + c_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

του οποίου οι συντελεστές μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί. Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι το πολυώνυμο αυτό έχει ν ακριβώς ρίζες διάφορες μεταξύ τους και του μηδενός, τις $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$

$$\text{με } 0 < |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \cdots \leq |\zeta_\nu|.$$

Θεωρούμε τώρα τη ρητή συνάρτηση

$$R(x) = \frac{1}{P_\nu(x)}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $P_\nu(x)$ για τις οποίες απειρίζεται το κλάσμα, λέγονται πόλοι της $R(x)$. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στην αναζήτηση των πόλων της συνάρτησης $R(x)$.

Επειδή οι ρίζες του $P_\nu(x)$ είναι απλές, το $R(x)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$R(x) = \frac{a_1}{x-\zeta_1} + \frac{a_2}{x-\zeta_2} + \cdots + \frac{a_\nu}{x-\zeta_\nu} \quad \text{με } a_i \in \mathbb{C}$$

και $a_i \neq 0$. Για $|x| < |\zeta_i|$ ισχύει η σειρά

$$\frac{a_i}{x-\zeta_i} = -\frac{a_i}{\zeta_i}\,\frac{1}{1-\frac{x}{\zeta_i}} = -a_i\left(\frac{1}{\zeta_i} + \frac{x}{\zeta_i^2} + \frac{x^2}{\zeta_i^3} + \cdots\right)$$

επειδή $\dfrac{1}{1-\frac{x}{\zeta_i}} = 1 + \dfrac{x}{\zeta_i} + \dfrac{x^2}{\zeta_i^2} + \cdots$ (φθίν. γεωμ. πρόοδος με πρώτο όρο το 1 και λόγο $\omega = \dfrac{x}{\zeta_i}$ με $0 < \left|\dfrac{x}{\zeta_i}\right| < 1$).

Επομένως για $|x| < |\zeta_1|$ η $R(x)$ αναπτύσσεται στη δυναμοσειρά

$$R(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa \cdot x^\kappa$$

όπου $$\beta_\kappa = -\left(\frac{a_1}{\zeta_1^{\kappa+1}} + \frac{a_2}{\zeta_2^{\kappa+1}} + \cdots + \frac{a_\nu}{\zeta_\nu^{\kappa+1}} \right) \quad (1)$$

Έστω τώρα ότι $|\zeta_1| < |\zeta_2|$. Απ τη σχέση (1) έχουμε

$$q_\kappa = \frac{\beta_\kappa}{\beta_{\kappa-1}} = \frac{-\dfrac{a_1}{\zeta_1^{\kappa+1}}\left[1 + \dfrac{a_2}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\kappa+1} + \cdots + \dfrac{a_\nu}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_\nu}\right)^{\kappa+1}\right]}{-\dfrac{a_1}{\zeta_1^{\kappa}}\left[1 + \dfrac{a_2}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\kappa} + \cdots + \dfrac{a_\nu}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_\nu}\right)^{\kappa}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\zeta_1} \cdot \frac{1 + \dfrac{a_2}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\kappa+1} + \cdots + \dfrac{a_\nu}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_\nu}\right)^{\kappa+1}}{1 + \dfrac{a_2}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^{\kappa} + \cdots + \dfrac{a_\nu}{a_1}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_\nu}\right)^{\kappa}}$$

και επειδή $\left|\dfrac{\zeta_1}{\zeta_i}\right| < 1 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \nu$ άρα $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta_i}\right)^\kappa = 0$

επομένως $$\lim_{\kappa\to\infty} q_\kappa = \frac{1}{\zeta_1}$$

Θέτουμε $\varepsilon_\kappa = q_{\kappa+1} - q_\kappa$ και $p_\kappa = \dfrac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_{\kappa-1}} \cdot q_\kappa$

Αποδεικνύεται ανάλογα ότι

$$\lim_{\kappa\to\infty} p_\kappa = \frac{1}{\zeta_2}$$

Επομένως, αν είναι γνωστοί οι συντελεστές β_κ του αναπτύγματος $R(x)$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις δύο ρίζες ζ_1, ζ_2 του πολυωνύμου $P_\nu(x)$, υπό τον όρο βέβαια ότι ισχύει

$$0 < |\zeta_1| < |\zeta_2| < |\zeta_3| \leq \cdots \leq |\zeta_\nu| .$$

Συμπερασματικά, τα βήματα που ακολουθούμε είναι:

1) Αναπτύσσουμε την $R(x)$ σε δυναμοσειρά ως εξής: θέτουμε

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\nu x^\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa x^\kappa = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$$

Υποθέσαμε βέβαια απ' την τελευταία ανισότητα, ότι το πολυώνυμο $P_\nu(x)$ δεν έχει το 0 σαν ρίζα, άρα $a_0 \neq 0$. Χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα θέτουμε $a_0 = 1$ (διαιρώντας όλους τους όρους του $P_\nu(x)$ με a_0).

Απ' την τελευταία σχέση προκύπτει:

$$1 = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_\nu x^\nu)(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων των δύο μελών έχουμε μετά τις πράξεις:

$$\beta_0 = 1$$
$$\beta_1 + \beta_0 a_1 = 0$$
$$\beta_2 + \beta_1 a_1 + \beta_0 a_2 = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα ως προς $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$

2) Υπολογίζουμε τους όρους q_κ, ε_κ, p_κ απ' τις σχέσεις:

$$q_\kappa = \frac{\beta_\kappa}{\beta_{\kappa-1}}, \quad \varepsilon_\kappa = q_{\kappa+1} - q_\kappa, \quad p_\kappa = \frac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_{\kappa-1}} \cdot q_\kappa \qquad (2)$$

3) Καταγράφουμε σε πίνακα τους όρους β_κ, q_κ, ε_κ, p_κ, οπότε ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε, οι ακολουθίες q_κ, p_κ συγκλίνουν προς τις $\frac{1}{\zeta_1}$, $\frac{1}{\zeta_2}$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Το πολυώνυμο $P_3(x) = -0{,}5x^3 + 2{,}75x^2 - 3{,}25x + 1$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\zeta_1 = 0{,}5$, $\zeta_2 = 1$, $\zeta_3 = 4$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο του Bernoulli έχουμε

$$1 = (1 - 3{,}25x + 2{,}75x^2 - 0{,}5x^3)(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6 + \beta_7 x^7 + \cdots)$$

εφόσον θέλουμε ακρίβεια μέχρι $k=7$.

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων έχουμε:

$\beta_0 = 1$

$\beta_1 + \beta_0(-3{,}25) = 0 \Rightarrow \beta_1 = 3{,}25$

$\beta_2 + \beta_1(-3{,}25) + \beta_0 \cdot 2{,}75 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 7{,}8125$

$\beta_3 + \beta_2(-3{,}25) + \beta_1 \cdot 2{,}75 - \beta_0 \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow \beta_3 = 16{,}953$

$\beta_4 + \beta_3(-3{,}25) + \beta_2 \cdot 2{,}75 - \beta_1 \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow \beta_4 = 35{,}238$

$\beta_5 + \beta_4(-3{,}25) + \beta_3 \cdot 2{,}75 - \beta_2 \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow \beta_5 = 71{,}809$

$\beta_6 + \beta_5(3{,}25) + \beta_4 \cdot 2{,}75 - \beta_3 \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow \beta_6 = 144{,}95$

$\beta_7 + \beta_6(3{,}25) + \beta_5 \cdot 2{,}75 - \beta_4 \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow \beta_7 = 291{,}23$

Εύκολα υπολογίζονται τώρα τα q_k, e_k, p_k $k = 1,2,3,\dots,7$. Καταχωρώντας τα αποτελέσματα σε πίνακα έχουμε

k	β_k	q_k	e_k	p_k
0	1			
1	3,25	3,25	-0,8462	
2	7,8125	2,4038	-0,2338	0,6642
3	16,953	2,1700	-0,0914	0,8483
4	35,238	2,0786	-0,0408	0,9279
5	71,809	2,0378	-0,0193	0,9640
6	144,95	2,0185	-0,0093	0,9726
7	291,23	2,0092		

Παίρνοντας σαν προσεγγιστικές τιμές των ζ_1, ζ_2 τα $1/q_7$, $1/p_6$ αντίστοιχα βρίσκουμε $\zeta_1 = 0{,}498$, $\zeta_2 = 1{,}03$.

Παρατήρηση

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο ρίζες του πολυωνύμου ζ_1 και ζ_2 είναι συζυγείς μιγαδικές, ενώ για τις υπόλοιπες ισχύουν τα προηγούμενα, θα είναι

$$0 < |\zeta_1| = |\zeta_2| < |\zeta_3| \leq \dots \leq |\zeta_\nu|$$

Στην περίπτωση αυτή οι ακολουθίες q_κ, p_κ δεν συγκλίνουν πρός τις αντίστροφες τιμές των ριζών ζ_1, ζ_2 εφόσον δεν ισχύει η υπόθεση $|\zeta_1| < |\zeta_2|$

Αποδεικνύεται όμως ότι οι ρίζες της εξίσωσης

$$q_{\kappa-1} \cdot p_\kappa x^2 - (q_\kappa + p_\kappa)x + 1 = 0$$

συγκλίνουν για $\kappa \to \infty$ προς τις ρίζες ζ_1, ζ_2 αντίστοιχα.

Θεωρητικά με τη μέθοδο του Bernoulli μπορούμε να βρούμε όλες τις ρίζες μιας εξίσωσης, εφόσον δεν υπάρχει διπλή ρίζα. Στην πράξη όμως υπάρχουν σφάλματα, που περιορίζουν τις δυνατότητες της μεθόδου αυτής.

4.6. Αλγόριθμος των πηλίκων - διαφορών (QD)

Μια επέκταση της μεθόδου του Bernoulli, για τον υπολογισμό όλων των ριζών ενός πολυωνύμου, υπό τον όρο βέβαια ότι όλες οι ρίζες είναι διάφορες μεταξύ τους, είναι και ο α λ γ ό ρ ι θ μ ο ς των π η λ ί κ ω ν - δ ι α φ ο ρ ώ ν ή QD Αλγόριθμος (από τα αρχικά των λέξεων quotient = πηλίκο, difference = διαφορά).

Τον αλγόριθμο αυτό ανέπτυξε ο Rutishauser και αποτελείται από διαφορές και πηλίκα που ορίζονται ως εξής:

Διαφορές	Πηλίκα
$\varepsilon_\kappa' = (p_{\kappa+1} - p_\kappa) + \varepsilon_\kappa$	$p_\kappa' = \dfrac{\varepsilon_\kappa'}{\varepsilon_{\kappa-1}'} p_\kappa$
$\varepsilon_\kappa'' = (p_{\kappa+1}' - p_\kappa') + \varepsilon_\kappa'$, $\kappa = 1, 2, \cdots$	$p_\kappa'' = \dfrac{\varepsilon_\kappa''}{\varepsilon_{\kappa-1}''} p_\kappa'$ $\kappa = 2, 3, \cdots$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

Όταν $\kappa \to \infty$, τότε

$$q_\kappa \to \frac{1}{\zeta_1}, \quad p_\kappa \to \frac{1}{\zeta_2}, \quad p_\kappa' \to \frac{1}{\zeta_3}, \ \ldots, \ p_\kappa^{(\nu-2)} \to \frac{1}{\zeta_\nu} .$$

4.7. Εφαρμογές στο κεφάλαιο 4

1) Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$$

μειώνοντας διαδοχικά το βαθμό του πολυωνύμου.

Λύση

Απ' το θεώρημα 4.1.5. καταλαβαίνουμε ότι, επειδή το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές, αν έχει ρίζες ρητούς αριθμούς, αυτοί θα είναι διαιρέτες του σταθερού όρου. Δοκιμάζουμε λοιπόν με όλους τους διαιρέτες του σταθερού όρου, μήπως υπάρχει κανείς που να μηδενίζει το $f(x) = x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.

Οι διαιρέτες του 24 είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. Παρατηρούμε ότι : π.χ. $f(4)=0$

Με το σχήμα Horner εκτελώντας τη διαίρεση με το $x-4$ βρίσκουμε

	1	-10	35	-50	24
$x=4$		4	-24	44	-24
	1	-6	11	-6	$\boxed{0}$ υπόλοιπο

Το νέο πηλίκο θα είναι $x^3-6x^2+11x-6 = \pi_1(x)$

Δοκιμάζοντας πάλι με τους διαιρέτες του 6 που είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ βρίσκουμε ότι $\pi_1(3)=0$, οπότε υποβιβάζεται κατά μια μονάδα ακόμα ο βαθμός του $f(x)$. είναι :

	1	-6	11	-6
$x=3$		3	-9	6
	1	-3	2	$\boxed{0}$ υπόλοιπο

Καταλήγουμε τελικά στο πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού x^2-3x+2, που οι ρίζες του είναι οι αριθμοί 1 και 2.

2) Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$f(x) = ix^3 - (2+i)x^2 + 4x - 3 - i$$

με το $x - (1-i)$.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner έχουμε:

	i	$-(2+i)$	4	$-3-i$
$x = 1-i$		$1+i$	$-1+i$	$4-2i$
	i	-1	$3+i$	$\boxed{1-3i}$ = υπόλοιπο

δηλ. το πηλίκο είναι $\pi(x) = ix^2 - x + 3 + i$

3) Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός $1+2i$ είναι ρίζα της.

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1.3, επειδή το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, η αντίστοιχη εξίσωση θα έχει και τον συζυγή του $1+2i$ σαν ρίζα δηλ. τον $1-2i$, οπότε θα διαιρείται με το γινόμενο $(x-(1+2i))(x-(1-2i)) = x^2 - 2x + 5$. Εκτελώντας τη διαίρεση βρίσκουμε πηλίκο $x - 2$. δηλ. η τρίτη ρίζα θα είναι ο 2.

4) Βρείτε ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού με ρητούς συντελεστές που να έχει δύο ρίζες του τους αριθμούς i, $1-\sqrt{3}$

Λύση

Εφ' όσον έχει ρητούς συντελεστές, θα ισχύουν τα θεωρήματα 4.1.3 και 4.1.4. οπότε το ζητούμενο πολυώνυμο θα είναι της μορφής:

$f(x) = \kappa\,(x-i)(x-(-i))(x-(1-\sqrt{3}))(x-(1+\sqrt{3}))$, $\kappa \in \mathbb{Q}$ και $\kappa \neq 0$ ή $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$ για κ π.χ 1

5) Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 12x^3 + 12x + 27 = 0$$

Λύση

Είναι: $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 12$, $\delta = 27$, οπότε απ' τους τύπους $p = \beta - \frac{3\alpha^2}{8}$, $q = \gamma - \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha^3}{8}$, $s = \delta - \frac{\alpha\gamma}{4} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{3\alpha^4}{256}$ προκύπτει

$$p = 12 - \frac{3 \cdot 4^2}{8} = 6$$

$$q = 12 - \frac{4 \cdot 12}{2} + \frac{4^3}{8} = -4$$

$$s = 27 - \frac{4 \cdot 12}{4} + \frac{4^2 \cdot 12}{16} - \frac{3 \cdot 4^4}{256} = 24$$

οπότε η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$(z^2 + 2\lambda z + \mu)(z^2 - 2z + \nu) = z^4 + pz^2 + qz + s = 0 \text{ ή}$$

$$z^4 + 6z^2 - 4z + 24 = 0 \quad \text{όπου}$$

$$x = z - \frac{\alpha}{4} = z - 1 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και εξισώνοντας τα ίσα μέρη έχουμε

$$\mu + \nu - 4\lambda^2 = 6$$

$$2\lambda(\nu - \mu) = -4 \qquad (2)$$

$$\mu\nu = 24$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) καταλήγουμε στην

$$\omega^3 + a_1\omega^2 + a_2\omega + a_3 = 0 \qquad (3)$$

όπου $\omega = \lambda^2$, $a_1 = \frac{p}{2} = 3$, $a_2 = \frac{p^2 - 4s}{16} = \frac{36 - 4 \cdot 24}{16} = -\frac{15}{4}$, $a_3 = -\frac{q^2}{64} = -\frac{(-4)^2}{64} = -\frac{1}{4}$ οπότε η (3) γίνεται

$$\omega^3 + 3\omega^2 - \frac{15}{4}\omega - \frac{1}{4} = 0 \quad (4)$$

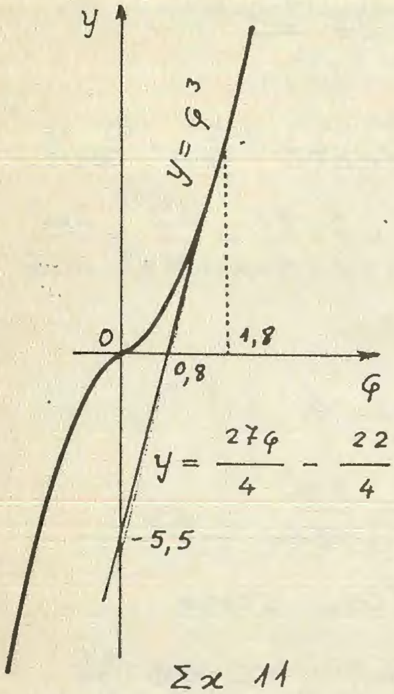
που είναι πλήρης $3^{ου}$ βαθμού.

Θέτω $\omega = \varphi - \frac{3}{3} = \varphi - 1 \quad (5)$

και έχω απ' την (4):

$$(\varphi - 1)^3 + 3(\varphi - 1)^2 - \frac{15}{4}(\varphi - 1) - \frac{1}{4} = \varphi^3 - \frac{27\varphi}{4} + \frac{22}{4} = 0 \quad (6)$$

Η (6) γράφεται $\varphi^3 = \dfrac{27\varphi}{4} - \dfrac{22}{4}$



Σχ 11

Κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις των $y=\varphi^3$ και $y = \dfrac{27\varphi}{4} - \dfrac{22}{4}$ βρίσκουμε μια πρώτη προσέγγιση το σημείο $\varphi_0 = 1{,}8$ την οποία βελτιώνουμε με το σχήμα Horner απ τον τύπο $\varphi_{\nu+1} = \varphi_\nu - \dfrac{P(\varphi_\nu)}{P'(\varphi_\nu)}$ όπου $P(\varphi) = \varphi^3 - \dfrac{27\varphi}{4} + \dfrac{22}{4}$.

	1	0	−6,75	5,5
$\varphi_0 = 1{,}8$		1,8	3,24	−6,31
	1	1,8	−3,51	$-0{,}818 = P(\varphi_0)$
$\varphi_0 = 1{,}8$		1,8	6,48	
	1	3,6	$2{,}97 = P'(\varphi_0)$	

άρα $\varphi_1 = \varphi_0 - \dfrac{P(\varphi_0)}{P'(\varphi_0)} = 1{,}8 - \dfrac{-0{,}818}{2{,}97} \simeq 2{,}07542088$

Εξακολουθούμε για μια 3η προσέγγιση φ_2. Έχουμε

	1	0	−6,75	5,5
$\varphi_1 = 2{,}07542088$		2,07542088	4,30737183	−5,06948151
	1	2,07542088	−2,44262817	$0{,}43051849 = P(\varphi$
$\varphi_1 = 2{,}07542088$		2,07542088	8,61474366	
	1	4,15084176	$6{,}17211549 = P'(\varphi_1)$	

άρα $\varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{P(\varphi_1)}{P'(\varphi_1)} = 2{,}07542088 - \dfrac{0{,}43051849}{6{,}17211549} \simeq 2{,}0056687$

Η τέταρτη προσέγγιση δίνει

	1	0	−6,75	5,5
$\varphi_2 = 2{,}0056687$		2,0056687	4,02270693	−5,47004634
	1	2,0056687	−2,72729307	$0{,}02995366 = p(\varphi_2)$
$\varphi_2 = 2{,}0056687$		2,0056687	8,04541387	
	1	4,0113374	$5{,}31812080 = p'(\varphi_2)$	

άρα $\varphi_3 = \varphi_2 - \frac{P(\varphi_2)}{P'(\varphi_2)} = 2{,}0056687 - \frac{0{,}02995366}{5{,}31812080} \simeq 2{,}00003632$

που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικής ρίζας $\varphi = 2$.

Απ' την (5) για $\varphi = 2$ προκύπτει $w = 2 - 1 = 1$ οπότε η σχέση $\lambda^2 = w$ δίνει $\lambda^2 = 1$ άρα $\lambda = \pm 1$.

Για $\lambda = 1$ το σύστημα (2) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} \mu + \nu &= 10 \\ \nu - \mu &= -2 \end{aligned}\right\} \text{το οποίο δίνει } \mu = 6,\ \nu = 4$$

Για $\lambda = -1$ το σύστημα (2) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} \mu + \nu &= 10 \\ \nu - \mu &= 2 \end{aligned}\right\} \text{το οποίο δίνει } \mu = 4,\ \nu = 6$$

δηλ. τελικά πρόκειται για τα ίδια πολυώνυμα που θα είναι τα $z^2 + 2z + 6$

$z^2 - 2z + 4$.

Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις $z^2+2z+6=0$, $z^2-2z+4=0$ βρίσκουμε τις λύσεις:

απ' τη πρώτη: $z_1 = -1 + \sqrt{5}\,i$, $z_2 = -1 - \sqrt{5}\,i$

απ' τη δεύτερη: $z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $z_4 = 1 - \sqrt{3}\,i$

οπότε απ' τη σχέση (1) προκύπτουν οι τελικές ρίζες:

$x_1 = -2 + \sqrt{5}\,i$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}\,i$

$x_3 = \sqrt{3}\,i$, $x_4 = -\sqrt{3}\,i$

6) Συνδυάζοντας τη μέθοδο ακολουθιών του Sturm και την επαναληπτική μέθοδο των Newton - Raphson υπολογίστε τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - 2{,}4x^3 + 1{,}03x^2 + 0{,}6x - 0{,}32 = 0$$

Λύση

Έστω $f_0(x) = x^4 - 2{,}4x^3 + 1{,}03x^2 + 0{,}6x - 0{,}32$

Σχηματίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων του Sturm.
Έχουμε

$$f_1(x) = f_0'(x) = 4x^3 - 7{,}2x^2 + 2{,}06x - 0{,}6 .$$

Επειδή μας ενδιαφέρουν μόνο τα πρόσημα των διαφόρων $f_i(x)$, πολλαπλασιάζουμε την $f_1(x)$ με $1/4$ για να γίνει μονάδα ο συντελεστής του τριτοβάθμιου όρου, οπότε προκύπτει

$$f_1(x) = x^3 - 1{,}8x^2 + 0{,}515x + 0{,}15$$

Εκτελώντας τη διαίρεση του $f_0(x)$ με το $f_1(x)$ βρίσκουμε

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2{,}4x^3 & +1{,}03x^2 & +0{,}6x & -0{,}32 & x^3-1{,}8x^2+0{,}515x+0{,}15 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +1{,}8x^3 & -0{,}515x^2 & -0{,}15x & & \quad x-0{,}6 \\
\cline{1-5}
 & -0{,}6x^3 & +0{,}515x^2 & +0{,}45x & -0{,}32 & \quad \pi_1(x) \\
 & -0{,}6x^3 & -1{,}08x^2 & +0{,}309x & +0{,}09 & \\
\cline{2-5}
 & & -0{,}565x^2 & +0{,}759x & -0{,}23 &
\end{array}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.3. αλλάζουμε το πρόσημο. Κάνοντας ακόμα τον μεγιστοβάθμιο όρο του x^2 μονάδα

έχουμε $\quad f_2(x) = x^2 - 1{,}3434x + 0{,}4071.$

Διαιρώντας πάλι το $f_1(x)$ με το $f_2(x)$ βρίσκουμε

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -1{,}8x^2 & +0{,}515x & +0{,}15 & x^2-1{,}3434x+0{,}4071 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +1{,}3434x^2 & -0{,}4071x & & \quad x-0{,}4566 \\
\cline{1-4}
 & -0{,}4566x^2 & +0{,}1079x & +0{,}15 & \quad \pi_2(x) \\
 & +0{,}4566x^2 & -0{,}6134x & +0{,}1859 & \\
\cline{2-4}
 & & -0{,}5055x & +0{,}3359 &
\end{array}$$

Το υπόλοιπο μετασχηματίζεται πάλι όπως προηγούμενα

στο $\quad f_3(x) = x - 0{,}6645$

Τέλος διαιρώντας το $f_2(x)$ με το $f_3(x)$ βρίσκουμε

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 1,3434x + 0,4071 & x - 0,6645 \\ \cline{2-2} -x^2 + 0,6645x & \underbrace{x - 0,6789}_{\pi_3(x)} \\ \cline{1-1} -0,6789x + 0,4071 & \\ 0,6789x - 0,4511 & \\ \cline{1-1} -0,0440 & \end{array}$$

Αλλάζουμε το πρόσημο και στο τελευταίο υπόλοιπο οπότε έχουμε $f_4(x) = 0,044$

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.3. οι συναρτήσεις $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ και $f_4(x)$ αποτελούν μια ακολουθία συναρτήσεων του Sturm

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα 4.4.2. για τυχαίες τιμές π.χ $-\infty$, -1, 0, 1, 2, $+\infty$ (ξεκινάμε απ' το $-\infty$, παίρνουμε 4 τιμές κοντά στο 0 και το $+\infty$), οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα που μας δίνει τις μεταβολές του προσήμου των f_0, f_1, f_2, f_3, f_4.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Μετ
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+1$	4
-1	3,51	$-3,165$	2,7505	$-1,6645$	$+1$	4
0	$-0,32$	0,15	0,4071	$-0,6645$	$+1$	3
1	$-0,09$	$-0,135$	0,0637	0,3355	$+1$	1
2	1,8	1,98	1,7203	1,3355	$+1$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+1$	0

Απ' τον πίνακα βλέπουμε ότι υπάρχει μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$, 2 ρίζες στο διάστημα $(0,1)$ και μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Για να βρούμε τώρα με ακρίβεια τις ρίζες, ύστερα από τον εντοπισμό τους, παίρνουμε αρχικές τιμές στα

στα διαστήματα αυτά και εφαρμόζουμε την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson για κάθε ρίζα.

Για τη μικρότερη ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ παίρνουμε μια αρχική προσέγγιση $x_0 = -0{,}6$. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2{,}4 & 1{,}03 & 0{,}6 & -0{,}32 \\
x_0 = -0{,}6 & & -0{,}6 & 1{,}8 & -1{,}698 & 0{,}6588 \\
\hline
 & 1 & -3{,}0 & 2{,}83 & -1{,}098 & \boxed{0{,}3388} = f(x_0) \\
x_0 = -0{,}6 & & -0{,}6 & 2{,}16 & -2{,}994 & \\
\hline
 & 1 & -3{,}6 & 4{,}99 & \boxed{-4{,}092} = f'(x_0) &
\end{array}
$$

Οπότε από την επαναληπτική μέθοδο Newton - Raphson προκύπτει μια καλή προσέγγιση της πρώτης ρίζας

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0{,}6 - \frac{0{,}3388}{-4{,}092} \simeq -0{,}5172.$$

Για τη μεγαλύτερη ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$ παίρνουμε μια αρχική προσέγγιση $x_0 = 1{,}7$· έτσι έχουμε

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2{,}4 & 1{,}03 & 0{,}6 & -0{,}32 \\
x_0 = 1{,}7 & & 1{,}7 & -1{,}19 & -0{,}272 & 0{,}5576 \\
\hline
 & 1 & -0{,}7 & -0{,}16 & 0{,}328 & \boxed{0{,}2376} = f(x_0) \\
x_0 = 1{,}7 & & 1{,}7 & 1{,}7 & 2{,}618 & \\
\hline
 & 1 & 1{,}0 & 1{,}54 & \boxed{2{,}946} = f'(x_0) &
\end{array}
$$

οπότε η μεγαλύτερη ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ βρίσκεται

$$x_4 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1{,}7 - \frac{0{,}2376}{2{,}946} \simeq 1{,}61935$$

Για τις άλλες δύο ρίζες x_2, x_3 στο διάστημα $(0,1)$ παίρνουμε δύο αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = 0{,}4$ και $x_0 = 0{,}9$ αντίστοιχα, οπότε οι ακριβέστερες ρίζες τους θα είναι

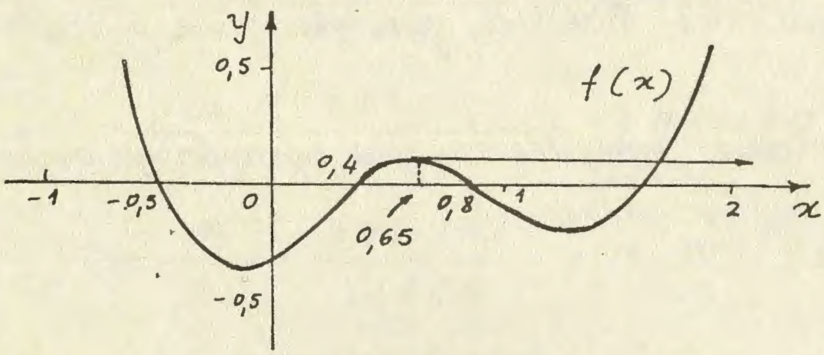
$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 1 & -2,4 & 1,03 & 0,6 & -0,32 \\
x_0 = 0,4 & & 0,4 & -0,8 & 0,092 & 0,2768 \\
\hline
 & 1 & -2,0 & 0,23 & 0,692 & \boxed{-0,0432} = f(x_0) \\
x_0 = 0,4 & & 0,4 & -0,64 & -0,164 & \\
\hline
 & 1 & -1,6 & -0,41 & \boxed{0,528} = f'(x_0) &
\end{array}
$$

$$\text{άρα} \quad x_2 = 0,4 - \frac{-0,0432}{0,528} \simeq 0,40818$$

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 1 & -2,4 & 1,03 & 0,6 & -0,32 \\
x_0 = 0,9 & & 0,9 & -1,35 & -0,288 & 0,2808 \\
\hline
 & 1 & -1,5 & -0,32 & 0,312 & \boxed{-0,0392} = f(x_0) \\
x_0 = 0,9 & & 0,9 & -0,54 & -0,774 & \\
\hline
 & 1 & -0,6 & -0,86 & \boxed{-0,462} = f'(x_0) &
\end{array}
$$

$$\text{άρα} \quad x_3 = 0,9 - \frac{-0,0392}{-0,462} \simeq 0,81515$$

Όπως διαπιστώσαμε στο διάστημα (0,1), αρχίζοντας με μια τιμή λίγο μικρότερη από 0,5 βρήκαμε τη ρίζα $x_2 = 0,40818$. Για την x_3 ξεκινήσαμε με τιμή λίγο μεγαλύτερη από 0,8. Αν όμως αρχίζαμε με



Σχ. 12

μια τιμή, περίπου μεταξύ των 0,5 και 0,8 δηλ. 0,65, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson, θα βρίσκαμε μια προσεγγιστική τιμή 6,1125 έξω από το διάστημα (0,1) και συνεχίζοντας θα προσεγγίζαμε την x_4. Αυτό συμβαίνει γιατί στο σημείο 0,65, όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση, η εφαπτομένη τέμνει μακριά τον οx. Κι αυτό γιατί το σημείο $x=0,65$ βρίσκεται κοντά σε τοπικό ακρόταto (εδώ μέγιστο) της καμπύλης, οπότε σ' αυτό ξέρουμε ότι η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον ox, όπως τονίσαμε στην πρώτη απόδειξη του θεωρήματος των Newton - Raphson.

7) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$P(x)=32x^3-48x^2+18x-1=0$$

με βάση τον αλγόριθμο των πηλίκων - διαφορών.

Λύση

Υπολογίζουμε στην αρχή τους συντελεστές της δυναμοσειράς

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa x^\kappa = \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3+\cdots$$

έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$1=(1-18x+48x^2-32x^3)(\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3+\beta_4 x^4+\cdots)$$

(αλλάξαμε τα πρόσημα της $P(x)=0$, για να γίνει ο σταθερός όρος μονάδα).

Εξισώνοντας τώρα τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων προκύπτουν οι εξής σχέσεις

$$\beta_0=1$$
$$\beta_1-18\beta_0=0$$
$$\beta_2-18\beta_1+48\beta_0=0$$
$$\beta_3-18\beta_2+48\beta_1-32\beta_0=0$$
$$\beta_4-18\beta_3+48\beta_2-32\beta_1=0$$
$$\beta_5-18\beta_4+48\beta_3-32\beta_2=0$$
$$\beta_6-18\beta_5+48\beta_4-32\beta_3=0$$

Απ' τις εξισώσεις που έχουν προκύψει, εύκολα υπολογίζουμε τους συντελεστές $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$. (Αν θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια συνεχίζουμε τον υπολογισμό περισσότερων β_κ). Έχουμε

$\beta_0 = 1$

$\beta_1 = 18 \cdot 1 = 18$

$\beta_2 = 18 \cdot 18 - 48 = 276$

$\beta_3 = 18 \cdot 276 - 48 \cdot 18 + 32 = 4.136$

$\beta_4 = 18 \cdot 4136 - 48 \cdot 276 + 32 \cdot 18 = 61.776$

$\beta_5 = 18 \cdot 61776 - 48 \cdot 4136 + 32 \cdot 276 = 922.272$

$\beta_6 = 18 \cdot 922.272 - 48 \cdot 61776 + 32 \cdot 4136 = 13.768.000$

Σχηματίζουμε τώρα τους λόγους $q_\kappa = \dfrac{\beta_\kappa}{\beta_{\kappa-1}}$. Έτσι έχουμε:

$$q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{18}{1} = 18$$

$$q_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{276}{18} = 15,333333$$

$$q_3 = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{4136}{276} = 14,985507$$

$$q_4 = \frac{\beta_4}{\beta_3} = \frac{61776}{4136} = 14,936170$$

$$q_5 = \frac{\beta_5}{\beta_4} = \frac{922.272}{61776} = 14,929293$$

$$q_6 = \frac{\beta_6}{\beta_5} = \frac{13.768.000}{922.272} = 14,928351.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις διαφορές $\varepsilon_\kappa = q_{\kappa+1} - q_\kappa$.

$\varepsilon_1 = q_2 - q_1 = 15,333333 - 18 = -2,666667$

$\varepsilon_2 = q_3 - q_2 = 14,985507 - 15,333333 = -0,347833$

$\varepsilon_3 = q_4 - q_3 = 14,936170 - 14,985507 = -0,049337$

$\varepsilon_4 = q_5 - q_4 = 14,929293 - 14,936170 = -0,006877$

$\varepsilon_5 = q_6 - q_5 = 14,928351 - 14,929293 = -0,000942$

Τώρα υπολογίζουμε τα πηλίκα $p_\kappa = \dfrac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_{\kappa-1}} q_\kappa$.

Όπως ξέρουμε $\lim\limits_{\kappa\to\infty} q_\kappa = \dfrac{1}{\zeta_1}$ ενώ

$$\lim_{\kappa\to\infty} p_\kappa = \frac{1}{\zeta_2}$$

όπου ζ_1 είναι η μικρότερη και ζ_2 η αμέσως μεγαλύτερη ρίζα της $P(x)=0$. Είναι $p_1 = 0$,

$$p_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot q_2 = \frac{-0,347833}{-2,666667} . 15,333333 = 2,000040$$

$$p_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \cdot q_3 = \frac{-0,049337}{-0,347833} . 14,985507 = 2,125560$$

$$p_4 = \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} \cdot q_4 = \frac{-0,006877}{-0,049337} . 14,936170 = 2,081927$$

$$p_5 = \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_4} \cdot q_5 = \frac{-0,000942}{-0,006877} . 14,929293 = 2,044990$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τις διαφορές $\varepsilon'_\kappa = (p_{\kappa+1} - p_\kappa) + \varepsilon_\kappa$.

$$\varepsilon'_1 = (p_2 - p_1) + \varepsilon_1 = -0,666627$$

$$\varepsilon'_2 = (p_3 - p_2) + \varepsilon_2 = -0,222313$$

$$\varepsilon'_3 = (p_4 - p_3) + \varepsilon_3 = -0,092970$$

$$\varepsilon'_4 = (p_5 - p_4) + \varepsilon_4 = -0,043814$$

Και τέλος υπολογίζουμε τα πηλίκα $p'_\kappa = \dfrac{\varepsilon'_\kappa}{\varepsilon'_{\kappa-1}} \cdot p_\kappa$ απ' όπου $\lim\limits_{\kappa\to\infty} p'_\kappa = \dfrac{1}{\zeta_3}$ όπου ζ_3 η μεγαλύτερη ρίζα.

$$p'_2 = \frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1} \cdot p_2 = \frac{-0,222313}{-0,666627} . 2,000040 = 0,666992$$

$$p'_3 = \frac{\varepsilon'_3}{\varepsilon'_2} \cdot p_3 = \frac{-0,092970}{-0,222313} . 2,125560 = 0,888897$$

$$p'_4 = \frac{\varepsilon'_4}{\varepsilon'_3} \cdot q_4 = \frac{-0,043814}{-0,092970} . 2,081927 = 0,981150$$

μηδέν, τότε δύο ρίζες έχουν ίσες απόλυτες τιμές. Στην περίπτωση που είναι μιγαδικές, εφαρμόζουμε την εξίσωση

$$q_{\kappa-1} P_\kappa x^2 - (q_\kappa + P_\kappa)x + 1 = 0$$

για να βρούμε τις μιγαδικές ρίζες ζ_1, ζ_2, όπως θα δούμε στην παρακάτω εφαρμογή.

8) Να βρεθεί η πραγματική ρίζα και οι δύο συζυγείς μιγαδικές της εξίσωσης του Leonardo

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των πηλίκων-διαφορών.

Λύση

Η εξίσωση $P(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ γράφεται

$$1 - 0{,}5x - 0{,}1x^2 - 0{,}05x^3 = 0 \quad (\text{διαιρούμε με } -20).$$

Υπολογίζουμε τώρα τους συντελεστές της δυναμοσειράς

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \beta_\kappa x^\kappa = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots$$

έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$1 = (1 - 0{,}5x - 0{,}1x^2 - 0{,}05x^3)(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \cdots).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων, έχουμε:

$$\beta_0 = 1$$
$$\beta_1 - 0{,}5\beta_0 = 0$$
$$\beta_2 - 0{,}5\beta_1 - 0{,}1\beta_0 = 0$$
$$\beta_3 - 0{,}5\beta_2 - 0{,}1\beta_1 - 0{,}05\beta_0 = 0$$
$$\beta_4 - 0{,}5\beta_3 - 0{,}1\beta_2 - 0{,}05\beta_1 = 0$$
$$\beta_5 - 0{,}5\beta_4 - 0{,}1\beta_3 - 0{,}05\beta_2 = 0$$
$$\beta_6 - 0{,}5\beta_5 - 0{,}1\beta_4 - 0{,}05\beta_3 = 0$$
$$\beta_7 - 0{,}5\beta_6 - 0{,}1\beta_5 - 0{,}05\beta_4 = 0$$
$$\beta_8 - 0{,}5\beta_7 - 0{,}1\beta_6 - 0{,}05\beta_5 = 0$$

Απ' τις εξισώσεις που έχουν προκύψει υπολογίζουμε, όπως πριν

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε σε πίνακα που περιέχει τα β_κ, q_κ, ε_κ, P_κ, ε'_κ, P'_κ έχουμε

κ	β_κ	q_κ	ε_κ	P_κ	ε'_κ	P'_κ
0	1					
1	18	18	-2,666667	0	-0,666627	0
2	276	15,333333	-0,347833	2,000040	-0,222313	0,666992
3	4.136	14,985507	0,049337	2,125560	-0,092970	0,888897
4	61.776	14,936170	0,006877	2,081927	-0,043814	0,981150
5	922.272	14,929293	0,000942	2,044990		
6	13.768.000	14,928351				

Αν πάρουμε τώρα τους αντίστροφους των q_6, P_5, P'_4, βρίσκουμε με καλή προσέγγιση τις τελικές τιμές των ριζών της εξίσωσης που είναι:

$$\zeta_1 = 0,066987$$

$$\zeta_2 = 0,48900$$

$$\zeta_3 = 1,019212$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός 0,5 είναι ρίζα της εξίσωσης, ενώ ο 1 δεν είναι ρίζα.

Ο αλγόριθμος αυτός γενικά έχει αργή σύγκλιση, γιατί αποδεικνύεται ότι αυτή είναι γραμμική. Μπορούμε όμως να έχουμε μια σχετικά καλή προσέγγιση, και στη συνέχεια με τη μέθοδο Newton-Raphson να τη βελτιώσουμε. Στην πράξη, μετά από πολλά βήματα, τα σφάλματα στις μικρότερες ρίζες είναι μεγάλα, ώστε η μέθοδος Newton-Raphson να μη συγκλίνει. Γι αυτό τη μέθοδο Newton-Raphson τη χρησιμοποιούμε κυρίως έχοντας αρχικές προσεγγίσεις.

Στην περίπτωση που οι στήλες ε_κ, ε'_κ, ... δεν τείνουν στο τους συντελεστές $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$. Είναι

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_1 = 0{,}5$$

$$\beta_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}35$$

$$\beta_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}35 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 = 0{,}275$$

$$\beta_4 = 0{,}5 \cdot 0{,}275 + 0{,}1 \cdot 0{,}35 + 0{,}05 \cdot 0{,}5 = 0{,}1975$$

$$\beta_5 = 0{,}5 \cdot 0{,}1975 + 0{,}1 \cdot 0{,}275 + 0{,}05 \cdot 0{,}35 = 0{,}14375$$

$$\beta_6 = 0{,}5 \cdot 0{,}14375 + 0{,}1 \cdot 0{,}1975 + 0{,}05 \cdot 0{,}275 = 0{,}105375$$

$$\beta_7 = 0{,}5 \cdot 0{,}105375 + 0{,}1 \cdot 0{,}14375 + 0{,}05 \cdot 0{,}1975 = 0{,}0769375$$

$$\beta_8 = 0{,}5 \cdot 0{,}0769375 + 0{,}1 \cdot 0{,}105375 + 0{,}05 \cdot 0{,}14375 = 0{,}05619375$$

Σχηματίζουμε τώρα τους λόγους $q_\kappa = \dfrac{\beta_\kappa}{\beta_{\kappa-1}}$. Έχουμε

$$q_1 = \frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

$$q_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$$

$$q_3 = \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{0{,}275}{0{,}35} = 0{,}785714286$$

$$q_4 = \frac{\beta_4}{\beta_3} = \frac{0{,}1975}{0{,}275} = 0{,}718181818$$

$$q_5 = \frac{\beta_5}{\beta_4} = \frac{0{,}14375}{0{,}1975} = 0{,}727848101$$

$$q_6 = \frac{\beta_6}{\beta_5} = \frac{0{,}105375}{0{,}14375} = 0{,}733043478$$

$$q_7 = \frac{\beta_7}{\beta_6} = \frac{0{,}0769375}{0{,}105375} = 0{,}730130486$$

$$q_8 = \frac{\beta_8}{\beta_7} = \frac{0{,}05619375}{0{,}0769375} = 0{,}730381803$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις διαφορές $\varepsilon_\kappa = q_{\kappa+1} - q_\kappa$.

$\varepsilon_1 = q_2 - q_1 = 0,2$

$\varepsilon_2 = q_3 - q_2 = 0,085714286$

$\varepsilon_3 = q_4 - q_3 = -0,067532468$

$\varepsilon_4 = q_5 - q_4 = 0,09666283$

$\varepsilon_5 = q_6 - q_5 = 0,005195377$

$\varepsilon_6 = q_7 - q_6 = -0,002912992$

$\varepsilon_7 = q_8 - q_7 = 0,000251317$

Τώρα υπολογίζουμε τα πηλίκα $p_\kappa = \dfrac{\varepsilon_\kappa}{\varepsilon_{\kappa-1}} q_\kappa$. Είναι $p_1 = 0$

$$p_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot q_2 = 0,300000001$$

$$p_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \cdot q_3 = -0,619047622$$

$$p_4 = \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} \cdot q_4 = -0,102797201$$

$$p_5 = \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_4} \cdot q_5 = 0,391199521$$

$$p_6 = \frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_5} \cdot q_6 = -0,411009593$$

$$p_7 = \frac{\varepsilon_7}{\varepsilon_6} \cdot q_7 = -0,062991761$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τις διαφορές $\varepsilon_\kappa' = (p_{\kappa+1} - p_\kappa) + \varepsilon_\kappa$.

$\varepsilon_1' = (p_2 - p_1) + \varepsilon_1 = 0,500000001$

$\varepsilon_2' = (p_3 - p_2) + \varepsilon_2 = -0,833333336$

$\varepsilon_3' = (p_4 - p_3) + \varepsilon_3 = 0,448717953$

$\varepsilon_4' = (p_5 - p_4) + \varepsilon_4 = 0,503663005$

$\varepsilon_5' = (p_6 - p_5) + \varepsilon_5 = -0,797013737$

$\varepsilon_6' = (p_7 - p_6) + \varepsilon_6 = 0,345104840$

Και τέλος υπολογίζουμε τα πηλίκα $p_k' = \dfrac{\varepsilon_k'}{\varepsilon_{k-1}'} \cdot p_k \cdot (p_1'=0)$

$$p_2' = \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'} \cdot p_2 = -0,500000002$$

$$p_3' = \frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'} \cdot p_3 = 0,333333337$$

$$p_4' = \frac{\varepsilon_4'}{\varepsilon_3'} \cdot p_4 = -0,115384613$$

$$p_5' = \frac{\varepsilon_5'}{\varepsilon_4'} \cdot p_5 = -0,619047635$$

$$p_6' = \frac{\varepsilon_6'}{\varepsilon_5'} \cdot p_6 = 0,177966067$$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε σε πίνακα που περιέχει τα β_k, q_k, ε_k, p_k, ε_k', p_k' (με ακρίβεια έξη δεκαδικών λόγω περιορισμένου χώρου), έχουμε

k	β_k	q_k	ε_k	p_k	ε_k'	p_k'
0	1					
1	0,5	0,5	0,2	0	0,500000	0
2	0,35	0,7	0,085714	0,300000	-0,833333	-0,50000
3	0,275	0,785714	-0,067532	-0,619048	0,448718	0,333333
4	0,1975	0,718182	0,096663	-0,102797	0,503663	-0,115385
5	0,14375	0,727848	0,005195	0,391200	-0,797014	-0,619048
6	0,105375	0,733043	-0,029130	-0,411010	0,345105	0,177966
7	0,07694	0,730130	0,000251	-0,062992		
8	0,056194	0,730382				

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη q_k συγκλίνει στον αριθμό $q_8 = 0,730381803 = \dfrac{1}{\zeta_1}$ οπότε $\zeta_1 = 1,369146925$ που είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικής ρίζας.

Ακόμα παρατηρούμε ότι οι στήλες P_κ, P_κ' δεν συγκλίνουν, που σημαίνει ότι υπάρχουν πιθανόν δύο μιγαδικές ρίζες.

Παίρνοντας τα γινόμενα $P_{\kappa-1}\cdot P_\kappa'$ και τα αθροίσματα $P_\kappa + P_\kappa'$ παρατηρούμε ότι:

$$P_2\cdot P_3' = 0,300000001\cdot 0,333333337 = 0,1000000001$$

$$P_3\cdot P_4' = (-0,619047622)\cdot(-0,115384613) = 0,071428570$$

$$P_4\cdot P_5' = (-0,102797201)\cdot(-0,619047635) = 0,063636364$$

$$P_5\cdot P_6' = 0,391199521\cdot 0,177966067 = 0,069620240$$

Επίσης

$$P_2 + P_2' = 0,300000001 + (-0,500000002) = -0,200000001$$

$$P_3 + P_3' = -0,619047622 + 0,333333337 = -0,285714285$$

$$P_4 + P_4' = -0,102797201 + (-0,115384613) = -0,218181814$$

$$P_5 + P_5' = 0,391199521 + (-0,619047635) = -0,227848114$$

$$P_6 + P_6' = -0,411009593 + 0,177966067 = -0,233043526$$

Δηλαδή τα $P_{\kappa-1}P_\kappa'$, $P_\kappa + P_\kappa'$ συγκλίνουν όσο αυξάνεται το k. Αν πάρουμε $P_5\cdot P_6' = 0,069620240$ και

$$P_6 + P_6' = -0,233043526$$

τότε λύνοντας την εξίσωση: $P_5\cdot P_6' x^2 - (P_6 + P_6')x + 1 = 0$

ή την $0,069620240x^2 + 0,233043526x + 1 = 0$

υπολογίζουμε τις μιγαδικές ρίζες που είναι

$$\zeta_2 = -1,673676549 + 3,400359673i$$

$$\zeta_3 = -1,673676549 - 3,400359673i$$

που αποτελούν κάπως καλές προσεγγίσεις των μιγαδικών ριζών. Είναι ακόμα $|\zeta_1| < |\zeta_2| = |\zeta_3| = 3,789939195$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε και άλλη μέθοδο προσδιορισμού των μιγαδικών ριζών (αν υπάρχουν) ενός πολυωνύμου, την μέθοδο Bairstow.

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι ρίζες των εξισώσεων

α) $x^3 - 6x^2 + 2x + 5 = 0$

β) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

γ) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$

δ) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 10x - 5 = 0$

με τη βοήθεια του σχήματος Horner

2) Εφαρμόστε τη μέθοδο ακολουθιών συναρτήσεων Sturm και την επαναληπτική μέθοδο Newton - Raphson και υπολογίστε τις ρίζες της εξίσωσης

$$4x^3 - 20x^2 + 13x + 12 = 0$$

3) Υπολογίστε με τη μέθοδο του Bernoulli τις ρίζες της εξίσωσης

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

4) Οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Υπολογίστε τις ρίζες αυτές με τη μέθοδο του αλγόριθμου πηλίκων - διαφορών.

5) Εφαρμόστε τη μέθοδο του αλγόριθμου πηλίκων - διαφορών και υπολογίστε τις πραγματικές και μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$$

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

5.1. Γενικά

Η επίλυση γραμμικών συστημάτων αποτελεί ένα από τα κυριώτερα θέματα της Αριθμητικής Ανάλυσης. Σε πολλά προβλήματα στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, καταλήγουμε σ' ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων. Το πρόβλημα αυτό δέν είναι τόσο εύκολο, όσο φαίνεται, αν λάβουμε υπόψη ότι ο αριθμός των αγνώστων είναι τεράστιος (σε ορισμένες περιπτώσεις επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους εμφανίζονται γραμμικά συστήματα με πάνω από 50.000 αγνώστους).

Γι' αυτό, ένα από τα πιο βασικά προβλήματα της Αριθμητικής Ανάλυσης, είναι η ανάπτυξη διάφορων μεθόδων για την αριθμητική επίλυση τέτοιων συστημάτων σε συνδυασμό με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Οι πίνακες ή μήτρες αποτελούν ένα σπουδαιότατο στοιχείο στα Καθαρά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Γι' αυτό, πριν προχωρήσουμε στις διάφορες μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, θα αναφερθούμε σε μερικά βασικά στοιχεία από τη θεωρία των πινάκων.

5.2. Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες πινάκων

Π ί ν α κ α ς (ή ορθογώνιος πίνακας) είναι κάθε ορθογώνια διάταξη αριθμών $a_{\kappa\lambda}$ $\kappa = 1, 2, \cdots, \mu$, $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu$ πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών σε μ γραμμές καί ν στήλες. Οι αριθμοί $a_{\kappa\lambda}$ αποτελούν τα στοιχεία του πίνακα.

Ένας πίνακας A συμβολίζεται

$$A = (a_{\kappa\lambda}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ & & & \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Οι αριθμοί μ, ν λέγονται δ ι α σ τ ά σ ε ι ς του A.

Το σύνολο όλων των πραγματικών αντίστοιχα μιγαδικών πινάκων με μ γραμμές και ν στήλες θα το συμβολίζουμε με $M_{\mu\nu}(\mathbb{R})$ αντίστοιχα $M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$

Δύο πίνακες $A = (a_{\kappa\lambda})$, $B = (\beta_{\kappa\lambda}) \in M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$ είναι ίσοι όταν $a_{\kappa\lambda} = \beta_{\kappa\lambda}$ $\forall\ \kappa = 1, 2, \cdots, \mu$, $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu$

Ένας πίνακας που αποτελείται από μια γραμμή αντίστοιχα μια στήλη λέγεται πίνακας - γραμμή ή διάνυσμα - γραμμή αντίστοιχα - στήλη. Το σύνολο όλων των ν διαστάσεων διανυσμάτων το συμβολίζουμε με $V_\nu(\mathbb{C})$.

Τα διανύσματα θα τα παριστάνουμε με παχιά γραμμή.

Για $\nu = \mu$ ο πίνακας λέγεται τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ό ς και ο αριθμός ν τ ά ξ η του πίνακα.

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{\kappa\lambda}) \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$.

$$\text{Αν} \quad a_{\kappa\lambda} = \begin{cases} a_\kappa & \text{για } \kappa = \lambda \\ 0 & \text{'' } \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

ο A λέγεται δ ι α γ ώ ν ι ο ς. Ειδικότερα λέγεται

α ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς όταν $a_\kappa = a \neq 0, 1$ $\forall\ \kappa = 1, 2, \cdots, \nu$

μ ο ν α δ ι α ί ο ς " $a_\kappa = 1$ και συμβολίζεται με I

μ η δ ε ν ι κ ό ς " $a_\kappa = 0$ $\forall\ \kappa = 1, 2, \cdots, \nu$

Αν αλλάξουμε τις γραμμές ενός πίνακα $A \in M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$ και τις κάνουμε στήλες και τις στήλες γραμμές, ο πίνακας που προκύπτει λέγεται α ν ά σ τ ρ ο φ ο ς του A και συμβολίζεται με A'.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$ λέγεται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ό ς όταν είναι $A = A'$.

Η ορίζουσα που αντιστοιχεί σ' ένα τετραγωνικό πίνακα $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$ συμβολίζεται με $|A|$ ή $det(A)$ (από τη λέξη determinant = ορίζουσα).

Έστω πίνακας $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$. Καλείται ε λ ά σ σ ω ν ορίζουσα ρ τάξης όπου $0 < \rho \leq \min(\mu, \nu)$ του πίνακα A η αντίστοιχη ορίζουσα κάθε πίνακα ρ τάξης που προκύπτει από τον A με αποκοπή $\mu - \rho$ αυθαίρετων γραμμών και $\nu - \rho$ αυθαίρετων στηλών.

Β α θ μ ό ς (rank) ενός πίνακα $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$ είναι η μεγαλύτερη τάξη των διάφορων του O ελασσόνων οριζουσών του πίνακα A.

Έστω δύο πίνακες $A = (\alpha_{\kappa\lambda})$, $B = (\beta_{\kappa\lambda}) \in M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$ και $\alpha \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις στους πίνακες:

1) Άθροισμα αντίστοιχα διαφορά του A και B ορίζουμε τον πίνακα $\Gamma = A \pm B = (\alpha_{\kappa\lambda} \pm \beta_{\kappa\lambda})$

2) Γινόμενο του α επί τον πίνακα A ορίζουμε τον πίνακα $\Gamma = \alpha \cdot A = (\alpha \cdot \alpha_{\kappa\lambda})$

Για το γινόμενο δύο πινάκων A και B, πρέπει ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα A να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δευτέρου πίνακα B.

Έστω λοιπόν $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\mu\nu}(\mathbb{C})$ και $B = (\beta_{\lambda\rho}) \in M_{\nu\sigma}(\mathbb{C})$

Ορίζουμε $\Gamma = A \cdot B = (\gamma_{\kappa\rho}) \in M_{\mu\sigma}(\mathbb{C})$ με $\gamma_{\kappa\rho} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_{\kappa\lambda}\beta_{\lambda\rho}$.

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A=(a_{\kappa\lambda})\in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$. Η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \cdots\cdots & a_{\nu\nu}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A και γράφεται σύντομα $|A-\lambda I|=0$

Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα αυτή, προκύπτει ένα πολυώνυμο $p(\lambda)$ ν βαθμού, που λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Οι ρίζες του λέγονται ιδιοτιμές ή χαρακτηριστικοί αριθμοί του A.

Αν $\lambda i\in\mathbb{C}$ $i=1,2,\cdots,\nu$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A (χωρίς να αποκλείονται και ίσες ιδιοτιμές), ο αριθμός (μή αρνητικός) $\rho(A)=max|\lambda i|$ $i=1,2,\cdots,\nu$ λέγεται φασματική ακτίνα του πίνακα A.

Κάθε τετραγωνικός πίνακας L αντίστοιχα $R\in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$ μέ

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0\cdots\cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{\nu 1} & l_{\nu 2} & l_{\nu 3}\cdots & 0 \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\cdots\cdots & r_{1\nu} \\ 0 & r_{22} & r_{23}\cdots & r_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots & r_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

λέγεται κάτω αντίστοιχα πάνω $\nu\times\nu$ τριγωνικός πίνακας. Οι τριγωνικοί πίνακες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.

α) Η ορίζουσα ενός κάτω ή πάνω τριγωνικού πίνακα ισούται με τό γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων αυτού. Δηλ. αν $A=(a_{ij})$ τριγωνικός, τότε $|A|=\prod\limits_{i=1} a_{ii}$

β) Το γινόμενο δύο $\nu\times\nu$ τριγωνικών πινάκων του ίδιου είδους L ή R είναι επίσης ένας $\nu\times\nu$ τριγωνικός πίνακας του ίδιου είδους L ή R.

Το παρακάτω θεώρημα που αναφέρεται στους τριγωνικούς πίνακες είναι πολύ βασικό για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Θεώρημα 5.2.1.

Έστω ο $\nu \times \nu$ τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ & & & \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{με } \alpha_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \cdots, |A| \neq 0$$

Τότε υπάρχουν ένας κάτω $\nu \times \nu$ τριγωνικός πίνακας L καί ένας πάνω $\nu \times \nu$ τριγωνικός πίνακας R, έτσι ώστε $A = R \cdot L$

Ένας πίνακας $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$ λέγεται δ ι α γ ω ν ί ω ς υ π ε ρ τ ε ρ ώ ν, αν ισχύει η σχέση

$$|\alpha_{\kappa\kappa}| \geq \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \kappa}}^{\nu} |\alpha_{\kappa\lambda}| \quad \forall \lambda = 1, 2, \cdots, \nu.$$

Έστω $A \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$. Ο πίνακας $A^m = A \cdot A \cdots A$ (m φορές) συγκλίνει πρός τον μηδενικό πίνακα 0 όταν $m \to \infty$, τότε και μόνο τότε, αν η φασματική ακτίνα $\rho(A) < 1$.

Η ορίζουσα $D_{\kappa\lambda}$ του $(\nu-1)\times(\nu-1)$ πίνακα, που προκύπτει από τον $\nu \times \nu$ πίνακα $A = (\alpha_{\kappa\lambda})$ με διαγραφή της κ γραμμής και της λ στήλης λέγεται ελάσσων ορίζουσα του A που αντιστοιχεί στό στοιχείο $\alpha_{\kappa\lambda}$.

Ο αριθμός $A_{\kappa\lambda} = (-1)^{\kappa+\lambda} D_{\kappa\lambda}$ λέγεται α λ γ ε β ρ ι κ ό σ υ μ π λ ή ρ ω μ α του στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$.

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας ενός πίνακα $A = (\alpha_{\kappa\lambda})$ κατά μήκος της κ γραμμής αντίστοιχα της λ στήλης είναι:

$$|A| = \alpha_{\kappa 1} A_{\kappa 1} + \alpha_{\kappa 2} A_{\kappa 2} + \cdots + \alpha_{\kappa\nu} A_{\kappa\nu} \quad \text{αντίστοιχα}$$

$$|A| = \alpha_{1\lambda} A_{1\lambda} + \alpha_{2\lambda} A_{2\lambda} + \cdots + \alpha_{\nu\lambda} A_{\nu\lambda}$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=(\alpha_{\kappa\lambda})$ $\nu\times\nu$ λέγεται *αντιστρέψιμος* ή *μη ιδιάζων*, αν υπάρχει πίνακας $B=(\beta_{\kappa\lambda})$ $\nu\times\nu$ τέτοιος ώστε $A\cdot B=I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας $\nu\times\nu$. Ο πίνακας B τότε λέγεται *αντίστροφος* του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

Αν υπάρχει ο αντίστροφος του A, ο A^{-1} τότε ισχύει

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I \quad \text{άρα}$$

$$|A|\cdot|A^{-1}|=1. \quad \text{Επομένως}$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει ο A^{-1} είναι $|A|\neq 0$

Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα A είναι ο

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{\nu1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{\nu2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1\nu}}{|A|} & \frac{A_{2\nu}}{|A|} & \frac{A_{3\nu}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{\nu\nu}}{|A|} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{\kappa\lambda}$ τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων $\alpha_{\kappa\lambda}$ του πίνακα A.

Θεωρούμε τώρα το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{\nu1}x_1+\alpha_{\nu2}x_2+\cdots+\alpha_{\nu\nu}x_\nu &= \beta_\nu \end{aligned} \qquad (1)$$

του οποίου οι συντελεστές $\alpha_{\kappa\lambda}$, β_κ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Αν παραστήσουμε με A τον πίνακα $(\alpha_{\kappa\lambda})$, με $\boldsymbol{x}$ το διάνυσμα $(x_1,x_2,\dots,x_\nu)'$ και με $\boldsymbol{\beta}$ το διάνυσμα $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\kappa)'$, τότε το σύστημα (1) γράφεται σύντομα

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του A ο A^{-1}, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με A^{-1} έχουμε

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\beta \quad \text{ή}$$

επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στο γινόμενο πινάκων, δηλ. $A(B\Gamma) = (AB)\cdot\Gamma$, θα έχουμε

$$(A^{-1}A)\,\mathbf{x} = A^{-1}\beta \quad \text{ή}$$

$$I\,\mathbf{x} = A^{-1}\beta \quad \text{άρα}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\beta$$

δηλ. βρίσκοντας τον αντίστροφο του πίνακα A, τον A^{-1} έχουμε αμέσως τη λύση του συστήματος.

5.3. Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Θα δώσουμε τώρα μια μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων που οφείλεται στον Gauss και είναι γνωστή από τα στοιχειώδη μαθηματικά σαν μέθοδος της απαλοιφής ή των αντιθέτων συντελεστών.

Έστω το σύστημα (1). Το σύστημα αυτό έχει μια λύση αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση του συστήματος είναι (κανόνας του Cramer)

$$x_\kappa = \frac{|A_\kappa|}{|A|} \qquad \kappa = 1, 2, \cdots, \nu$$

όπου $|A_\kappa|$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την $|A|$, αν αντικαταστήσουμε την κ στήλη με το διάνυσμα β.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου απαλοιφής του Gauss είναι ο ακόλουθος:

Υποθέτουμε ότι $a_{11} \neq 0$ (αν αυτό δεν συμβαίνει, αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων). Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος (1) με $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην i εξίσωση. Αυτό γίνεται για όλα τα $i = 2, 3, \cdots, \nu$ οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} x_\nu &= \beta_1 \\
\alpha'_{22} x_2 + \cdots + \alpha'_{2\nu} x_\nu &= \beta'_2 \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\
\alpha'_{\nu 2} x_2 + \cdots + \alpha'_{\nu\nu} x_\nu &= \beta'_\nu
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια υποθέτοντας πάλι ότι $\alpha'_{22} \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με $-\dfrac{\alpha_{i2}}{\alpha'_{22}}$ και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην i εξίσωση. Αυτό γίνεται για όλα τα $i = 3, 4, \cdots, \nu$ οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \cdots + \alpha_{1\nu} x_\nu &= \beta_1 \\
\alpha'_{22} x_2 + \alpha'_{23} x_3 + \cdots + \alpha'_{2\nu} x_\nu &= \beta'_2 \\
\alpha''_{33} x_3 + \cdots + \alpha''_{3\nu} x_\nu &= \beta''_3 \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\
\alpha''_{\nu 3} x_3 + \cdots + \alpha''_{\nu\nu} x_3 &= \beta''_\nu
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τελικά το σύστημα

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} x_\nu &= \beta_1 \\
\alpha'_{22} x_2 + \cdots + \alpha'_{2\nu} x_\nu &= \beta'_2 \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\
\alpha^{(\nu-1)}_{\nu\nu} x_\nu &= \beta^{(\nu-1)}_\nu
\end{aligned}$$

Απ' την τελευταία βρίσκουμε το x_ν. Το αντικαθιστούμε στην προτελευταία και υπολογίζουμε το $x_{\nu-1}$ κ.ο.κ μέχρι να υπολογίσουμε όλα τα x_i $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$.

Παρατήρηση

Μια παραλλαγή της μεθόδου του Gauss είναι η μέθοδος των Gauss-Jordan που συνίσταται στο εξής:

Αντί της απαλοιφής ενός αγνώστου μεταξύ μιας εξίσωσης και όλων των επομένων της, γίνεται ταυτόχρονα απαλοιφή του ίδιου αγνώστου μεταξύ της ίδιας εξίσωσης και των προηγούμενών της. Έτσι τελικά προκύπτει ένα διαγώνιο σύστημα:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & & & & = \beta_1 \\ & a_{22}x_2 & & & = \beta_2 \\ & & a_{33}x_3 & & = \beta_3 \\ & & & \cdots\cdots & \\ & & & a_{\nu\nu}x_\nu & = \beta_\nu \end{array}$$

Κάθε εξίσωση έχει ένα άγνωστο που βρίσκεται με μια διαίρεση.

5.4. Μέθοδος του Gauss στα ομογενή συστήματα

Έστω το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\nu}x_\nu &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \cdots + a_{\nu\nu}x_\nu &= 0 \end{aligned}$$

ή σύντομα με τη βοήθεια πινάκων

$$A\mathbf{x} = 0$$

Όπως ξέρουμε από τα στοιχειώδη μαθηματικά, το σύστημα αυτό έχει λύση διάφορη της μηδενικής ή τετριμμένης $(\mathbf{x} = 0)$, αν $|A| = 0$. Στην περίπτωση αυτή προφανώς ο βαθμός r του πίνακα A πληρεί τη σχέση $r < \nu$.

Ο υπολογισμός του βαθμού r του πίνακα, μπορεί να γίνει με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Δηλαδή με τη βοήθεια της μεθόδου απαλοιφής του Gauss και με ενδεχόμενη εναλλαγή της σειράς των αγνώστων, παίρνουμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1\nu}x_\nu &= 0 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2\nu}x_\nu &= 0 \\
a_{23}x_3 + \cdots + a_{3r}x_r + \cdots + a_{3\nu}x_\nu &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{rr}x_r + \cdots + a_{r\nu}x_\nu &= 0
\end{aligned}
$$

όπου οι υπόλοιπες $\nu - r$ εξισώσεις είναι της μορφής $0=0$

Ο τρόπος αυτός υπολογισμού του βαθμού r ενός πίνακα δίνει βασικά και μια μέθοδο επίλυσης γραμμικών ομογενών συστημάτων.

Από το σύστημα αυτό μπορούμε να εκφράσουμε τους r πρώτους άγνωστους $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_r$ συναρτήσει των υπόλοιπων $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_\nu$. Για κάθε αυθαίρετο σύστημα τιμών των $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_\nu$ έχουμε και μια λύση του συστήματος. Συνήθως εκλέγουμε για τους άγνωστους $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_\nu$ τις τιμές

$$
\begin{aligned}
x_{r+1} &= 1 \quad 0 \quad 0 \cdots 0 \\
x_{r+2} &= 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_\nu &= 0 \quad 0 \quad 0 \cdots 1
\end{aligned}
$$

οπότε βρίσκουμε $\nu - r$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_{\nu-r}$. Η γενική λύση δίνεται τότε από τη σχέση

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots c_{\nu-r}\mathbf{x}_{\nu-r}$$

όπου c_i $i = 1, 2, \cdots, \nu - r$ είναι αυθαίρετοι μιγαδικοί γενικά αριθμοί

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που είναι $\nu - r = 1$ ορίζεται η λύση αυθαίρετα, σαν πολλαπλάσιο μιας μη μηδενικής λύσης.

5.5. Επαναληπτικές μέθοδοι

Σε πολλά προβλήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών παρουσιάζεται η ανάγκη επίλυσης γραμμικών συστημάτων με τεράστιο πλήθος αγνώστων. Τέτοια συστήματα αν λύνονταν με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss θα απαιτούσαν πολύ χρόνο και με ηλεκτρονικούς υπολογιστές ακόμα. Βέβαια σε τέτοια συστήματα, ένας μεγάλος αριθμός των στοιχείων του πίνακα είναι μηδέν. Και ακριβώς αυτό το βασικό χαρακτηριστικό του πίνακα, επιτρέπει τη δημιουργία κατάλληλων μεθόδων, κυρίως επαναληπτικών, οι οποίες και τον χρόνο υπολογισμού ελαττώνουν και τον αριθμό μνημών του υπολογιστού.

Η λύση ενός συστήματος με επαναληπτική μέθοδο, δίνεται σαν όριο μιας ακολουθίας διανυσμάτων.

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu &= \beta_\nu
\end{aligned}
$$

ή με τη βοήθεια πίνακα

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta} \qquad (1)$$

όπου $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$ και $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{\kappa\lambda}) \in V_\nu(\mathbb{C})$

Υποθέτουμε ότι $|A| \neq 0$ και ότι $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{\nu\nu} \neq 0$

Όπως θα δούμε πιο κάτω μπορούμε με κατάλληλες πράξεις να γράψουμε το σύστημα (1) στη μορφή

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma} \qquad (2)$$

όπου $B = (\beta_{\kappa\lambda}) \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$ και $\gamma = (\gamma_\kappa) \in V_\nu(\mathbb{C})$

Θεωρούμε τώρα την επαναληπτική μέθοδο

$$x_{\mu+1} = B x_\mu + \gamma \quad \mu = 1, 2, \cdots \qquad (3)$$

που ορίζει για $\forall\, x_0 \in V_\nu(\mathbb{C})$ μια ακολουθία διανυσμάτων x_μ. Αν υποθέσουμε ότι για ένα x_0 η αντίστοιχη ακολουθία διανυσμάτων, που ορίζεται από την (3), συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα x', τότε παίρνοντας τα όρια από την (3) έχουμε

$$x' = B x' + \gamma \qquad (4)$$

Επειδή τα συστήματα (1) και (2) είναι ισοδύναμα, προκύπτει ότι το διάνυσμα x' είναι λύση του συστήματος.

Θέτουμε $\qquad x_\mu - x' = \varepsilon_\mu \quad \mu = 1, 2, \cdots$

Το διάνυσμα ε_μ λέγεται διάνυσμα-σφάλμα της μ-επανάληψης. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (4) προκύπτει $\qquad x_{\mu+1} - x' = B(x_\mu - x')$ ή

$$\varepsilon_{\mu+1} = B\varepsilon_\mu \quad \text{απ' όπου προκύπτει}$$

αναγωγικά $\qquad \varepsilon_\mu = B^\mu \varepsilon_0 \qquad$ Άρα

για να συγκλίνει η επαναληπτική μέθοδος $\forall\, x_0 \in V_\nu(\mathbb{C})$ θα πρέπει να ισχύει $\quad \lim\limits_{\mu\to\infty} B^\mu \varepsilon_0 = 0$ ή $\lim\limits_{\mu\to\infty} B^\mu = 0$

Επομένως σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση, η επαναληπτική μέθοδος (3), ορίζει μία ακολουθία διανυσμάτων x_μ που συγκλίνει στη λύση x' του συστήματος τότε και μόνο αν $\rho(B) < 1$ ($\rho(B)$ φασματική ακτίνα του B).

Με βάση τα παραπάνω, θα περιγράψουμε δύο από τις κυριότερες επαναληπτικές μεθόδους.

5.6. Επαναληπτική μέθοδος Jacobi ή του ολικού βήματος

Αν θέσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

στη μορφή $A = D - L - R$ όπου

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha_{\nu 1} & -\alpha_{\nu 2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1\nu} \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

τότε το προηγούμενο σύστημα (1) γράφεται

$$(D - L - R)\mathbf{x} = \beta \quad \text{ή} \quad D\mathbf{x} = (L+R)\mathbf{x} + \beta$$

Θεωρούμε την παρακάτω επαναληπτική μέθοδο του Jacobi

$$D\mathbf{x}_{\mu+1} = (L+R)\mathbf{x}_{\mu} + \beta$$

ή αναλυτικά

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1^{(\mu+1)} &= -(\alpha_{12} x_1^{(\mu)} + \alpha_{13} x_3^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{1\nu} x_\nu^{(\mu)}) + \beta_1 \\ \alpha_{22} x_2^{(\mu+1)} &= -(\alpha_{21} x_1^{(\mu)} + \alpha_{23} x_3^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{2\nu} x_\nu^{(\mu)}) + \beta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\nu\nu} x_\nu^{(\mu+1)} &= -(\alpha_{\nu 1} x_1^{(\mu)} + \alpha_{\nu 2} x_2^{(\mu)} + \alpha_{\nu 3} x_3^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{\nu,\nu-1} x_{\nu-1}^{(\mu)}) + \beta_\nu \end{aligned}$$

Διαιρώντας καθεμιά από τις εξισώσεις αυτές με α_{ii} $i=1,2,\cdots,\nu$

$$x_i^{(\mu+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}} x_j^{(\mu)} + \frac{\beta_i}{\alpha_{ii}} \qquad i = 1, 2, \cdots, \nu$$

ή με τη βοήθεια πινάκων $\mathbf{x}_{\mu+1} = D^{-1}(L+R)\mathbf{x}_{\mu} + D^{-1}\beta$

Ο πίνακας $B = D^{-1}(L+R)$ λέγεται **πίνακας** του Jacobi. Σύμφωνα με τα προηγούμενα που αναφέραμε, η επαναληπτική αυτή μέθοδος συγκλίνει αν $\rho\left(D^{-1}(L+R)\right) < 1$.

5.7. Επαναληπτική μέθοδος των Gauss-Seidel ή του απλού βήματος

Στην επαναληπτική μέθοδο του Jacobi, για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $x_{\mu+1}$, χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τις συντεταγμένες του x_μ. Θα μπορούσαμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τις ήδη υπολογισμένες σε προηγούμενα βήματα συντεταγμένες $x_1^{(\mu+1)}, x_2^{(\mu+1)}, \dots, x_{i-1}^{(\mu+1)}$ για τον υπολογισμό της i συντεταγμένης του $x_{\mu+1}$, και μόνο αναγκαστικά για τις απαιτούμενες υπόλοιπες συντεταγμένες, να χρησιμοποιήσουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες $x_{i+1}^{(\mu)}, x_{i+2}^{(\mu)}, \dots, x_\nu^{(\mu)}$ του διανύσματος x_μ. Αυτή η σκέψη οδηγεί στην επαναληπτική μέθοδο των Gauss-Seidel ή του απλού βήματος. Έτσι οι προηγούμενοι τύποι γίνονται

$$x_i^{(\mu+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(\mu+1)} - \sum_{j=i+1}^{\nu} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} + \frac{\beta_i}{a_{ii}} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,\nu \\ \mu=1,2,\dots \end{matrix}$$

ή με τη βοήθεια πινάκων, απ' τον τύπο

$$(D-L)x_{\mu+1} = Rx_\mu + \beta$$

προκύπτει $$x_{\mu+1} = (D-L)^{-1}Rx_\mu + (D-L)^{-1}\beta$$

Ο πίνακας $(D-L)^{-1}R$ λέγεται πίνακας των Gauss-Seidel σε σχέση με τον πίνακα A.

Η μέθοδος των Gauss-Seidel εκτός του ότι συγκλίνει πιο γρήγορα στη λύση του συστήματος από τη μέθοδο του

Jacobi, απαιτεί και λιγότερο αριθμό μνημών σ'ένα υπολογιστή. Κι αυτό, γιατί δεν είμαστε υποχρεωμένοι να κρατάμε στη μνήμη του υπολογιστή όλες τις συντεταγμένες του διανύσματος x_μ, μέχρι να υπολογίσουμε πλήρως το διάνυσμα $x_{\mu+1}$

Το παρακάτω θεώρημα μας εξασφαλίζει τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel.

Θεώρημα 5.7.1.

Έστω το σύστημα $A x = \beta$ όπου $A = (\alpha_{\kappa\lambda}) \in M_{\nu\nu}(\mathbb{C})$, $\beta = (\beta_\kappa) \in V_\nu(\mathbb{C})$ ενώ ο πίνακας A είναι γνησίως διαγωνίως υπερτερών δηλ

$$|\alpha_{\kappa\kappa}| > \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda\neq\kappa}}^{\nu} |\alpha_{\kappa\lambda}| \quad \forall\, \kappa = 1, 2, \cdots, \nu$$

Τότε οι επαναληπτικές μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel που αντιστοιχούν στο σύστημα αυτό, ορίζουν για $\forall x_0 \in V_\nu(\mathbb{C})$ ακολουθίες που συγκλίνουν στη μοναδική λύση του συστήματος.

5.8. Εφαρμογές στο κεφάλαιο 5

1) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

Λύση.

Όπως αναφέραμε και στη μέθοδο του Gauss, η προσπάθειά μας είναι να δημιουργήσουμε ένα τριγωνικό πίνακα των συντελεστών των αγνώστων.

Διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με τον συντελεστή του πρώτου αγνώστου της πρώτης εξίσωσης που λέγεται οδηγό στοιχείο. (Εδώ δεν χρειάζεται). Μετά μηδενίζουμε τους υπόλοιπους συντελεστές της πρώτης στήλης, πολ/ζοντας την πρώτη εξίσωση επί 1/2 και 1/3 και αφαιρώντας από την δεύτερη και τρίτη εξίσωση αντίστοιχα. Έτσι προκύπτει το σύστημα

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$\frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{12}x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{45}x_3 = -\frac{1}{3}$$

Στο δεύτερο βήμα, παραλείπουμε την πρώτη εξίσωση και επαναλαμβάνουμε τα ίδια για το υπόλοιπο σύστημα. Πολ/ζοντας με 12 τη δεύτερη εξίσωση, έτσι ώστε το οδηγό στοιχείο να γίνει 1 και εκτελώντας την ίδια διαδικασία για τις δύο τελευταίες εξισώσεις, παίρνουμε

$$x_2 + x_3 = -6$$

$$\frac{1}{180}x_3 = \frac{1}{6}$$

Στο τρίτο βήμα, το τελευταίο οδηγό στοιχείο γίνεται μονάδα. Έτσι έχουμε τελικά το σύστημα

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = -6$$

$$x_3 = 30$$

Αρχίζοντας από την τελευταία εξίσωση, βρίσκουμε διαδοχικά:

$$x_1 = 30, \quad x_2 = -6 - 30 = -36, \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2}(-36) - \frac{1}{3}30 = 9$$

Στις εφαρμογές οι πράξεις γίνονται προσεγγιστικά (π.χ. δεν διατηρούνται κλάσματα) και είναι σκόπιμο να χρησιμοποιείται σαν οδηγό στοιχείο το μεγαλύτερο.

2) Πόσοι πολλαπλασιασμοί ή διαιρέσεις γίνονται στην εφαρμογή της απαλοιφής του Gauss σε ένα σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους και τι σφάλμα υπεισέρχεται στη λύση;

Λύση

Αν παραλείψουμε τις διαιρέσεις που χρειάζονται, για να γίνει μονάδα το πρώτο οδηγό στοιχείο, για να γίνουν μηδέν τα στοιχεία της πρώτης στήλης, απαιτούνται $\nu-1$ πολλαπλασιασμοί ανά κάθε στοιχείο δηλ. $(\nu-1)^2$. Για τη δεύτερη στήλη απαιτούνται $(\nu-2)^2$, για την τρίτη $(\nu-3)^2$ κ.τ.λ. Έτσι για ένα μεγάλο σύστημα εξισώσεων απαιτούνται

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (\nu-2)^2 + (\nu-1)^2 = \frac{1}{3}\nu^3 - \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{1}{6}\nu$$

Επειδή το συνολικό σφάλμα στρογγύλευσης (εφαρ. 4. κεφ 2) είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του πλήθους των πράξεων, συμπεραίνουμε ότι ακόμα και για $\nu = 7$ εξισώσεις το σφάλμα στρογγύλευσης γίνεται:

$$\sqrt{M} = \sqrt{\frac{1}{3}7^3} \simeq 13$$

δηλ υπερδεκαπλασιάζεται, που σημαίνει απώλεια ενός ψηφίου. Σε μεγάλα συστήματα η συσσώρευση σφάλματος επιδρά στα αποτελέσματα.

3) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

με τη βοήθεια πινάκων, αφού υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων.

Λύση

Το σύστημα γράφεται στη μορφή

$$Ax = \beta \qquad (1)$$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad \beta = (1, 2, 3)$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) ως προς x προκύπτει

$$x = A^{-1}\beta$$

Επομένως, αρκεί να υπολογιστεί ο αντίστροφος του A, ο A^{-1}. Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα του πίνακα A και όλα τα αλγεβρικά συμπληρώματα $A_{\kappa\lambda} = (-1)^{\kappa+\lambda} D_{\kappa\lambda}$ των στοιχείων $\alpha_{\kappa\lambda}$ του A, όπου $D_{\kappa\lambda}$ η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$. Για το ανάπτυγμα της $|A|$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Sarrus

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{2} & \overset{+}{2} & \overset{+}{3} & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \underset{-}{-1} & \underset{-}{2} & \underset{-}{1} & -1 & 2 \end{array} \right. = -2 + 6 - 3 - 2 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο που μας δίνει τον αντίστροφο ενός πίνακα, όπου όμως τα αλγεβρικά συμπληρώματα παίρνουν τις συμμετρικές τους θέσεις ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$ και άρα το $A^{-1}\beta$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + (-3)\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + (-3)\cdot 3 \\ (-1)\cdot 1 + 6\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -18 \\ 17 \end{bmatrix}$$

4) Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

και να υπολογιστεί ο βαθμός r του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Λύση.

Απαλείφοντας τον x_1 μεταξύ της πρώτης και των δύο άλλων εξισώσεων έχουμε

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \\ 4x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Απαλείφοντας τώρα τον x_2 μεταξύ της δεύτερης και τρίτης εξίσωσης προκύπτει

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως $r = 2$. Αν πάρουμε $x_3 = 1$ τότε βρίσκουμε $x_2 = \frac{3}{8}$ και $x_1 = \frac{10}{8}$. Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι η $\boldsymbol{x} = c\left(\frac{10}{8}, \frac{3}{8}, 1\right)'$ όπου $c \in \mathbb{C}$.

5) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 &= 0{,}4 \\ -0{,}2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 &= 2 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + x_3 &= -2{,}3 \end{aligned}$$

με τις επαναληπτικές μεθόδους:

α) του Jacobi

β) των Gauss – Seidel.

Λύση

Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x_1, x_2, x_3 αντίστοιχα έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= \phantom{0{,}2x_1 +{}} 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}4 \\ x_2 &= 0{,}2x_1 \phantom{{}+ 0{,}1x_2} + 0{,}1x_3 + 2 \\ x_3 &= 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \phantom{{}+0{,}1x_3} - 2{,}3 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= 1 > |a_{12}| + |a_{13}| = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 \\ |a_{22}| &= 1 > |a_{21}| + |a_{13}| = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 \\ |a_{33}| &= 1 > |a_{31}| + |a_{32}| = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2 \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα είναι ένα γνησίως διαγωνίως υπερτερόν σύστημα και σύμφωνα με το θεώρημα 5.7.1. οι επαναληπτικές μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel θα συγκλίνουν.

α) Με την επαναληπτική μέθοδο του Jacobi οι τύποι αναλυτικά θα είναι:

$$x_1^{(\mu+1)} = \qquad 0,2\, x_2^{(\mu)} - 0,1\, x_3^{(\mu)} + 0,4$$

$$x_2^{(\mu+1)} = 0,2\, x_1^{(\mu)} \qquad + 0,1\, x_3^{(\mu)} + 2 \qquad \mu = 0,1,2,\dots$$

$$x_3^{(\mu+1)} = 0,1\, x_1^{(\mu)} + 0,1\, x_2^{(\mu)} \qquad - 2,3$$

Θέτοντας $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ έχουμε:

$$\mu = 0 \quad x_1^{(1)} = 0,2\, x_2^{(0)} - 0,1\, x_3^{(0)} + 0,4 = 0,4$$

$$x_2^{(1)} = 0,2\, x_1^{(0)} + 0,1\, x_3^{(0)} + 2 = 2$$

$$x_3^{(1)} = 0,1\, x_1^{(0)} + 0,1\, x_2^{(0)} - 2,3 = -2,3$$

$$\mu = 1 \quad x_1^{(2)} = 0,2\, x_2^{(1)} - 0,1\, x_3^{(1)} + 0,4 = 1,03$$

$$x_2^{(2)} = 0,2\, x_1^{(1)} + 0,1\, x_3^{(1)} + 2 = 1,77$$

$$x_3^{(2)} = 0,1\, x_1^{(1)} + 0,1\, x_2^{(1)} - 2,3 = -2,06$$

$$\mu = 2 \quad x_1^{(3)} = 0,2\, x_2^{(2)} - 0,1\, x_3^{(2)} + 0,4 = 0,96$$

$$x_2^{(3)} = 0,2\, x_1^{(2)} + 0,1\, x_3^{(2)} + 2 = 2$$

$$x_3^{(3)} = 0,1\, x_1^{(2)} + 0,1\, x_2^{(2)} - 2,3 = -2,02$$

$$\mu = 3 \quad x_1^{(4)} = 0,2\, x_2^{(3)} - 0,1\, x_3^{(2)} + 0,4 = 1,002$$

$$x_2^{(4)} = 0,2\, x_1^{(3)} + 0,1\, x_3^{(3)} + 2 = 1,99$$

$$x_3^{(4)} = 0,1\, x_1^{(3)} + 0,1\, x_2^{(3)} - 2,3 = -2,004$$

$$\mu = 4 \quad x_1^{(5)} = 0,2\, x_2^{(4)} - 0,1\, x_3^{(4)} + 0,4 = 0,9984$$

$$x_2^{(5)} = 0,2\, x_1^{(4)} + 0,4\, x_3^{(4)} + 2 = 2$$

$$x_3^{(5)} = 0,1\, x_1^{(4)} + 0,1\, x_2^{(4)} - 2,3 = -2,0008 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Η ακριβής λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2.$$

β) Με την επαναληπτική μέθοδο των Gauss - Seidel οι επαναληπτικοί τύποι είναι:

$$x_1^{(\mu+1)} = \qquad 0,2\, x_2^{(\mu)} - 0,1\, x_3^{(\mu)} + 0,4$$
$$x_2^{(\mu+1)} = 0,2\, x_1^{(\mu+1)} \qquad + 0,1\, x_3^{(\mu)} + 2 \qquad \mu = 0,1,2,\dots$$
$$x_3^{(\mu+1)} = 0,1\, x_1^{(\mu+1)} + 0,1\, x_2^{(\mu+1)} \qquad - 2,3$$

Θέτοντας όπως και πρίν, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ έχουμε:

$\mu=0$
$$x_1^{(1)} = 0,2\, x_2^{(0)} - 0,1\, x_3^{(0)} + 0,4 = 0,4$$
$$x_2^{(1)} = 0,2\, x_1^{(1)} + 0,1\, x_3^{(0)} + 2 = 2,08$$
$$x_3^{(1)} = 0,1\, x_1^{(1)} + 0,1\, x_2^{(1)} - 2,3 = -2,052$$

$\mu=1$
$$x_1^{(2)} = 0,2\, x_2^{(1)} - 0,1\, x_3^{(1)} + 0,4 = 1,0212$$
$$x_2^{(2)} = 0,2\, x_1^{(2)} + 0,1\, x_3^{(1)} + 2 = 1,99904$$
$$x_3^{(2)} = 0,1\, x_1^{(2)} + 0,1\, x_2^{(2)} - 2,3 = -1,997976$$

$\mu=2$
$$x_1^{(3)} = 0,2\, x_2^{(2)} - 0,1\, x_3^{(2)} + 0,4 = 0,9996056$$
$$x_2^{(3)} = 0,2\, x_1^{(3)} + 0,1\, x_3^{(2)} + 2 = 2,00012352$$
$$x_3^{(3)} = 0,2\, x_1^{(3)} + 0,1\, x_2^{(3)} - 2,3 = -1,900066528$$

κ.ο.κ. Η μέθοδος αυτή, όπως φαίνεται, συγκλίνει πιο γρήγορα από την προηγούμενη του Jacobi.

Ασκήσεις

1) Να λυθούν με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss τα παρακάτω συστήματα:

α)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2) Να λυθεί το σύστημα

$$A x = \beta$$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

εφαρμόζοντας τον τύπο $x = A^{-1}\beta$

3) Διαπιστώστε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 9 \end{aligned}$$

μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των Gauss - Seidel και στη συνέχεια βρείτε μια προσεγγιστική λύση αυτού με 3 διαδοχικές επαναλήψεις.

4) Να λυθεί με τη μέθο Jacobi το σύστημα

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιείστε 4 διαδοχικές επαναλήψεις.

5) Να λυθεί το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Ποιος είναι ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων.

6. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

6.1 Γενικά

Σε πολλά προβλήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών καταλήγουμε στην αναζήτηση των μηδενικών σημείων ενός συστήματος ν εξισώσεων με ν αγνώστους. Η αριθμητική επίλυση τέτοιων προβλημάτων αποτελεί ένα βασικό θέμα της Αριθμητικής Ανάλυσης.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί βασικά συνέχεια και γενίκευση του τρίτου κεφαλαίου, όπου εξετάσαμε διάφορες μεθόδους επίλυσης μιας εξίσωσης. Εδώ θα ασχοληθούμε με τον αριθμητικό υπολογισμό των ριζών ενός συστήματος ν εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους.

Θεωρούμε τη γενική περίπτωση, που έχουμε ν συναρτήσεις (μιγαδικές γενικά) με μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ η καθεμιά, ορισμένες στην περιοχή Δ του χώρου $V_\nu(\mathbb{C})$, οι

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \quad i=1,2,\cdots,\nu$$

Έστω τώρα τό σύστημα των συναρτήσεων αυτών

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ f_\nu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) &= 0 \end{aligned}$$

ή διανυσματικά

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu)'$ και $f = (f_1, f_2, \cdots, f_\nu)'$.

Το σημείο $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$ που επαληθεύει το σύστημα (1) λέγεται μηδενικό σημείο ή ρίζα του συστήματος, οπότε θα είναι $f(\xi) = 0$

Βέβαια μια μερική περίπτωση των συστημάτων της μορφής (1), είναι κι αυτά που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν κριτήρια που αφορούν την ύπαρξη μοναδικής λύσης του συστήματος (1) σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα. Αλλά κι ακόμα αν υπάρχει μοναδική λύση, ο αριθμητικός υπολογισμός της αποτελεί γενικά πολλή και κουραστική δουλειά.

Ο θεωρητικός τρόπος επίλυσης του συστήματος (1) είναι η γνωστή και από τα στοιχειώδη μαθηματικά μέθοδος της απαλοιφής. Δηλαδή, με συνεχή απαλοιφή των αγνώστων μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος, μετατρέπουμε αυτό ισοδύναμα, σε πεπερασμένο σύνολο συστημάτων της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) &= 0 \\ F_2(x_2, \cdots, x_\nu) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ F_\nu(x_\nu) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια η λύση του συστήματος (2) βρίσκεται ως εξής: Με μία από τις μεθόδους που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3 βρίσκουμε τις ρίζες της τελευταίας εξίσωσης του (2). Αντικαθιστούμε καθεμιά ρίζα στις προηγούμενες εξισώσεις του (2) και παίρνουμε ένα σύστημα της ίδιας μορφής, αλλά με $\nu-1$ εξισώσεις. Αν εργαστούμε κατά τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε τελικά όλες τις ρίζες του συστήματος (2) και επομένως του ισοδυνάμου του συστήματος (1).

Στη μερική περίπτωση που έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορούμε να βρούμε τις πραγματικές μόνο λύσεις αυτού με τη βοήθεια μιας γραφικής παράστασης (αν είναι εύκολη) σε σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων.

Έστω το σύστημα:

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Κατασκευάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού τους, έχουμε τα σημεία τομής τους (αν υπάρχουν). Αυτά μας δίνουν και τις πραγματικές λύσεις του συστήματος, στο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων, με οριζόντιο άξονα Ox_1 και κατακόρυφο Ox_2 (Οι συναρτήσεις f_1, f_2 θεωρούνται πεπλεγμένες).

Παραδείγματα

1) Να λυθεί το σύστημα

$$x_1^2 - x_2^2 + 2 = 0$$
$$2x_1^2 - x_2 + 1 = 0$$

Λύση

Απαλείφοντας τον x_1 μεταξύ των δύο εξισώσεων, παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + 2 &= 0 \\ 2(x_2^2 - 2) - x_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + 2 &= 0 \\ 2x_2^2 - x_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις ρίζες της δεύτερης εξίσωσης που είναι

$$x_2 = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές του x_2 στην πρώτη εξίσωση, έχουμε τις παρακάτω τέσσερις λύσεις του συστήματος:

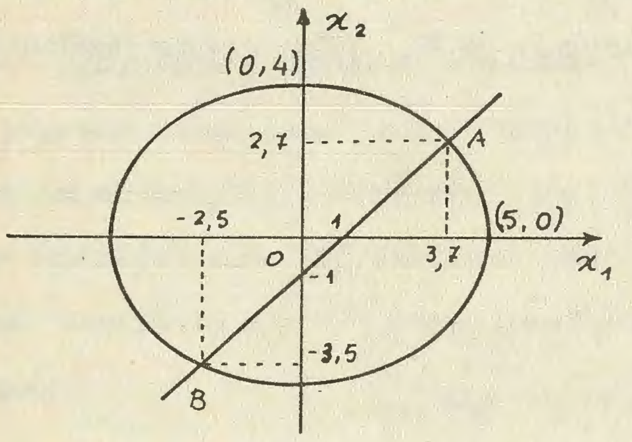
$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}; \qquad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}; \qquad x_1 = i, \quad x_2 = \text{[illegible]}; \qquad x_1 = -i, \quad x_2 = -i$$

2) Να λυθεί γραφικά το σύστημα

$$16x_1^2 + 25x_2^2 - 400 = 0$$
$$x_1 - x_2 - 1 = 0$$

Λύση

Η πρώτη από τις δύο εξισώσεις παριστάνει έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες $\alpha = 5$, $\beta = 4$. Η δεύτερη παριστάνει ευθεία που τέμνει τον Ox_1 στο σημείο 1 και τον Ox_2 στο -1. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 13 η λύση του συστήματος είναι τα σημεία Α και Β με συντεταγμένες Α$(3{,}7,\ 2{,}7)$ και Β$(-2{,}5,\ -3{,}5)$ περίπου. (Η έλλειψη παίρνει τη μορφή $\frac{x_1^2}{25} + \frac{x_2^2}{16} = 1$).



Σχ. 13

6.2. Επαναληπτικές μέθοδοι

Οι παραπάνω μέθοδοι που αναφέραμε, μπορούν να εφαρμοστούν σε αλλές περιπτώσεις συστημάτων, ή σε περιπτώσεις που οι εξισώσεις μπορούν να παρασταθούν γραφικά με σχετική ακρίβεια.

Συνήθως όμως για τη λύση αλγεβρικών συστημάτων χρησιμοποιούμε επαναληπτικές μεθόδους. Πρίν περιγράψουμε όμως μερικές από αυτές θα δώσουμε τους σχετικούς ορισμούς.

N o r m δ ι α ν ύ σ μ α τ ο ς.

Έστω $V_\nu(\mathbb{C})$ ο χώρος των ν-διαστάσεων διανυσμάτων της μορφής $x = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu)'$. Θα λέμε ότι έχει εισαχθεί μια N o r m στο χώρο $V_\nu(\mathbb{C})$, αν σε κάθε $x \in V_\nu(\mathbb{C})$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένας πραγματικός αριθμός $\|x\|$ που λέγεται n o r m του διανύσματος x με τις εξής ιδιότητες:

α) $\|x\| > 0, \quad \forall\, x \neq 0$ και $\|0\| = 0$

β) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

γ) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in V_\nu(\mathbb{C})$

π.χ στό διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in V_\nu(\mathbb{C})$ η συνάρτηση $\|x\| = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_\nu|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} |x_\kappa|^2\right)^{1/2}$ εισάγει μια norm στον $V_\nu(\mathbb{C})$, που λέγεται Ε υ κ λ ε ί δ ε ι α n o r m. Παρακάτω για την norm θα εννοούμε πάντα την Ευκλείδεια norm.

Ι α κ ω β ι α ν ή ή σ υ ν α ρ τ η σ ι α κ ή ορίζουσα.

Θεωρούμε ένα σύστημα ν συναρτήσεων, ν μεταβλητών $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$, των

$$f_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$
$$f_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$
$$f_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$$

που ορίζεται στο κλειστό διάστημα ν-διαστάσεων

$$T_\nu = \{ a_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i ,\ i = 1, 2, \cdots, \nu \} \text{ του } \mathbb{R}^\nu.$$

Το σύστημα αυτό των συναρτήσεων μετασχηματίζει τό σημείο $(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ του T_ν στο σημείο $(f_1, f_2, \cdots, f_\nu)$ του $\mathbb{R}^\nu$. Αν το σύστημα αυτό έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, τότε η ορίζουσα που ορίζεται από τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $\partial f_i / \partial x_\kappa$ λέγεται ι ακωβιανή ή συναρτησιακή ορίζουσα των συναρτήσεων $f_1, f_2, \cdots, f_\nu$ ως προς τις μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ και ισούται με

$$|J(f(x))| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}$$

Κατόπιν αυτών ισχύει το παρακάτω γενικό

Θεώρημα 6.2.1.

Θεωρούμε το σύστημα των συναρτήσεων $f_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ $i = 1, 2, \cdots, \nu$ που ορίζονται στο διάστημα $T_\nu = \{ a_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \cdots, \nu \}$ και πληρούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

1) Οι f_i είναι συνεχείς στο T_ν.

2) $\forall\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \in T_\nu$ προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) \in T_\nu$

3) Υπάρχει μια σταθερή $L < 1$ τέτοια, ώστε $\forall\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T_\nu$ να ισχύει η συνθήκη του Lipschitz

$$\| f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) \| \leq L \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \|.$$

Τότε ισχύουν τα επόμενα:

α) Υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in T_\nu$ τέτοιο ώστε $\xi = f(\xi)$

β) $\forall\ \mathbf{x}_0 \in T_\nu$, η ακολουθία $\mathbf{x}_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \cdots$ που ορίζεται με την επαναληπτική μέθοδο

$$\mathbf{x}_{\mu+1} = f(\mathbf{x}_\mu) \qquad \mu = 0, 1, 2, \cdots$$

είναι τέτοια, ώστε $\mathbf{x}_\mu \in T_\nu$ $\forall\ \mu = 0, 1, 2, \cdots$ και συγκλίνει προς το ξ δηλαδή $\lim_{\mu \to \infty} \mathbf{x}_\mu = \xi$, και πληρεί την ανισότητα:

$$\| \mathbf{x}_\mu - \xi \| \leq \frac{L^\mu}{1 - L} \| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \|$$

Η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{\mu+1} = f(x_\mu), \quad \mu = 0,1,2,\cdots \qquad (1)$$

όπου x_0 είναι μια πρώτη προσέγγιση του ζητούμενου σταθερού σημείου της $f(x)$ λέγεται επαναληπτική μέθοδος του ολικού βήματος.

Ενώ η επαναληπτική μέθοδος

$$x_i^{(\mu+1)} = f_i\left(x_1^{(\mu+1)}, x_2^{(\mu+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(\mu+1)}, x_i^{(\mu)}, \cdots, x_\nu^{(\mu)}\right) \qquad (2)$$

όπου $i = 1,2,\cdots,\nu$, $\mu = 0,1,2,\cdots$ και $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_\nu^{(0)})$, όπως και στην προηγούμενη μέθοδο του ολικού βήματος, είναι μια πρώτη προσέγγιση του ζητούμενου σταθερού σημείου της $f(x)$ λέγεται επαναληπτική μέθοδος του απλού βήματος.

Στην ειδική περίπτωση γραμμικών συστημάτων, έχουμε τις αντίστοιχες επαναληπτικές μεθόδους των Jacobi και Gauss-Seidel.

Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι περιοριζόμαστε στο χώρο $V_2(\mathbb{R})$, οπότε όλα τα συμπεράσματα μπορούν να γενικευθούν και στο χώρο των ν-διαστάσεων.

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$f(x) = \left(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\right)'$$

για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$ σε κάποια περιοχή

ενός σημείου $\xi = (\xi_1, \xi_2)'$. Τότε ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 6.2.2.

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων

$$x_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$$
$$x_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$$
ή διανυσματικά $x = \varphi(x)$

και υποθέτουμε ότι έχει ένα σταθερό σημείο $\xi = (\xi_1, \xi_2)'$. Υποθέτουμε ακόμα, ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για $\forall x \in V_2(R)$ με $\|x - \xi\| < \delta$ υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ $i=1,2$, $k=1,2$ και η φασματική ακτίνα του ιακωβιανού πίνακα των φ_1, φ_2 πληρεί τη σχέση $\rho\left(J(\varphi(x))\right) < 1$.

Τότε η επαναληπτική μέθοδος $x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu)$, $\nu = 0,1,2,\cdots$ έχει έννοια για $\forall x_0 \in V_2(R)$ με $\|x_0 - \xi\| < \delta$ και ισχύει

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = \xi$$

Ένα άλλο θεώρημα ισοδύναμο με το προηγούμενο αλλά πιο χρήσιμο στις εφαρμογές είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 6.2.3.

Θεωρούμε το σύστημα $x = \varphi(x)$ και υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ που ορίζονται στο διάστημα $T_2 = \{a_i \leq x_i \leq \beta_i,\ i = 1,2\}$ έχουν μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς. Έστω $\xi = (\xi_1, \xi_2)'$ σταθερό σημείο της $\varphi(x)$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του T_2 τέτοιο, ώστε

$$J(\varphi(\xi)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{\nu+1} = \varphi(x_\nu), \quad \nu = 0,1,2,\cdots$$

έχει έννοια για $\forall x_0 \in T_2$ με $\|x_0 - \xi\| < \delta$ και ισχύει $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1 = x_1^2 - x_2^2$$
$$x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

με $\varphi(x) = (x_1^2 - x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2)'$.

Προφανώς ισχύει η σχέση $0 = \varphi(0)$ δηλ. το 0 είναι σταθερό σημείο της $\varphi(x)$. Ο ιακωβιανός πίνακας είναι

$$J(\varphi(x)) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε}$$

$$J(\varphi(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$\begin{aligned} x_1^{(\mu+1)} &= (x_1^{(\mu)})^2 - (x_2^{(\mu)})^2 \\ x_2^{(\mu+1)} &= (x_1^{(\mu)})^2 + (x_2^{(\mu)})^2 \end{aligned} \qquad \mu = 0, 1, 2, \cdots$$

τότε αυτή για $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \frac{1}{2}$ θα συγκλίνει στο σημείο $0 = (0,0)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

μ	$x_1^{(\mu)}$	$x_2^{(\mu)}$
0	0,5	0,5
1	0	0,5
2	-0,25	0,25
3	0	0,125
4	-0,015625	0,015625
5	0	0,000488281
6	-0,000000238	0,000000238
7	0	0,000000000000113288

6.3. Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson

Για να μη δημιουργηθεί δυσχέρεια με τη χρήση πολλών δεικτών, θεωρούμε ότι το διάνυσμα x έχει συντεταγμένες x, y και η f τις f, g· δηλαδή η διανυσματική συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = \big(f(x,y), g(x,y)\big)'.$$

Έστω ότι αυτή ορίζεται στο διάστημα

$$T_2 = \begin{Bmatrix} \alpha \leq x \leq \beta \\ \gamma \leq y \leq \delta \end{Bmatrix}$$

και ότι οι f, g έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης στο διάστημα T_2. Αν το σύστημα

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

έχει μια λύση στο εσωτερικό του T_2 την $\xi = (\xi, \eta)'$ και

$$J\big(f(\xi)\big) \neq 0,$$

τότε αποδεικνύεται ότι η επαναληπτική μέθοδος των N e w t o n - R a p h s o n που ορίζεται από τη σχέση

$$x_{\mu+1} = x_\mu - J^{-1}\big(f(x_\mu)\big) \cdot f(x_\mu), \quad \mu = 0,1,2,\cdots \qquad (2)$$

όπου $J^{-1}\big(f(x_\mu)\big)$ είναι ο αντίστροφος του ιακωβιανού πίνακα $J\big(f(x_\mu)\big)$, έχει έννοια για $x_0 \in T_2$ στη γειτονιά του ξ, και ορίζει ακολουθία x_μ που συγκλίνει στη λύση του συστήματος (1).

Η αναλυτική έκφραση της σχέσης (2) μετά τη διάσπαση σε συντεταγμένες είναι:

$$x_{\mu+1} = x_\mu + \frac{g(x_\mu, y_\mu)\dfrac{\partial f(x_\mu, y_\mu)}{\partial y} - f(x_\mu, y_\mu)\dfrac{\partial g(x_\mu, y_\mu)}{\partial y}}{\left|J\big(f(x_\mu)\big)\right|}$$

$$y_{\mu+1} = y_\mu + \frac{f(x_\mu, y_\mu)\dfrac{\partial g(x_\mu, y_\mu)}{\partial x} - g(x_\mu, y_\mu)\dfrac{\partial f(x_\mu, y_\mu)}{\partial x}}{\left|J\big(f(x_\mu)\big)\right|}$$

$$\left| J\left(f(x_\mu)\right) \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x_\mu, y_\mu)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x_\mu, y_\mu)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g(x_\mu, y_\mu)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x_\mu, y_\mu)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Παρατήρηση

Μια άλλη επίσης εύχρηστη αναλυτική έκφραση της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα είναι:

$$\begin{aligned} x_{\mu+1} &= x_\mu + h_\mu \\ y_{\mu+1} &= y_\mu + k_\mu \end{aligned} \qquad (3)$$

όπου τα h και k ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_\mu, y_\mu)}{\partial x} h_\mu + \frac{\partial f(x_\mu, y_\mu)}{\partial y} k_\mu &= -f(x_\mu, y_\mu) \\ \frac{\partial g(x_\mu, y_\mu)}{\partial x} h_\mu + \frac{\partial g(x_\mu, y_\mu)}{\partial y} k_\mu &= -g(x_\mu, y_\mu) \end{aligned} \qquad (4)$$

Παράδειγμα

Βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου $x^2+y^2=2$ και της υπερβολής $x^2-y^2=1$.

Λύση.

Το σύστημα αυτό λύνεται εύκολα με απαλοιφή. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $2x^2=3$ και $x = \pm 1{,}224744871$

Αφαιρώντας έχουμε $2y^2=1$ και $y = \pm 0{,}707106781$

Λύνοντας το πρόβλημα αυτό με τη μέθοδο των Newton-Raphson έχουμε για αρχικές τιμές $x_0 = y_0 = 1$, εφαρμόζοντας τους τύπους (4) για τα h και k:

$$\begin{aligned} 2x_\mu h_\mu + 2y_\mu k_\mu &= 2 - x_\mu^2 - y_\mu^2 \\ 2x_\mu h_\mu - 2y_\mu k_\mu &= 1 - x_\mu^2 + y_\mu^2 \end{aligned}$$

Για $\mu=0$ δίνουν

$$\left.\begin{array}{l} 2h_0 + 2k_0 = 0 \\ 2h_0 - 2k_0 = 1 \end{array}\right\} \text{ οπότε } h_0 = 1/4, \ k_0 = -1/4$$

άρα οι τύποι (3) δίνουν: $x_1 = x_0 + h_0 = 1{,}25$

$$y_1 = y_0 + k_0 = 0{,}75$$

Στο δεύτερο βήμα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}5h_1 + 1{,}5k_1 = -0{,}125 \\ 2{,}5h_1 - 1{,}5k_1 = 0 \end{array}\right\} \text{ οπότε } h_1 = -0{,}025, \ k_1 = -0{,}04167$$

και οι τύποι (3) δίνουν $x_2 = x_1 + h_1 = 1{,}2250$

$$y_2 = y_1 + k_1 = 0{,}7083$$

Στο τρίτο βήμα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}45h_2 + 1{,}4167k_2 = -0{,}0024 \\ 2{,}45h_2 - 1{,}4167k_2 = 0{,}0011 \end{array}\right\} \Rightarrow h_2 = -0{,}0003, \ k_2 = -0{,}0012$$

και $x_3 = x_2 + h_2 = 1{,}2247$

$$y_3 = y_2 + k_2 = 0{,}7071 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

6.4. Μέθοδος του Bairstow

Θα δώσουμε τώρα μια μέθοδο για τον υπολογισμό ζευγών μιγαδικών ριζών ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές που λέγεται μέθοδος του Bairstow και κάνει χρήση της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson.

Έστω το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές

$$f(x) = x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu} \quad (1)$$

όπου $\nu \geq 2$. Θα εξετάσουμε πότε το πολυώνυμο (1) διαιρείται ακριβώς με το τριώνυμο $x^2 - px - q$ όπου $p, q \in \mathbb{R}$. Διαιρώντας το $f(x)$ με το $x^2 - px - q$ θα προκύψει:

$$f(x) = (x^{\nu-2} + \beta_1 x^{\nu-3} + \cdots + \beta_{\nu-2})(x^2 - px - q) + \gamma x + \delta \quad (2)$$

όπου β_i, $i = 1, 2, \cdots, \nu-2$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε δύο αριθμούς $\beta_{\nu-1}$, β_ν έτσι, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\gamma = \beta_{\nu-1}$$
$$\delta = -p\beta_{\nu-1} + \beta_\nu$$

οπότε αντικαθιστώντας τα γ, δ στη (2) προκύπτει η σχέση

$$f(x) = \left(x^{\nu-2} + \beta_1 x^{\nu-3} + \cdots + \beta_{\nu-2}\right)\left(x^2 - px - q\right) + \beta_{\nu-1}(x-p) + \beta_\nu \qquad (3)$$

Εκτελώντας τις πράξεις και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 - p \\
\alpha_2 &= \beta_2 - p\beta_1 - q \\
\alpha_3 &= \beta_3 - p\beta_2 - q\beta_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_\kappa &= \beta_\kappa - p\beta_{\kappa-1} - q\beta_{\kappa-2} \qquad\qquad (4) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\nu-2} &= \beta_{\nu-2} - p\beta_{\nu-3} - q\beta_{\nu-3} \\
\alpha_{\nu-1} &= \beta_{\nu-1} - p\beta_{\nu-2} - q\beta_{\nu-2} \\
\alpha_\nu &= \beta_\nu - p\beta_{\nu-1} - q\beta_{\nu-1}
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\beta_0 = 1$, $\beta_{-1} = 0$ οι σχέσεις (4) συμπτύσσονται στη γενική σχέση

$$\alpha_\kappa = \beta_\kappa - p\beta_{\kappa-1} - q\beta_{\kappa-2} \qquad \kappa = 1, 2, \cdots, \nu$$

ή

$$\beta_\kappa = \alpha_\kappa + p\beta_{\kappa-1} + q\beta_{\kappa-1} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (5) μπορούμε να υπολογίσουμε τα β_κ.

Προφανώς η εύρεση ενός ζεύγους μιγαδικών ριζών του πολυωνύμου $f(x)$ ανάγεται στην εύρεση ενός τριωνύμου

$$x^2 - px - q$$

(που θα έχει μιγαδικές ρίζες), τότε και μόνο τότε όταν

$$\beta_{\nu-1} = \beta_\nu = 0$$

Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στο εξής:

Να βρεθούν οι τιμές των p και q ώστε $\beta_{\nu-1} = \beta_\nu = 0$.

Από τις σχέσεις (5) μπορούμε να βρούμε τα $\beta_1, \beta_2, \cdots,$ συναρτήσει των γνωστών $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ και των ζητουμένων p και q. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τα $\beta_{\nu-1}, \beta_\nu$ (τελευταίες τιμές των β_κ) σαν συναρτήσεις των p και q. Δηλ.

$$\beta_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}(p, q)$$
$$\beta_\nu = \beta_\nu(p, q)$$

Επομένως θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές των p και q έτσι, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \beta_{\nu-1}(p,q) &= 0 \\ \beta_\nu(p,q) &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Τελικά το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ριζών ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Για τη λύση του συστήματος αυτού χρησιμοποιούμε την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson. Επομένως θα χρειαστούμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial \beta_{\nu-1}}{\partial p}, \frac{\partial \beta_{\nu-1}}{\partial q}, \frac{\partial \beta_\nu}{\partial p}, \frac{\partial \beta_\nu}{\partial q}$$

Για να βρούμε τις μερικές αυτές παραγώγους εργαζόμαστε ως εξής:

α) Θέτουμε $\gamma_\mu = \dfrac{\partial \beta_{\mu+1}}{\partial p}$, $\mu = 0, 1, 2, \cdots, \nu-1$

Από τις σχέσεις (4) θα έχουμε:

$$\gamma_0 = 1$$
$$\gamma_1 = \beta_1 + p\gamma_0$$
$$\gamma_2 = \beta_2 + p\gamma_1 + q\gamma_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} + p\gamma_{\nu-2} + q\gamma_{\nu-3}$$

Θέτοντας $\gamma_{-1} = 0$ έχουμε τους γενικούς τύπους:

$$\gamma_\mu = \beta_\mu + p\gamma_{\mu-1} + q\gamma_{\mu-2}\,, \quad \mu = 1, 2, \cdots, \nu-1 \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις αυτές προσδιορίζονται τα γ_μ από τα β_μ.

β) Θέτουμε $\delta_\mu = \dfrac{\partial \beta_{\mu+2}}{\partial q}$, $\mu = 0, 1, 2, \cdots, \nu-2$ (8)

Από τις σχέσεις (4) θα έχουμε

$$\delta_0 = 1$$
$$\delta_1 = \beta_1 + p\delta_0$$
$$\delta_2 = \beta_2 + p\delta_1 + q\delta_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_{\nu-2} = \beta_{\nu-2} + p\delta_{\nu-3} + q\delta_{\nu-4}$$

Από τη σχέση (8) έχουμε για $\mu = -1$ $\delta_{-1} = \dfrac{\partial \beta_1}{\partial q} = 0$

Θέτουμε $\delta_{-2} = 0$ και έχουμε τον γενικό τύπο:

$$\delta_\mu = \beta_\mu + p\delta_{\mu-1} + q\delta_{\mu-2} \qquad (9)$$

όπου $\beta_0 = 1$, $\mu = 0, 1, 2, \cdots, \nu-2$. Με εφαρμογή της μεθόδου των Newton-Raphson χρειαζόμαστε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial \beta_{\nu-1}}{\partial p}, \dfrac{\partial \beta_{\nu-1}}{\partial q}, \dfrac{\partial \beta_\nu}{\partial p}, \dfrac{\partial \beta_\nu}{\partial q}$ που προκύπτουν από τις σχέσεις $\gamma_\mu = \dfrac{\partial \beta_{\mu+1}}{\partial p}$ για $\mu = \nu-1, \nu-2$ και $\delta_\mu = \dfrac{\partial \beta_{\mu+2}}{\partial q}$ για $\mu = \nu-2, \nu-3$. Δηλαδή χρειαζόμαστε τα $\gamma_{\nu-1}, \gamma_{\nu-2}, \delta_{\nu-2}, \delta_{\nu-3}$

Όμως, από τις σχέσεις (7) και (9) έχουμε

$$\gamma_\mu = \delta_\mu \quad \forall \ \mu = 0, 1, 2, \cdots, \nu-2 \qquad (10)$$

Επομένως, τελικά χρειαζόμαστε μόνο τις τιμές

$$\gamma_{\nu-1} \ , \ \gamma_{\nu-2} \ , \ \gamma_{\nu-3}$$

Έτσι, για να βρούμε τη λύση του συστήματος (6), εφαρμόζουμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

1) Υπολογίζουμε τους συντελεστές β_κ, γ_κ, υποθέτοντας τα p_μ, q_μ γνωστούς από τις σχέσεις (5) και (7) δηλαδή

$$(10\alpha) \quad \begin{aligned} \beta_\kappa &= \alpha_\kappa + p_\mu \beta_{\kappa-1} + q_\mu \beta_{\kappa-2}, \quad \beta_0 = 1, \beta_{-1} = 0, \ \kappa = 1, 2, \cdots, \nu \\ \gamma_\kappa &= \beta_\kappa + p_\mu \gamma_{\kappa-1} + q_\mu \gamma_{\kappa-2}, \quad \gamma_0 = 1, \gamma_{-1} = 0, \ \kappa = 1, 2, \cdots, \nu-1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned} \beta_{\nu-1} &= \beta_{\nu-1}(p_\mu, q_\mu) \\ \beta_\nu &= \beta_\nu(p_\mu, q_\mu) \\ \gamma_{\nu-3} &= \gamma_{\nu-3}(p_\mu, q_\mu) \\ \gamma_{\nu-2} &= \gamma_{\nu-2}(p_\mu, q_\mu) \\ \gamma_{\nu-1} &= \gamma_{\nu-1}(p_\mu, q_\mu) \end{aligned}$$

2) Υπολογίζουμε μια νέα προσέγγιση $p_{\mu+1}$, $q_{\mu+1}$ από την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson για το σύστημα (6). Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις της σχέσης (2) της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα, έχουμε για τις συναρτήσεις $\beta_{\nu-1}(p,q)$, $\beta_\nu(p,q)$:

$$p_{\mu+1} = p_\mu + \frac{\beta_\nu(p_\mu,q_\mu)\dfrac{\partial \beta_{\nu-1}(p_\mu,q_\mu)}{\partial q} - \beta_{\nu-1}(p_\mu,q_\mu)\dfrac{\partial \beta_\nu(p_\mu,q_\mu)}{\partial q}}{\left|J\left(\beta_{\nu-1}(p_\mu,q_\mu), \beta_\nu(p_\mu,q_\mu)\right)\right|}$$

$$q_{\mu+1} = q_\mu + \frac{\beta_{\nu-1}(p_\mu,q_\mu)\dfrac{\partial \beta_\nu(p_\mu,q_\mu)}{\partial p} - \beta_\nu(p_\mu,q_\mu)\dfrac{\partial \beta_{\nu-1}(p_\mu,q_\mu)}{\partial p}}{\left|J\left(\beta_{\nu-1}(p_\mu,q_\mu), \beta_\nu(p_\mu,q_\mu)\right)\right|}$$

Η σχέση $\gamma_\mu = \dfrac{\partial \beta_{\mu+1}}{\partial p}$ γίνεται

$$\left.\begin{aligned} &\text{για } \mu = \nu-1 : \ \gamma_{\nu-1} = \frac{\partial \beta_\nu}{\partial p}, \\ &\text{για } \mu = \nu-2 : \ \gamma_{\nu-2} = \frac{\partial \beta_{\nu-1}}{\partial p} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Η σχέση $\delta_\mu = \dfrac{\partial \beta_{\mu+2}}{\partial q}$ γίνεται λόγω της (10)

$$\left.\begin{aligned} &\text{για } \mu = \nu-2 : \ \delta_{\nu-2} = \gamma_{\nu-2} = \frac{\partial \beta_\nu}{\partial q}, \\ &\text{για } \mu = \nu-3 : \ \delta_{\nu-3} = \gamma_{\nu-3} = \frac{\partial \beta_{\nu-1}}{\partial q} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

οπότε οι τελευταίες εκφράσεις των $p_{\mu+1}$, $q_{\mu+1}$ γίνονται λόγω των (11) και (12):

$$\left.\begin{aligned} p_{\mu+1} &= p_\mu + \frac{\beta_\nu \cdot \gamma_{\nu-3} - \beta_{\nu-1} \cdot \gamma_{\nu-2}}{(\gamma_{\nu-2})^2 - \gamma_{\nu-3} \cdot \gamma_{\nu-1}} \\ q_{\mu+1} &= q_\mu + \frac{\beta_{\nu-1} \cdot \gamma_{\nu-1} - \beta_\nu \cdot \gamma_{\nu-2}}{(\gamma_{\nu-2})^2 - \gamma_{\nu-3} \cdot \gamma_{\nu-1}} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Ξεκινώντας επομένως από μια αρχική προσέγγιση p_0, q_0 υπολογίζουμε τα β_κ, γ_κ από τις σχέσεις (10α) και αντικαθιστώντας τα στις σχέσεις (13) υπολογίζουμε τα p_1, q_1. Πάλι από τις (10α) υπολογίζουμε τις νέες τιμές των β_κ, γ_κ για p_1, q_1 και αντικαθιστώντας στη (13) βρίσκουμε τα p_2, q_2 κ.ο.κ. Έτσι διαδοχικά υπολογίζουμε τα p_μ, q_μ.

Για αρχικές τιμές p_0, q_0 αρκετά κοντά στις ζητούμενες p, q αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του ιακωβιανού πίνακα $J(\beta_{\nu-1}, \beta_\nu)$ είναι διάφορη του μηδενός, δηλ:

$$\left| J\left(\beta_{\nu-1}(p,q), \beta_\nu(p,q)\right) \right| \neq 0$$

οπότε με τον αλγόριθμο αυτό η ακολουθία (p_μ, q_μ) συγκλίνει στα p, q.

Παράδειγμα

Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3-2x^2+2x-1$ το οποίο γράφεται $f(x) = (x^2-x+1)(x-1)$ δηλ. το τριώνυμο x^2-x+1 διαιρεί ακριβώς το πολυώνυμο $f(x)$.

Να υπολογιστούν με τη μέθοδο του Bairstow οι συντελεστές $p=1$, $q=-1$ του τριωνύμου x^2-x+1.

Λύση

Εδώ έχουμε $a_1=-2$, $a_2=2$, $a_3=-1$, $p=1$, $q=-1$.
Παίρνουμε σαν προσέγγιση των (άγνωστων) p, q, τις τιμές $p_0 = 1,2$ και $q_0 = -1,4$.

Από τον προηγούμενο αλγόριθμο που αναφέραμε, έχουμε:

Για $p_0=1,2 \quad q_0=-1,4$

$$\beta_1 = a_1 + p_0 = -0,8$$
$$\beta_2 = a_2 + p_0\beta_1 + q_0 = -0,36$$
$$\beta_3 = a_3 + p_0\beta_2 + q_0\beta_1 = -0,312$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + p_0 = 0,4$$
$$\gamma_2 = \beta_2 + p_0\gamma_1 + q_0 = -1,28$$

$$p_1 = p_0 + \frac{\beta_3 - \beta_2\cdot\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = 1,083333333$$

$$q_1 = q_0 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -0,993333333$$

Για $p_1 = 1,083333333, \quad q_1 = -0,993333333$

$$\beta_1 = a_1 + p_1 = -0,916666666$$
$$\beta_2 = a_2 + p_1\beta_1 + q_1 = 0,0136111111$$
$$\beta_3 = a_3 + p_1\beta_2 + q_1\beta_1 = -0,074699074$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + p_1 = 0,166666666$$
$$\gamma_2 = \beta_2 + p_1\gamma_1 + q_1 = -0,799166666$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\beta_3 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = 0{,}990258650$$

$$q_2 = q_1 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -0{,}991431997$$

Για $p_2 = 0{,}990258650 \qquad q_2 = -0{,}991431997$

$$\beta_1 = \alpha_1 + p_2 = -1{,}009741350$$
$$\beta_2 = \alpha_2 + p_2\beta_1 + q_2 = 0{,}008662897$$
$$\beta_3 = \alpha_3 + p_2\beta_2 + q_2\beta_1 = 0{,}009668392$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + p_2 = -0{,}019482700$$
$$\gamma_2 = \beta_2 + p_2\gamma_1 + q_2 = -1{,}002062012$$

$$p_3 = p_2 + \frac{\beta_3 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = 1{,}000071859$$

$$q_3 = q_2 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -0{,}999903706$$

Για $p_3 = 1{,}000071859 \qquad q_3 = -0{,}999903706$

$$\beta_1 = \alpha_1 + p_3 = -0{,}999928141$$
$$\beta_2 = \alpha_2 + p_3\beta_1 + q_3 = 0{,}000096299$$
$$\beta_3 = \alpha_3 + p_3\beta_2 + q_3\beta_1 = -0{,}000071840$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + p_3 = 0{,}001437180$$
$$\gamma_2 = \beta_2 + p_3\gamma_1 + q_3 = -0{,}999663679$$

$$p_4 = p_3 + \frac{\beta_3 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = 0{,}999999856$$

$$q_4 = q_3 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -0{,}999999902$$

Για $p_4 = 0{,}999999856 \qquad q_4 = -0{,}999999902$

$$\beta_1 = a_1 + p_4 = -1,000000144$$

$$\beta_2 = a_2 + p_4\beta_1 + q_4 = 0,000000098$$

$$\beta_3 = a_3 + p_4\beta_2 + q_4\beta_1 = 0,000000144$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + p_4 = -0,000000288$$

$$\gamma_2 = \beta_2 + p_4\gamma_1 + q_4 = -1,000000092$$

$$p_5 = p_4 + \frac{\beta_3 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = 1,000000000$$

$$q_5 = q_4 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -1,000000000$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των p_μ, q_μ για $\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

μ	p_μ	q_μ
0	1,2	−1,4
1	1,083333333	−0,993333333
2	0,990258650	−0,991431997
3	1,000071859	−0,999903706
4	0,999999856	−0,999999902
5	1,000000000	−1,000000000

6.5. Εφαρμογές στο κεφάλαιο 6

1) Προσδιορίστε τις ακριβείς ρίζες του συστήματος

$$f(x,y) = x - x^2 - y^2 = 0$$

$$g(x,y) = y - x^2 + y^2 = 0$$

εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson με αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = 0,8$, $y_0 = 0,4$.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα όλες τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων $f(x,y)$, $g(x,y)$. Είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1-2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1+2y$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές των μερικών παραγώγων (της μ-στής προσέγγισης) στις αναλυτικές εκφράσεις του τύπου

$$\boldsymbol{x}_{\mu+1} = \boldsymbol{x}_{\mu} - J^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mu}))\cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mu})$$

των Newton - Raphson θα έχουμε:

$$x_{\mu+1} = x_\mu + \frac{(y_\mu - x_\mu^2 + y_\mu^2)(-2y_\mu) - (x_\mu - x_\mu^2 - y_\mu^2)(1+2y_\mu)}{\begin{vmatrix} 1-2x_\mu & -2y_\mu \\ -2x_\mu & 1+2y_\mu \end{vmatrix}}$$

$$y_{\mu+1} = y_\mu + \frac{(x_\mu - x_\mu^2 - y_\mu^2)(-2x_\mu) - (y_\mu - x_\mu^2 + y_\mu^2)(1-2x_\mu)}{\begin{vmatrix} 1-2x_\mu & -2y_\mu \\ -2x_\mu & 1+2y_\mu \end{vmatrix}}$$

ή μετά τις πράξεις:

$$x_{\mu+1} = \frac{-x_\mu^2 - y_\mu^2 - 4x_\mu^2 y_\mu}{1-2x_\mu+2y_\mu-8x_\mu y_\mu}$$

$$y_{\mu+1} = \frac{-x_\mu^2 + y_\mu^2 - 4x_\mu y_\mu^2}{1-2x_\mu+2y_\mu-8x_\mu y_\mu}$$

Δίνοντας στα x_μ, y_μ τις αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = 0,8$ $y_0 = 0,4$ παίρνουμε τις παρακάτω τιμές για τα $x_{\mu+1}$, $y_{\mu+1}$.

μ	x_μ	y_μ
1	0,772881356	0,420338983
2	0,771845967	0,419644283
3	0,771844506	0,419643377
4	0,771844506	0,419643377

$$\gamma_2 = \beta_2 + p_1\gamma_1 + q_1 = 1,352803414$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\beta_3 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -3,368808144$$

$$q_2 = q_1 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -14,61125183$$

Τέλος για $p_2 = -3,368808144$, $q_2 = -14,61125183$

$$\beta_1 = \alpha_1 + p_2 = -1,368808144$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + p_2\beta_1 + q_2 = 0,000000193$$

$$\beta_3 = \alpha_3 + p_2\beta_2 + q_2\beta_1 = -0,000000150$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + p_2 = -4,737616288$$

$$\gamma_2 = \beta_2 + p_2\gamma_1 + q_2 = 1,348868693$$

$$p_3 = p_2 + \frac{\beta_3 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -3,368808108$$

$$q_3 = q_2 + \frac{\beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_2} = -14,611251850$$

που είναι η καλύτερη προσέγγιση με 8 δεκαδικά ψηφία.

Αν τώρα συμβολίσουμε τις ρίζες (μιγαδικές) με

$$x_1 = k + \lambda i, \qquad x_2 = k - \lambda i,$$

θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{\beta}{\alpha} = p_3 \quad \acute{\eta} \quad 2k = -3,368808108 \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha} = q_3 \quad \acute{\eta} \quad k^2 + \lambda^2 = -14,611251850 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Από τις τελευταίες εξισώσεις (2) προκύπτει

$k = -1,684404054$ και $\lambda = 3,431331349$

Επομένως οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2} = -1,684404054 \pm 3,431331349i$$

που αποτελούν μια πολύ καλή ακρίβεια με 8 δεκ. σωστά.

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν γραφικά οι λύσεις του συστήματος

$$x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$$
$$x^2 y - 3 = 0$$

2) Δίνεται το σύστημα

$$x = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2 + y^2}{16}$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{y}{4} - \frac{x^2 + y^2}{16}$$

Δείξτε ότι έχει μια λύση στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ και προσδιορίστε την με τη βοήθεια της επαναληπτικής μεθόδου

$$x_{\mu+1} = f(x_\mu) \quad \mu = 0, 1, 2, \cdots$$

με αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = y_0 = 0{,}5$ και 6 δεκαδικά ψηφία σωστά.

3) Να λυθεί το σύστημα

$$x - 0{,}7\,\eta\mu\, x - 0{,}2\,\sigma\upsilon\nu\, y = 0$$
$$y - 0{,}7\,\sigma\upsilon\nu\, x + 0{,}2\,\eta\mu\, y = 0$$

α) με την επαναληπτική μέθοδο

$$x_{\mu+1} = f(x_\mu) \quad \mu = 0, 1, 2, \cdots$$

(βρείτε τους 5 πρώτους όρους των x, y)

β) Με την επαναληπτική μέθοδο των Newton - Raphson (βρείτε τους 3 πρώτους όρους των x, y).

Χρησιμοποιείστε αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = y_0 = 0$.

4) Να λυθούν με την επαναληπτική μέθοδο των Newton - Raphson τα παρακάτω συστήματα

α) $$4x^3 - 27xy^2 + 25 = 0$$
$$4x^2 - 3y^2 - 1 = 0$$

με αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = y_0 = 1$

β) $$x + 13\log x - y^2 = 0$$
$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

με αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = 3,4 \quad y_0 = 2,2$

5) Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο του Bairstow για να βρείτε ένα τριώνυμο $x^2 - px - q$ που να διαιρεί ακριβώς το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50$$

Πάρτε σαν αρχικές προσεγγίσεις των p, q τις τιμές $p_0 = q_0 = 0$. Στη συνέχεια βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

6) Δίδεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 3x^6 + 9x^5 + 9x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 8x + 5$$

Βρείτε με τη μέθοδο του Bairstow δύο τριώνυμα, τα οποία να διαιρούν ακριβώς το πολυώνυμο $P(x)$.

Το ένα τριώνυμο να προσεγγίζει το πολυώνυμο

$$x^2 + 1,541451x + 1,487398$$

το άλλο να προσεγγίζει το πολυώνυμο

$$x^2 - 1,127178x + 0,831492.$$

Βρείτε στη συνέχεια τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

7. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

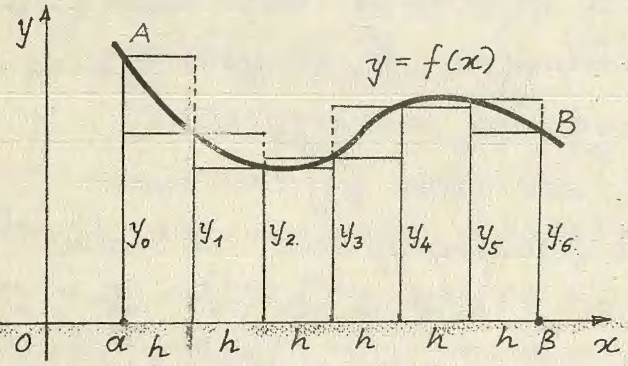
7.1. Γενικά

Όπως είναι γνωστό απ' τον ορισμό του, το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης πάντα υπάρχει. Όμως είναι προφανές, ότι δεν είναι πάντα δυνατόν να υπολογιστεί ένα ολοκλήρωμα, οποιαδήποτε μέθοδο και αν εφαρμόσουμε, επομένως δεν μπορεί θεωρητικά να υπολογιστεί πάντα ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να εφαρμοστούν προσεγγιστικές μέθοδοι για τον υπολογισμό του, που έχουν μεγάλη πρακτική σημασία. Ακόμα, μερικά ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς με κάποια μέθοδο, ίσως να είναι προτιμότερο να υπολογιστούν προσεγγιστικά, προφανώς λόγω της δυσκολίας στη μεθοδολογία για τον ακριβή υπολογισμό τους, ή λόγω της δυσκολίας των πολλαπλών αριθμητικών υπολογισμών.

Εκτός όμως από αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποίησης της, η προσεγγιστική ολοκλήρωση έχει μεγάλη σημασία στον υπολογισμό εμβαδών, όγκων, έργου κ.τ.λ., όταν οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι γνωστές μόνο γραφικά ή από κάποιο στατιστικό πίνακα και δεν είναι δοσμένες με ένα συγκεκριμένο τύπο.

Η πρώτη μέθοδος υπολογισμού εμβαδών σε μια συνεχή καμπύλη, είναι αυτή που χρησιμοποιήσαμε και για τον σχηματισμό του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος, δηλαδή χωρίζοντας την καμπύλη σε μικρές ορθογώνιες λωρίδες. Βασικά, για να είναι κατάλληλη μια μέθοδος προσεγγιστικής ολοκλήρωσης, θα πρέπει να ακολουθεί ένα πρότυπο, που να μπορεί εύκολα να σχηματιστεί.

Έτσι, για τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος προσεγγίζουμε το εμβαδό της επιφάνειας όπως φαίνεται στο σχήμα 14. Δηλαδή χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ίσα μεταξύ τους υποδιαστήματα πλάτους h. Κατόπιν αν υποθέσουμε ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου που προσεγγίζει την αντίστοιχη λωρίδα είναι το μήκος της αριστερής πλευράς του, τότε το εμβαδόν E_1 της επιφάνειας $\alpha AB\beta$ δίνεται προσεγγιστικά απ τη σχέση:



Σχ. 14

$$E_1 \approx y_0 h + y_1 h + \cdots + y_{\nu-1} h = h\left(y_0 + y_1 + \cdots + y_{\nu-1}\right) \quad (1)$$

Αν υποθέσουμε ότι το ύψος κάθε ορθογωνίου που προσεγγίζει την αντίστοιχη λωρίδα είναι το μήκος της δεξιάς πλευράς του, τότε θα έχουμε:

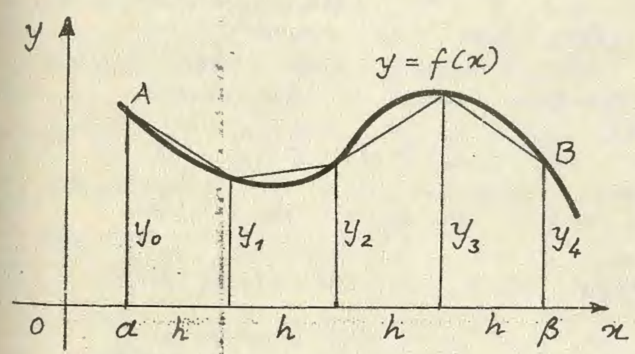
$$E_2 \approx y_1 h + y_2 h + \cdots + y_\nu h = h\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu\right) \quad (2)$$

Βέβαια θα αναμέναμε μια καλύτερη προσέγγιση χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση τιμή για την πλευρά κάθε λωρίδας. Μια τέτοια μέθοδος είναι η παρακάτω μέθοδος η, μέθοδος του τραπεζίου, ή κανόνας του τραπεζίου όπως λέγεται.

7.2. Κανόνας του τραπεζίου

Αν δεν ξέραμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $y=f(x)$ των ευθειών $x=\alpha$, $x=\beta$ και του άξονα των x, και θέλαμε να προσεγγίσουμε το εμβαδό αυτού του χωρίου $\alpha AB\beta$, ένας καλύτερος τρόπος απ' τον προηγούμενο προσέγγισής του είναι ο παρακάτω γνωστός σαν κ α ν ό ν α ς τ ο υ τ ρ α π ε ζ ί ο υ.

Δηλαδή αντικαθιστούμε την καμπύλη από μια τεθλασμένη γραμμή φέρνοντας χορδές και υπολογίζοντας το εμβαδό κάτω από κάθε χορδή και προσθέτοντας τα αποτελέσματα. Για ευκολία στους υπολογισμούς κατασκευάζουμε τις λωρίδες των τραπεζίων ίσου πλάτους h (σχήμα 15).



Σχήμα 15

Αν θέλουμε μεγάλη ακρίβεια παίρνουμε μεγάλο αριθμό λωρίδων, αλλοιώς μικρό. Τότε, εφ' όσον το εμβαδό τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων επί το ύψος, (εδώ το κάθε ύψος είναι h), η παραπάνω προσέγγιση δίνει το παρακάτω εμβαδό:

$$E_3 \approx \frac{1}{2}(y_0+y_1)h + \frac{1}{2}(y_1+y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{\nu-1}+y_\nu)h =$$

$$= \frac{1}{2}h\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{\nu-1} + y_\nu) =$$

$$= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{\nu-1} + \frac{1}{2}y_\nu\right) \quad (3)$$

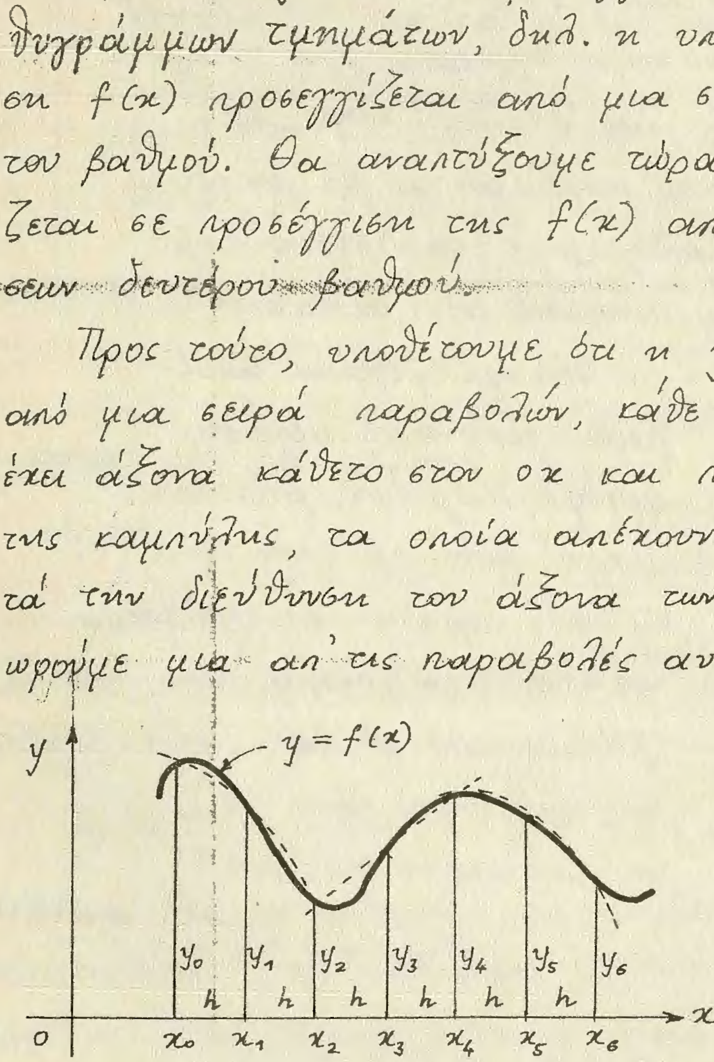
Πρέπει να τονιστεί ότι ο κανόνας του τραπεζίου αποτελεί τον αριθμητικό μέσο των δύο προηγουμένων προσεγγίσεων (1) και (2) δηλαδή

$$E_3 = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

7.3. Κανόνας του Simpson

Ο κανόνας του τραπεζίου βασίζεται στο γεγονός ότι η καμπύλη $y = f(x)$ προσεγγίζεται από μια σειρά ευθυγράμμων τμημάτων, δηλ. η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(x)$ προσεγγίζεται από μια σειρά συναρτήσεων πρώτου βαθμού. Θα αναπτύξουμε τώρα μια μέθοδο που βασίζεται σε προσέγγιση της $f(x)$ από μια σειρά συναρτήσεων δευτέρου βαθμού.

Προς τούτο, υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ προσεγγίζεται από μια σειρά παραβολών, κάθε μια απ' τις οποίες έχει άξονα κάθετο στον ox και περνάει από 3 σημεία της καμπύλης, τα οποία απέχουν ίσες αποστάσεις h κατά την διεύθυνση του άξονα των ox (σχήμα 16). Θεωρούμε μια απ' τις παραβολές αυτές π.χ. αυτή που περνάει από τα σημεία (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Εφ' όσον η εξίσωση της παραβολής αυτής είναι δευτέρου βαθμού ως προς x, αυτή μπορεί να γραφεί:



Σχήμα 16

$$y = k + \lambda(x - x_1) + \mu(x - x_1)^2 \qquad (1)$$

(ο λόγος που γράψαμε την εξίσωση (1) με τη μορφή αυτή θα φανεί στα παρακάτω αποδοτικά αποτελέσματα). Εφ' όσον $x_0 = x_1 - h$ και $x_2 = x_1 + h$, το εμβαδό κάτω απ την παραβολή μεταξύ x_0 και x_2 είναι ίσο με:

$$A_1 = \int_{x_1-h}^{x_1+h} \left[k + \lambda(x - x_1) + \mu(x - x_1)^2\right] dx =$$

$$= \left[kx + \lambda \frac{(x - x_1)^2}{2} + \mu \frac{(x - x_1)^3}{3}\right]_{x_1-h}^{x_1+h} =$$

$$= 2kh + 2\mu \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} h \left(6k + 2\mu h^2\right) \qquad (2)$$

Αν τώρα μπορέσουμε να εκφράσουμε την παράσταση $6k + 2\mu h^2$ συναρτήσει του h και των δοσμένων τιμών της συνάρτησης y_0, y_1, y_2, τότε θα έχουμε το εμβαδό κάτω από την παραβολή εκφρασμένο συναρτήσει των τριών σημείων y_0, y_1, y_2 που ανήκουν στην αρχική καμπύλη $y = f(x)$ και ορίζουν επίσης την παραβολή (1). Για το σκοπό αυτό απ' την (1) παίρνουμε:

$$y_0 = k + \lambda(x_0 - x_1) + \mu(x_0 - x_1)^2 = k - \lambda h + \mu h^2 \qquad (3)$$

$$y_1 = k + \lambda(x_1 - x_1) + \mu(x_1 - x_1)^2 = k \qquad (4)$$

$$y_2 = k + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_2 - x_1)^2 = k + \lambda h + \mu h^2 \qquad (5)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (4) επί 4 και μετά προσθέτουμε τις (3), (4) και (5) κατά μέλη. Έτσι:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6k + 2\mu h^2 \qquad (6)$$

Άρα η (2) λόγω της (6) γράφεται:

$$A_1 = \frac{1}{3} h \left(y_0 + 4 y_1 + y_2 \right) \qquad (7)$$

Προφανώς το εμβαδό κάτω από την παραβολή που περνάει από τα σημεία (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) μπορεί να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο ότι είναι:

$$A_2 = \frac{1}{3} h \left(y_2 + 4 y_3 + y_4 \right) \qquad (8)$$

Επίσης το εμβαδό κάτω από την παραβολή που περνάει από τα σημεία (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6) είναι

$$A_3 = \frac{1}{3} h \left(y_4 + 4 y_5 + y_6 \right) \qquad (9)$$

Προσθέτοντας τις (7), (8), και (9) κατά μέλη βρίσκουμε το εμβαδό κάτω από τις τρείς παραβολές, που προσεγγίζει το εμβαδό της καμπύλης $y = f(x)$. Είναι:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 =$$

$$= \frac{1}{3} h \left(y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + 4 y_5 + y_6 \right)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το εμβαδό κάτω από κάθε παραβολή προσεγγίζει δύο λωρίδες, επομένως, για να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον παραβολικό κανόνα προκειμένου να βρούμε προσεγγιστικά το εμβαδό κάτω από μια καμπύλη, πρέπει να υποδιαιρέσουμε το αρχικό διάστημα σε άρτιο αριθμό ίσων υποδιαστημάτων.

Έτσι, αν ο αριθμός των ίσων υποδιαιρέσεων του αρχικού διαστήματος είναι ν (όπου ν άρτιος) και h το πλάτος κάθε υποδιαίρεσης (όπου $h = (\beta - \alpha)/\nu$), τότε η τελευταία σχέση γενικεύεται ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \approx \tag{12}$$

$$\approx \frac{1}{3} h \left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{\nu-1} + y_\nu \right)$$

όπου στην παρένθεση ο πρώτος όρος είναι ο y_0 και μετά όλοι οι περιττοί όροι $y_1, y_3, \cdots$ έχουν συντελεστή 4, ενώ όλοι οι άρτιοι όροι $y_2, y_4, \cdots$ έχουν συντελεστή 2 εκτός απ τον τελευταίο y_ν (άρτιο) που έχει συντελεστή 1 όπως και ο y_0.

Είναι αξιοσημείωτο ότι αν επιχειρούσαμε να προσεγγίσουμε το αρχικό εμβαδό όχι με μια παραβολή της μορφής (1) αλλά με μια κυβική καμπύλη της μορφής:

$$y = k + \lambda (x - x_1) + \mu (x - x_1)^2 + \nu (x - x_1)^3 \tag{13}$$

τότε θα βρίσκαμε ότι τα εμβαδά κάτω από όλες αυτές τις κυβικές καμπύλες που περνούν από τα εκάστοτε 3 σημεία, είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα των παραβολών. Κι αυτό γιατί, όπως αναιρούνται στην πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (5) οι πρωτοβάθμιοι όροι που περιέχουν το λh, έτσι θα αναιρεθούν και οι τριτοβάθμιοι όροι που θα περιέχουν το νh^3.

Πρέπει να σημειωθεί ακόμα ότι αν η $y = f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 3 ή μικρότερου, τότε ο κανόνας του Simpson δίνει την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος της $f(x)$. Κι αυτό γιατί οι προσεγγίσεις που θα γίνουν είτε με παραβολή είτε με κυβική καμπύλη θα συμπίπτουν με την αρχική συνάρτηση.

7.4. Κανόνας των τριών όγδοων ($3/8$)

Ο κανόνας του Simpson είναι ακριβής σε ικανοποιητικό βαθμό για τα περισσότερα προβλήματα που παρουσιάζονται, και στον αυτόματο υπολογισμό προτιμάται περισσότερο από άλλους πολυπλοκότερους τύπους μεγαλύτερης όμως ακρίβειας, οι οποίοι βρίσκονται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού.

Θα υπολογίσουμε ένα ακόμα τέτοιο τύπο μεγαλύτερης ακρίβειας που είναι πολλές φορές χρήσιμος και λέγεται τύπος των τριών όγδοων.

Βασικά ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και για τον κανόνα του Simpson με μόνη τη διαφορά ότι εδώ θα χρησιμοποιήσουμε κυβική συνάρτηση (πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού) της μορφής:

$$y = g(x) = k + \lambda(x-x_1) + \mu(x-x_1)^2 + \nu(x-x_1)^3 \quad (1)$$

που περνάει όμως από 4 σημεία της καμπύλης $f(x)$.

Θεωρούμε λοιπόν μια απ' αυτές τις κυβικές συναρτήσεις που περνάει απ' τα σημεία (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) οριζόντιου πλάτους h. Έτσι το εμβαδό της λωρίδας που βρίσκεται κάτω απ' την κυβική αυτή καμπύλη θα είναι:

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_3} g(x)\,dx \qquad (2)$$

Αν δε λάβουμε πάλι υπόψη ότι:

$$x_0 = x_1 - h, \quad x_2 = x_1 + h, \quad x_3 = x_1 + 2h \qquad (3)$$

τότε η (2) γράφεται:

$$A_1 = \int_{x_1-h}^{x_1+2h} \left[k+\lambda(x-x_1)+\mu(x-x_1)^2+\nu(x-x_1)^3\right] dx =$$

$$= \left[kx + \lambda \frac{(x-x_1)^2}{2} + \mu \frac{(x-x_1)^3}{3} + \nu \frac{(x-x_1)^4}{4} \right]_{x_1-h}^{x_1+2h} =$$

$$= \left(k(x_1+2h) + \lambda \frac{4h^2}{2} + \mu \frac{8h^3}{3} + \nu \frac{16h^4}{4} \right) -$$

$$-\left(k(x_1-h) + \lambda \frac{(-h)^2}{2} + \mu \frac{(-h)^3}{3} + \nu \frac{(-h)^4}{4} \right) =$$

$$= 3kh + \frac{3}{2}\lambda h^2 + 3\mu h^3 + \frac{15}{4}\nu h^4 =$$

$$= \frac{3h}{8}\left(8k + 4\lambda h + 8\mu h^2 + 10\nu h^3\right) \qquad (4)$$

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε όπως και πριν την παρένθεση της (4) συναρτήσει των y_0, y_1, y_2 και y_3. Είναι λόγω της (1) και (3):

$$y_0 = k + \lambda(x_0-x_1) + \mu(x_0-x_1)^2 + \nu(x_0-x_1)^3 =$$
$$= k - \lambda h + \mu h^2 - \nu h^3 \qquad (5)$$

$$y_1 = k + \lambda(x_1-x_1) + \mu(x_1-x_1)^2 + \nu(x_1-x_1)^3 =$$
$$= k \qquad (6)$$

$$y_2 = k + \lambda(x_2-x_1) + \mu(x_2-x_1)^2 + \nu(x_2-x_1)^3 =$$
$$= k + \lambda h + \mu h^2 + \nu h^3 \qquad (7)$$

$$y_3 = k + \lambda(x_3-x_1) + \mu(x_3-x_1)^2 + \nu(x_3-x_1)^3 =$$
$$= k + 2\lambda h + 4\mu h^2 + 8\nu h^3 \qquad (8)$$

οπότε $y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 = 8k + 4\lambda h + 8\mu h^2 + 10\nu h^3$

Συνεπώς η (4) γράφεται:

$$A_1 = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right) \quad (9)$$

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε το εμβαδό της δεύτερης κυβικής καμπύλης που περνάει απ τα σημεία (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) και (x_6, y_6). Είναι

$$A_2 = \frac{3h}{8}\left(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right), \quad (10)$$

της επόμενης που περνάει απ τα (x_6, y_6), (x_7, y_7), (x_8, y_8), (x_9, y_9):

$$A_3 = \frac{3h}{8}\left(y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9\right) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Εδώ τώρα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι επειδή τα διαστήματα που περνάει κάθε φορά η κυβική συνάρτηση είναι τρία (εφ'όσον περνάει από 4 σημεία), πρέπει ο αριθμός των υποδιαστημάτων να είναι άρτιος ή περιττός, διαιρούμενος όμως δια 3. (αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του να είναι διαιρετό δια 3).
Επίσης είναι προφανές ότι για πολυώνυμα $3^{ου}$ βαθμού η μέθοδος αυτή δίνει ακριβή αποτελέσματα (όπως και ο κανόνας του Simpson).

7.5. Σφάλμα στον κανόνα του τραπεζίου και Simpson

Έστω $E = \int_a^\beta f(x)\,dx \quad (1)$ και

$$E' = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{\nu-1} + \frac{1}{2}y_\nu\right) \quad (2)$$

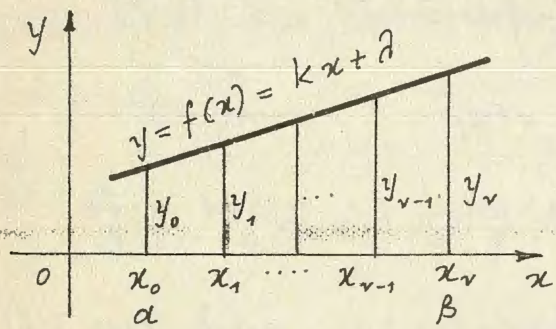
όπου $h=(\beta-\alpha)/\nu$ και $x_0=\alpha$, $x_\nu=\beta$ οπότε $y_0=f(a)$ και $y_\nu=f(\beta)$ τα αποτελέσματα που βρήκαμε από τον κανόνα του τραπεζίου (παρ. 7.2).

Προφανώς η διαφορά

$$\varepsilon = E' - E \qquad (3)$$

δίνει το σφάλμα που βρίσκουμε της προσεγγιστικής τιμής E' μείον την πραγματική τιμή E του ολοκληρώματος.

Αν η $f(x)$ είναι γραμμική συνάρτηση, τότε προφανώς $\varepsilon=0$, γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα 17, η διαφορά $E'-E=0$ (δεν υπάρχουν διαφορές στα εμβαδά). Στην περίπτωση αυτή η $f'(x)$ είναι σταθερή, άρα $f''(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Επομένως είναι ευνόητο ότι για μια συνάρτηση $f(x)$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο, μπορούμε να βρούμε όρια του σφάλματος ε που περιλαμβάνουν την $f''(x)$.



Σχ. 17

Προς τούτο αντικαθιστούμε το β με μια μεταβλητή t και εφαρμόζουμε τον τύπο (3) για $\nu=1$. Τότε το αντίστοιχο σφάλμα θα είναι λόγω των (1) και (2):

$$\varepsilon(t) = \frac{t-a}{2}\left[f(a)+f(t)\right] - \int_0^t f(x)\,dx \qquad (4)$$

όπου $y_0 = f(x_0) = f(a)$, και $y_\nu = y_\beta = f(\beta) = f(t)$.

Θέτουμε $\varepsilon(a)=0$ που είναι τετριμμένη περίπτωση.

Παραγωγίζοντας την (4) έχουμε:

$$\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}\left(f(a)+f(t)\right) + \frac{t-a}{2} f'(t) - f(t) \qquad (5)$$

Βλέπουμε ότι $\varepsilon'(a)=0$. Παραγωγίζοντας πάλι την (5):

$$\varepsilon''(t)=\frac{1}{2}f'(t)+\frac{1}{2}f'(t)+\frac{t-a}{2}f''(t)-f'(t)=$$

$$=\frac{t-a}{2}f''(t) \qquad (6)$$

Απ' την τελευταία σχέση (6) μπορούμε να βρούμε όρια για το $\varepsilon''(t)$ αντικαθιστώντας την $f''(t)$ με τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της στο διάστημα $a\leq t\leq \beta$. Έστω μ και M η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή της $f''(x)$ αντίστοιχα στο διάστημα $[a,\beta]$. Επειδή $t-a\geq 0$

$$\frac{1}{2}(t-a)\mu \leq \varepsilon''(t)\leq \frac{1}{2}(t-a)M \qquad (7)$$

Ολοκληρώνοντας την (7) από a μέχρι t έχουμε:

$$\frac{1}{4}(t-a)^2\mu \leq \varepsilon'(t)-\varepsilon'(a)\leq \frac{1}{4}(t-a)^2 M \qquad (8)$$

Επειδή $\varepsilon'(a)=\varepsilon(a)=0$, ολοκληρώνοντας πάλι την (8) και θέτοντας $t=a+h$, παίρνουμε:

$$\frac{1}{12}h^3\mu \leq \varepsilon(a+h)\leq \frac{1}{12}h^3 M \qquad (9)$$

Για σφάλματα που αντιστοιχούν στα υπόλοιπα $\nu-1$ διαστήματα παίρνουμε άλλες $\nu-1$ παρόμοιες ανισότητες και προσθέτοντας όλες αυτές τις ν ανισότητες έχουμε μια ανισότητα για το σφάλμα ε_τ στον κανόνα του τραπεζίου, που αντιστοιχεί στην ολοκλήρωση από a έως β. Επειδή $h=(\beta-a)/\nu$ παίρνουμε τελικά:

$$k\mu \leq \varepsilon_\tau \leq kM \qquad (10)$$

όπου $k=\nu\cdot\frac{1}{12}h^3=\dfrac{(\beta-a)^3}{12\nu^2}$.

Αν εργαστούμε ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο και για τον κανόνα του Simpson μπορούμε να βρούμε τα όρια που κυμαίνεται το σφάλμα ε_s στον κανόνα του Simpson, όπου όμως εδώ θα υποθέσουμε ότι η $4^{ης}$ τάξεως παράγωγος της $f(x)$ υπάρχει και είναι συνεχής στο διάστημα ολοκλήρωσης. Βρίσκουμε τον τύπο:

$$\Lambda\mu \leq \varepsilon_s \leq \Lambda M \qquad (11)$$

όπου $\Lambda = \dfrac{(\beta-\alpha)^5}{180\,(2\nu)^4}$ (ν φυσικός) και μ, M είναι η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή της $4^{ης}$ παραγώγου της $f(x)$ στο διάστημα ολοκλήρωσης. Είναι προφανές ότι $\varepsilon_s = 0$ για πολυώνυμα $4^{ου}$ βαθμού καθώς και $3^{ου}$.

7.6. Εφαρμογές στο κεφάλαιο 7.

1) Να βρεθεί προσεγγιστικά το εμβαδό κάτω απ την καμπύλη $y = 1/(1+x^4)$ από $x=0$ μέχρι $x=2$ χωρίζοντας το διάστημα $[0,2]$ σε 4 ίσα υποδιαστήματα: και χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου.

Τα σημεία της υποδιαίρεσης είναι $x_0=0$, $x_1=1/2$, $x_2=1$, $x_3=3/2$ και $x_4=2$, ενώ $h=1/2$. Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$y_0 = f(x_0) = f(0) = 1/(1+0^4) = 1$

$y_1 = f(x_1) = f(1/2) = 1/(1+(1/2)^4) = 0{,}94$

$y_2 = f(x_2) = f(1) = 1/(1+1^4) = 0{,}5$

$y_3 = f(x_3) = f(3/2) = 1/(1+(3/2)^4) = 0{,}165$

$y_4 = f(x_4) = f(2) = 1/(1+2^4) = 0{,}059$

Άρα ο τύπος (3) της 7.2 δίνει:

$$E_3 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + 0{,}94 + 0{,}5 + 0{,}165 + \frac{1}{2}\, 0{,}059\right) = 1{,}067.$$

2) Με τον κανόνα του τραπεζίου να υπολογισθεί προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

χρησιμοποιώντας έξη υποδιαστήματα.

Λύση

Τα σημεία υποδιαιρέσεως είναι: $x_0=0$, $x_1=1/2$, $x_2=1$, $x_3=3/2$, $x_4=2$, $x_5=5/2$, $x_6=3$. $h=1/2$ και οι αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ είναι: $f(x_0)=f(0)=\sqrt{1+0^3}=1$

$$f(x_1)=f(1/2)=\sqrt{1+(1/2)^3}=1{,}06,\quad f(x_2)=f(1)=1{,}41$$
$$f(x_3)=f(3/2)=\sqrt{1+(3/2)^3}=2{,}09,\quad f(x_4)=f(2)=3$$
$$f(x_5)=f(5/2)=\sqrt{1+(5/2)^3}=4{,}08,\quad f(x_6)=f(3)=5{,}29$$

Άρα:

$$\int_0^3\sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + 1{,}06 + 1{,}41 + 2{,}09 + 3 + 4{,}08 + \frac{1}{2}\, 5{,}29\right) = 7{,}39.$$

3) Να υπολογισθεί το προηγούμενο ολοκλήρωμα με τον κανόνα του Simpson, χρησιμοποιώντας 6 διαστήματα.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (12) της 7.3 για $\nu=6$ και έχοντας έτοιμες τις τιμές των $y_0, y_1, \cdots, y_6$ από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$\int_0^3\sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + 4\cdot 1{,}06 + 2\cdot 1{,}41 + 4\cdot 2{,}09 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4{,}08 + 5{,}29\right) = \frac{1}{6}\cdot 44{,}03 = 7{,}34$$

4) Να υπολογιστεί πάλι το προηγούμενο ολοκλήρωμα με τον κανόνα των τριών όγδοων, χρησιμοποιώντας πάλι 6 διαστήματα.

Λύση.

Εδώ τα υποδιαστήματα θα είναι 6 επομένως πάλι $h=\frac{1}{2}$. Αν προσθέσουμε τις σχέσεις (9) και (10) της 7.4 έχουμε:

$$A_1 + A_2 = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right)$$

Το άθροισμα A_1+A_2 εκφράζει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος. Οι τιμές $y_0, y_1, \cdots, y_6$ έχουν υπολογιστεί στην εφαρμογή 2. Άρα έχουμε:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + 3\cdot 1{,}06 + 3\cdot 1{,}41 + 2\cdot 2{,}09 + 3\cdot 3 + 3\cdot 4{,}08 + 5{,}29\right) = \frac{3}{16}\cdot 39{,}12 = 7{,}335$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ με τον κανόνα του τραπεζίου με $\nu=10$ και να βρεθούν τα όρια του σφάλματος ε.

Λύση.

Είναι $h=(\beta-\alpha)/\nu = (1-0)/10 = 0{,}1$. Επίσης για

$x_0 = 0 :\ f(0) = 1$

$x_1 = 0{,}1 :\ f(0{,}1) = 0{,}990050$ $\qquad x_6 = 0{,}6 :\ f(0{,}6) = 0{,}697676$

$x_2 = 0{,}2 :\ f(0{,}2) = 0{,}960789$ $\qquad x_7 = 0{,}7 :\ f(0{,}7) = 0{,}612626$

$x_3 = 0{,}3 :\ f(0{,}3) = 0{,}913931$ $\qquad x_8 = 0{,}8 :\ f(0{,}8) = 0{,}527292$

$x_4 = 0{,}4 :\ f(0{,}4) = 0{,}852144$ $\qquad x_9 = 0{,}9 :\ f(0{,}9) = 0{,}444858$

$x_5 = 0{,}5 :\ f(0{,}5) = 0{,}778801$ $\qquad x_{10} = 1 :\ f(1) = 0{,}367879$

Είναι ακόμα:

$f(x_0)+f(x_{10}) = y_0+y_{10} = 1+0,367879 = 1,367879$

$f(x_1)+\cdots+f(x_9) = y_1+\cdots+y_9 = 6,778167.$

Άρα ο τύπος (3) της 7.2 δίνει:

$$E_3 \approx 0,1\left(0,5\cdot 1,367879 + 6,778167\right) = 0,746211$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τα όρια του σφάλματος ε υπολογίζουμε πρώτα την $f''(x)$. Είναι:

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}\cdot(-2x) = -2x\,e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2} = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}.$$

Βρίσκουμε τις άκρες τιμές της $f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

Η πρώτη παράγωγος της $f''(x)$ δηλ η $f'''(x)$ είναι:

$$y'''(x) = 8x\,e^{-x^2}+2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}\cdot(-2x) = 4x\left(3-2x^2\right)e^{-x^2}$$

και $y'''(x)=0$ για $x=0$ ή $x=\pm 1,225$ απορρ. γιατί βρίσκονται έξω απ το διάστημα $[0,1]$.

Ακόμα η $y'''(x)$ είναι θετική στο διάστημα $[0,1]$, άρα η $f''(x)$ θα είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό.

Επομένως για $x=0$ θα έχει ελάχιστο το $f''(0) = \mu = -2$, ενώ για $x=1$ θα έχει μέγιστο το $f''(1) = M = 0,735759$. Επίσης είναι

$$k = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12\nu^2} = \frac{(1-0)^3}{12\cdot 10^2} = \frac{1}{1200}.$$

Επομένως η ανισότητα (10) της 7.5 δίνει:

$$-0,001667 \le \varepsilon \le 0,000614$$

Έτσι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος πρέπει να βρίσκεται μεταξύ: $0,746211-0,000614 = 0,745597$ και

$$0,746211+0,001667 = 0,747878$$

Η πραγματική τιμή είναι (με ακρίβ. 6 δεκαδ): 0,746824

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2} dx = I$ με τον κανόνα του Simpson για 2ν (άρτιο) $= 10$. και να βρεθούν τα όρια του σφάλματος ε.

Λύση.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (12) της 7.3 για τις έτοιμες τιμές των $y_0, \dots, y_{10}$ που έχουμε απ το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$y_0 + y_{10} = 1,367879$$

$$4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 3,740266$$

$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 3,037901$$ Άρα

$$I = \frac{0,1}{3}(1,367879 + 3,740266 + 3,037901) = 0,746825$$

Υπολογισμός των ορίων του σφάλματος ε.

Υπολογίζουμε πρώτα την 4^{η} παράγωγο της $f(x) = e^{-x^2}$. Απ την προηγούμενη εφαρμογή βρήκαμε ότι:

$$y''' = 4x(3-2x^2)e^{-x^2}$$ Άρα:

$$y^{(4)} = 4(3-2x^2)e^{-x^2} + 4x(-4x)e^{-x^2} - 2x \cdot 4x(3-2x^2)e^{-x^2} =$$

$$= 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$$

Για να βρούμε τις άκρες τιμές της $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$ βρίσκουμε την πρώτη παράγωγό της την $y^{(5)}$. Είναι

$$y^{(5)} = 4(16x^3 - 24x)e^{-x^2} + 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2} \cdot (-2x) =$$

$$= -8x(4x^4 - 20x^2 + 15)e^{-x^2}.$$

Οι ρίζες της τελευταίας είναι:

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2,5 + 0,5\sqrt{10}} = \pm 2,02$$

$$x_{4,5} = \pm\sqrt{2,5 - 0,5\sqrt{10}} = \pm 0,96$$

όμως στο διάστημα ολοκλήρωσης οι μόνες δεκτές ρίζες είναι οι $x = 0$ και $x = 0,96$.

Η δεύτερη παράγωγος της $y^{(4)}$ δηλ. η $y^{(6)}$ είναι

$$y^{(6)} = -8(4x^4-20x^2+15)e^{-x^2} - 8x(16x^3-40x)e^{-x^2} +$$
$$+16x^2(4x^4-20x^2+15)e^{-x^2} =$$
$$= (64x^6-480x^4+720x^2-120)e^{-x^2}.$$ Είναι δε

$y^{(6)}(0) = -120 < 0$ άρα για $x=0$ υπάρχει ένα $y^{(4)}$ μέγιστο το

$$f^{(4)}(0) = M = 4(4\cdot 0^4 - 12\cdot 0^2 + 3)e^{-0^2} = 12.$$ Επίσης

$y^{(6)}(0{,}96) = 73{,}99 > 0$ άρα για $x=0{,}96$ υπάρχει ένα $y^{(4)}$ ελάχιστο το

$$y^{(4)}(0{,}96) = 4(4\cdot 0{,}96^4 - 12\cdot 0{,}96^2 + 3)e^{-0{,}96^2} = \mu =$$
$$= -7{,}41948$$

Εφ' όσον $2\nu = 10$ και $\beta - \alpha = 1$, απ τον τύπο (11) της 7.5 υπολογίζουμε το Λ. Είναι:

$$\Lambda = \frac{(\beta-\alpha)^5}{180\cdot(2\nu)^4} = \frac{1}{1.800.000} = 0{,}00000056$$

Άρα $\Lambda\cdot\mu = 0{,}00000056\cdot(-7{,}41948) = -0{,}000004$

$\Lambda M = 0{,}00000056\cdot 12 = 0{,}000006$

Επομένως $-0{,}000004 \leq \varepsilon_s \leq 0{,}000006$

Έτσι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος πρέπει να βρίσκεται μεταξύ:

$$0{,}746825 - 0{,}000004 = 0{,}746821 \quad \text{και}$$
$$0{,}746825 + 0{,}000006 = 0{,}746831$$

που δείχνει ακρίβεια αποτελεσμάτων τουλάχιστον 4 δεκαδικών ψηφίων. Στην πραγματικότητα η τιμή 0,746825 που βρέθηκε έχει ακρίβεια 5 δεκ. ψηφίων, επειδή η πραγματική τιμή είναι, όπως είπαμε, 0,746824. Πρέπει να τονισθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ καλύτερο από το προηγούμενο της εφαρμογής 5 (το 0,746211) ενώ η εργασία που έγινε είναι σχεδόν η ίδια και στις δύο περιπτώσεις (κανόνας τραπεζίου και Simpson).

Γι'αυτό ο κανόνας του Simpson θεωρείται απ' τους πιο δημοφιλείς τρόπους υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-4}^{4} e^{-x^2} dx$ με τον κανόνα του Simpson χρησιμοποιώντας διαστήματα με $h = 1/2$ και ακρίβεια 5 δεκαδ. ψηφίων. Τι παρατηρείτε συγκρίνοντάς το με το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \simeq \sqrt{\pi}$;

2) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα με τον κανόνα του τραπεζίου:

i) $\int_1^5 \sqrt{x^3 - 1}\, dx$ για $\nu = 4$

ii) $\int_0^5 \sqrt[3]{125 - x^2}\, dx$ για $\nu = 5$

iii) $\int_0^2 e^{-0,5x^2} dx$ για $\nu = 4$

iv) $\int_1^4 (\log x)^{3/2} dx$ για $\nu = 6$ (και με τον νόμο 3/8).

Βρείτε τα όρια σφάλματος του ολοκληρώματος iii).

3) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Simpson για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\eta\mu\, x}\, dx$ με 4 υποδιαστήματα

ii) το iii) της 2. Ποια τα όρια σφάλματος για $\nu = 4$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

6. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

7. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ