ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(για προπαρασκευαστικά τμήματα)

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ M.Sc.
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΕΙ/Λ.

Λάρισα, Οκτώβριος 1989

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΛΑΡΙΣΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(για προπαρασκευαστικά τμήματα)

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ M.Sc.
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΕΙ/Λ.

Λάρισα, Οκτώβριος 1989

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

O

Η έν

δηλ. δεν όρ

όμως με

ο φυσικός

σαφώς δια

γράφομε

αναγραφή

$A = \{x / x$

Ος

νόημα, το

"ψευδής"

σεως p

Ος

εννοούμε

μεταφέρ

ενός καθ

τιμή

σύνολο

ζεται μ

π.χ. η

γίνεται

τιμή

αναφορ

Στ

απλές

1. ΣΥΝΟΛΑ.

Ορισμοί

Η έννοια του **συνόλου** στα Μαθηματικά είναι πρωταρχική, δηλ. δεν ορίζεται με τη βοήθεια άλλων πιο απλών εννοιών αποκτάται όμως με την εμπειρία. Παραδείγματα τέτοιων εννοιών είναι το σημείο, ο φυσικός αριθμός, η λογική πρόταση κ.ά. Τα στοιχεία ενός συνόλου είναι σαφώς διακεκριμμένα μεταξύ τους· αν α είναι στοιχείο του συνόλου A γράφομε $\alpha \in A$, αν δεν είναι γράφομε $\alpha \notin A$. Ένα σύνολο παριστάνεται με αναγραφή των στοιχείων του, π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$ ή με περιγραφή αυτών π.χ. $A = \{x / x$ είναι ρίζα της εξισώσεως $x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

Ως **λογική πρόταση** εννοούμε (δεν ορίζομε) μια έκφραση με πλήρες νόημα, που επιδέχεται έναν ακριβώς από τους χαρακτηρισμούς "αληθής" ή "ψευδής". Οι χαρακτηρισμοί αυτοί λέγονται **τιμές αληθείας** της προτάσεως p και είναι: τιμή αληθείας $\tau(p) = \alpha$ άν p αληθής, ψ άν p ψευδής.

Ως **προτασιακός τύπος** ή **ανοικτή πρόταση** μιας μεταβλητής εννοούμε κάθε έκφραση η οποία περιέχει μία μόνο μεταβλητή και η οποία μετατρέπεται σε πρόταση όταν η μεταβλητή αντικατασταθεί από τυχόν στοιχείο ενός καθωρισμένου συνόλου. Το στοιχείο που αντικαθιστά την μεταβλητή λέγεται **τιμή** της μεταβλητής. Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής λέγεται **σύνολο αναφοράς** της μεταβλητής του προτασιακού τύπου και συμβολίζεται με Ω. Η μεταβλητή συμβολίζεται με x.

π.χ. η έκφραση "ο x είναι μικρότερος του 5" είναι προτασιακός τύπος. Για $x = 2$ γίνεται λογική πρόταση η οποία δέχεται τον χαρακτηρισμό "αληθής" μαζί η τιμή αληθείας αυτής είναι α, ενώ για $x = 10$ γίνεται ψευδής. Ως σύνολο αναφοράς λαμβάνεται εδώ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στη Μαθηματική λογική δεν χρησιμοποιούμε μόνο απλές προτάσεις. Τις απλές προτάσεις τις συνδέομε μεταξύ τους με διάφορες λέξεις ή εκφράσεις τους

λογικούς συνδέσμους και σχηματίζομε τις **σύνθετες προτάσεις**.
Η τιμές αληθείας της σύνθετης αυτής προτάσεως είναι πάλι το σύνολο $\{\alpha, \psi\}$.
Οι θεμελειώδεις λογικές πράξεις και οι τιμές αληθείας αυτών ορίζονται ως εξής:

1. Καλούμε **σύζευξη** δύο προτάσεων p και q την πρόταση "p **και** q" (συμβολικά "$p \wedge q$") που την δεχόμαστε αληθή μόνον όταν οι δύο προτάσεις p και q είναι συγχρόνως αληθείς και ψευδή σε κάθε άλλη περίπτωση. ήτοι:
$\tau(p \wedge q) = \alpha$ άν $\tau(p) = \tau(q) = \alpha$, ψ σε κάθε άλλη περίπτωση.

2. Καλούμε **διάζευξη (εγκλειστική)** δύο προτάσεων p και q την πρόταση "p **είτε** q" (συμβολικά "$p \vee q$") που την δεχόμαστε ψευδή μόνον όταν και οι δύο προτάσεις p και q είναι συγχρόνως ψευδείς και αληθή σε κάθε άλλη περίπτωση. ήτοι
$\tau(p \vee q) = \psi$ άν $\tau(p) = \tau(q) = \psi$, α σε κάθε άλλη περίπτωση.

3. Καλούμε **αποκλειστική διάζευξη** δύο προτάσεων p και q την πρόταση "**ή** μόνο p **ή** μόνο q" ή απλώς "p **ή** q" (συμβολικά "$p \veebar q$") πού τη δεχόμαστε ψευδή όταν και οι δύο προτάσεις p και q έχουν την ίδια τιμή αληθείας και αληθή όταν έχουν διάφορες τιμές αληθείας ήτοι:
$\tau(p \veebar q) = \psi$ άν $\tau(p) = \tau(q)$, α άν $\tau(p) \neq \tau(q)$.

4. Καλούμε **άρνηση** μιας προτάσεως p την πρόταση "**όχι** p" (συμβολικά "$\sim p$" ή "$\bar{p}$") πού είναι αληθής όταν η p είναι ψευδής και ψευδής όταν η p είναι αληθής. ήτοι:
$\tau(\sim p) = \alpha$ άν $\tau(p) = \psi$, ψ άν $\tau(p) = \alpha$.

5. Καλούμε **συνεπαγωγή** δύο προτάσεων p και q την πρόταση "**εάν** p, **τότε** q" ή "p **συνεπάγεται** q" (συμβολικά "$p \Rightarrow q$") πού την δεχόμαστε ψευδή μόνον όταν η p είναι αληθής και η q ψευδής και αληθή σε κάθε άλλη περίπτωση. ήτοι:
$\tau(p \Rightarrow q) = \psi$ εάν $\tau(p) = \alpha$ και $\tau(q) = \psi$, α σε κάθε άλλη περίπτωση.

6. Καλούμε (**λογική**) **ισοδυναμία** δύο προτάσεων p και q την πρόταση "p **τότε, και μόνο τότε, άν** q" ή "p **συνεπάγεται** q **και αντιστρόφως**" (συμβολικά "$p \Leftrightarrow q$") που τη δεχόμαστε αληθή μόνο όταν και οι δύο προτάσεις p και q έχουν την ίδια τιμή αληθείας και ψευδή όταν οι

p και q έχουν διάφορες τιμές αληθείας. ήτοι:

$\tau(p \Leftrightarrow q) = \alpha$ άν $\tau(p) = \tau(q)$, ψ άν $\tau(p) \neq \tau(q)$.

Τις τιμές αληθείας των παραπάνω λογικών πράξεων τις αποδίδουμε συγκεντρωτικά με τον επόμενο **πίνακα τιμών αληθείας**

p	q	Σύζευξη	Εγκλ. διαζ.	Αποκλ. διαζ.	Συνεπαγωγή	Ισοδυναμία	Άρνηση	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

Άν μια σύνθετη πρόταση αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους προτάσεις πού συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ λέγεται **λογικός τύπος.**

Ένας λογικός τύπος P είναι **ταυτολογία** άν και μόνο άν είναι αληθής πρόταση για οποιοδήποτε συνδιασμό των τιμών αληθείας τών προτάσεων πού συνθέτουν τον λογικό τύπο P.

Ένας λογικός τύπος P είναι **αντιλογία** ή **αντίφαση** όταν ή άρνησή του $\sim P$ είναι ταυτολογία.

Για να γενικεύσουμε τώρα την έννοια τοῦ συνόλου ορίζουμε ως **κενό** το σύνολο που δέν έχει στοιχεία και συμβολίζουμε μέ $\emptyset$ ή $\{\}$.

Ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ λέγεται **υποσύνολο** ενός άλλου συνόλου $B \neq \emptyset$ τότε και μόνο τότε, άν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

δηλ. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.

Ως **απειροσύνολο** ορίζεται το σύνολο με άπειρα στοιχεία και **πεπερασμένο** το σύνολο με πεπερασμένου πλήθους στοιχεία.

Ως **αριθμήσιμο** ορίζεται το σύνολο το ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών.

Παραδείγματα συνόλων: **N** των φυσικών, **No** $= N \cup \{0\}$, **Z** των ακεραίων **Q** των ρητών, **R** των πραγματικών και **C** των μιγαδικών αριθμών.

Ως **δυναμοσύνολο** ενός συνόλου A ορίζομε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A και το συμβολίζομε με $P(A)$. π.χ άν $A = \{1,2,3\}$ τότε $P(A) = \{\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
Αποδεικνύεται ότι άν το σύνολο A έχει ν το πλήθος στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολό του έχει 2^{ν} το πλήθος στοιχεία.

Πράξεις επί των συνόλων.

Ως **ένωση** δύο ή περισσοτέρων συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ ($\nu \in N$ φυσικός) ορίζεται το σύνολο A που αποτελείται από τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των $A_1, A_2, \dots, A_\nu$. και συμβολίζεται:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu.$$

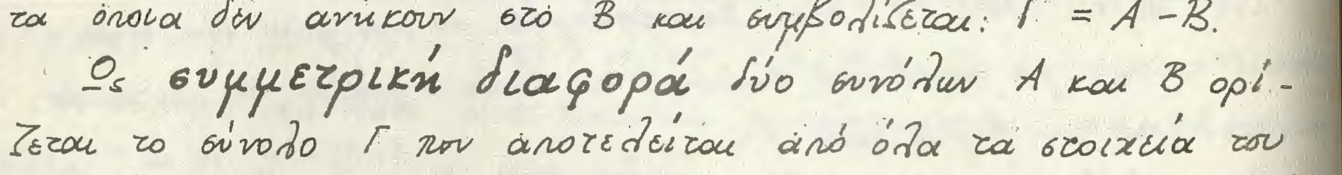
Ως **τομή** δύο ή περισσοτέρων συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ ($\nu \in N$) ορίζεται το σύνολο A που αποτελείται μόνον από τα κοινά στοιχεία των $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ και συμβολίζεται: $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu$.

Ως **διαφορά** ενός συνόλου B από ένα σύνολο A, ορίζεται το σύνολο Γ πού αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A τα οποία δέν ανήκουν στό B και συμβολίζεται: $\Gamma = A - B$.

Ως **συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων A και B ορίζεται το σύνολο Γ πού αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A πού δέν ανήκουν στο B και από όλα τα στοιχεία του B πού δέν ανήκουν στό A, και συμβολίζεται: $\Gamma = A \dotplus B = (A-B) \cup (B-A)$

Ως **συμπλήρωμα** ενός συνόλου A ως προς ένα σύνολο αναφοράς Ω ορίζεται το σύνολο πού αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Ω τα οποία δέν ανήκουν στο υποσύνολο A (ως προς το Ω) και συμβολίζεται: $A^c = \Omega - A$.

Σχηματικά οι ανωτέρω πράξεις παριστάνονται με το σκιαγραμμισμένο μέρος των κάτωθι διαγραμμάτων του **Venn**.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A - B$ $\quad$ $A \dotplus B$ $\quad$ A^c

Πληθικός αριθμός ενός συνόλου A λέγεται ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων του A.

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοδύναμα** όταν έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

Ίσα λέγονται δύο σύνολα A και B τότε και μόνον τότε, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Το "τότε και μόνο τότε" σημαίνει ότι κάθε στοιχείο $x \in A$ να είναι και στοιχείο του B και κάθε στοιχείο $y \in B$ να είναι και στοιχείο του A. Δηλ. άν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

Διμελείς σχέσεις - Ισοδυναμίες.

Ένα στοιχείο α που δίδεται σαν πρώτο και ένα στοιχείο β πού δίδεται σαν δεύτερο σχηματίζουν ένα νέο στοιχείο που γράφεται (α,β) και καλείται **διατεταγμένο ζευγος**. Απ' τον ορισμό προκύπτει ότι $(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \Longleftrightarrow \alpha = \gamma,\ \beta = \delta$.

Π.χ. ένας μιγαδικός αριθμός $\alpha + \beta i$ παριστάνεται σαν ζεύγος (α,β).

Έστω τώρα δύο σύνολα A και B. Το σύνολο των ζευγών (α,β) με $\alpha \in A$ καί $\beta \in B$ καλείται **καρτεσιανό γινόμενο** του A επί του B και γράφεται $A \times B = \{(x,y) : x \in A \text{ και } y \in B\}$.

Ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ λέγεται **διμελής σχέση** από το A στο B, δηλ. κάθε διμελής σχέση είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Για να δηλώσουμε ότι ένα ζεύγος (x,y) ανήκει σε μιά σχέση R γράφομε xRy πού σημαίνει $(x,y) \in R$. Ειδικώτερα κάθε σχέση από ένα σύνολο A στο ίδιο σύνολο A, δηλ κάθε υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times A$ λέγεται σχέση μέσα στο A. Π.χ Άν $A = \{2,3,4,6,8\}$ η (διμελής) σχέση R_3 πού ορίζεται από το σύνολο $\{(x,y) : x \in A$ διαιρέτης του $y \in A\}$ είναι: $R_3 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(4,4),(4,8),(6,6),(8,8)\}$.

Κατηγορίες σχέσεων.

Μία σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **ανακλαστική** τότε και μόνο τότε άν $xRx \quad \forall x \in A$ ($\forall$ σημαίνει "για κάθε").

Π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ ο x διαιρεί τον y, είναι ανακλαστική, διότι $xRx \ \forall x \in A$.

Μια σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **συμμετρική** τότε και μόνο τότε άν $xRy \Rightarrow yRx$.

Π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ ο x και ο y είναι συμμαθητές, είναι συμμετρική διότι άν xRy και yRx.

Μία σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **αντισυμμετρική** τότε και μόνο τότε, άν εκ των σχέσεων xRy και yRx να συνεπάγεται ότι $x=y$. Π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ το x είναι υποσύνολο του y. ($x \subseteq y$) (το (x,y) είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος του συνόλου A). Η R είναι αντισυμμετρική, διότι εκ τις xRy και $yRx \Rightarrow x=y$.

Μία σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατική** τότε και μόνο τότε, άν εκ των σχέσεων xRy και yRz να συνεπάγεται ότι xRz. Π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ η ευθεία x και η ευθεία y έχουν την ίδια διεύθυνση. Η R είναι μεταβατική, διότι εκ των xRy, $yRz \Rightarrow xRz$.

Μία σχέση σ' ένα σύνολο A η οποία είναι: 1) ανακλαστική, 2) συμμετρική, 3) μεταβατική λέγεται **ισοδυναμία** ή **σχέση ισοδυναμίας** εις το A και συμβολίζεται με $\sim$.

Π.χ. Ένα σύνολο ομοίων τριγώνων είναι μία ισοδυναμία.

Έστω $\sim$ μια ισοδυναμία εις το A και $\alpha \in A$. Το σύνολο των στοιχείων του συνόλου A πού είναι ισοδύναμα πρός τό α λέγεται **κλάση ισοδυναμίας** του α και συμβολίζεται μέ $[\alpha]$. Το δε σύνολο τών κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται **σύνολο πηλίκο** του A διά της $\sim$ και συμβολίζεται μέ $A/\sim$. Π.χ. Αν A το σύνολο των μαθητών ενός γυμνασίου και η ισοδυναμία $\sim$ πού ορίζεται απ' τον τύπο:

$x \sim y \Leftrightarrow$ οι μαθητές x και y φοιτούν στην ίδια τάξη, τότε η κλάση ισοδυναμίας του μαθητού α είναι το σύνολο που έχει στοιχεία τον α και τους συμμαθητές του, δηλ. η τάξη των μαθητών. Το σύνολο πηλίκο $A/\sim$ είναι εδώ τό σύνολο των τάξεων του γυμνασίου.

Μια σχέση σ' ένα σύνολο A η οποία είναι: 1) ανακλαστική, 2) αντισυμμετρική 3) μεταβατική λέγεται **διάταξη ή σχέση διατάξεως** εις το A και συμβολίζεται συνήθως με $\prec$. Το σύνολο A που έχει ορισθεί μια διάταξη λέγεται **διατεταγμένο σύνολο** και παριστάνεται με το ζεύγος $(A, \prec)$.

Π.χ. Η σχέση $\leq$ είναι μια διάταξη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών διότι: 1) $\alpha \leq \alpha$ $(\alpha = \alpha)$. 2) Άν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$. 3) Άν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma \Rightarrow$ και $\alpha \leq \gamma$. Δηλ. το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι διατεταγμένο ως προς την σχέση $\leq$.

Ασκήσεις

1.1. Άν $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ και $\Gamma = \{3,4,5,6\}$ να ευρεθούν α') το $(A \cup B) \cup \Gamma$ και β') το $A \cup (B \cup \Gamma)$. Τι συμπεραίνετε; γ') $A - B$, δ') $B - A$, ε') $A \cap B \cap \Gamma$ στ') $(A - B) \cap \Gamma$.

Λύση: Είναι α') $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$ και $(A \cup B) \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5,6,8\}$. β'). Επίσης $B \cup \Gamma = \{2,3,4,5,6,8\}$ και $A \cup (B \cup \Gamma) = \{1,2,3,4,5,6,8\}$. Άρα $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$. γ') $A - B = \{1,3\}$ δ') $B - A = \{6,8\}$, ε') $A \cap B \cap \Gamma = \{4\}$ και στ') $(A - B) \cap \Gamma = \{1,3\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3\}$.

1.2. Να δειχθεί ότι $(A - B) \cap B = \emptyset$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό της διαφοράς δύο συνόλων το σύνολο $A - B$ αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B· άρα τα σύνολα $A - B$ και B δεν έχουν κοινά στοιχεία δηλ. είναι ξένα μεταξύ τους.

1.3. Άν A, B, Γ, Δ είναι τυχόντα σύνολα να δειχθούν οι ισότητες:

α') $(A - B) \cap (A - \Gamma) \cap (A - \Delta) = A - (B \cup \Gamma \cup \Delta)$

β') $(A \cap B - \Gamma) \cap (A \cap \Gamma - B) = \emptyset$, γ') $(A \cup B) \cap (A - B) = A - B$

δ') $(A \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma - B) \cap (A \cup B - \Gamma) = A - (B \cup \Gamma)$.

Λύση. α') Έστω $x \in (A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)$ επομένως κατά τον ορισμό της τομής: $x\in(A-B)$ και $x\in(A-\Gamma)$ και $x\in(A-\Delta)$. Εκ της $x\in(A-B)$ προκύπτει $x\in A$ και $x\notin B$ (1), εκ της $x\in(A-\Gamma)$ προκύπτει $x\in A$ και $x\notin \Gamma$ (2), και εκ της $x\in(A-\Delta)$ προκύπτει $x\in A$ και $x\notin \Delta$ (3). Εκ των (1), (2), (3) προκύπτει ότι $x\in A$ και $x\notin B\cup\Gamma\cup\Delta$ επομένως $x\in(A-B\cup\Gamma\cup\Delta)$ δηλ. το τυχόν στοιχείο x του συνόλου $(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)$ είναι και στοιχείο του συνόλου $A-B\cup\Gamma\cup\Delta$. δηλ. $(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)\subseteq A-B\cup\Gamma\cup\Delta$ (1').
Έστω τώρα $y\in A-B\cup\Gamma\cup\Delta$. επομένως $y\in A$ και $y\notin B\cup\Gamma\cup\Delta$. (4) Εκ της (4) έπεται ότι $y\notin B$, $y\notin\Gamma$ και $y\notin\Delta$. Τώρα εκ της $y\in A$ και $y\notin B$ προκύπτει $y\in(A-B)$· εκ της $y\in A$ και $y\notin\Gamma$ προκύπτει $y\in(A-\Gamma)$ και εκ της $y\in A$ και $y\notin\Delta$ προκύπτει $y\in(A-\Delta)$ επομένως και στην τομή αυτών δηλ. $y\in(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)$. δηλ. το τυχόν στοιχείο y του συνόλου $A-B\cup\Gamma\cup\Delta$ είναι και στοιχείο του συνόλου $(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)$. ήτοι:
$A-B\cup\Gamma\cup\Delta\subseteq(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)$ (2'). Εκ των (1'), (2') προκύπτει η ισότης.

β') Έστω $x\in(A\cap B-\Gamma)$ άρα $x\in A\cap B$ και $x\notin\Gamma$ ή $x\in A$, $x\in B$, $x\notin\Gamma$. Επειδή $x\in A$ και $x\notin\Gamma$ προκύπτει $x\notin A\cap\Gamma$ άρα και $x\notin(A\cap\Gamma-B)$. δηλ. το σύνολο $A\cap\Gamma-B$ δεν περιέχει το τυχόν στοιχείο x του συνόλου $A\cap B-\Gamma$, επομένως δεν περιέχει κανένα στοιχείο αυτού, άρα τα σύνολα $A\cap B-\Gamma$ και $A\cap\Gamma-B$ είναι ξένα μεταξύ τους δηλ. $(A\cap B-\Gamma)\cap(A\cap\Gamma-B)=\emptyset$.

γ') Έστω $x\in(A\cup B)\cap(A-B)$ άρα $x\in A\cup B$ (1) και $x\in(A-B)$ (2). Εκ της (1) προκύπτει ή $x\in A$, ή $x\in B$, ή $x\in A$ και $x\in B$. Εκ της (2) προκύπτει $x\in A$ και $x\notin B$ δηλ. $x\in A$ και $x\notin B$. άρα $x\in(A-B)$ ήτοι:
$(A\cup B)\cap(A-B)\subseteq A-B$ (1'). Έστω τώρα $y\in A-B$ άρα $y\in A$ και $y\notin B$ ή ακόμη $y\in A\cup B$ και $y\in A-B$. άρα και στη τομή τους δηλ. $y\in(A\cup B)\cap(A-B)$ ήτοι $A-B\subseteq(A\cup B)\cap(A-B)$ (2'). Εκ των (1') και (2') προκύπτει η ισότης.

δ') Έστω $x\in(A\cup B\cup\Gamma)\cap(A\cup\Gamma-B)\cap(A\cup B-\Gamma)$ ήτοι $x\in A\cup B\cup\Gamma$ (1), $x\in(A\cup\Gamma-B)$ (2), $x\in(A\cup B-\Gamma)$ (3). Εκ της (3) και (2) προκύπτει ότι $x\in A\cup B$ και $x\notin\Gamma$, και $x\in A\cup\Gamma$ και $x\notin B$ άρα $x\in A$ και $x\notin B$, $x\notin\Gamma$. άρα $x\notin B\cup\Gamma$ δηλ. $x\in(A-B\cup\Gamma)$ δηλ. $(A\cup B\cup\Gamma)\cap(A\cup\Gamma-B)\cap(A\cup B-\Gamma)\subseteq A-B\cup\Gamma$ (1').

Έστω τώρα $y \in (A - B \cup \Gamma)$ άρα $y \in A$ και $y \notin B \cup \Gamma$. ή $y \notin B$, $y \notin \Gamma$. Επειδή $y \in A$, $y \notin B$, $y \notin \Gamma$ έπεται $y \in A \cup B \cup \Gamma$, $y \in (A \cup B - \Gamma)$, $y \in (A \cup \Gamma - B)$ άρα $y \in (A \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma - B) \cap (A \cup B - \Gamma)$ δηλ. $A - B \cup \Gamma \subseteq (A \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma - B) \cap (A \cup B - \Gamma)$ (2'). Εκ των (1') και (2') προκύπτει η ισότης των δύο συνόλων.

1.4. Να δειχθεί ότι $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ τύπος του De Morgan

Λύση. Κατ' αρχάς τα σύνολα $(A \cup B)^c$, A^c, B^c είναι συμπληρωματικά των $A \cup B$, A, B ως προς το ίδιο σύνολο αναφοράς $\underline{\Omega}$. Έστω x τυχόν στοιχείο του $(A \cup B)^c$ δηλ. $x \in (A \cup B)^c$· άρα $x \notin (A \cup B)$ ή $x \notin A$ και $x \notin B$ (1). Εκ της (1) προκύπτει $x \in A^c$ και $x \in B^c$ άρα $x \in A^c \cap B^c$ δηλ. το σύνολο $A^c \cap B^c$ περιέχει το τυχόν στοιχείο του συνόλου $(A \cup B)^c$ άρα θα περιέχει όλα τα στοιχεία αυτού δηλ. $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. (1'). Έστω τώρα $y \in A^c \cap B^c$ άρα $y \in A^c$ και $y \in B^c$ επομένως $y \notin A$ και $y \notin B$. Άρα $y \notin (A \cup B)$ δηλ. $y \in (A \cup B)^c$ δηλ. $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ (2'). Εκ των (1') και (2') προκύπτει ότι $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1.5. Να δειχθεί ότι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. τύπος του De Morgan.

Λύση. Έστω $x \in (A \cap B)^c$ άρα $x \notin A \cap B$ (1). Εκ της (1) προκύπτει: α') $x \notin A$, $x \notin B$ β') $x \in A$, $x \notin B$ γ') $x \notin A$, $x \in B$. Εκ της (α') προκύπτει ότι $x \in A^c$ και $x \in B^c$ άρα $x \in A^c \cup B^c$. Εκ της (β') προκύπτει ότι $x \notin A^c$ και $x \in B^c$ άρα $x \in A^c \cup B^c$. Εκ της (γ') προκύπτει ότι $x \in A^c$ και $x \notin B^c$. άρα $x \in A^c \cup B^c$. Δηλ. και για τις 3 δυνατές περιπτώσεις το σύνολο $A^c \cup B^c$ περιέχει το τυχόν στοιχείο x του συνόλου $(A \cap B)^c$ (1'). Έστω τώρα $y \in A^c \cup B^c$ (2) Εκ της (2) προκύπτει: δ') $y \in A^c$, $y \in B^c$ ε') $y \in A^c$, $y \notin B^c$ ζ') $y \notin A^c$, $y \in B^c$. Εκ της (δ') προκύπτει ότι $y \notin A$, $y \notin B$ άρα $y \notin (A \cap B)$ και $y \in (A \cap B)^c$. Εκ της (ε') προκύπτει ότι $y \notin A$, $y \in B$ άρα $y \notin (A \cap B)$ και $y \in (A \cap B)^c$. Εκ της (ζ') προκύπτει ότι $y \in A$, $y \notin B$ άρα $y \notin (A \cap B)$ και $y \in (A \cap B)^c$. Δηλ. για όλες τις περιπτώσεις το σύνολο $(A \cap B)^c$ περιέχει το τυχόν $y \in A^c \cup B^c$. Άρα $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ (2'). Εκ των (1'), (2') $\Rightarrow (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.6. Να δειχθεί ότι $(A-B)^c = A^c \cup B$

Λύση. Έστω $x \in (A-B)^c$ άρα $x \notin (A-B)$ (1). Εκ της (1) προκύπτει: α') $x\in A,\ x\in B$ β') $x\notin A,\ x\in B$ γ') $x\notin A,\ x\notin B$. Εκ της (α') προκύπτει ότι $x\notin A^c,\ x\in B$ ή $x \in A^c\cup B$. Εκ της (β') προκύπτει ότι $x\in A^c,\ x\in B$ ή $x\in A^c\cup B$. Εκ της (γ') προκύπτει ότι $x\in A^c,\ x\notin B$ ή $x\in A^c\cup B$. δηλ. $(A-B)^c \subseteq A^c\cup B$ (1'). Έστω τώρα $y\in A^c\cup B$ (2). Εκ της (2) προκύπτει ότι δ') $y\in A^c,\ y\in B$ ε') $y\in A^c,\ y\notin B$ ζ') $y\notin A^c,\ y\in B$. Εκ της (δ') προκύπτει $y\notin A,\ y\in B$ ή $y\notin(A-B)$ άρα $y\in(A-B)^c$. Εκ της (ε') προκύπτει $y\notin A,\ y\notin B$ ή $y\notin(A-B)$ άρα $y\in(A-B)^c$. Εκ της (ζ') προκύπτει $y\in A,\ y\in B$ ή $y\notin(A-B)$ άρα $y\in(A-B)^c$. Δηλαδή $A^c\cup B\subseteq(A-B)^c$ (2'). Εκ της (1') και (2') προκύπτει $(A-B)^c=A^c\cup B$.

1.7. Να δειχθεί ότι 1). $(A^c)^c=A$, 2) $A-B=A\cap B^c$, 3) $A\cap(B-\Gamma)=A\cap B - A\cap\Gamma$, 4) $A \dotplus B = (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$.

Λύσις 1). Έστω $x\in(A^c)^c$ άρα $x\notin A^c$ δηλ $x\in A$ ήτοι $(A^c)^c\subseteq A$ (1'). Έστω τώρα $y\in A$ άρα $y\notin A^c$ δηλ $y\in(A^c)^c$ ήτοι $A\subseteq(A^c)^c$ (2') Εκ των (1') και (2') προκύπτει $(A^c)^c=A$. (ως προς το καθολικό σύνολο $\underline{\Omega}$).

2). Έστω $x\in(A-B)$ δηλ $x\in A,\ x\notin B$ ή $x\in A,\ x\in B^c$ άρα $x\in A\cap B^c$ (1') Αντιστρόφως έστω $y\in A\cap B^c$· τότε $y\in A$ και $y\in B^c$ ή $y\in A,\ y\notin B$ δηλ $y\in A-B$ (2') Εκ των (1'), (2') προκύπτει $A-B=A\cap B^c$.

3). Έστω $x\in A\cap(B-\Gamma)$ τότε $x\in A$ και $x\in(B-\Gamma)$ ή $x\in A,\ x\in B$, $x\notin\Gamma$. Εκ των $x\in A,\ x\notin\Gamma \Rightarrow x\notin A\cap\Gamma$. Εκ των $x\in A,\ x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$. Εκ των 2 τελευταίων σχέσεων προκύπτει $x\in(A\cap B - A\cap\Gamma)$ δηλ. $A\cap(B-\Gamma)\subseteq A\cap B-A\cap\Gamma$ (1'). Ομοίως έστω $x\in(A\cap B-A\cap\Gamma)$ δηλ $x\in A\cap B$, (1) $x\notin A\cap\Gamma$ (2) Εκ της (1) $\Rightarrow x\in A,\ x\in B$ (3) και εκ της (2) $\Rightarrow x\notin A$ ή $x\notin\Gamma$ ή $x\in A,\ x\notin\Gamma$ ή $x\notin A,\ x\in\Gamma$. (4) Εκ των (3) και (4) $\Rightarrow x\in A$ και $x\in B,\ x\notin\Gamma$ άρα $x\in A\cap(B-\Gamma)$ δηλ $A\cap B-A\cap\Gamma\subseteq A\cap(B-\Gamma)$ (2'). Εκ των (1'),(2') προκύπτει η αποδεικτέα ισότης. ήτοι $A\cap(B-\Gamma)=A\cap B-A\cap\Gamma$ Δηλ. η πράξη "τομή ∩" επιμερίζεται ως προς την πράξη "διαφορά −".

4. Εξ ορισμού είναι $A \dotplus B = (A-B) \cup (B-A)$. Έστω $x \in (A-B) \cup$ $\cup (B-A)$ Τότε είτε $x \in (A-B)$ δηλ $x \in A$ και $x \notin B$ (1), είτε $x \in (B-A)$ δηλ $x \in B$ και $x \notin A$ (2). Εκ της (1) προκύπτει: $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$ ή $x \in A \cup B$ και $x \in (A \cap B)^c$ ή $x \in A \cup B$ και $x \in A^c \cup B^c$ (Άσκ 1.5). Άρα $x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$. Εκ της (2) προκύπτει: $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$ άρα ομοίως $x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$. δηλ. $A \dotplus B \subseteq (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$. (1').
Έστω τώρα $y \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$. δηλ $y \in (A \cup B)$ και $y \in (A^c \cup B^c)$ ή $y \in (A \cup B)$ και $y \in (A \cap B)^c$ δηλ $y \notin (A \cap B)$ ήτοι $y \in A$ και $y \notin B$ είτε $y \in B$ και $y \notin A$ (3)
Εκ των (3) $\Rightarrow$ $y \in (A-B)$ και $y \in (B-A)$ άρα $y \in (A-B) \cup (B-A)$ δηλ $y \in (A \dotplus B)$. Άρα $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \subseteq A \dotplus B$ (2'). Εκ των (1'), (2') $\Rightarrow$ η αποδεικτέα.

1.8. Να δειχθεί ότι $A \cap B = A - (A-B)$.

Λύση. Έστω $x \in A \cap B$. άρα $x \in A$ και $x \in B$. Επειδή $x \in A$ και $x \in B$ έπεται ότι $x \notin (A-B)$ επομένως $x \in (A-(A-B))$ δηλ $A \cap B \subseteq A-(A-B)$. (1')
Ομοίως έστω $y \in (A-(A-B))$ άρα $y \in A$ και $y \notin (A-B)$ δηλ $y \in B$. Επομένως $y \in A \cap B$ δηλ $A-(A-B) \subseteq A \cap B$ (2'). Εκ των (1'), (2') $\Rightarrow$ η αποδεικτέα.

1.9. Να δειχθεί ότι $(A \dotplus B) \dotplus (A \cap B) = A \cup B$.

Λύση Έστω $x \in (A \dotplus B) \dotplus (A \cap B)$. Τότε βάσει του ορισμού της συμμετροδιαφοράς, είτε $x \in (A \dotplus B)$, $x \notin A \cap B$ (1) είτε $x \notin (A \dotplus B)$, $x \in A \cap B$ (2). Εκ της (1) $\Rightarrow$ είτε $x \in A$, $x \notin B$ είτε $x \notin A$, $x \in B$ και $x \notin A \cap B$ άρα $x \in A \cup B$ δηλ $(A \dotplus B) \dotplus (A \cap B) \subseteq A \cup B$ (1'). Αντιστρόφως έστω $y \in A \cup B$. Τότε: είτε $y \in A$, $y \in B$ (3) είτε $y \in A$, $y \notin B$ (4) είτε $y \notin A$, $y \in B$ (5).
Εκ της (3) $\Rightarrow$ $y \notin (A \dotplus B)$ και $y \in (A \cap B)$ άρα $y \in (A \dotplus B) \dotplus (A \cap B)$
Εκ των (4) και (5) $\Rightarrow$ $y \in (A \dotplus B)$ και $y \notin (A \cap B)$ άρα $y \in (A \dotplus B) \dotplus (A \cap B)$. Δηλ σ' όλες τις δυνατές περιπτώσεις το τυχόν στοιχείο του $A \cup B$ είναι και στοιχείο του $(A \dotplus B) \dotplus (A \cap B)$ ήτοι $A \cup B \subseteq (A \dotplus B) \dotplus (A \cap B)$ (2'). Εκ των (1') και (2') προκύπτει $(A \dotplus B) \dotplus (A \cap B) = A \cup B$.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ.

Ορισμοί

Αξιώματα του Peano.

Οι φυσικοί αριθμοί που το σύνολό τους το παριστάνουμε με N εισάγονται με τη βοήθεια των κάτωθι αξιωμάτων του Peano ή (κατά Peano).

I. Ο 1 είναι φυσικός αριθμός, δηλ. $1 \in N$.

II. Για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας και μόνο ένας επόμενος φυσικός αριθμός, δηλ $\nu \in N \Rightarrow \nu+1 \in N$ που συμβολίζεται με $\nu+1$. Από το αξίωμα αυτό προκύπτει ότι το πλήθος των φυσικών αριθμών είναι μη πεπερασμένο δηλ. άπειρο.

III. Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός ν με επόμενο τον 1, δηλ ο $\nu+1 > 1$ για κάθε $\nu \in N$. Αυτό σημαίνει ότι ο 1 είναι ο πρώτος απ' τους φυσικούς αριθμούς.

IV. Δύο φυσικοί αριθμοί που έχουν τον ίδιο επόμενο είναι ίσοι. δηλ. άν $\mu+1 = \nu+1$ τότε προκύπτει ότι $\mu = \nu$. Ήτοι κάθε φυσικός αριθμός προέρχεται από ένα και μόνο προηγούμενό του.

V. (Αρχή της μαθηματικής ή τελείας επαγωγής). Άν S είναι σύνολο φυσικών αριθμών, δηλ $S \subseteq N$ τέτοιο ώστε α') $1 \in S$, β') διά κάθε $k \in N$, δεχόμενοι ότι $k \in S$ αποδεικνύομε ότι και ο $k+1 \in S$ τότε το σύνολο S συμπίπτει με το σύνολο των φυσικών, δηλ. $S = N$.

Θεώρημα της τελείας επαγωγής. Εάν $p(\nu)$ είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο N των φυσικών αριθμών τέτοιος ώστε $p(1)$ είναι αληθής πρόταση και για κάθε $k \in N$, $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ είναι αληθής τότε ο προτασιακός τύπος είναι αληθής (ισχύει) διά κάθε $\nu \in N$. Άν σαν σύνολο αναφοράς ληφθεί το $N_{\nu_0} \equiv \{\nu \in N : \nu \geq \nu_0\}$ όπου $\nu_0 \in N$ και η $p(\nu_0)$ είναι αληθής, τότε ο προτασιακός τύπος ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν με $\nu \geq \nu_0$.

Στο παρακάτω θεώρημα στηρίζεται η μέθοδος της επαγωγικής αποδείξεως. Έτσι για να αποδείξουμε την αλήθεια μιας προτάσεως $p(\nu)$ εργαζόμαστε ως εξής:

1. Αποδεικνύομε την αλήθεια της προτάσεως για $\nu = 1$. (εφ' όσον αυτή για $\nu = 1$ έχει νόημα) ή για τον ελάχιστο φυσικό αριθμό ν_0 για τον οποίο έχει νόημα.

2. Υποθέτοντας ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu = k$, $k \in N$, δηλ. $p(k)$ αληθής, αποδεικνύομε με την βοήθεια της $p(k)$ (πιθανώς δε και της $p(1)$), την αλήθεια της $p(k+1)$.

3. Δυνάμει του παραπάνω θεωρήματος της τελείας επαγωγής, συμπεραίνομε ότι η πρόταση $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε $\nu \in N$ ή για κάθε $\nu \geq \nu_0$, εφ' όσον ν_0 είναι ο ελάχιστος φυσικός, για τον οποίο η $p(\nu)$ έχει νόημα.

Ασκήσεις

2.1. Δια της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύουν:

1). $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu - 1) = \nu^2$

2). $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2\nu - 1)^2 = \frac{1}{3}\nu(4\nu^2 - 1)$

3). $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2\nu - 1)^3 = \nu^2(2\nu^2 - 1)$

4). $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu + 1)^2$

5). $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^\nu = 2(2^\nu - 1)$.

Λύση

1). Είναι $p(1)$: $1 = 1^2 = 1$ ήτοι η πρότασις ισχύει για $\nu = 1$.
Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει, ήτοι: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$ (1). Θα δείξουμε ότι αυτή ισχύει και για $\nu = k+1$ ήτοι $p(k+1)$ επίσης ισχύει. δηλ.
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$ Πράγματι εκ της (1) προκύπτει
$k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ δηλ. η $p(\nu)$ ισχύει και για $\nu = k+1$ άρα $\forall \nu \in N$.

2). Είναι $p(1)$: $1^2=\frac{1}{3}1(4\cdot 1^2-1)$ ήτοι $1=1$. δηλ. ισχύει. Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. $1^2+3^2+5^2+\dots+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}$ (1). Θα δείξουμε ότι και η $p(k+1)$ ισχύει δηλ. $1^2+3^2+5^2+\dots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=$ $=\frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3}$ (2). Πράγματι, αν λάβουμε υπ' όψιν την (1) που δεχόμαστε ότι ισχύει θα έχουμε: $\frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)=$

$$\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}=\frac{4k^3+4k^2+8k^2+3k+3}{3}=\frac{4k^2(k+1)+8k(k+1)+3k(k+1)}{3}$$

$$\frac{(k+1)[4k^2+8k+3]}{3}=\frac{(k+1)[4k^2+8k+4-1]}{3}=\frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3}$$ δηλ. η (2).

Άρα η πρόταση $p(\nu)$ ισχύει για κάθε φυσικό ν.

3). Είναι $p(1)$: $1^3=1^2(2\cdot 1^2-1)$ ήτοι $1=1$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. $1^3+3^3+5^3+\dots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$ (1). Θα δείξουμε ότι και η $p(k+1)$ ισχύει δηλ. θα δείξουμε ότι: $1^3+3^3+5^3+(2k-1)^3+(2k+1)^3=(k+1)^2[2(k+1)^2-1]$ (2). Πράγματι αν ληφθεί υπ' όψιν η (1) προκύπτει: $k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3=$ $2k^4-k^2+8k^3+12k^2+6k+1=2k^4+8k^3+12k^2+8k+2-(k^2+2k+1)=$ $2(k+1)^4-(k+1)^2=(k+1)^2[2(k+1)^2-1]$ δηλ. η (2). Άρα η $p(\nu)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

4). Είναι $p(1)$: $2^3=2\cdot 1^2(1+1)^2$ ήτοι $8=8$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. $2^3+4^3+6^3+\dots+(2k)^3=2k^2(k+1)^2$ (1). Θα δείξουμε την αλήθεια και της $p(k+1)$ ήτοι θα δείξουμε ότι: $2^3+4^3+6^3+(2k)^3+(2k+2)^3=2(k+1)^2[(k+1)+1]^2$ (2). Πράγματι αφού δεχόμαστε ότι ισχύει η (1) θα είναι: $2k^2(k+1)^2+[2(k+1)]^3=2k^2(k+1)^2+2^3(k+1)^3=2(k+1)^2[k^2+4(k+1)]=$ $2(k+1)^2(k+2)^2=2(k+1)^2[(k+1)+1]^2$ δηλ. η (2). Άρα η $p(\nu)$ ισχύει $\forall \nu\in N$.

5). Είναι $p(1)$: $2^1=2(2^1-1)$ ήτοι $2=2$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. $2^1+2^2+2^3+\dots+2^k=2(2^k-1)$ (1). Θα δείξουμε ότι και η $p(k+1)$ ισχύει δηλ. $2^1+2^2+2^3+\dots+2^k+2^{k+1}=2(2^{k+1}-1)$ (2). Εκ της (1) προκύπτει: $2(2^k-1)+2^{k+1}=2^{k+1}-2+2^{k+1}=2\cdot 2^{k+1}-2=2(2^{k+1}-1)$ δηλ. η (2).

2.2. Ομοίως να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύουν οι εξής προτάσεις:

1). $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1)=\frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$.

2). $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(\nu+1)2^{\nu-1}=\nu\cdot 2^\nu$.

3). $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}=$$
$$\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}.$$

Λύση

1). Είναι $p(1)$: $1\cdot 2=\frac{1}{3}1\cdot(1+1)(1+2)$ ήτοι: $2=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3=2$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι $p(k)$ ισχύει δηλ. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ (1). Θα δείξουμε ισχύουσα και την $p(k+1)$ δηλ. την πρόταση $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ (2). Εκ της (1) προκύπτει: $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+\frac{3}{3}(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ δηλ. η (2) ήτοι η $p(\nu)$ ισχύει για κάθε ν φυσικό.

2). Είναι $p(1)$: $2\cdot 2^0=1\cdot 2^1$ ήτοι $2\cdot 1=1\cdot 2$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι $p(k)$ ισχύει δηλ. $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots+(k+1)2^{k-1}=k\cdot 2^k$ (1). Θα δείξουμε και την $p(k+1)$ ισχύουσα: δηλ. θα δείξουμε ότι και η $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots+(k+1)\cdot 2^{k-1}+(k+2)\cdot 2^k=(k+1)\cdot 2^{k+1}$ (2). Εκ της (1) προκύπτει: $k\cdot 2^k+(k+2)\cdot 2^k=k\cdot 2^k+k\cdot 2^k+2\cdot 2^k=2\cdot k\cdot 2^k+2\cdot 2^k=$ $=2^k(2k+2)=2^k\cdot 2(k+1)=(k+1)\cdot 2^{k+1}$ δηλ. η (2) $\Rightarrow$ η $p(\nu)$ ισχύει $\forall \nu\in N$.

3). Είναι $p(1)$: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(1+1)(1+2)(1+3)}$ ήτοι $\frac{1}{24}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ ή $\frac{1}{24}=\frac{1}{18}-\frac{1}{72}=\frac{1}{24}$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$ $\frac{1}{18}-\frac{1}{3(k+1)(k+2)(k+3)}$ (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $p(k+1)$ ήτοι:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=$$

$\frac{1}{18}-\frac{1}{3(k+2)(k+3)(k+4)}$ (2). Πράγματι εκ της (1) προκύπτει:

$$\frac{1}{18}-\frac{1}{3(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=$$

$$\frac{1}{18}-\frac{k+4}{3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}+\frac{3}{3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=$$

$$\frac{1}{18}+\frac{3-k-4}{3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{1}{18}-\frac{k+1}{3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=$$

$\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(k+2)(k+3)(k+4)}$ δηλ. η (2). Άρα η $p(\nu)$ ισχύει για $\forall \nu \in N$.

2.3. Δια της μεθόδου της τελείας επαγωγής να δειχθεί ότι: αν $\alpha \in R$ (R σύνολο των πραγματικών αριθμών) με $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύουν: 1). $(1-\alpha)^\nu \geq 1-\nu\alpha$

2). $(1-\alpha)^\nu \leq \dfrac{1}{1+\nu\alpha}$

Λύση

1). Για $\nu=1$ είναι $p(1)$: $(1-\alpha)^1 \geq 1-1\cdot\alpha$ ή $1-\alpha=1-\alpha$ δηλ. η πρόταση $p(\nu)$ ισχύει σαν ισότης. Έστω ότι για $\nu=k$ η $p(k)$ αληθεύει δηλ. έστω ότι $(1-\alpha)^k \geq 1-k\alpha$ (1) ισχύει. Θα δείξουμε ότι αυτή ισχύει και για $\nu=k+1$ δηλ: $p(k+1)$: $(1-\alpha)^{k+1} \geq 1-(k+1)\alpha$ (2). Αν πολ/με και τα δύο μέλη της (1) με τον μη αρνητικό αριθμό $1-\alpha$ ($\alpha \leq 1$) έχομε: $(1-\alpha)^{k+1} \geq (1-k\alpha)(1-\alpha) = 1-(k+1)\alpha+k\alpha^2 \geq 1-(k+1)\alpha$ διότι ο $k\alpha^2 \geq 0$ δηλ. ισχύει η (2). Άρα η $p(\nu)$ ισχύει για $\forall \nu \in \Phi$.

2). Για $\nu=1$ είναι $p(1)$: $(1-\alpha)^1 \leq \dfrac{1}{1+1\cdot\alpha}$ ή $1-\alpha^2 \leq 1$ που ισχύει γιατί ο $\alpha \leq 1$. Έστω τώρα ότι ισχύει η $p(k)$ δηλ. $(1-\alpha)^k \leq \dfrac{1}{1+k\alpha}$ (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $p(k+1)$ δηλ:

$(1-\alpha)^k \leq \dfrac{1}{1+(k+1)\alpha}$ (2). Πράγματι εκ της (1) $\Rightarrow (1-\alpha)^{k+1} \leq \dfrac{1-\alpha}{1+k\alpha}$

Επομένως αρκεί να δειχθεί ότι $\dfrac{1-\alpha}{1+k\alpha} \leq \dfrac{1}{1+(k+1)\alpha}$ οπότε κατά μείζονα λόγο θα ισχύει και η (2). Πράγματι θα έχομε: $[1+(k+1)\alpha](1-\alpha) \leq 1+k\alpha$ ή $1+k\alpha-(k+1)\alpha^2 \leq 1+k\alpha$ η οποία πράγματι ισχύει γιατί $(k+1)\alpha^2 \geq 0$. Άρα θα ισχύει και η (2) και επομένως η $p(\nu)$ ισχύει για κάθε $\nu \in N$.

2.4. Εάν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί $\neq$ του 1 να δειχθεί ότι $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) > 2^\nu\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$

Λύση. Για $\nu=1$ η $p(1)$: $1+\alpha_1 > 2^1\cdot\sqrt{\alpha_1}$ ή $1+\alpha_1-2\sqrt{\alpha_1}>0$ ή ακόμη $(1-\sqrt{\alpha_1})^2>0$ που ισχύει δηλ. η $p(1)$ ισχύει για $\nu=1$.

Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)>2^k\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}$ (1).

Με βοήθεια τώρα της (1) καθώς και της $p(1)$ όπως υποδεικνύεται στη μεθοδολογία μαθηματικής επαγωγής (2.) μπορούμε να αποδείξουμε την $p(k+1)$: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)(1+\alpha_{k+1})>2^{k+1}\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k\cdot\alpha_{k+1}}$ (2)

Πράγματι έχομε από την $p(1)$ για τον αριθμό α_{k+1}: $1+\alpha_{k+1}>2\sqrt{\alpha_{k+1}}$ (3). Αν πολ/με τώρα τις (1) και (3) κατά μέλη θα έχομε:

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)\cdot(1+\alpha_{k+1})>2^k\cdot 2\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}\cdot\sqrt{\alpha_{k+1}}$ ή

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)\cdot(1+\alpha_{k+1})>2^{k+1}\cdot\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}}$ δηλ η (2).

2.5. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\geq\nu^2\ \forall\nu\in N.$

Λύση.

Για $\nu=1$ η $p(\nu)$ ισχύει σαν ισότητα δηλ. $\alpha_1\cdot\frac{1}{\alpha_1}\geq 1^2$ ή $1=1$.

Για $\nu=2$ θα είναι $(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+1$ ή

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\geq 2^2$ πού ισχύει γιατί το άθροισμα 2 αντιστρόφων θετικών αριθμών είναι πάντοτε ≥ 2. (Αν $\alpha>0\Rightarrow\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ διότι $\alpha^2+1-2\alpha\geq 0$).

Η ισότητα ισχύει άν $\alpha=1$. Έστω τώρα ότι η $p(k)$ ισχύει δηλ. έστω ότι:

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}\right)\geq k^2$ (1). Θα δείξουμε ότι και η $p(k+1)$ ισχύει δηλ. $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1})\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\geq(k+1)^2$ (2). Πράγματι άν εκτελέσουμε τις πράξεις στη (2) προκύπτει:

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}\right)+\frac{1}{\alpha_{k+1}}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)+$

$+\alpha_{k+1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}\right)+1\geq$ (λόγω της (1)) $k^2+\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_1}\right)+$

$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{k+1}}+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_2}\right)+\cdots+\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)+1\geq$ (λόγω της $p(2)$) $k^2+2k+1=(k+1)^2$

δηλ η (2). Άρα η $p(k+1)$ ισχύει.

2.6. Να δειχθεί ότι $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{\nu}}{\nu} > \frac{2}{3}\sqrt{\nu} \quad \forall \nu \in N$.

Λύση.

Για $\nu = 1$ η $p(1)$ προφανώς ισχύει: $\frac{\sqrt{1}}{1} > \frac{2}{3}\sqrt{1}$ δηλ $1 > \frac{2}{3}$.

Έστω ότι ισχύει για $\nu = k$ δηλ. $p(k)$:

$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{k}}{k} > \frac{2}{3}\sqrt{k}$ (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $p(k+1)$:

δηλ. $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{k+1} > \frac{2}{3}\sqrt{k+1}$ (2). Για να πάρουμε το πρώτο μέλος της (2) πολ/ζουμε την (1) με $\frac{k}{k+1}$, οπότε θα έχουμε:

$\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{k})\cdot k}{k\cdot(k+1)} > \frac{2}{3}\sqrt{k}\cdot\frac{k}{k+1}$. Αν τώρα προσθέσουμε και στα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητος τον παράγοντα $\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$ θα προκύψει:

$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{k+1} > \frac{2\sqrt{k}}{3}\cdot\frac{k}{k+1}+\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$. Επομένως αρκεί να ισχύει η $\frac{2\sqrt{k}}{3}\cdot\frac{k}{k+1}+\frac{\sqrt{k+1}}{k+1} > \frac{2}{3}\sqrt{k+1}$ οπότε κατά μείζονα λόγο θα ισχύει και η (2). ή $2k\sqrt{k}+3\sqrt{k+1} > 2(k+1)\sqrt{k+1}$ ή $2k\sqrt{k} > (2k-1)\sqrt{k+1}$.

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα 2 μέλη της τελευταίας προκύπτει:

$4k^2\cdot k > (k+1)(4k^2-4k+1)$ ή $4k^3 > 4k^3-4k^2+k+4k^2-4k+1$ ή τελικά $3k-1>0$ που ισχύει γιατί $k>1$ Άρα θα ισχύει και η (2).

2.7. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό $\nu \geq 4$ ισχύει: $\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu} > \nu+1$.

Λύση. Για $\nu = \nu_0 = 4$ η $p(4)$ ισχύει διότι:

$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > 4+1 = 5$ Έστω ότι η $p(k)$ ισχύει με $k>4$: $\left(\frac{3}{2}\right)^k > k+1$ (1).

Θα δείξουμε ότι θα ισχύει τότε και η $p(k+1)$: $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k+1)+1$ (2).

Αν πολ/με την (1) με $\frac{3}{2}$ προκύπτει: $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > \frac{3}{2}(k+1)$ Επομένως αν αποδείξουμε ότι: $\frac{3}{2}(k+1) > (k+1)+1$ τότε κατά μείζονα λόγο θα είναι και $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > k+2$ δηλ θα ισχύει η (2). Θα έχουμε να αποδείξουμε: $3k+3 > 2k+4$ ή $k>1$ Η τελευταία σχέση όμως ισχύει γιατί υποθέσαμε ότι $k>4$. Άρα θα ισχύει και η (2) δηλ η $p(k+1)$ θα ισχύει.

3. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ορισμοί

Η ανάγκη της εισαγωγής των νέων αυτών αριθμών προέκυψε εις την Άλγεβρα από την επίλυσι, σε κάθε περίπτωσι, των δευτεροβαθμίων εξισώσεων και μάλιστα της εξισώσεως $x^2+1=0$, η οποία δεν έχει λύσι στους πραγματικούς αριθμούς. Η εξίσωσι αυτή γράφεται $x^2=-1$.(1). Αν ορίσομε τώρα $-1=i^2$ τότε εκ της (1) προκύπτει $x^2=i^2 \Rightarrow x=\pm i$. Το σύμβολο i το καλούμε **φανταστική μονάδα**. Κάθε αριθμό που προκύπτει δια πολλαπλασιασμού της φανταστικής μονάδος μ' ένα πραγματικό αριθμό τον καλούμε **φανταστικό αριθμό**. Εξ ορισμού προκύπτει: $i^0=1$, $i^1=i$ και $i^2=-1$. Οι επόμενες δυνάμεις του i καθορίζονται από τις ιδιότητες του γινομένου δύο αριθμών. Έτσι $i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$ και $i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1$. Γενικώς δε για κάθε $\nu \in N$: $i^{4\nu}=(i^4)^\nu=1^\nu=1$, $i^{4\nu+1}=i^{4\nu}\cdot i=1\cdot i=i$, $i^{4\nu+2}=i^{4\nu}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$ και $i^{4\nu+3}=i^{4\nu}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$ Δηλ. για οποιαδήποτε δύναμι του i οι δυνατές τιμές είναι $1, i, -1, -i$.

Ονομάζομε **μιγαδικό αριθμό** το αλγεβρικό άθροισμα της μορφής $\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta \in R)$ και συμβολίζομε αυτό με z ήτοι $z=\alpha+\beta i$ όπου α αποτελεί το πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται $\alpha=Re(z)$ και β αποτελεί το φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται $\beta=Im(z)$.

Ονομάζομε **συζυγή** ενός μιγαδικού $z=\alpha+\beta i$ και τον συμβολίζομε με $\bar{z}$, τον μιγαδικό $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών είναι επίσης μιγαδικός αριθμός.

Πράγματι έστω $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$, με $\bar{z}_2=\gamma-\delta i$. τότε:

1) $z_1+z_2=\alpha+\beta i+\gamma+\delta i=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

2) $z_1-z_2=\alpha+\beta i-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

3) $z_1\cdot z_2=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$ $(i^2=-1)$.

4). $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}^{(1)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma i-\alpha\delta i-\beta\delta i^2}{\gamma^2-\delta^2 i^2}=$

$$\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών.

1. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός

Πράγματι, είναι $z+\bar{z}=(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha$ πραγματικός και $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-(\beta i)^2=\alpha^2+\beta^2$ πραγματικός.

2. Ο συζυγής αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των συζυγών των (Ομοίως και για τη διαφορά τους) ήτοι $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

Πράγματι, είναι $z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ άρα $\overline{z_1+z_2}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i$ (1). Επίσης $\bar{z}_1+\bar{z}_2=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i$ (2). Εκ των (1) και (2) προκύπτει $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$. Ομοίως αποδεικνύεται και για τη διαφορά.

3. Ο συζυγής γινομένου είναι ίσος με το γινόμενο των συζυγών των. ήτοι $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

Πράγματι, είναι $z_1\cdot z_2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$ και επομένως: $\overline{z_1\cdot z_2}=(\alpha\gamma-\beta\delta)-(\beta\gamma+\alpha\delta)i$.(1) Επίσης $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(\alpha-\beta i)(\gamma-\delta i)=$ $=(\alpha\gamma-\beta\delta)-(\beta\gamma+\alpha\delta)i$ (2) Εκ των (1),(2) προκύπτει $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

Οι ιδιότητες 1, 2, και 3 αποδεικνύονται επαγωγικώς και για ν μιγαδικούς.

4. Ο συζυγής πηλίκου δύο μιγαδικών ισούται με το πηλίκο των συζυγών των δηλ. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Πράγματι, είναι $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$ άρα

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}-\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$ (1). Επίσης $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{\alpha-\beta i}{\gamma-\delta i}=\frac{(\alpha-\beta i)(\gamma+\delta i)}{(\gamma-\delta i)(\gamma+\delta i)}=$

$\frac{\alpha\gamma-\beta\gamma i+\alpha\delta i-\beta\delta i^2}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}-\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$ (2). Εκ των (1), (2) $\Rightarrow\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

(1) Σημ. Για να βρούμε το πηλίκο δύο μιγαδικών πρέπει να πολλαπλασιάσωμε και να διαιρέσωμε το κλάσμα με τον συζυγή του παρονομαστού.

Ονομάζομε **μέτρο ή απόλυτο τιμή** ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$, τον αριθμό $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και το συμβολίζομε με ρ ή $|z|$ ήτοι $\rho=|z|=|\alpha+\beta i|=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Ιδιότητες του μέτρου μιγαδικών αριθμών.

1. Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε $|z|=|-z|=|\bar{z}|$.

Πράγματι, είναι $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (1), $|-z|=\sqrt{(-\alpha)^2+(-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (2) και $|\bar{z}|=\sqrt{\alpha^2+(-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (3). Εκ των (1),(2),(3) προκύπτει: $|z|=|-z|=|\bar{z}|$.

2. Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε $|z|^2=z\cdot\bar{z}$.

Πράγματι, είναι $|z|^2=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2$ (1), $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$ (2). Εκ των (1) και (2) προκύπτει $|z|^2=z\cdot\bar{z}$.

3. Αν $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ τότε $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Πράγματι είναι $z_1\cdot z_2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$ και $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)^2}=$
$=\sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta}=\sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}$ (1).
Επίσης $|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2}=\sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}$ (2) εκ των (1) και (2) προκύπτει $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

4. Αν $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ τότε $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Πράγματι είναι $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$ και $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)^2}{(\gamma^2+\delta^2)^2}+\frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}{(\gamma^2+\delta^2)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta}{(\gamma^2+\delta^2)^2}}=\sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}{(\gamma^2+\delta^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}{(\gamma^2+\delta^2)^2}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\quad(1)$$ Επίσης $\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$ (2)

Εκ των (1) και (2) προκύπτει: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Τριγωνομετρική μορφή μιγάδος.

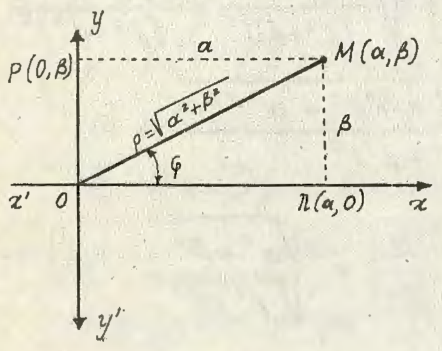
Έστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$. Ο z δύναται να γραφεί και υπό την μορφή:

$z=\alpha+\beta i=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}i\right)$ Επειδή $-1\leq\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\leq 1$,

$-1 \le \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \le 1$, και $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=1$ σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί μπορούν να είναι το συνημίτονο και ημίτονο μιάς γωνίας φ δηλ. $συνφ = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ και $ημφ = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ με $-\pi < φ \le \pi$.

Τη γωνία αυτή τη λέμε **όρισμα** του μιγάδος $z=\alpha+\beta i$. Ο z επομένως παίρνει τη μορφή $z=\rho(συνφ+iημφ)$ πού λέγεται **τριγωνομετρική μορφή** (όπου ρ είναι το μέτρο $|z|$ του μιγάδος).

Ως γνωστόν τα διατεταγμένα ζεύγη (x,y) του συνόλου του Καρτεσιανού γινομένου R^2 απεικονίζονται αμφιμονοσήμαντα στα σημεία του επιπέδου των ορθογωνίων αξόνων (Καρτεσιανό επίπεδο). Οι μιγαδικοί αριθμοί, ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών, μπορούν κι αυτοί να παρασταθούν από τα σημεία του επιπέδου των ορθογωνίων αξόνων. Πράγματι ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ απεικονίζεται σε ένα μόνο σημείο $M(\alpha,\beta)$ με τετμημένη α και τεταγμένη β και αντιστρόφως. Σ' ένα τέτοιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων ο άξονας των τετμημένων ονομάζεται και άξονας των πραγματικών ο δε άξονας των τεταγμένων, άξονας των φανταστικών και το επίπεδο μιγαδικό επίπεδο. Η πρώτη μορφή $z=\alpha+\beta i$ λέγεται **καρτεσιανή μορφή**. Γεωμετρικά το όρισμα μιγαδικού z παριστάνει



την κυρτή γωνία που σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας Ox με τη διανυσματική ακτίνα OM, πού παριστάνει το μιγαδικό z. Δύο μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ σε καρτεσιανή μορφή είναι ίσοι άν και μόνο, άν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$· σε τριγωνομετρική μορφή αν και μόνο, άν έχουν ίσα μέτρα και τα ορίσματά τους διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο περιφερείας. Η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών μάς επιτρέπει να εκτελέσουμε απλούστερα τον πολ/μό, διαίρεση και εξαγωγή ριζών των μιγαδικών αριθμών, με τη βοήθεια των επομένων θεωρημάτων:

1. Το γινόμενο δυο μιγαδικών είναι μιγαδικός και έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων των μιγάδων, όρισμα δε το άθροισμα των ορισμάτων αυτών ήτοι:

$z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$; $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2)]$.

Το θεώρημα αυτό ισχύει επαγωγικά και για ν το πλήθος μιγαδικούς αριθμούς.

ήτοι: $z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_\nu [\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\nu) + i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\nu)]$

2. Το πηλίκο δύο μιγαδικών είναι μιγαδικός και έχει μέτρο το πηλίκο των μέτρων των, όρισμα δέ την διαφορά των ορισμάτων των. ήτοι:

$z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1-\varphi_2)]$

3. (Θεώρημα του De Moivre) Η νοστή δύναμη μιγαδικού αριθμού, είναι μιγαδικός που έχει μέτρο τη νοστή δύναμη του μέτρου του μιγάδος και όρισμα το ν-πλάσιο του ορίσματος αυτού (ισχύει και για ν αρνητικό ακέραιο):

$z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) \Rightarrow z^\nu = [\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)]^\nu = \rho^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi)]$.

4. (Θεώρημα υπάρξεως νιοστής ρίζας μιγάδος). Αν $\alpha = \rho(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta)$ είναι τυχών μιγαδικός αριθμός, υπάρχουν ακριβώς ν διάφορες μεταξύ των ρίζες αυτού, δηλ. η εξίσωση $z^\nu = \alpha$ έχει ν ακριβώς διάφορες μεταξύ των ρίζες που δίδονται από τον τύπο: $z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\vartheta+2k\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\dfrac{\vartheta+2k\pi}{\nu}\right)\right]$

όπου $k = 0, 1, 2, \cdots, (\nu-1)$

Επειδή τα μέτρα των ριζών z_k είναι όλα τα ίδια, ενώ τα ορίσματά τους τέτοια ώστε από μιά αρχική τιμή $\frac{\vartheta}{\nu}$ αυξάνουν διαρκώς κατά $\frac{2\pi}{\nu}$, αν παραστήσωμε γεωμετρικά τις νιοστές αυτές ρίζες του α, οι εικόνες αυτών $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}$ στο μιγαδικό επίπεδο θα κείνται επί κύκλου κέντρου O την αρχή των αξόνων και ακτίνος $\sqrt[\nu]{\rho}$, θα είναι δε κορυφές κανονικού ν-πολυγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό.

Ασκήσεις.

3,1. Για ποιές πραγματικές τιμές των x, y ισχύει η ισότης:
$(1-2i)x + (3+5i)y = 1+3i$.

Λύση. Εκτελώντας τις πράξεις έχομε: $(x+3y) + (-2x+5y)i = 1+3i$

Επειδή δε δύο μιγαδικοί είναι ίσοι όταν έχουν τα πραγματικά μέρη τους ίσα και τους συντελεστές του i ίσους, $\Rightarrow x+3y=1$, $-2x+5y=3$ απ' τις οποίες $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$.

3.2. Αν οι αριθμοί $k, \lambda, \mu, \nu \in N$ διαιρούμενοι διά 4 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο να δειχθεί 1). $i^{k} = i^{\lambda} = i^{\mu} = i^{\nu}$, 2) $i^{k+\lambda+\mu+\nu} = 1$.

Λύση. 1). Αν υ είναι το υπόλοιπο και $\pi_\kappa, \pi_\lambda, \pi_\mu, \pi_\nu$ τα πηλίκα των διαιρέσεων των αριθμών $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ δια 4 αντιστοίχως τότε έχομε:

$i^{\kappa} = i^{4\pi_\kappa+\upsilon} = i^{4\pi_\kappa}\cdot i^{\upsilon} = 1\cdot i^{\upsilon} = i^{\upsilon}$ (1), $i^{\lambda} = i^{4\pi_\lambda+\upsilon} = i^{4\pi_\lambda}\cdot i^{\upsilon} = 1\cdot i^{\upsilon} = i^{\upsilon}$ (2),

$i^{\mu} = i^{4\pi_\mu+\upsilon} = i^{4\pi_\mu}\cdot i^{\upsilon} = 1\cdot i^{\upsilon} = i^{\upsilon}$ (3), $i^{\nu} = i^{4\pi_\nu+\upsilon} = i^{4\pi_\nu}\cdot i^{\upsilon} = 1\cdot i^{\upsilon} = i^{\upsilon}$ (4)

Απ' τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow i^{\kappa} = i^{\lambda} = i^{\mu} = i^{\nu}$.

2) Είναι $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu} = i^{\kappa}\cdot i^{\lambda}\cdot i^{\mu}\cdot i^{\nu} = i^{\upsilon}\cdot i^{\upsilon}\cdot i^{\upsilon}\cdot i^{\upsilon} = i^{4\upsilon} = (i^4)^{\upsilon} = 1^{\upsilon} = 1.$

3.3. Αν $z = \alpha+\beta i$ και $\bar{z} = \alpha-\beta i$, τον δε μιγαδικού $z_1 = x+yi$ το μέτρο $|z_1| = 1$, να δειχθεί ότι $\left|\dfrac{z-z_1}{1-\bar{z}z_1}\right| = 1$ $(\bar{z}\cdot z_1 \neq 1)$.

Λύση.

Επειδή $|z_1| = 1 = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ Επίσης $z-z_1 = \alpha+\beta i-(x+yi) =$
$= (\alpha-x)+(\beta-y)i$ και $1-\bar{z}z_1 = 1-(\alpha-\beta i)(x+yi) = 1-(\alpha x-\beta xi+\alpha yi-$
$-\beta yi^2) = 1-(\alpha x+\beta y+(\alpha x-\beta y)i) = (1-\alpha x-\beta y)+(\beta x-\alpha y)i$ άρα:

$$\left|\frac{z-z_1}{1-\bar{z}z_1}\right| = \frac{|z-z_1|}{|1-\bar{z}z_1|} = \frac{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}}{\sqrt{(1-\alpha x-\beta y)^2+(\beta x-\alpha y)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2-2\alpha x+\beta^2+y^2-2\beta y}}{\sqrt{1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2-2\alpha x-2\beta y+2\alpha\beta xy+\beta^2x^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y}}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y}} = 1$$ γιατί $x^2+y^2 = 1$ και $\alpha^2x^2+\alpha^2y^2 = \alpha^2(x^2+y^2) = \alpha^2$, $\beta^2x^2+\beta^2y^2 = \beta^2(x^2+y^2) = \beta^2$.

3.4. Αν $z = \alpha+\beta i$, και $|2z-1| = |z-2|$ να δειχθεί ότι $\alpha^2+\beta^2 = 1$.

Λύση Είναι $2z-1 = 2(\alpha+\beta i)-1 = (2\alpha-1)+2\beta i$ και $|2z-1| =$
$= \sqrt{(2\alpha-1)^2+4\beta^2}$ Επίσης $z-2 = \alpha+\beta i-2 = (\alpha-2)+\beta i$ και $|z-2| =$
$= \sqrt{(\alpha-2)^2+\beta^2}$ Επειδή $|2z-1| = |z-2| \Rightarrow \sqrt{(2\alpha-1)^2+4\beta^2} = \sqrt{(\alpha-2)^2+\beta^2} \Rightarrow$
$(2\alpha-1)^2+4\beta^2 = (\alpha-2)^2+\beta^2 \Rightarrow 4\alpha^2+1-4\alpha+4\beta^2 = \alpha^2+4-4\alpha+\beta^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\alpha^2+3\beta^2 = 3 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = 1.$

Όταν θέλωμε να μετατρέψωμε ένα μιγαδικό αριθμό z από την καρτεσιανή του μορφή $z=\alpha+\beta i$ στην τριγωνομετρική του μορφή $z=\rho(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)$, τα ρ και φ που χρειαζόμαστε, τα παίρνομε απ' τους τύπους: $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και $\text{συν}\varphi=\dfrac{\alpha}{\rho}$, $\text{ημ}\varphi=\dfrac{\beta}{\rho}$ (1)

Ενώ όταν θέλωμε να μετατρέψωμε ένα μιγαδικό αριθμό z από την τριγωνομετρική του μορφή $z=\rho(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)$ στην καρτεσιανή του μορφή $z=\alpha+\beta i$, τότε τα α και β που χρειαζόμαστε τα παίρνομε απ' τους τύπους: $\alpha=\rho\,\text{συν}\varphi$ και $\beta=\rho\,\text{ημ}\varphi$ (2).

3.5. Να τεθούν σε τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί:

α') $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}i$, β') $3\sqrt3+3i$, γ') $\dfrac{1+i\sqrt3}{-\sqrt3+i}$ και δ') $(1+\text{συν}t)+i\,\text{ημ}t$.

Λύση

α') Είναι $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\left(\frac12\right)^2+\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac14+\frac34}=\sqrt{\frac44}=1$ (Εκ των (1))

και $\text{συν}\varphi=\dfrac{\frac12}{1}=\dfrac12\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ ή $-\dfrac{\pi}{3}$ (1) και $\text{ημ}\varphi=\dfrac{-\sqrt3/2}{1}=-\dfrac{\sqrt3}{2}\Rightarrow$

$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$ ή $-\dfrac{2\pi}{3}$ (2) Εκ των (1),(2) $\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$ Επομένως θα είναι:

$\dfrac12-\dfrac{\sqrt3}{2}i=1\cdot\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

β') Είναι $\rho=\sqrt{(3\sqrt3)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6$ Επίσης

$\text{συν}\varphi=\dfrac{3\sqrt3}{6}=\dfrac{\sqrt3}{2}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ ή $-\dfrac{\pi}{6}$ (1) και $\text{ημ}\varphi=\dfrac36=\dfrac12\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{5\pi}{6}$

(2) Εκ των (1),(2) $\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Άρα $3\sqrt3+3i=6\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$.

γ') $\dfrac{1+i\sqrt3}{-\sqrt3+i}=\dfrac{(1+i\sqrt3)(-\sqrt3-i)}{(-\sqrt3+i)(-\sqrt3-i)}=\dfrac{-\sqrt3-3i-i-i^2\sqrt3}{(-\sqrt3)^2-i^2}=$

$\dfrac{-\sqrt3-3i-i+\sqrt3}{3+1}=-i$ Επομένως $\rho=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$ και $\text{συν}\varphi=\dfrac01=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ή $-\dfrac{\pi}{2}$ (1) και $\text{ημ}\varphi=\dfrac{-1}{1}=-1\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ (2) Εκ των (1),(2) $\Rightarrow$

$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ Άρα $-i=\dfrac{1+i\sqrt3}{-\sqrt3+i}=1\cdot\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

δ') Είναι $\rho=\sqrt{(1+\text{συν}t)^2+\text{ημ}^2t}=\sqrt{2+2\text{συν}t}$. (1) Εκ της σχέσεως της Τριγωνομετρίας: $\text{συν}t=2\text{συν}^2\frac{t}{2}-1\Rightarrow\text{συν}t+1=2\text{συν}^2\frac{t}{2}$ ή $\sqrt{2\text{συν}t+2}=2\text{συν}\frac{t}{2}$.

οπότε εκ της (1) προκύπτει $\rho = 2\,\text{συν}\frac{t}{2}$. Επίσης $\text{συν}\varphi = \frac{1+\text{συν}\,t}{2\,\text{συν}\frac{t}{2}} = \frac{2\,\text{συν}^2\frac{t}{2}}{2\,\text{συν}\frac{t}{2}} = \text{συν}\frac{t}{2}$. Ομοίως $\text{ημ}\varphi = \frac{\text{ημ}\,t}{2\,\text{συν}\frac{t}{2}} = \frac{2\,\text{ημ}\frac{t}{2}\cdot\text{συν}\frac{t}{2}}{2\,\text{συν}\frac{t}{2}} = \text{ημ}\frac{t}{2}$.

Επομένως θα είναι: $(1+\text{συν}\,t)+i\,\text{ημ}\,t = 2\,\text{συν}\frac{t}{2}\left(\text{συν}\frac{t}{2} + i\,\text{ημ}\frac{t}{2}\right)$.

3.6. Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του τύπου του De Moivre οι παραστάσεις: α') $(1+i)^{12}$, β') $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13}$, γ') $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$.

Λύση. α') Για να υπολογίσουμε τις παραστάσεις α'), β') και γ') θα φροντίσουμε πρώτα να τις μετατρέψουμε σε τριγωνομετρική μορφή με τους γνωστούς τύπους (1) και εφαρμόζοντας το θεώρημα 3. του De Moivre να πετύχουμε μια άλλη τριγωνομετρική έκφραση απ' την οποία τελικά να επιστρέψουμε στην καρτεσιανή μορφή χρησιμοποιώντας τώρα τους τύπους (2).

Κατ' αρχάς μετατρέπουμε τον $1+i$ σε τριγωνομετρική μορφή:

Είναι $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ και $\text{συν}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ ή $-\frac{\pi}{4}$ (1). Επίσης $\text{ημ}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ ή $\frac{3\pi}{4}$ (2) Εκ των (1), (2) $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$. Άρα $1+i = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$ και επομένως $(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)^{12} =$ (τύπος του De Moivre) $2^6\left(\text{συν}\,12\cdot\frac{\pi}{4}+i\,\text{ημ}\,12\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 64(\text{συν}\,3\pi+i\,\text{ημ}\,3\pi) =$
$= 64(\text{συν}\,\pi+i\,\text{ημ}\,\pi) = 64(-1+i\cdot 0) = -64$.

β'). Ομοίως μετασχηματίζουμε τον $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ σε τριγωνομετρική μορφή.

Είναι $\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$ και $\text{συν}\varphi = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ ή $-\frac{\pi}{6}$ (1). Ομοίως $\text{ημ}\varphi = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{5\pi}{6}$ (2) Εκ των (1), (2) $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ Άρα $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 1\cdot\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$ και επομένως $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} = \left[1\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{13} =$ (τύπος De Moivre) $1^{13}\cdot\left(\text{συν}\,13\cdot\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\,13\cdot\frac{\pi}{6}\right) =$
$= \text{συν}\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{ημ}\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ (εφαρμόζοντας τους γνωστούς τύπους (2)). Άρα $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

γ') Ομοίως έχομε $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$ Επίσης είναι

$\text{συν}\varphi = \dfrac{-1/2}{1} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ ή $\dfrac{4\pi}{3}$ (1) και $\text{ημ}\varphi = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ή $\dfrac{2\pi}{3}$ (2). Εκ των (1),(2) $\Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Άρα $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3}\right)$ και άρα

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17} = \left[1\cdot\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{17} = \text{συν}\frac{34\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{34\pi}{3} =$$

$$= \text{συν}\left(2\pi\cdot 15 + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(2\pi\cdot 15 + \frac{4\pi}{3}\right) = \text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ άρα:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.7. Να εκφραστεί το $\text{ημ}3\vartheta$ και $\text{συν}3\vartheta$ συναρτήσει του $\text{ημ}\vartheta$ και $\text{συν}\vartheta$ αντιστοίχως δι' εφαρμογής του τύπου του De Moivre.

Λύση. Έχομε $(\text{συν}\vartheta + i\,\text{ημ}\vartheta)^3 = \text{συν}3\vartheta + i\,\text{ημ}3\vartheta$ (τύπος De Moivre) ή αν αναπτύξωμε το α' μέλος έχομε: $\text{συν}^3\vartheta + 3\text{συν}^2\vartheta\cdot i\,\text{ημ}\vartheta + 3\text{συν}\vartheta\cdot i^2\text{ημ}^2\vartheta + i^3\text{ημ}^3\vartheta =$ $= \text{συν}3\vartheta + i\,\text{ημ}3\vartheta$ ή $\text{συν}^3\vartheta - 3\text{συν}\vartheta\,\text{ημ}^2\vartheta + i(3\text{συν}^2\vartheta\,\text{ημ}\vartheta - \text{ημ}^3\vartheta) = \text{συν}3\vartheta + i\,\text{ημ}3\vartheta$ εκ της οποίας: $\text{ημ}3\vartheta = 3\text{συν}^2\vartheta\,\text{ημ}\vartheta - \text{ημ}^3\vartheta = 3\text{ημ}\vartheta(1-\text{ημ}^2\vartheta) - \text{ημ}^3\vartheta = 3\text{ημ}\vartheta - 4\text{ημ}^3\vartheta$ και $\text{συν}3\vartheta = \text{συν}^3\vartheta - 3\text{συν}\vartheta\,\text{ημ}^2\vartheta = \text{συν}^3\vartheta - 3\text{συν}\vartheta(1-\text{συν}^2\vartheta) = 4\text{συν}^3\vartheta - 3\text{συν}\vartheta$. δηλ. οι γνωστοί τύποι της Τριγωνομετρίας των εκφράσεων $\text{ημ}3\vartheta$, $\text{συν}3\vartheta$.

3.8. Να ευρεθούν 1) Οι κυβικές ρίζες της μονάδος,
2) οι τέταρτες ρίζες του $-8+8i\sqrt{3}$,
3) οι πέμπτες ρίζες της μονάδος.

Λύση 1). Επειδή $1 = \text{συν}0 + i\,\text{ημ}0^{*} = \text{συν}2k\pi + i\,\text{ημ}2k\pi$ εφαρμόζοντας τον τύπο του θεωρήματος 4.: $z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\dfrac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right)\right]$ για $k=0,1,2$, $\rho = 1$, $\varphi = 0$ και $\nu = 3$ προκύπτουν οι τρεις ρίζες της εξισώσεως $\sqrt[3]{1} = \text{συν}\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ οι εξής:

$$z_0 = \text{συν}\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = \text{συν}0 + i\,\text{ημ}0 = 1$$

$$z_1 = \text{συν}\left(\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \text{συν}\left(\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = \text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\,\text{ημ}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

* Είναι $1 = 1+0i$ επομένως $\rho = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ και $\text{συν}\varphi = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ (1). Επίσης $\text{ημ}\varphi = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ή π (2). Εκ της (1), (2) $\Rightarrow \varphi = 0$. δηλ. $1 = 1\cdot(\text{συν}0 + i\,\text{ημ}0)$.

2). Έχομε $z^4 = -8+8i\sqrt{3}$. Μετασχηματίζομε τον $-8+8i\sqrt{3}$ σε τριγωνομετρική μορφή. Είναι $\rho = \sqrt{(-8)^2+(8\sqrt{3})^2} = 16$ Επίσης είναι:
$\text{συν}\varphi = \dfrac{-8}{16} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ ή $\dfrac{4\pi}{3}$ (1) και $\text{ημ}\varphi = \dfrac{8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ή $\dfrac{2\pi}{3}$ (2). Εκ των (1), (2) $\Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Άρα $-8+8i\sqrt{3} = 16\left(\text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3}\right)$

και $z_k = \sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16}\left[\text{συν}\left(\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\,\text{ημ}\left(\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right]$

για $k=0$: $z_0 = 2\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}+i$

" $k=1$: $z_1 = 2\left(\text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1+i\sqrt{3}$

" $k=2$: $z_2 = 2\left(\text{συν}\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{ημ}\dfrac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}-i$

" $k=3$: $z_3 = 2\left(\text{συν}\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\dfrac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}$.

3). Η εξίσωση ουσιαστικά είναι $z^5 = 1 = 1\,(\text{συν}\,0 + i\,\text{ημ}\,0) =$
$= (\text{συν}\,2k\pi + i\,\text{ημ}\,2k\pi)$ άρα $z_k = 1\left(\text{συν}\dfrac{2k\pi}{5} + i\,\text{ημ}\dfrac{2k\pi}{5}\right) = \text{συν}\dfrac{2k\pi}{5} + i\,\text{ημ}\dfrac{2k\pi}{5}$.
επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 4. υπάρχουν 5 ακριβώς διακεκριμμένες ρίζες για $k=0, 1, 2, 3, 4$ της μονάδος ως εξής:

για $k=0$: $z_0 = \text{συν}\,0° + i\,\text{ημ}\,0° = 1$

" $k=1$: $z_1 = \text{συν}\,72° + i\,\text{ημ}\,72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} + i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

" $k=2$: $z_2 = \text{συν}\,144° + i\,\text{ημ}\,144° = -\text{συν}\,36° + i\,\text{ημ}\,36° = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} + i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

" $k=3$: $z_3 = \text{συν}\,216° + i\,\text{ημ}\,216° = -\text{συν}\,36° - i\,\text{ημ}\,36° = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4} - i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

" $k=4$: $z_4 = \text{συν}\,288° + i\,\text{ημ}\,288° = \text{συν}\,72° - i\,\text{ημ}\,72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} - i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

γιατί από την Τριγωνομετρία γνωρίζομε ότι:

$\text{ημ}\,18° = \text{συν}\,72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\text{συν}\,18° = \text{ημ}\,72° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\text{ημ}\,36° = \text{συν}\,54° = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\text{συν}\,36° = \text{ημ}\,54° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

3.9. Να δειχθεί ότι: $\dfrac{(\text{συν}\,70° + i\,\text{ημ}\,70°)^5}{(\text{συν}\,40° + i\,\text{ημ}\,40°)^5} = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$.

Λύση. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2. έχομε διαδοχικά:

$$\frac{(συν70°+iημ70°)^5}{(συν40°+iημ40°)^5} = \left[\frac{συν70°+iημ70°}{συν40°+iημ40°}\right]^5 = \left[συν(70-40°)+iημ(70°-40°)\right]^5 =$$

$$=(συν30°+iημ30°)^5 = συν(5\cdot30°)+iημ(5\cdot30°) = συν150°+iημ150° =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i).$$

3.10. Να λυθεί τριγωνομετρικά η εξίσωση $x^6+64=0$. Να σημειωθούν τα ορίσματα των 6 ριζών. Πώς παριστάνονται γεωμετρικά οι ρίζες της εξισώσεως αυτής.

Λύση. Έχομε $x^6 = -64 = -64\cdot1 = +64\cdot(-1) = 64(συνπ+iημπ)$.

διότι $-1 = -1+0i$ και $ρ = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$, $συνφ = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow φ = π$ (1)

και $ημφ = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow φ = 0$ ή $π$ (2). Εκ των (1),(2) $\Rightarrow φ = π$, άρα $-1 = συνπ+iημπ$

και επομένως εφαρμόζοντας τον τύπο του θεωρήματος 4. ευρίσκομε τις 6 ρίζες:

$$x_κ = \sqrt[6]{64}\left[συν\frac{π+2κπ}{6} + iημ\frac{π+2κπ}{6}\right]$$ οπότε για $k=0,1,2,3,4,5$ έχομε:

για $k=0$: $x_0 = 2\left(συν\frac{π+2\cdot0\cdotπ}{6} + iημ\frac{π+2\cdot0\cdotπ}{6}\right) = 2\left(συν\frac{π}{6}+iημ\frac{π}{6}\right) = \sqrt{3}+i$

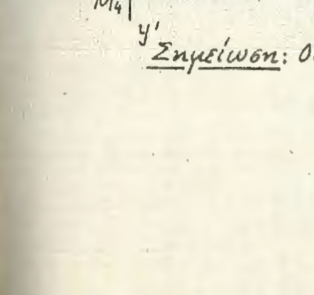
" $k=1$: $x_1 = 2\left(συν\frac{π+2\cdot1\cdotπ}{6} + iημ\frac{π+2\cdot1\cdotπ}{6}\right) = 2\left(συν\frac{π}{2}+iημ\frac{π}{2}\right) = 2i$

" $k=2$: $x_2 = 2\left(συν\frac{π+2\cdot2\cdotπ}{6} + iημ\frac{π+2\cdot2\cdotπ}{6}\right) = 2\left(συν\frac{5π}{6}+iημ\frac{5π}{6}\right) = -\sqrt{3}+i$

" $k=3$: $x_3 = 2\left(συν\frac{π+2\cdot3\cdotπ}{6} + iημ\frac{π+2\cdot3\cdotπ}{6}\right) = 2\left(συν\frac{7π}{6}+iημ\frac{7π}{6}\right) = -\sqrt{3}-i$

" $k=4$: $x_4 = 2\left(συν\frac{π+2\cdot4\cdotπ}{6} + iημ\frac{π+2\cdot4\cdotπ}{6}\right) = 2\left(συν\frac{9π}{6}+iημ\frac{9π}{6}\right) = -2i$

" $k=5$: $x_5 = 2\left(συν\frac{π+2\cdot5\cdotπ}{6} + iημ\frac{π+2\cdot5\cdotπ}{6}\right) = 2\left(συν\frac{11π}{6}+iημ\frac{11π}{6}\right) = \sqrt{3}-i$



Παρατηρούμε ότι όλες οι ρίζες $x_κ$ έχουν το ίδιο μέτρο για $k=0,1,2,4,5$ και ορίσματα τέτοια ώστε από της αρχικής τιμής $\frac{π}{6}$ αυξάνουν διαρκώς κατά $\frac{2π}{6}$. Επομένως οι εικόνες αυτών $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ στο μιγαδικό επίπεδο θα κείνται επί κύκλου κέντρου O και ακτίνος $ρ=2$ σε κανονικό εγγεγραμμένο εξάγωνο.

<u>Σημείωση:</u> Οι 3 τελευταίες $\sqrt{3}-i, -2i, -\sqrt{3}-i$, είναι συζυγείς των άλλων (ιδιότ. II των ακέρ. πολυωνύμ.).

4. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.

Ορισμοί

Ακέραιο πολυώνυμο του x καλείται κάθε έκφραση της μορφής: $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου $a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu$ σταθεροί αριθμοί και ν φυσικός ή μηδέν και συμβολίζεται με $f(x)$.

Βαθμός πολυωνύμου καλείται ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής x, της οποίας ο συντελεστής είναι διάφορος του μηδενός.

Οι $a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu$ καλούνται **συντελεστές** του $f(x)$.

Μηδενικό καλείται το πολυώνυμο του οποίου όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι με 0 και γράφεται $f(x) \equiv 0$ (εκ ταυτότητος ίσο με 0).

Δύο πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ είναι **εκ ταυτότητος ίσα** εάν και μόνον εάν οι συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων είναι ίσοι δηλ.
$f(x) \equiv \varphi(x) \iff a_k = \beta_k$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots, \nu$

Έστω το μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_0$
Εάν για $x = \rho$ η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου είναι ίση με μηδέν δηλ $f(\rho) = 0$ τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου. Αν το ανωτέρω πολυώνυμο εξισώσωμε με 0 έχομε μια **αλγεβρική εξίσωση**.

Η ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως με ρητούς συντελεστές λέγεται **αλγεβρικός αριθμός**. Ένας αριθμός που δεν είναι αλγεβρικός λέγεται **υπερβατικός**. π.χ. ο $\pi = 3{,}14159\dots$, $e = 2{,}71828\dots$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την συνήθη πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αποτελεί το λεγόμενο **πολυωνυμικό δακτύλιο** $R[x]$.

Θεώρημα του D'Alembert (Θεμελιώδες θεώρημα της Αλγέβρας). Κάθε ακέραιο πολυώνυμο με συντελεστές πραγματικούς (ή μιγαδικούς) αριθμούς, βαθμού $\nu \geq 1$, έχει στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών μια τουλάχιστον ρίζα.

Ιδιότητες των ακεραίων πολυωνύμων

I. Τό υπόλοιπο της διαιρέσεως του $f(x)$ διά του $\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha\neq 0$ είναι $\upsilon=f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

II. Άν ρ είναι ρίζα του $f(x) \Leftrightarrow x-\rho \mid f(x)$ (ο παράγων $x-\rho$ διαιρεί το $f(x)$.) ήτοι $f(\rho)=0 \Leftrightarrow f(x)\equiv(x-\rho)\,\pi(x)$ όπου $\pi(x)$ ακέραιο πολυώνυμο του x, ήτοι $\pi(x)\in R[x]$.

III. Άν ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται με καθένα από τα διώνυμα $x-\rho_1$, $x-\rho_2$, $\cdots$, $x-\rho_\nu$, όπου $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_\nu$ αριθμοί διάφοροι μεταξύ τους ανά δύο, τότε θα διαιρείται ακριβώς και με το γινόμενο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$ και αντιστρόφως.

IV. Κάθε ακέραιο πολυώνυμο ν βαθμού $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$ έχει ν τό πλήθος ρίζες τις $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_\nu$ και είναι $f(x)\equiv\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$.

Μία ρίζα ρ ενός πολυωνύμου $f(x)\not\equiv 0$ είναι **πολλαπλή** τάξεως k, ή **βαθμού πολλαπλότητος** k (k ακέραιος ≥ 1) άν και μόνο άν $(x-\rho)^k \mid f(x)$ και $(x-\rho)^{k+1} \nmid f(x)$ ($\nmid$=δεν διαιρεί) Άν $k=1$ ή ρίζα λέγεται **απλή**, άν $k=2$ **διπλή** κ.ο.κ.

V. Άν το ακέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ μηδενίζεται για $\nu+1$ τιμές του x, διάφορες μεταξύ των, τότε τούτο είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

VI. Άν το ακέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$ $(\alpha_\nu\neq 0)$ με πραγματικούς συντελεστές $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\cdots,\alpha_0$ δέχεται σαν ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $\alpha+\beta i$, τότε θα δέχεται σαν ρίζα και τον συζυγή αυτού $\alpha-\beta i$. Και μάλιστα, αν δέχεται σαν ρίζα τον μιγαδικό $\alpha+\beta i$ σε βαθμό πολλαπλότητος k, θα δέχεται επίσης σαν ρίζα και τον συζυγή του $\alpha-\beta i$ με τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητος k.

VII. Άν ακέραιο πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές δέχεται σαν ρίζα την $\alpha+\sqrt{\beta}$ ($\alpha\in Q$, $\beta\in Q^+$, $\beta\neq\vartheta^2$, όπου $\vartheta\in Q$) θα δέχεται επίσης σαν ρίζα και την $\alpha-\sqrt{\beta}$ και μάλιστα με τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητος.

Σχέσεις ριζών και συντελεστών πολυωνύμου.

$$S_1 \equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_{\nu-1} + \rho_\nu = -\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}$$

$$S_2 \equiv \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_\nu + \rho_2\rho_3 + \cdots \rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu = +\frac{a_{\nu-2}}{a_\nu}$$

$$S_3 \equiv \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu = -\frac{a_{\nu-3}}{a_\nu}$$

....

$$S_\nu \equiv \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdots \rho_{\nu-1} \cdot \rho_\nu = (-1)^\nu \frac{a_0}{a_\nu}.$$

Ομογενή και συμμετρικά πολυώνυμα.

Ακέραιο πολυώνυμο των $x, y, z, \cdots$ καλείται κάθε άθροισμα ακεραίων μονονύμων των $x, y, z, \cdots$ εκ των οποίων δύο τουλάχιστον είναι ανόμοια και συμβολίζεται με $f(x, y, z, \cdots)$ ήτοι:

$$f(x,y,z,\cdots) \equiv a_\nu x^{k_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu} \cdots + a_{\nu-1} x^{k_{\nu-1}} y^{\lambda_{\nu-1}} z^{\mu_{\nu-1}} \cdots + \cdots + a_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} \cdots$$

Αν όλοι οι συντελεστές ενός πολυωνύμου $f(x,y,z,\cdots)$, ν το πλήθος μεταβλητών είναι 0, τούτο καλείται μηδενικό πολυώνυμο και συμβολίζεται με $f(x,y,z,\cdots) \equiv 0$. Αν δεν είναι μηδενικό γράφεται $f(x,y,z) \not\equiv 0$.

Ένα ακέραιο πολυώνυμο $f(x,y,z,\cdots)$, του οποίου όλοι οι όροι είναι μονώνυμα του ίδιου βαθμού ως προς τις μεταβλητές $x, y, z, \cdots$ λέγεται **ομογενές**. Ο κοινός βαθμός των όρων του λέγεται **βαθμός ομογενείας** του πολυωνύμου.

Δύο ακέραια πολυώνυμα $f(x,y,z,\cdots)$ και $\varphi(x,y,z,\cdots)$ είναι **εκ ταυτότητος ίσα** όταν η διαφορά τους είναι το μηδενικό πολυώνυμο και γράφομε: $f(x,y,z,\cdots) \equiv \varphi(x,y,z,\cdots)$.

Σ' ένα ομογενές πολυώνυμο ν βαθμού υφίσταται η ταυτότης:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \cdots) \equiv \lambda^\nu \cdot f(x,y,z,\cdots) \quad \forall \lambda \in R, \lambda \neq 0 \text{ ς } (x,y,z,\cdots) \neq (0,0,0,\cdots)$$

I. Το γινόμενο δύο ομογενών πολυωνύμων είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού ομογενείας ίσου με το άθροισμα των βαθμών των 2 πολυωνύμων.

II. Το πηλίκο της τελείας διαιρέσεως δύο ομογενών πολυωνύμων είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού ομογενείας ίσου με τη διαφορά των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

Ακέραιο, μη μηδενικό πολυώνυμο δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών καλείται **συμμετρικό**, αν δι' οιασδήποτε μεταθέσεως των μεταβλητών του προκύπτει πολυώνυμο εκ ταυτότητος ίσο προς το αρχικό.

Μετάθεση των ν στοιχείων ενός συνόλου Ε είναι κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου Ε στον εαυτό του.

Ειδικά, ακέραιο, μη μηδενικό, πολυώνυμο δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών καλείται **κυκλικά συμμετρικό**, αν δι' οιασδήποτε κυκλικής μεταθέσεως των μεταβλητών του, προκύπτει πολυώνυμο εκ ταυτότητος ίσο προς το αρχικό.

Κυκλική μετάθεση είναι η μετάθεση εκείνη στην οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Ε απεικονίζεται στο επόμενό του, το δε τελευταίο στοιχείο του Ε, στο πρώτο.

Ια. Το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο δύο συμμετρικών πολυωνύμων είναι πάντοτε συμμετρικό πολυώνυμο.

ΙΙα. Το πηλίκο της τελείας διαιρέσεως δύο συμμετρικών πολυωνύμων (των ιδίων μεταβλητών) είναι συμμετρικό πολυώνυμο.

ΙΙΙα. Αν ένα κυκλικά συμμετρικό πολυώνυμο $f(x,y,z)$ είναι διαιρετό δια $x-y$, θα είναι διαιρετό και με το γινόμενο $(x-y)(y-z)(z-x)$, αν είναι διαιρετό με το $x+y$ θα είναι διαιρετό και με το γινόμενο $(x+y)(y+z)(z+x)$, αν είναι διαιρετό με το $x+y-z$ θα είναι διαιρετό και με το γινόμενο $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

Μορφές κυκλικά συμμετρικών πολυωνύμων.

α') Για δύο μεταβλητές x και y.

1). Πρωτοβάθμια: $\alpha(x+y)+\beta \quad , \alpha,\beta\in R$

2). Δευτεροβάθμια: $\alpha(x^2+y^2)+\beta xy+\gamma(x+y)+\delta \quad , \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$

3). Τριτοβάθμια: $\alpha(x^3+y^3)+\beta(x^2y+y^2x)+\gamma xy+\delta(x+y)+\varepsilon, \quad \alpha,\beta,\dots,\varepsilon\in R$

β') Για τρεις μεταβλητές x, y, z.

1) Πρωτοβάθμια: $\alpha(x+y+z)+\beta \quad , \alpha,\beta\in R$.

2) Δευτεροβάθμια: $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)+\gamma(x+y+z)+\delta$, $\alpha,\dots;\delta\in R$.

3) Τριτοβάθμια: $\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$
$+\gamma xyz+\delta(x^2+y^2+z^2)+\varepsilon(xy+yz+zx)+\vartheta(x+y+z)+\eta$.

Ένα πολυώνυμο $f(x,y,z,\cdots)$ λέγεται **ομογενές και κυκλικά συμμετρικό** άν είναι ομογενές και συγχρόνως κυκλικά συμμετρικό.

Μορφές ομογενών και κυκλικά συμμετρικών πολυωνύμων.

Οι μορφές αυτές προκύπτουν από ένα κυκλικά συμμετρικό πολυώνυμο, άν παραληφθούν οι όροι πού καταστρέφουν την ομογένεια. Π.χ για 3 μεταβλητές τα μόνα ομογενή και συγχρόνως κυκλικά συμμετρικά πολυώνυμα είναι:

1). Πρωτοβάθμια: $\alpha(x+y+z)$, $\alpha\in R$.

2). Δευτεροβάθμια: $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$, $\alpha,\beta\in R$

3). Τριτοβάθμια: $\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$
$+\gamma xyz$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

Ανάλυση του κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων, όπου βαθμός του $f(x)<$ βαθμού του $\varphi(x)$.

Περίπτωση I. Άν το $\varphi(x)$ έχει μόνο απλές ρίζες πραγματικές τις $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_\nu$ δηλ είναι της μορφής: $\varphi(x)\equiv(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$ τότε:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\equiv\frac{f(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)}\equiv\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\cdots+\frac{A_\nu}{x-\rho_\nu}$$

Περίπτωση II. Άν το $\varphi(x)$ έχει πραγματικές απλές και πολλαπλές ρίζες, δηλ είναι: $\varphi(x)\equiv(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)^k\cdots(x-\rho_\mu)^\lambda$ με $1+1+k+\cdots+\lambda=\nu$ (ν το πλήθος των ριζών) τότε:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\equiv\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\frac{B_1}{x-\rho_3}+\frac{B_2}{(x-\rho_3)^2}+\cdots+\frac{B_k}{(x-\rho_3)^k}+\cdots+\frac{M_1}{x-\rho_\mu}+$$
$$+\frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2}+\cdots+\frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda}$$ όπου $A_1,A_2,B_1,\cdots,B_k,M_1,\cdots M_\lambda\in R$ προσδιοριζόμενοι.

Περίπτωση III. Άν το κλάσμα είναι της μορφής: $\dfrac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}$, όπου ο βαθμός του $f(x)$ είναι μικρότερος του 2ν (ν ακέραιος ≥ 1) και β, γ πραγματικοί με $\beta^2-4\gamma<0$ τότε

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \dots + \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}$$

Λύση των εξισώσεων $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού.

Οι πλήρεις εξισώσεις $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$ καί $4^{ου}$ βαθμού μπορούν να λυθούν. Αποδεικνύεται ότι εξισώσεις βαθμού μεγαλυτέρου του $4^{ου}$ (πλήρεις) δεν λύνονται μέ στοιχειώδη Μαθηματικά. Θα λύσωμε τις εξισώσεις μέχρι καί $4^{ου}$ βαθμού.

$1^{ου}$ βαθμού.

Η γενική της μορφή είναι $\alpha x+\beta=0$ εκ της οποίας προκύπτει: $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

$2^{ου}$ βαθμού.

Η γενική της μορφή είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. (1). Η (1) γράφεται διαδοχικά.

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\cdot x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=$$

$$=\alpha\left[\left(x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}\cdot x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=0$$

δηλ. $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0 \Rightarrow x+\dfrac{\beta}{2\alpha}=\pm\dfrac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ καί

$x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ δηλ δύο ρίζες σύμφωνα με την ιδιότητα IV των ακεραίων πολυωνύμων τις $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

$3^{ου}$ βαθμού.

Η γενική της μορφή είναι $\alpha' x^3+\beta' x^2+\gamma' x+\delta'=0$ ή αν διαιρέσωμε κάθε όρο της με α' και θέσωμε: $\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\alpha$, $\dfrac{\gamma'}{\alpha'}=\beta$, $\dfrac{\delta'}{\alpha'}=\gamma$ λαμβάνει τη μορφή $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. (1). Αν εκτελέσωμε το μετασχηματισμό $x=y-\dfrac{\alpha}{3}$ και κάνωμε τις αναγωγές ομοίων όρων θα προκύψει:

$y^3-\dfrac{\alpha^2-3\beta}{3}y+\dfrac{27\gamma-9\alpha\beta+2\alpha^3}{27}=0$ (2). Διακρίνομε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Άν $\alpha^2-3\beta=0$ ή $\beta=\frac{\alpha^2}{3} \Rightarrow y^3+q=0$ (θέσαμε $q=\frac{27\gamma-9\alpha\beta+2\alpha^3}{27}$)
η οποία είναι μια διώνυμη εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού και λύνεται κατά τα γνωστά.
II. Άν $27\gamma-9\alpha\beta+2\alpha^3=0 \Rightarrow y^3+py=0$ (θέσαμε $p=-\frac{\alpha^2-3\beta}{3}$)
η οποία είναι διώνυμη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού και λύνεται κατά τα γνωστά.
III. Άν καμμία απ' τις περιπτώσεις I και II δεν συμβαίνει δηλ. άν $p\neq 0$ και $q\neq 0$ τότε η (2) (στην οποία λείπει ο δευτεροβάθμιος όρος) λύνεται ως εξής: Θέτομε $y=u+v$ (3) και θα ζητήσωμε να προσδιορίσωμε τα u καί v ώστε το $u+v$ να είναι ρίζα της (2).
Η (2) μετά την αντικατάσταση του y γίνεται $(u+v)^3+p(u+v)+q=0$ ή $u^3+v^3+q+3uv(u+v)+p(u+v)=0$ η ακόμη $(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p)=0$ Συνεπώς θα πρέπει να είναι: $u^3+v^3+q=0$ καί $3uv+p=0$ (ο όρος $u+v$ δεν είναι δυνατόν νά ισούται με μηδέν γιατί τότε θα ήταν το $y=0$ και θά προέκυπτε από την (2) ότι και $q=0$ πράγμα που δέν συμβαίνει.) Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι: $uv=-\frac{p}{3}$ (4) και $u^3+v^3=-q$ (5). Επειδή είναι $u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$ προκύπτει οτι τα u^3 και v^3 είναι ρίζες της εξισώσεως $k^2+qk-\frac{p^3}{27}=0$ η οποία αν λυθή δίνει: $k=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2}$ ή $k=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ Άρα είναι: $u^3=k$ και συνεπώς:

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (6)$$

οπότε $v=-\frac{p}{3u}$ που προκύπτει απ' την (4) και η (3) γίνεται: $y=u-\frac{p}{3u}$ (7). Αφού υπολογισθή τό y υπολογίζεται τελικά και το x απ' τον αρχικό μετασχηματισμό $x=y-\frac{\alpha}{3}$.
Σημείωση. Εκ της (6) ευρίσκομε τρείς τιμές για το u, τις u_1, u_2, u_3 γιατί ως γνωστόν ο αριθμός

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

έχει τρεις κυβικές ρίζες. Οί τιμές του u αν τεθούν στην (7) δίνουν τρεις ρίζες τις y_1, y_2, y_3. (ιδιότης IV ακερ. πολ/μων).

$4^{ου}$ βαθμού.

Ἡ γενική της μορφή είναι $\alpha' x^4+\beta' x^3+\gamma' x^2+\delta' x+\varepsilon'=0$ ἢ ἂν διαιρέσωμε με α' κάθε όρο της και θέσωμε $\frac{\beta'}{\alpha'}=\alpha$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}=\beta$, $\frac{\delta'}{\alpha'}=\gamma$, $\frac{\varepsilon'}{\alpha'}=\delta$ γίνεται: $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ (1). Ἂν εκτελέσωμε τον μετασχηματισμό: $x=y-\frac{\alpha}{4}$ (για να φύγει τώρα ο τριτοβάθμιος όρος) και εκτελέσωμε τις πράξεις, μετά τις αναγωγές ομοίων όρων θα έχωμε:

$$y^4+\frac{16\beta-6\alpha^2}{16}y^2+\frac{\alpha^2-4\alpha\beta+8\gamma}{8}y+\frac{16\alpha^2\beta+256\delta-64\alpha\gamma-3\alpha^4}{256}=0$$

η οποία είναι της μορφής: $y^4+Ay^2+By+\Gamma=0$ (2). Διακρίνομε όμοιως τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I. Αν είναι $\alpha^2-4\alpha\beta+8\gamma=0$ ή $B=0$ τότε η (2) γίνεται διτετράγωνη και λύνεται με την αντικατάσταση $y^2=z$ ως δευτεροβάθμια.

II. Αν είναι $16\alpha^2\beta+256\delta-64\alpha\gamma-3\alpha^4=0$ δηλ $\Gamma=0$ τότε η εξίσωση (2) λύνεται ως τριτοβάθμια εξίσωση γιατί θα είναι: $y^4+Ay^2+By=0$ ή $y(y^3+Ay+B)=0$ και λύνεται κατά τα γνωστά.

III Αν είναι $A=0$, $B=0$ τότε η εξίσωση (2) γίνεται $y^4+\Gamma=0$ και λύνεται σαν διώνυμη κατά τα γνωστά.

IV. Αν καμμία απ' τις περιπτώσεις I, II, III δεν συμβαίνει δηλ αν $A\neq0$, $B\neq0$, $\Gamma\neq0$ τότε εργαζόμαστε ως εξής: Θέτομε:

$y^4+Ay^2+By+\Gamma\equiv(y^2+\lambda y+\mu)(y^2-\lambda y+\nu)$ (3) και θα ζητήσωμε να προσδιορίσωμε τα λ, μ, ν ώστε η (3) να είναι ταυτότητα ως προς y, οπότε η λύση της εξισώσεως (2) ανάγεται στη λύση των δευτεροβαθμίων εξισώσεων $y^2+\lambda y+\mu=0$ και $y^2-\lambda y+\nu=0$. Αν εκτελέσωμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος της (3) και εξισώσωμε τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων του y θα πάρωμε το σύστημα: $\nu+\mu-\lambda^2=A$, $\lambda\nu-\lambda\mu=B$, $\mu\nu=\Gamma$. ή $\nu+\mu=\lambda^2+A$, $\nu-\mu=\frac{B}{\lambda}$, $\mu\nu=\Gamma$ (4) Απ' τις δυο πρώτες των (4) ευρίσκομε τα ν και μ συναρτήσει των A, B, λ. είναι: $\nu=\frac{1}{2}\left(\lambda^2+A+\frac{B}{\lambda}\right)$, $\mu=\frac{1}{2}\left(\lambda^2+A-\frac{B}{\lambda}\right)$ (5). Αν αντικαταστήσωμε τις τιμές αυτές των ν και μ στη σχέση των (4) $\mu\nu=\Gamma$ προκύπτει $(\lambda^2)^3+2A(\lambda^2)^2+(A^2-4\Gamma)\lambda^2-B^2=0$ (6) δηλ. μια εξίσωση τρίτου βαθμού πλήρης. Αν λυθεί αυτή, θα δώσει τρεις τιμές για το λ^2, εκ των οποίων η μια τουλάχιστον θα είναι πραγματική (σύμφωνα με την ιδιότητα VI των ακεραίων πολυωνύμων). Κάθε τιμή του λ^2 δίνει δυο τιμές για το λ, τις $\pm\sqrt{\lambda^2}$. Έτσι για το λ έχομε συνολικά 6 τιμές. Οι 6 όμως αυτές λύσεις μόνο κατά 3 τρόπους δίνουν ανάλυση της μορφής (3) γιατί όπως φαίνεται στην (3) τα λ εμφανίζονται μόνο με αντίθετα πρόσημα και επομένως οι αναλύσεις ανά 2 συμπίπτουν.

Ασκήσεις.

4.1. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ για να είναι το πολυώνυμο $f(x) \equiv (2\alpha+1)x^2+(3\beta-1)x+(2\gamma+\beta-\alpha)$ εκ ταυτότητος μηδέν.

Λύση. Για να είναι το $f(x) \equiv 0$ θα πρέπει όλοι οι συντελεστές του $f(x)$ να είναι 0. δηλ. $2\alpha+1=0$, $3\beta-1=0$, $2\gamma+\beta-\alpha=0$. Εκ των 2 πρώτων προκύπτει: $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{3}$. Αν τεθούν οι τιμές αυτές στην τρίτη θα δώσουν $\gamma=-\frac{5}{12}$.

4.2. Να προσδιοριστούν τα α, β, γ ώστε το πολυώνυμο $2x^2+4x+5$ να ισούται εκ ταυτότητος με $\alpha(x+2)(x+3)+\beta x(x-1)+\gamma$.

Λύση. Θα πρέπει τα δυο πολυώνυμα να είναι εκ ταυτότητος ίσα. δηλ. $2x^2+4x+5 \equiv \alpha(x+2)(x+3)+\beta x(x-1)+\gamma$ ή αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο 2° μέλος και διατάξουμε το πολυώνυμο κατά τις δυνάμεις του x:
$2x^2+4x+5 \equiv (\alpha+\beta)x^2+(5\alpha-\beta)x+6\alpha+\gamma$. Για να είναι τώρα τα δύο αυτά πολυώνυμα εκ ταυτότητος ίσα, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό, οι συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων του x να είναι ίσοι, δηλ.
$\alpha+\beta=2$, $5\alpha-\beta=4$, $6\alpha+\gamma=5$. Δια λύσεως του συστήματος προκύπτει:
$\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-1$.

Παρατήρηση. Εκτός της μεθόδου αυτής που λέγεται και "μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών" και είναι γενικά σε τέτοιου είδους προβλήματα, υπάρχει και άλλη μέθοδος, η οποία στηρίζεται στο γεγονός ότι τα δύο πολυώνυμα είναι εκ ταυτότητος ίσα. δηλ είναι ίσα για οποιεσδήποτε τιμές της μεταβλητής. Επομένως μπορούμε να θέσουμε στο x 3 αυθαίρετες τιμές π.χ. $x=0$, $x=1$, $x=-2$ (συνήθως μικρές ακέραιες τιμές) οπότε προκύπτουν 3 ισότητες αντιστοίχως. Δηλ.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Για } x=0: & 2\cdot 0^2+4\cdot 0+5 \equiv \alpha(0+2)(0+3)+\beta\cdot 0(0-1)+\gamma & \text{ή } 5=6\alpha+\gamma \\ \quad " \quad x=1: & 2\cdot 1^2+4\cdot 1+5 \equiv \alpha(1+2)(1+3)+\beta\cdot 1(1-1)+\gamma & \text{ή } 11=12\alpha+\gamma \\ \quad " \quad x=-2: & 2(-2)^2+4(-2)+5 \equiv \alpha(-2+2)(-2+3)+\beta(-2)(-2-1)+\gamma & \text{ή } 5=6\beta+\gamma \end{array}\right\} (1)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) ορίσκουμε πάλι $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-1$.

4.3. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ για να είναι το πολυώνυμο $f(x) \equiv x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ τετράγωνο του τριωνύμου $x^2-x+\gamma$.

Λύση. Πρέπει να ισχύει: $x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+4 \equiv (x^2-x+\gamma)^2$ ή αν εκτελέσουμε τις πράξεις και διατάξουμε το πολυώνυμο του 2ου μέλους ως προς x:
$x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+4 \equiv x^4-2x^3+(2\gamma+1)x^2-2\gamma x+\gamma^2$ οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων δυνάμεων του x προκύπτει το σύστημα:
$2\gamma+1=\alpha$ (1), $-2\gamma=\beta$ (2), $\gamma^2=4$ (3). Η (3) δίνει $\gamma=\pm 2$.
Για $\gamma=2$ εκ της (1) προκύπτει $\alpha=5$ και εκ της (2) προκύπτει $\beta=-4$
" $\gamma=-2$ " " $\alpha=-3$, " " $\beta=4$.
δηλ. $x^4-2x^3+5x^2-4x+4 \equiv (x^2-x+2)^2$ και $x^4-2x^3-3x^2+4x+4 \equiv (x^2-x-2)^2$.

4.4. Να προσδιοριστούν τα λ και μ έτσι ώστε το κλάσμα: $\dfrac{(\lambda-1)x^2+(\mu+1)x+1}{x^2+5x+1}$ να έχει τιμή ανεξάρτητο του x.

Λύση Έστω ότι το κλάσμα είναι ανεξάρτητο του x, δηλ για οποιαδήποτε τιμή του x το κλάσμα ισούται με ένα αριθμό k. Τότε θα έχουμε:
$\dfrac{(\lambda-1)x^2+(\mu+1)x+1}{x^2+5x+1} \equiv k$ ή $(\lambda-1)x^2+(\mu+1)x+1 \equiv kx^2+5kx+k$ οπότε, επειδή τα πολυώνυμα αυτά είναι εκ ταυτότητος ίσα, θα πρέπει να είναι:

$\lambda-1 = k$, $\mu+1 = 5k$, $1=k$ (1) εκ των εξισώσεων (1) προκύπτει αμέσως $k=1$, $\lambda = 2$ και $\mu = 4$. Για τις τιμές λοιπόν $\lambda=2$ και $\mu=4$ το αρχικό κλάσμα λαμβάνει μονίμως την τιμή $k=1$ για οποιαδήποτε τιμή του x.

4.5. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε το πολυώνυμο $f(x) \equiv 2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$ να είναι διαιρετό δια του $(x-3)(x+2)$.

Λύση. Αν διαιρείται το $f(x)$ με το γινόμενο $(x-3)(x+2)$, σύμφωνα με την ιδιότητα III των ακεραίων πολυωνύμων θα διαιρείται ακριβώς και δια $x-3$, και δια $x+2$. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα τώρα με την ιδιότητα I, ότι: το $f(3)=0$ και $f(-2)=0$ ήτοι

$$\left.\begin{aligned} f(3) &= 54+9\alpha-39+\beta=0 \quad \text{δηλ.} \quad 9\alpha+\beta=-15 \\ f(-2) &= -16+4\alpha+26+\beta=0 \quad \text{δηλ.} \quad 4\alpha+\beta=-10 \end{aligned}\right\} (1)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) ευρίσκομε $\alpha=-1$, $\beta=-6$.

4.6. Να προσδιοριστούν τα k και λ και να ευρεθούν οι ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 του πολυωνύμου: $f(x) \equiv x^3-8x^2-8\lambda x+k$ αν $\rho_1=\rho_2=-\rho_3$.

Λύση. Από τις σχέσεις μεταξύ ριζών και συντελεστών πολυωνύμου προκύπτει: $\rho_1+\rho_2+\rho_3 = 8$ (1), $\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=-8\lambda$ (2), $\rho_1\rho_2\rho_3=-k$ (3).
Η (1) λόγω της δοθείσης σχέσεως γίνεται $2\rho_2+\rho_3=8$ ή $-2\rho_3+\rho_3=8$ ή $-\rho_3=8$ ή $\rho_3=-8$. Άρα οι ρίζες θα είναι $\rho_1=\rho_2=8$, $\rho_3=-8$.
Τότε εκ της σχέσεως (2) προκύπτει για τις τιμές των ρ_1, ρ_2, ρ_3 ότι:
$8\cdot 8+8\cdot(-8)+8(-8)=-8\lambda$ δηλ. $\lambda=8$ και εκ της (3): $8\cdot 8\cdot(-8)=-k$ δηλ. $k=512$.

4.7. Ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο δια $x-2$ δίνει υπόλοιπο 12, διαιρούμενο δια $x-3$ δίνει υπόλοιπο 17. Να ευρεθεί το υπόλοιπο της διαιρέσεως $f(x)$ δια του γινομένου $(x-2)(x-3)$.

Λύση. Επειδή το $f(x)$ διαιρούμενο δια $x-2$ δίδει υπόλοιπο 12 έπεται ότι: (ιδιότ. I των ακερ. πολυωνύμων) $f(2)=12$, ομοίως $f(3)=17$. Αν τώρα το $f(x)$ διαιρεθεί με το γινόμενο $(x-2)(x-3)$ θα δώσει ένα πηλίκο $\pi(x)$

και ένα υπόλοιπο που θα είναι το πολύ πρώτου βαθμού (ο βαθμός του υπολοίπου είναι πάντοτε μικρότερος του βαθμού του διαιρέτου). έστω δε το $υ(x) = αx+β$ · τότε κατά την ταυτότητα της διαιρέσεως: $f(x) \equiv (x-2)(x-3)\,π(x) + αx+β$. (1). Αν θέσωμε διαδοχικά στην (1) $x=2$ και $x=3$ (τιμές που να μηδενίζουν τον παράγοντα $(x-2)(x-3)\,π(x)$) θα προκύψει: $f(2) \equiv 2α+β = 12$, $f(3) \equiv 3α+β = 17$ (2) Δια λύσεως του συστήματος των εξισώσεων (2) προκύπτει $α = 5$, $β = 2$ και επομένως το ζητούμενο υπόλοιπο είναι $5x+2$.

4.8. Αν ακέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται δια του $x-3$ να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $f(4x-5)$ διαιρείται δια του $x-2$.

Λύση. Εφ' όσον το $f(x)$ διαιρείται με το $x-3$ θα είναι $f(3)=0$. (1) Το υπόλοιπο της διαιρέσεως του $f(4x-5)$ διά του $x-2$ θα είναι το $f(4\cdot 2-5) = f(8-5) = f(3) = 0$ εκ της (1). Άρα το $f(4x-5)$ διαιρείται δια του $x-2$.

4.9. Για ποιες τιμές των k και $λ$ το πολυώνυμο $f(x) \equiv 3x^4 - kx^3 + 5x^2 - 9x + λ$ διαιρείται διά x^2-1;

Λύση Επειδή $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ και ότι το $f(x)$ διαιρείται διά x^2-1 σημαίνει ότι θα διαιρείται και με $x-1$ και με $x+1$. δηλ. θα είναι: $f(1)=0$ και $f(-1)=0$. Αλλά $f(1) \equiv 3\cdot 1^4 - k\cdot 1^3 + 5\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + λ = λ - k - 1$ (1) και $f(-1) \equiv 3(-1)^4 - k(-1)^3 + 5(-1)^2 - 9(-1) + λ = λ + k + 17$ (2). Εκ του συστήματος των (1) και (2) προκύπτουν τιμές για τα $k, λ$: $k = -9$ και $λ = -8$.

4.10. Αν -4 και -164 είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του πολυωνύμου $f(x)$ διά $x+1$ και διά $x-3$ αντιστοίχως, να ευρεθεί το υπόλοιπο της διαιρέσεως του $f(x)$ διά του x^2-2x-3. Αν το πολυώνυμο $f(x)$ είναι $4^{ου}$ βαθμού με ρίζες $0, 2, -2$ ποια είναι η άλλη ρίζα του.

Λύση Ο διαιρέτης x^2-2x-3 αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων και είναι: $x^2-2x-3 \equiv (x+1)(x-3)$. Επειδή ο διαιρέτης είναι $2^{ου}$ βαθμού το υπόλοιπο της διαιρέσεως του $f(x)$ δια του x^2-2x-3 θα είναι της μορφής $\alpha x+\beta$. δηλ. θα είναι: $f(x) \equiv (x+1)(x-3)\pi(x) + \alpha x+\beta$ (1) (όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαιρέσεως). Επειδή το $f(x)$ δια $x+1$ δίδει υπόλοιπο -4 και δια $x-3$ δίδει υπόλοιπο -164 θα έχωμε: $f(-1)=-4$ και $f(3)=-164$ (2). Εκ των (1) και (2) προκύπτει: $f(-1) \equiv (-1+1)(-1-3)\pi(x)+\alpha(-1)+\beta=-4$ ή $-\alpha+\beta=-4$ (4) και $f(3) \equiv (3+1)(3-3)\pi(x)+\alpha\cdot 3+\beta=-164$ ή $3\alpha+\beta=-164$ (5) λύνοντας το σύστημα των (4) και (5) έχομε $\alpha=-40$ και $\beta=-44$ δηλ το ζητούμενο υπόλοιπο είναι $-40x-44$.

Εφ' όσον τώρα το πολυώνυμο είναι $4^{ου}$ βαθμού θα είναι της μορφής: (ιδιότ. IV των ακερ. πολυων.). $f(x) \equiv \alpha_4(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$

Δίδεται ότι $\rho_1=0$, $\rho_2=2$, $\rho_3=-2$ άρα θα είναι:

$f(x) \equiv \alpha_4\, x\cdot(x-2)(x+2)(x-\rho_4)$. (6). Εκ της (6) έχομε για $x=-1$ και $x=3$ λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις σχέσεις (2):

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \equiv \alpha_4\cdot(-1)(-1-2)(-1+2)(-1-\rho_4)=-4 \text{ ή } -3\alpha_4(1+\rho_4)=-4 \\ f(3) \equiv \alpha_4\cdot 3(3-2)(3+2)(3-\rho_4)=-164 \text{ ή } 15\alpha_4(3-\rho_4)=-164 \end{array}\right\} (7)$$

λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (7) ευρίσκομε: $\alpha_4=-\frac{12}{5}$, $\rho_4=-\frac{14}{9}$ δηλ η τετάρτη ρίζα ρ_4 είναι $-\frac{14}{9}$ και $f(x) \equiv -\frac{12}{5}\cdot x\cdot(x-2)(x+2)\left(x+\frac{14}{9}\right)$.

4.11. Να προσδιορισθεί πολυώνυμο $f(x,y,z)$ ομογενές και κυκλικά συμμετρικό $2^{ου}$ βαθμού τέτοιο ώστε: $f(0,1,1)=5$ και $f(0,0,1)=6$.

Λύση. Από τις μορφές ομογενών και κυκλικά συμμετρικών πολυωνύμων επειδή το $f(x,y,z)$ είναι δευτεροβάθμιο θα είναι: $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$ όπου α και β συντελεστές που πρέπει να προσδιορισθούν. Τότε έχομε:

$f(0,1,1) \equiv \alpha(0^2+1^2+1^2)+\beta(0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0)=5$ ή $2\alpha+\beta=5$ και

$f(0,0,1) \equiv \alpha(0^2+0^2+1^2)+\beta(0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0)=6$ ή $\alpha=6$ οπότε $\beta=-7$.

και το $f(x,y,z)$ θα είναι το $6(x^2+y^2+z^2)-7(xy+yz+zx)$.

4.12. Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α') $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

β') $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

Λύση. α) Παρατηρούμε ότι για $x=y$ έχομε: $f(y,y,z)\equiv$
$\equiv y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)=0$ άρα το πολυώνυμο $f(x,y,z)$ θα διαιρείται ακριβώς με το $x-y$ και άρα (ιδιότ. IIIα σελ. 29) θα διαιρείται και με το γινόμενο $(x-y)(y-z)(z-x)$. Επειδή δε ο διαιρετέος και ο διαιρέτης είναι πολυώνυμα $3^{ου}$ βαθμού το πηλίκο θα είναι σταθερός αριθμός α. Έτσι είναι:
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\equiv\alpha(x-y)(y-z)(z-x)$. (1) Θέτοντας στην (1) τρεις αυθαίρετες τιμές $x=0$, $y=1$, $z=-1$ (που να μη μηδενίζουν τα πολυώνυμα) ευρίσκομε $\alpha=-1$ άρα $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\equiv-(x-y)(y-z)(z-x)$.

β') Παρατηρούμε ότι το $f(x,y,z)\equiv(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$ μηδενίζεται για $x=0$, $y=0$, $z=0$ άρα θα διαιρείται με xyz. Επειδή το $f(x,y,z)$ είναι ομογενές και συμμετρικό $5^{ου}$ βαθμού, ο δε διαιρέτης xyz είναι τρίτου βαθμού σημαίνει ότι (ιδιότ. IIα σελ. 29) το πηλίκο θα είναι επίσης πολυώνυμο ομογενές και συμμετρικό $2^{ου}$ βαθμού δηλ. της μορφής:
$\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$ Επομένως θα έχωμε την ταυτότητα:
$f(x,y,z)\equiv xyz\left[\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)\right]$ (1). Η (1) ισχύει για οποιαδήποτε τιμή των x,y,z. Θέτοντας $x=y=z=1$ ευρίσκομε: $\alpha+\beta=80$ (2) Θέτοντας τώρα ένα άλλο ζεύγος τιμών $x=1$, $y=1$, $z=-1$ ευρίσκομε: $3\alpha-\beta=240$ (3). Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) ευρίσκομε: $\alpha=80$ και $\beta=0$.
Άρα θα έχωμε: $f(x,y,z)\equiv 80xyz(x^2+y^2+z^2)$.

4.13. Να μετασχηματιστεί σε γινόμενο το $f(x,y)\equiv(x+y)^7-x^7-y^7$.

Λύση. Το $f(x,y)$ είναι πολυώνυμο συμμετρικό και ομογενές ως προς x και y. Επειδή $f(0,y)=f(x,0)=f(-y,y)=0$ σημαίνει ότι διαιρείται δια x, δια y και δια του $x+y$. επομένως και με το γινόμενο των $xy(x+y)$. Το πηλίκο θα είναι ως γνωστό πολυώνυμο ομογενές και συμμετρικό $4^{ου}$ βαθμού της μορφής $A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+\Gamma x^2y^2$ οπότε θα έχωμε την ταυτότητα:
$f(x,y)\equiv(x+y)^7-x^7-y^7\equiv xy(x+y)\left[A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+\Gamma\cdot x^2y^2\right]$
οπότε για 3 διάφορα ζεύγη τιμών (που να μη μηδενίζουν το $f(x,y)$) θα έχωμε:
Για $x=1$, $y=1$: $2A+2B+\Gamma=63$ (1), για $x=2$, $y=-1$: $17A-10B+4\Gamma=63$ (2), και για $x=2$, $y=1$: $17A+10B+4\Gamma=343$ (3).

Δι' αφαιρέσεως κατά μέλη των (2), (3) ήτοι: (3) − (2) $\Rightarrow$ $20B = 280$ και $B = 14$. οπότε οι (1) και (2) γίνονται: $2A + \Gamma = 35$ και $17A + 4\Gamma = 203$. ή εξ αυτών δια λύσεως ως προς A και Γ προκύπτει $A = 7$ και $\Gamma = 21$. ώστε θα έχωμε:
$f(x,y) \equiv xy(x+y)\left[7(x^4+y^4) + 14(x^3y+y^3x) + 21x^2y^2\right]$. Η εντός των αγκυλών παράσταση όμως ισούται με $7(x^2+xy+y^2)^2$ (4). δηλ. είναι το ανάπτυγμα της παραστάσεως (4) άρα $f(x,y) \equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

4.14. Να αναλυθεί το κλάσμα $\dfrac{3x-1}{x^2-5x+6}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση. Επειδή $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ θα έχωμε (Περίπτωση I):
$\dfrac{3x-1}{(x-2)(x-3)} \equiv \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{x-3}$ (1) Εκ της (1) δι' απαλοιφής παρονομαστών λαμβάνομε: $3x-1 \equiv A_1(x-3) + A_2(x-2)$ (1). Η (1) για $x = 2$[1] γίνεται: $6-1 \equiv A_1(2-3) + A_2(2-2)$ ή $-5 = A_1$. Για $x = 3$[1] ομοίως:
$9-1 \equiv A_1(3-3) + A_2(3-2)$ ή $8 = A_2$. Άρα είναι:
$\dfrac{3x-1}{x^2-5x+6} \equiv \dfrac{-5}{x+2} + \dfrac{8}{x-3}$. ([1] τιμές που μηδενίζουν τα A_2, A_1).

4.15. Να αναλυθεί το κλάσμα $\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση. Εδώ έχομε κλάσμα της περιπτώσεως II. άρα θα είναι:
$\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \dfrac{A_1}{x+2} + \dfrac{B_1}{x+3} + \dfrac{B_2}{(x+3)^2}$ (1) Εκ της (1) δι' απαλοιφής των παρονομαστών λαμβάνομε:
$x^2+4x+7 \equiv A_1(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2)$. ή εκτελώντας τις πράξεις στο 2° μέλος και διατάσσοντας ως προς τις δυνάμεις του x έχομε:
$x^2+4x+7 \equiv (A_1+B_1)x^2 + (6A_1+5B_1+B_2)x + (9A_1+6B_1+2B_2)$ Εξισώνοντας τις δυνάμεις των ομοιοβαθμίων όρων έχομε: $A_1+B_1 = 1$, $6A_1+5B_1+B_2 = 4$, $9A_1+6B_1+2B_2 = 7$ Δια λύσεως του συστήματος ευρίσκομε: $A_1 = 3$, $B_1 = -2$, $B_2 = -4$.
Άρα είναι: $\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{4}{(x+3)^2}$.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε, εννοείται, να υπολογίσουμε τα A_1, B_1, B_2, όπως και στην προηγούμενη άσκηση θέτοντας π.χ. $x = -3$, $x = -2$ και $x = -1$.

4.16. Να αναλυθεί το κλάσμα $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση. Παρατηρούμε 1) ότι το x^2-x+1 έχει μιγαδικές ρίζες δηλ. $1^2-4\cdot 1<0$ και 2) ο βαθμός του x^5+1 ο 5 δηλ. είναι μικρότερος του $2\cdot 3$, του 6. Δηλ. πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις της περιπτώσεως III. Επομένως θα έχωμε:

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2-x+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2-x+1)^3} \quad (1)$$

Εκ της (1) έχομε: $x^5+1 \equiv (A_1x+B_1)(x^2-x+1)^2+(A_2x+B_2)(x^2-x+1)+A_3x+B_3$.

Αν εκτελέσωμε τις πράξεις στο 2° μέλος και εξισώσωμε τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων θα προκύψει:

$$x^5+1 \equiv A_1x^5+(B_1-2A_1)x^4+(3A_1+A_2-2B_1)x^3+(3B_1-2A_1-A_2+B_2)x^2+$$
$$+(A_1-2B_1+A_2-B_2+A_3)x+B_1+B_2+B_3 \quad (2).$$

Εκ της (2) προκύπτει:

$\underline{A_1=1}$, $B_1-2A_1=0 \Rightarrow \underline{B_1=2}$, $3A_1+A_2-2B_1=0 \Rightarrow \underline{A_2=1}$,

$3B_1-2A_1-A_2+B_2=0 \Rightarrow \underline{B_2=-3}$, $A_1-2B_1+A_2-B_2+A_3=0 \Rightarrow \underline{A_3=-1}$

και $B_1+B_2+B_3=1 \Rightarrow \underline{B_3=2}$. Άρα τελικά θα πάρωμε την ανάλυση:

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{x+2}{x^2-x+1} + \frac{x-3}{(x^2-x+1)^2} - \frac{x-2}{(x^2-x+1)^3}.$$

4.17. Να αναλυθεί το κλάσμα $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση. Εδώ έχομε συνδυασμό των περιπτώσεων III και II. γιατί η x^2+1 έχει μιγαδικές ρίζες ενώ η $(x-1)^2$ έχει μία ρίζα διπλή την $x=1$. Άρα θα είναι:

$$\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma}{x-1} + \frac{\Delta}{(x-1)^2} \quad (1).$$

Εκ της (1) μετά την απαλοιφή παρονομαστών προκύπτει:

$x^2-x+1 \equiv (Ax+B)(x-1)^2+\Gamma(x^2+1)(x-1)+\Delta(x^2+1)$ ή μετά την αναγωγή ομοίων όρων: $x^2-x+1 \equiv (A+\Gamma)x^3+(B+\Delta-\Gamma-2A)x^2+(\Gamma+A-2B)x+B+\Delta-\Gamma$

και εξ αυτής προκύπτει: $A+\Gamma=0$, $B+\Delta-\Gamma-2A=1$, $\Gamma+A-2B=-1$, $B+\Delta-\Gamma=1$. (2)

Δια λύσεως του συστήματος (2) προκύπτει: $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $\Gamma=0$, $\Delta=\frac{1}{2}$

Επομένως θα είναι:

$$\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ

Ορισμοί

Η πλήρης εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού είναι της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (1) \qquad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

Αυτή έχει δύο ρίζες που -όπως φαίνεται στη θεωρία πολυωνύμων σελ 35 - είναι οι αριθμοί:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\ ,\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (2)$$

Την υπόρριζη ποσότητα $\beta^2-4\alpha\gamma=\Delta$ τη λέμε διακρίνουσα γιατί αυτή καθορίζει το είδος των ριζών. Έτσι

1. Αν $\Delta>0$ η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις x_1, x_2 που δίνονται απ τη (2)
2. Αν $\Delta=0$ η (1) έχει δύο ίσες ρίζες τις
$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{0}}{2\alpha} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{0}}{2\alpha} \quad \text{δηλ } x_1=x_2=\frac{-\beta}{2\alpha}$$
3. Αν $\Delta<0$ τότε η ρίζα αρνητικού αριθμού δίνει φανταστικό αριθμό, οπότε οι ρίζες θα είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί:
$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{-\Delta}\,i}{2\alpha},\ x_2=\frac{-\beta-\sqrt{-\Delta}\,i}{2\alpha}\ ,\quad \text{όπου } -\Delta>0$$
4. Αν $\Delta\geq 0$ οι ρίζες είναι απλά πραγματικές, χωρίς να ενδιαφέρει αν είναι άνισες ή ίσες.
5. Αν $\Delta=k^2$ (τέλειο τετράγωνο), οι ρίζες είναι ρητές.

Παρατηρήσεις:

1) Αν οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, τότε $-\alpha\gamma > 0$ οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ οπότε η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

2) Αν ο συντελεστής του x ο β είναι της μορφής $2\beta'$ δηλ $\beta = 2\beta'$ (π.χ. $\beta = 2\sqrt{3}$) τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\beta')^2 - 4\alpha\gamma = 4\beta'^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) = 4\Delta'$ όπου

$$\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma \qquad (3)$$

Στην περίπτωση αυτή οι ρίζες x_1, x_2 της σχέσης (2) γράφονται (για $\beta = 2\beta'$)

$$x_{1,2} = \frac{-2\beta' \pm \sqrt{4\Delta'}}{2\alpha} = \frac{-2\beta' \pm 2\sqrt{\Delta'}}{2\alpha} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\Delta'}}{\alpha} \quad (4)$$

Ο τύπος (4) λέγεται τύπος του μισού και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ριζών όταν $\beta = 2\beta'$

3) Επειδή Δ και Δ' είναι ομόσημοι, ότι συμπεράσματα προκύπτουν για το Δ, τα ίδια θα ισχύουν και για το $\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma$

Παραδείγματα

1. Για την εξίσωση $3x^2 + 3x - 6 = 0$ είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 9 + 72 = 81$ οπότε οι ρίζες της είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+9}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-3-9}{6} = -2 \end{cases}$$

2. Για την εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ είναι $\beta = 2 \cdot (-2)$ δηλ $\beta' = -2$ άρα $\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma = (-2)^2 - 1 \cdot 3 = 1$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του μισού (4) έχουμε:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{1} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

3. Για την εξίσωση $x^2-2x+10=0$ είναι $\beta = 2(-1)$ δηλ. $\beta' = -1$ άρα $\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma = (-1)^2 - 1\cdot 10 = -9 < 0$ Άρα

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-9}}{1} = \begin{cases} x_1 = 1+3i \\ x_2 = 1-3i \end{cases}$$ (συζυγείς μιγαδικές)

Άθροισμα και γινόμενο των ριζών

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha \neq 0$ και $\Delta \geq 0$.
Όπως είδαμε οι ρίζες της είναι $x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Τότε θα έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$ και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta+\sqrt{\Delta})\cdot(-\beta-\sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} =$$

$$\frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Η διακρίνουσα Δ, το γινόμενο P και το άθροισμα S των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μας δίνουν τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε όχι μόνο το είδος των ριζών (πραγματικές, μιγαδικές κτλ) αλλά και το πρόσημό τους.
Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα για το πρόσημό τους.

$P<0 \Rightarrow$ 2 ρίζες ετερόσημες. Αν $\begin{cases} S>0 \Rightarrow \text{μεγαλ. απολύτως η θετ.} \\ S=0 \Rightarrow \text{ρίζες αντίθετες} \\ S<0 \Rightarrow \text{μεγαλ. απολύτως η αρν.} \end{cases}$

$P=0 \Rightarrow$ η μία 0 η άλλη $-\frac{\beta}{\alpha}$. Αν $\begin{cases} S>0 \ \text{η άλλη θετική} \\ S=0 \ \text{και οι δύο μηδέν} \\ S<0 \ \text{η άλλη αρνητική} \end{cases}$

$P>0$ <u>και</u> $\Delta \geq 0$ ρίζες πραγμ. Αν $\begin{cases} S>0 \ \text{θετικές και οι δύο} \\ S=0 \ \text{μηδέν και οι δύο} \\ S<0 \ \text{αρνητικές και οι δύο} \end{cases}$

Πρέπει να τονισεί ότι οι περιπτώσεις $P>0$, $\Delta \geq 0$ πάνε μαζί πάντα.

Τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού

Το πολυώνυμο $f(x) = ax^2+\beta x+\gamma$ με $a \neq 0$ λέγεται τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού και είναι φυσικά συνάρτηση του x. Αν εξισώσουμε το $f(x)$ με μηδέν θα πάρουμε την αντίστοιχη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $ax^2+\beta x+\gamma=0$. Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης αυτής λέγονται και ρίζες του τριωνύμου. (είναι οι τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται το πολυώνυμο $f(x)$, δηλ. $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$). Οι ρίζες του τριωνύμου προφανώς υπάρχουν όταν $\Delta \geq 0$.

Το να μελετήσουμε ένα τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, σημαίνει να εξετάσουμε για ποιές τιμές του x γίνεται θετικό, για ποιές αρνητικό και για ποιές μηδέν. (Προφανώς για τις τιμές του x που γίνεται μηδέν, λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $f(x)=0$ ή $ax^2+\beta x+\gamma=0$.

Τα βασικά στοιχεία που χρειαζόμαστε για τη μελέτη αυτή είναι η διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4a\gamma$ και ο συντελεστής του x^2 ο a. Όμως δίνουμε πρώτα στο τριώνυμο διαφορετική μορφή, ανάλογα με την τιμή της Δ. Έτσι για τη μελέτη έχουμε τις παρακάτω τρείς μορφές:

1. Όταν $\Delta > 0$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις x_1, x_2 που δίνονται απ τις γνωστές σχέσεις (2) και το τριώνυμο $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ μετασχηματίζεται σε γινόμενο παραγόντων δηλ.

$$f(x)=ax^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Πράγματι, αν κάνουμε πράξεις, το δεύτερο μέλος γράφεται: $a(x-x_1)(x-x_2) = a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right) =$
$= ax^2-a\left(-\frac{\beta}{a}\right)x+a\,\frac{\gamma}{a} = ax^2+\beta x+\gamma$ $\left(S=-\frac{\beta}{a}, P=\frac{\gamma}{a}\right)$

Αν υποθέσουμε ότι οι ρίζες x_1, x_2 έχουν την διάταξη $x_1 < x_2$ τότε εξετάζουμε τι γίνεται το τριώνυμο (θετικό ή αρνητικό) όταν το x διατρέχει όλες τις τιμές. Έτσι:

(i) για $x < x_1 < x_2$. Είναι $x - x_1 < 0$, $x - x_2 < 0$ οπότε το γινόμενο $(x-x_1)(x-x_2) > 0$. Επομένως επειδή $ax^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$, αν $a>0$ τότε και το $f(x)$ θα είναι θετικό αν $a<0$ και το $f(x)$ θα είναι αρνητικό, δηλ το $f(x)$ είναι ομόσημο του a.

(ii) για $x_1 < x < x_2$. Είναι $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$, γινόμενο $(x-x_1)(x-x_2) < 0$ οπότε το $f(x)$ είναι ετερόσημο του a.

(iii) για $x_1 < x_2 < x$. Είναι $x - x_1 > 0$, $x - x_2 > 0$, γινόμενο $(x-x_1)(x-x_2) > 0$ δηλ το $f(x)$ είναι πάλι ομόσημο του a.

Συμπέρασμα.

Το τριώνυμο $f(x) = ax^2+\beta x+\gamma$, όταν $\Delta > 0$ γίνεται ομόσημο του a για τιμές του x εκτός των ριζών και ετερόσημο του a για τιμές του x μεταξύ των ριζών.

Παράδειγμα

Να μελετηθεί το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$

Είναι $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 1 > 0$.

Βρίσκουμε τις ρίζες x_1, x_2 που είναι:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Επειδή $a = 1 > 0$, το τριώνυμο x^2-5x+6 γίνεται ομόσημο του a, δηλ θετικό για τιμές του x εκτός των ριζών δηλ για $x<2$ ή $x>3$ και αρνητικό για $2<x<3$.

2. Όταν $\Delta = 0$

Στην περίπτωση αυτή όπως τονίστηκε στην αρχή έχουμε 2 ρίζες ίσες τις $x_1 = x_2 = -\beta/\alpha$. Επομένως η σχέση: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ γίνεται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Ο όρος $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ γίνεται πάντα θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός της τιμής $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, για την οποία μηδενίζεται. Επομένως το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται πάντα ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$

Παράδειγμα

Να μελετηθεί το τριώνυμο $x^2 - 8x + 16$

Είναι $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

Άρα έχουμε μία διπλή ρίζα την $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$. Επίσης είναι $\alpha = 1 > 0$. Επομένως το τριώνυμο γίνεται πάντα θετικό για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$ εκτός της τιμής $x = 4$, που μηδενίζεται.

3. Όταν $\Delta < 0$

Εδώ μετασχηματίζουμε το τριώνυμο $f(x)$ ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left(x^2 + 2x\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) =$$

$$= \alpha\left(x^2 + 2x\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) =$$

$$= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]$$ όπου $4\alpha\gamma - \beta^2 = -\Delta > 0$.

Η αγκύλη είναι πάντα θετική, διότι ο όρος $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

σαν τετράγωνο μιας παράστασης είναι πάντα ≥ 0 $\forall x \in \mathbb{R}$, ενώ ο όρος $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$ είναι πάντα >0. Επομένως αν $\alpha > 0$ και το $f(x)$ γίνεται >0, ενώ αν $\alpha<0$ και το $f(x)$ γίνεται <0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή το $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Να μελετηθεί το τριώνυμο $f(x) = -x^2 - x - 1$.
Είναι $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$
Επίσης είναι $\alpha = -1 < 0$, άρα το τριώνυμο $-x^2-x-1$ γίνεται πάντα αρνητικό για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Μια ανίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι η εύρεση όλων των x που επαληθεύουν τη σχέση
$$\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0 \quad ή \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma < 0.$$
Με βάση τη μελέτη του τριωνύμου που κάναμε προηγουμένως, η λύση των παραπάνω ανισοτήτων ανάγεται στην εύρεση του προσήμου του τριωνύμου.

Παραδείγματα.

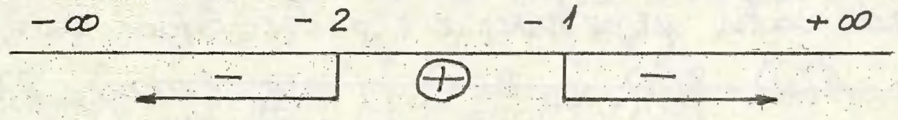
1. Να λυθεί η ανισότητα $-x^2 - 3x - 2 > 0$.
Εδώ ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο $-x^2-3x-2$ γίνεται θετικό. Στη μελέτη του τριωνύμου, όπως είδαμε παραπάνω, τα στοιχεία που χρειαζόμαστε είναι τα Δ και α.
Είναι $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-2) = 9-8=1>0$ και $\alpha=-1<0$. Εφ όσον $\Delta=1>0$ το τριώνυμο θα

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες και βρίσκουμε. Είναι $-x^2-3x-2=0$ άρα

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\begin{cases} x_1=\dfrac{3+1}{-2}=-2 \\ x_2=\dfrac{3-1}{-2}=-1. \end{cases}$$

Όπως ξέρουμε, όταν $\Delta>0$, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για τιμές του x εκτός των ριζών και ετερόσημο του α για τιμές του x μεταξύ των ριζών.
Επειδή $\alpha=-1<0$, το τριώνυμο γίνεται αρνητικό για τιμές του x εκτός των ριζών και θετικό για τιμές του x μεταξύ των ριζών. Εμείς θέλουμε να βρούμε όλα τα $x\in\mathbb{R}$ που το καθιστούν θετικό $(-x^2-3x-2>0)$, άρα αυτά θα βρίσκονται μεταξύ των ριζών.
Αν γράψουμε λοιπόν σ' έναν άξονα τις ρίζες -2, -1 κατά τάξη μεγέθους θα έχουμε τις εξής μεταβολές:

$\alpha<0$



Επομένως το σύνολο λύσεων είναι το ανοιχτό διάστημα $(-2,-1)$ δηλ. $x\in(-2,-1)$.

2. Να λυθεί η ανισότητα $9x^2-12x+4<0$.
Είναι $\Delta'=\beta'^2-\alpha\gamma$ $(\beta'=-6)$ $=(-6)^2-9\cdot4=36-36=0$
Επομένως το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του $\alpha=9>0$ δηλ. γίνεται θετικό για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, εκτός της διπλής ρίζας $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-12}{2\cdot9}=\dfrac{2}{3}$ που μηδενίζεται.
Εμείς όμως θέλουμε να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες το $9x^2-12x+4$ γίνεται αρνητικό. Δεν υπάρχουν τέτοιες. Συνεπώς η ανίσωση $9x^2-12x+4<0$ δεν έχει λύση.

3. Να λυθεί η ανισότητα $x^2+x+4>0$

Εδώ έχουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot4=1-16=-15<0$

Επίσης $\alpha=1>0$. Άρα το τριώνυμο x^2+x+4 γίνεται πάντα ομόσημο του α για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλ θετικό. Εμείς θέλουμε να βρούμε εκείνα τα x που το καθιστούν θετικό, συνεπώς είναι όλο το διάστημα των πραγματικών αριθμών, δηλ η παραπάνω ανισότητα αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν τώρα έχουμε να λύσουμε ανισώσεις της μορφής

$$A(x)\cdot B(x)\cdot\Gamma(x)\cdots P(x)\gtrless 0$$

όπου $A(x)$, $B(x)$, $\cdots$, $P(x)$ είναι πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού ως προς x, βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και κατόπιν σε ένα πίνακα προσδιορίζουμε το πρόσημο του γινομένου, αφού βάλουμε κατά τάξη μεγέθους τις ρίζες όλων των παραγόντων $A(x)$, $B(x)$, $\cdots$, $P(x)$ (όσοι έχουν), όπως φαίνεται στο παρακάτω

Παράδειγμα

Να λυθεί η ανίσωση:

$$(2x-1)(5-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)(x^2-16)<0$$

Βρίσκουμε τα διαστήματα που κάθε όρος γίνεται θετικός ή αρνητικός. Προς τούτο λύνουμε τις ανισότητες:

1. $A(x)=2x-1>0 \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

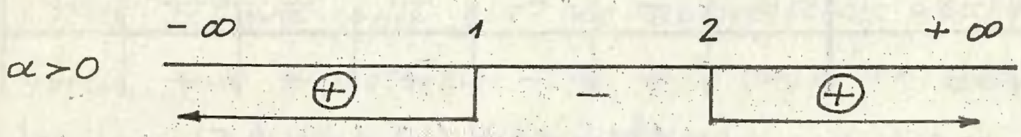
   δηλ $A(x)>0$ για $x>\frac{1}{2}$

2. $B(x)=5-x>0 \Leftrightarrow 5>x$ δηλ $B(x)>0$ για $x<5$.

3. $\Gamma(x)=x^2-3x+2>0$.

   Είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$. Βρίσκουμε τις ρίζες x_1, x_2. Είναι $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Επίσης $\alpha = 1 > 0$. Άρα το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ γίνεται θετικό (ομόσημο του α) για τιμές του x εκτός των ριζών και ετερόσημο του α (αρνητικό) για τιμές του x μεταξύ των ριζών. Βάζουμε τις ρίζες σ' ένα άξονα και έχουμε:



Δηλ. $x^2 - 3x + 2 > 0$ για $x < 1$ ή $x > 2$

4. $\Delta(x) = x^2 + x + 1 > 0$.

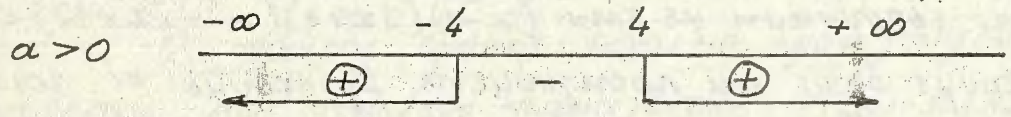
Είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Επίσης $\alpha = 1 > 0$

Άρα $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. $E(x) = x^2 - 16 > 0$ $\quad (x^2 + 0 \cdot x - 16 > 0$ δηλ. $\beta = 0)$

Είναι $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 64 > 0$

Οι ρίζες είναι: $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 4$. Άρα



Δηλ $E(x) = x^2 - 16 > 0$ για $x < -4$ ή $x > 4$.

Γράφουμε τώρα τις χαρακτηριστικές τιμές του x που βρήκαμε σ' ένα άξονα, και σχηματίζουμε τα πρόσημα από κάθε ένα παράγοντα $A(x)$, $B(x)$, ..., $E(x)$ χωριστά. Βρίσκουμε δηλαδή τα διαστήματα που κάθε όρος γίνεται θετικός. Στα υπόλοιπα γίνεται αρνητικός.

Στο τέλος βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου για κάθε επί μέρους διάστημα. Επειδή ζητάμε τις τιμές του x που η αρχική ανισότητα γίνεται αρνητική, η λύση δίνεται από εκείνα τα διαστήματα που το γινόμενο είναι αρνητικό, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$(-\infty,-4)$	$(-4,1/2)$	$(1/2,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(4,5)$	$(5,+\infty)$
$A(x) = 2x-1$	−	−	+	+	+	+	+
$B(x) = 5-x$	+	+	+	+	+	+	−
$\Gamma(x) = x^2-3x+2$	+	+	+	−	+	+	+
$\Delta(x) = x^2+x+1$	+	+	+	+	+	+	+
$E(x) = x^2-16$	+	−	−	−	−	+	+
Γινόμενο	−	+	−	+	−	+	−

Άρα $x \in (-\infty,-4) \cup (1/2,1) \cup (2,4) \cup (5,+\infty)$

Παρατήρηση

Επειδή οι ανισότητες της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0$ είναι ισοδύναμες με την $A(x)\cdot B(x) \gtrless 0$, το σύνολο λύσεων της κλασματικής ανίσωσης είναι ίδιο με το σύνολο λύσεων της ανίσωσης γινομένου.

Παράδειγμα: Να λυθεί η $\frac{(x^2-1)(3x+1)}{x^2-7x+12} < 0$

Αυτή είναι ισοδύναμη με την $(x^2-1)(3x+1)(x^2-7x+12)<0$. Αν εργαστούμε όπως και προηγούμενα, βρίσκουμε σε ποιά διαστήματα καθένας παράγοντας γίνεται π.χ. θετικός. Έτσι προκύπτει $A(x) = x^2-1 > 0$ για $x<-1$ ή $x>1$, $B(x) = 3x+1 > 0$ για $x > -1/3$ και $\Gamma(x) = x^2-7x+12$ για $x<3$ ή $x>4$. Επομένως

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,-1/3)$	$(-1/3,1)$	$(1,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
$A(x) = x^2-1$	+	−	−	+	+	+
$B(x) = 3x+1$	−	−	+	+	+	+
$\Gamma(x) = x^2-7x+12$	+	+	+	+	−	+
Γινόμενο	−	+	−	+	−	+

Άρα $x \in (-\infty,-1) \cup (-1/3, 1) \cup (3,4)$

Συναλήθευση ανισοτήτων

Όταν έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 2 ή περισσοτέρων ανισοτήτων δηλ. να δούμε πού συναληθεύουν οι ανισότητες αυτές, βρίσκουμε για κάθε μία χωριστά το διάστημα (ή τα διαστήματα) που αληθεύει, και στο τέλος παίρνουμε σ' ένα άξονα όλες τις χαρακτηριστικές τιμές και τις λύσεις των ανισοτήτων και βλέπουμε αν υπάρχει σ' όλες κοινό διάστημα συναληθείας.

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα των ανισοτήτων:

$$\frac{x-1}{x-3} > 0 \quad (1)$$

$$x^2-4 > 0 \quad (2)$$

$$x^2-2x-15 < 0 \quad (3)$$

Λύση της 1. Αυτή είναι ισοδύναμη με την: $(x-1)(x-3)>0$. Τέτοιες ανισότητες που είναι γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων τις λύνουμε με 2 τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι ο προηγούμενος που αναφέρεται στο γινόμενο παραγόντων $A(x)\cdot B(x)\cdots \gtrless 0$ δηλ. βρίσκουμε πού οι παράγοντες $A(x)=x-1$ και $B(x)=x-3$ γίνονται π.χ. θετικοί. Είναι $x-1>0$ για $x>1$ και $x-3>0$ για $x>3$ Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$A(x)=x-1$	$-$	$+$	$+$
$B(x)=x-3$	$-$	$-$	$+$
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$

Άρα $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

Ο δεύτερος τρόπος είναι ο εξής.

Η $(x-1)(x-3)>0$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων με ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_1=1$, $x_2=3$.

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε

$(x-1)(x-3)>0 \iff x^2-4x+3>0$ με $\alpha=1$ και ρίζες τις $x_1=1$, $x_2=3$. Αν τη δούμε επομένως σαν ανισότητα $2^{ου}$ βαθμού θα έχουμε:

$\alpha=1>0$

$-\infty$	1		3	$+\infty$
$\oplus$		$-$		$\oplus$

δηλ. $(x-1)(x-3)>0$ ή $x^2-4x+3>0$ για $x<1$ ή $x>3$.

<u>Λύση της 2.</u> Αυτή πάλι μπορεί εύκολα να παραγοντοποιηθεί σαν διαφορά τετραγώνων και να λυθεί όπως και η προηγούμενη με το β' τρόπο. δηλ.

$x^2-4>0 \iff (x+2)(x-2)>0$ με ρίζες τις $x_1=-2$, $x_2=2$ και συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου $\alpha=1>0$ Άρα θα έχουμε:

$\alpha=1>0$

$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$\oplus$		$-$		$\oplus$

δηλ. $x^2-4>0$ για $x<-2$ ή $x>2$

<u>Λύση της 3.</u> Η τρίτη ανισότητα $x^2-2x-15<0$ έχει:
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64>0$ και ρίζες

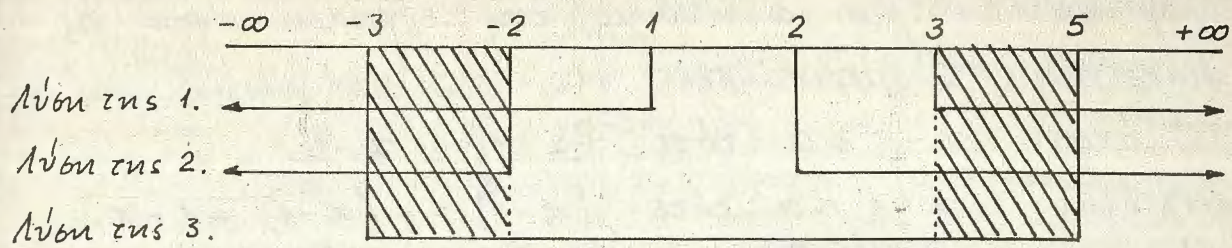
$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}= \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{cases}$$ και $\alpha=1>0$. Άρα

$\alpha=1>0$

$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$+$		$\ominus$		$+$

δηλ. $x^2-2x-15<0$ για $-3<x<5$.

Σχηματίζουμε τώρα σ' έναν άξονα κατά τάξη μεγέθους όλους τους αριθμούς (ρίζες) των ανισοτήτων 1. 2. και 3. που βρήκαμε με τις λύσεις αυτών και τελικά παίρνουμε το κοινό διάστημα συναληθεύσεως και των τριών ταυτόχρονα.



Άρα λύση του συστήματος $x \in (-3,-2) \cup (3,5)$.

Ασκήσεις

5.1. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$$

Λύση. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $(7-x)(7+x)$ πολ/με κάθε όρο με $(7-x)(7+x) \neq 0$ δηλ $x \neq \pm 7$ και έχουμε (απαλοιφή παρονομαστών):

$(7+x)(2x+1) + (7-x)(4x+1) = 1 \cdot 45 + (7-x)(7+x) \cdot 1 \Leftrightarrow$

μετά τις πράξεις $x^2 - 42x + 80 = 0$. Απ τον τύπο του μισού έχουμε: $(\beta = 2 \cdot (-21)$ δηλ $\beta' = -21)$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\Delta'}}{\alpha} \quad \text{όπου } \Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma \quad \text{ή}$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 1 \cdot 80}}{1} = \begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

που είναι δεκτές και οι δύο επειδή $x_{1,2} \neq \pm 7$

5.2. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 2x + 1 = |x-1|.$$

Λύση. Όπως είναι γνωστό, απόλυτη τιμή αριθμού x (και συμβολίζεται με $|x|$) είναι ένας αριθμός θετικός ή μηδέν με την ιδιότητα: $|x| = \begin{cases} x & \text{όταν } x \geq 0 \\ -x & \text{"} \quad x < 0 \end{cases}$

Επομένως εδώ για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θα διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(i) όταν $x-1 \geq 0$ τότε $|x-1| = x-1$.

(ii) όταν $x-1 < 0$ τότε $|x-1| = -(x-1) = 1-x$.

Άρα η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$x^2-2x+1 = x-1 \quad \text{για } x-1 \geq 0 \text{ δηλ } x \geq 1 \quad (1)$$

$$\text{ή } x^2-2x+1 = 1-x \quad \text{"} \quad x-1 < 0 \text{ δηλ } x < 1 \quad (2)$$

Θα λύσουμε δηλαδή κάθε μία απ τις (1) και (2) με τους αντίστοιχους περιορισμούς των.

<u>Λύση της 1.</u> Αυτή γράφεται: $x^2-3x+2=0$ και έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ που είναι και οι δύο δεκτές γιατί πληρούν τον περιορισμό $x_{1,2} \geq 1$

<u>Λύση της 2.</u> Αυτή γράφεται: $x^2-x=0$ ή $x(x-1)=0$ με ρίζες τις $x_3=0$, $x_4=1$. Απ' τις ρίζες αυτές είναι δεκτή μόνο η $x_3=0$ γιατί μόνο αυτή πληρεί τη συνθήκη $x_3 < 1$.

Άρα οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0.$$

5.3. Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι ώστε η εξίσωση

$$\lambda x^2 + (\lambda-3)x + \lambda - 1 = 0 \quad \text{να έχει}$$

(i) δύο ρίζες ετερόσημες (ii) δύο ρίζες θετικές.

Λύση. (i). Για να έχει 2 ρίζες ετερόσημες πρέπει να είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-1}{\lambda} < 0$ ή $\lambda(\lambda-1) < 0$

Η τελευταία ανισότητα έχει ρίζες $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ και συντελεστή του λ^2 το 1. Άρα

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

δηλ $\lambda \in (0,1)$

(ιι). Για να έχει 2 ρίζες θετικές πρέπει (σύμφωνα με τον πίνακα του προσήμου των ριζών) να ισχύουν:

1. $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} > 0$

2. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda-3)^2 - 4\cdot\lambda\cdot(\lambda-1) \geqslant 0$

3. $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\lambda-3}{\lambda} > 0$

έχουμε δηλ. σύστημα τριών ανισοτήτων ως προς λ και το λύνουμε κανονικά, όπως αναφέρθηκε στη θεωρία.

<u>Λύση της 1.</u>

$\frac{\lambda - 1}{\lambda} > 0 \iff \lambda(\lambda-1) > 0$ που αληθεύει κατά τα γνωστά για $\lambda < 0$ ή $\lambda > 1$.

<u>Λύση της 2.</u>

$(\lambda-3)^2 - 4\lambda(\lambda-1) \geqslant 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 4\lambda \geqslant 0 \iff$
$-3\lambda^2 - 2\lambda + 9 \geqslant 0$. Είναι $\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma$ $(\beta' = -1)$ $= 1 + 27 = 28 > 0$

άρα $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{28}}{-3} = \begin{cases} \lambda_1 = 1{,}43 \\ \lambda_2 = 2{,}10 \end{cases}$ με $\alpha = -3 < 0$

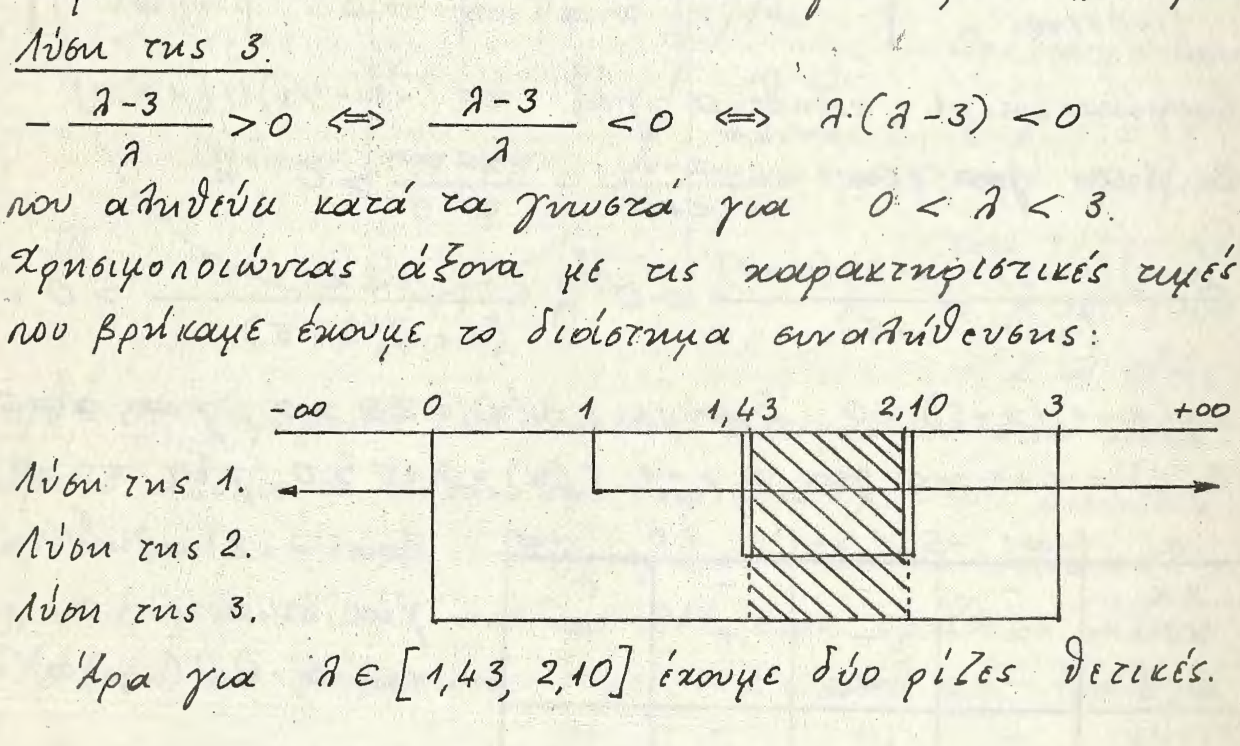
Επομένως η $-3\lambda^2 - 2\lambda + 9 \geqslant 0$ αληθεύει για $1{,}43 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}10$

<u>Λύση της 3.</u>

$-\frac{\lambda-3}{\lambda} > 0 \iff \frac{\lambda-3}{\lambda} < 0 \iff \lambda\cdot(\lambda-3) < 0$

που αληθεύει κατά τα γνωστά για $0 < \lambda < 3$.

Χρησιμοποιώντας άξονα με τις χαρακτηριστικές τιμές που βρήκαμε έχουμε το διάστημα συναλήθευσης:



Άρα για $\lambda \in [1{,}43,\ 2{,}10]$ έχουμε δύο ρίζες θετικές.

5.4. Να λυθούν οι ανισότητες:

1. $\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{2}{3x+1}$ 2. $\dfrac{x-1}{x+1} > \dfrac{x-2}{x+5}$

Λύση. 1. Αυτή γράφεται

$\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{3x+1} > 0$. Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα:

$$\frac{1\cdot(3x+1)-2(x-1)}{(x-1)\cdot(3x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1-2x+}{(x-1)(3x+1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(3x+1)} > 0 \Longleftrightarrow (x+3)(x-1)(3x+1) > 0$$

Είναι $A(x) = x+3 > 0$ για $x > -3$

$B(x) = x-1 > 0$ " $x > 1$

$\Gamma(x) = 3x+1 > 0$ " $x > -1/3$. Άρα:

x	$-\infty$	-3	$-1/3$	1 $+\infty$
$A(x) = x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$B(x) = x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\Gamma(x) = 3x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Γινόμενο	$-$	$+$	$-$	$+$

Επομένως η 1. αληθεύει για $x \in (-3, -1/3) \cup (1, +\infty)$

2. Αυτή γράφεται: $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x+5} > 0$ ή

$$\frac{(x-1)(x+5)-(x-2)(x+1)}{(x+1)(x+5)} > 0 \text{ ή } \frac{2x}{(x+1)(x+5)} > 0 \text{ ή}$$

$2x(x+1)(x+5) > 0$. Έχουμε: $A(x) = 2x > 0$ για $x > 0$

$B(x) = x+1 > 0$ για $x > -1$, $\Gamma(x) = x+5 > 0$ για $x > -5$.

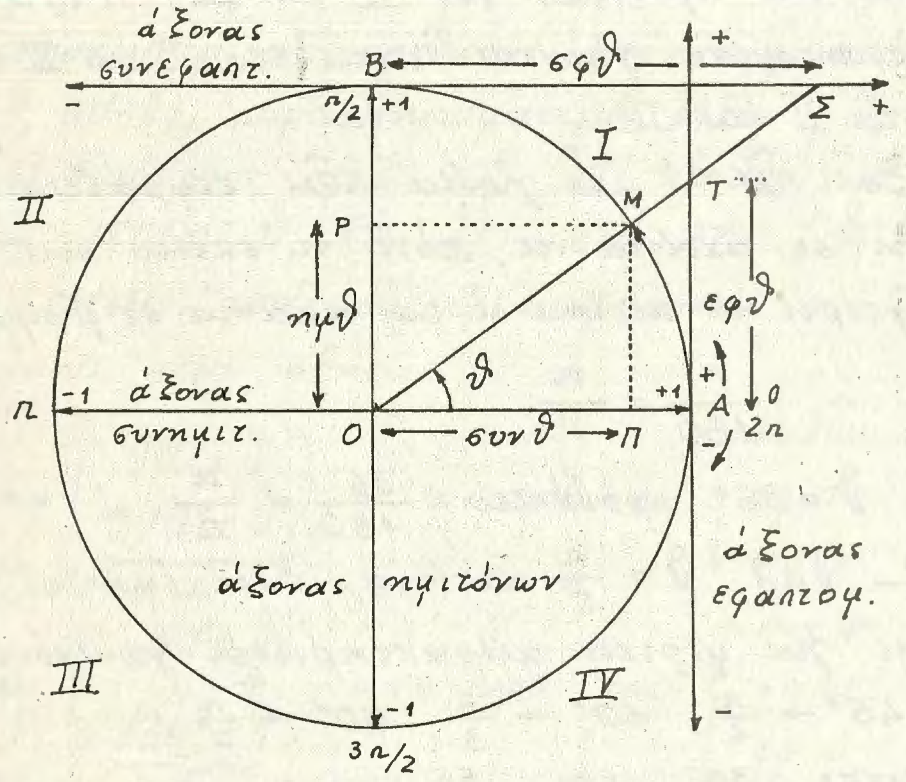
x	$-\infty$	-5	-1	0 $+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
Γινόμ.	$-$	$+$	$-$	$+$

Άρα η 2. αληθεύει για τιμές του x: $x \in (-5, -1) \cup (0, +\infty)$.

6. ΑΠΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμοί

Τριγωνομετρικός είναι ένας κύκλος που έχει ακτίνα ίση με τη μονάδα στον οποίο έχουμε ορίσει ένα σημείο Α αρχής μέτρησης των τόξων καθώς και την θετική και αρνητική φορά διαγραφής των. Έστω σημείο Μ



του κύκλου. και ϑ η γωνία που σχηματίζει ο θετικός ημιάξονας ΟΑ με την τελική ακτίνα ΟΜ. Ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου $\widehat{AM}$ ή $k\cdot 360^\circ + \widehat{AM}$, $k \in \mathbb{Z}$ ως εξής:

$\eta\mu\vartheta = OP$ (προβολή της τελικής ακτίνας ΟΜ στον κατακόρυφο άξονα ή άξονα των ημιτόνων). Όπως φαίνεται απ το σχήμα είναι $-1 \leq \eta\mu\vartheta \leq 1$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu\vartheta = O\Pi$ (προβολή της τελικής ακτίνας ΟΜ στον οριζόντιο άξονα ή άξονα των συνημιτόνων) με $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\vartheta \leq 1$. Ανάλογα έχουμε $εφθ = ΑΤ$ (προέκταση της τελικής ακτίνας ΟΜ μέχρι να τμήσει τον άξονα των εφαπτομένων. Η εφθ μεταβάλλεται από $-\infty$ μέχρι $+\infty$, παίρνει δηλ. κάθε πραγματική τιμή. Τέλος $σφθ = ΒΣ$ (προέκταση πάλι της τελικής ακτίνας ΟΜ μέχρι να τμήσει τον άξονα των συνεφαπτομένων.

Απ τους ορισμούς προκύπτουν και οι μεταβολές των τριγωνομετρικών αριθμών. Έτσι έχουμε:
Το ημθ γίνεται θετικό στο Ι και ΙΙ τεταρτημόριο, ενώ αρνητικό στο ΙΙΙ και ΙV. Το συνθ γίνεται θετικό στο Ι και ΙV τεταρτ. ενώ αρνητικό στο ΙΙ και ΙΙΙ. Η εφαπτομένη και συνεφαπτομένη γίνονται θετικές στο Ι και ΙΙΙ και αρνητικές στο ΙΙ και ΙV.

Αν ένα τόξο $\overset{\frown}{ΑΜ}$ ή μια γωνία $Α\hat{Ο}Μ$ εκφράζεται σε μοίρες $μ^\circ$ ή σε ακτίνια $α$, τότε η σχέση που μετατρέπει τις μοίρες σε ακτίνια ή τα ακτίνια σε μοίρες είναι

$$\frac{μ}{180} = \frac{α}{π}$$

Έτσι π.χ αν $θ = 36^\circ$ προκύπτει $\frac{36}{180} = \frac{α}{π}$ ή $α = \frac{36π}{180} = \frac{π}{5}$ δηλ $θ = \frac{π}{5}$ ακτίνια. Έτσι έχουμε τις αντιστοιχίες για μερικές χαρακτηριστές γωνίες

$$30^\circ \to \frac{π}{6},\ 45^\circ \to \frac{π}{4},\ 60^\circ \to \frac{π}{3},\ 90^\circ \to \frac{π}{2},$$

$$120^\circ \to \frac{2π}{3},\ 135^\circ \to \frac{3π}{4},\ 150^\circ \to \frac{5π}{6},\ 180^\circ \to π$$

$$210^\circ \to \frac{7π}{6},\ 225^\circ \to \frac{5π}{4},\ 240^\circ \to \frac{4π}{3},\ 270^\circ \to \frac{3π}{2}$$

$$300^\circ \to \frac{5π}{3},\ 315^\circ \to \frac{7π}{4},\ 330^\circ \to \frac{11π}{6},\ 360^\circ \to 2π$$

Επειδή οι διάφοροι υπολογισμοί τόξων είναι ευκολότεροι με ακτίνια, γι αυτό οι γωνίες εκφράζονται συνήθως σε ακτίνια.

Επειδή η τελική ακτίνα ενός τόξου ϑ $(0 \leq \vartheta < 2\pi)$ που γράφεται κατά τη δεξιά φορά απ την αρχή των τόξων A, είναι η ίδια με την τελική ακτίνα ενός τόξου που γράφει μία, δύο, κ.τ.λ. κ περιφέρειες και το τόξο αυτό ϑ (1 περιφέρεια αντιστοιχεί σε 2π ακτίνια) γι' αυτό:

$$\eta\mu(2\kappa\pi+\vartheta) = \eta\mu\vartheta$$
$$\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi+\vartheta) = \sigma\upsilon\nu\vartheta$$
$$\varepsilon\varphi(2\kappa\pi+\vartheta) = \varepsilon\varphi\vartheta$$
$$\sigma\varphi(2\kappa\pi+\vartheta) = \sigma\varphi\vartheta.$$

Όμως υπάρχουν διάφορες σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συμπληρωματικών τόξων $(\vartheta, 90°-\vartheta)$, παραπληρωματικών τόξων $(\vartheta, 180°-\vartheta)$, τόξων που διαφέρουν κατά $90°$ $(\vartheta, 90°+\vartheta)$, που διαφέρουν κατά $180°$ $(\vartheta, 180°+\vartheta)$, κατά $270°$ $(\vartheta, 270°+\vartheta)$ κ.τ.λ. Οι σχέσεις αυτές συμπεριλαμβάνονται σε 2 συνοπτικούς τύπους τους εξής:

$$\eta\mu\underbrace{\begin{pmatrix} 90°\pm\vartheta \\ 270°\pm\vartheta \end{pmatrix}}_{\omega} = *\,\sigma\upsilon\nu\vartheta \text{ και } \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\,\omega = *\,\eta\mu\vartheta \\ \varepsilon\varphi\,\omega = *\,\sigma\varphi\vartheta \\ \sigma\varphi\,\omega = *\,\varepsilon\varphi\vartheta \end{cases}$$

$$\eta\mu\underbrace{\begin{pmatrix} 180°\pm\vartheta \\ -\vartheta \\ 360°\pm\vartheta \end{pmatrix}}_{\omega} = *\,\eta\mu\vartheta \text{ και } \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\,\omega = *\,\sigma\upsilon\nu\vartheta \\ \varepsilon\varphi\,\omega = *\,\varepsilon\varphi\vartheta \\ \sigma\varphi\,\omega = *\,\sigma\varphi\vartheta \end{cases}$$

* με πρόσημο, το πρόσημο του τεταρτημορίου που ανήκει το αντίστοιχο τόξο ω (το ϑ λαμβάνεται πάντα στο πρώτο τεταρτημόριο δηλ. $0° \leq \vartheta < 90°$).

π.χ. $\eta\mu(270°-\vartheta) = -\sigma\upsilon\nu\vartheta$, επειδή το τόξο $270°-\vartheta$ ανήκει στο III τεταρτημόριο και το ημίτονό του είναι αρνητικό. Επίσης:

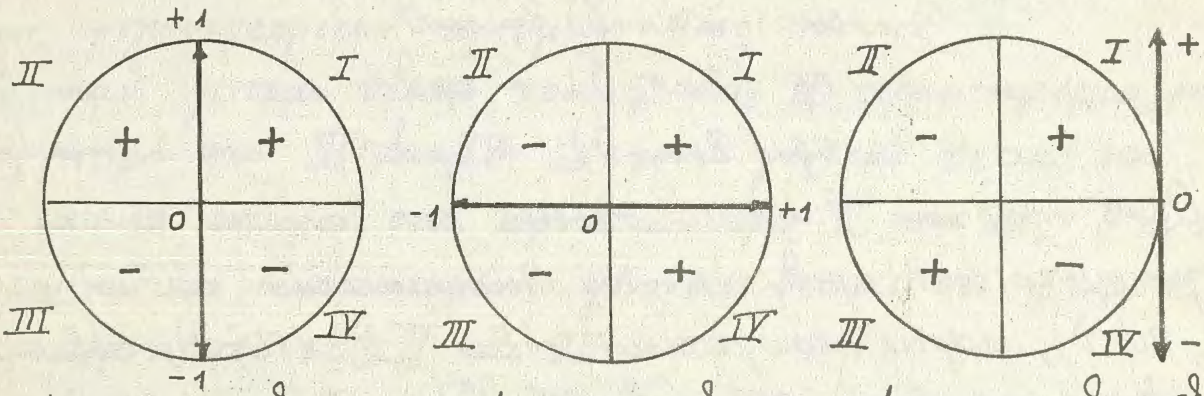
$ημ(180°-ϑ) = ημϑ \quad (ω = 180°-ϑ \in II$ και $ημω > 0)$

$συν(90°+ϑ) = -ημϑ \quad (ω = 90°+ϑ \in II$ και $συνω < 0)$

$εφ(360°-ϑ) = -εφϑ \quad (ω = 360°-ϑ \in IV$ και $εφω < 0)$

$σφ(270°-ϑ) = εφϑ \quad (ω = 270°-ϑ \in III$ και $σφω > 0)$

Υπενθυμίζονται τα πρόσημα που έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στα διάφορα τεταρτημόρια.



πρόσημο ημϑ   πρόσημο συνϑ   πρόσημο εφϑ, σφϑ

Απ τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών που είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου και το σχήμα του τριγωνομετρικού κύκλου έχουμε:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΠΜ:

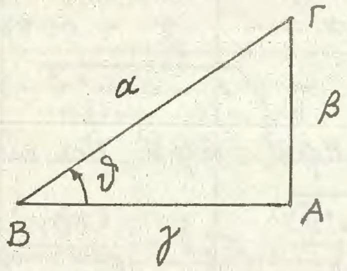
$(ΠΜ)^2 + (ΟΠ)^2 = 1$ ή $ημ^2ϑ + συν^2ϑ = 1 \quad \forall ϑ \in \mathbb{R}$.

Επίσης στα ορθ. τρίγωνα ΟΠΜ, ΟΑΤ έχουμε:

$$εφϑ = ΑΤ = \frac{ΑΤ}{1} \quad \frac{ΑΤ}{ΟΑ} = \frac{ΜΠ}{ΟΠ} = \frac{ημϑ}{συνϑ} \quad \forall ϑ \in \mathbb{R}.$$

Οι δύο αυτές σχέσεις που ισχύουν για κάθε $ϑ \in \mathbb{R}$ (σε ακτίνια ή μοίρες) λέγονται θεμελειώδεις τριγωνομετρικές ταυτότητες. Παρόμοιες τριγωνομετρικές ταυτότητες υπάρχουν παρα πολλές που αποδεικνύονται συνδιάζοντας αυτές τις δύο με γνωστές σχέσεις των τριγωνομετρικών αριθ.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας μπορούν να ορισθούν και με βάση ένα ορθογώνιο τρίγωνο ως εξής: θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ. Τότε ορίζουμε:



$$ημθ = \frac{\text{απέναντι πλ.}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{β}{α} < 1$$

$$συνθ = \frac{\text{προσκείμενη πλ.}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{γ}{α} < 1$$

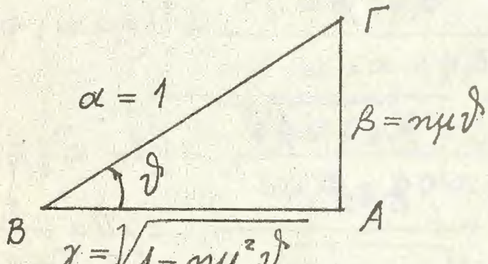
$$εφθ = \frac{\text{απέναντι πλ.}}{\text{προσκείμενη πλ}} = \frac{β}{γ} = \frac{β/α}{γ/α} = \frac{ημθ}{συνθ}$$

$$σφθ = \frac{\text{προσκείμενη πλ.}}{\text{απέναντι πλ.}} = \frac{γ}{β} = \frac{1}{εφθ} = \frac{συνθ}{ημθ}$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να εκφράσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας συναρτήσει του ενός εξ αυτών.

1) Συναρτήσει του ημιτόνου.

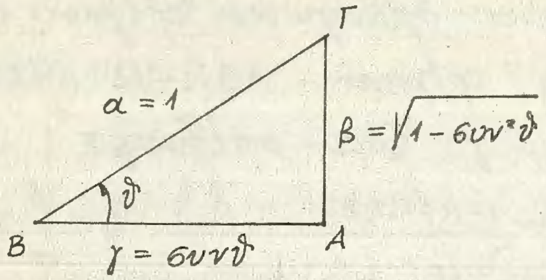
Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ορίζουμε τις πλευρές του α, β, γ ως εξής:



Επειδή $ημθ = \frac{β}{α}$, θέτουμε στον παρονομαστή $α = 1$ και στον αριθμητή $β = ημθ$, οπότε η άλλη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ορίζεται απ το πυθαγόρειο θεώρημα ως $γ = \sqrt{1 - ημ^2θ}$. Έτσι με βάση τους ορισμούς που δώσαμε, έχουμε

$$συνθ = \frac{γ}{α} = \sqrt{1-ημ^2θ}, \quad εφθ = \frac{β}{γ} = \frac{ημθ}{\sqrt{1-ημ^2θ}}, \quad σφθ = \frac{\sqrt{1-ημ^2θ}}{ημθ}$$

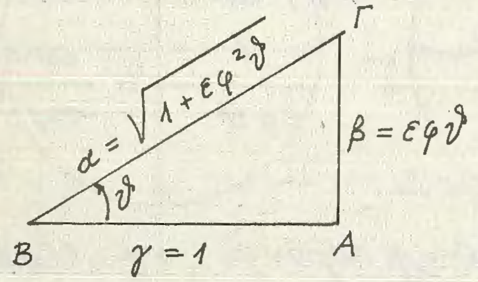
2) Συναρτήσει του συνημιτόνου.



Εδώ αν σκεφθούμε ανάλογα, στον ορισμό $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\gamma}{\alpha}$ θέτουμε: $\alpha = 1$, $\gamma = \sigma\upsilon\nu\vartheta$ οπότε $\beta = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}$. Άρα οι $\eta\mu\vartheta$, $\varepsilon\varphi\vartheta$, $\sigma\varphi\vartheta$ θα είναι:

$$\eta\mu\vartheta = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}, \quad \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}, \quad \sigma\varphi\vartheta = \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}}$$

3) Συναρτήσει της εφαπτομένης.



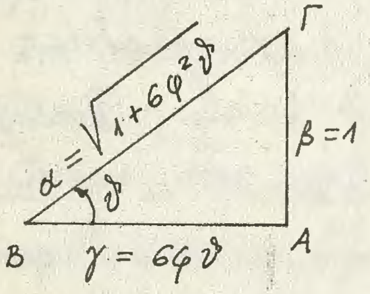
Είναι $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\beta}{\gamma}$ άρα $\gamma = 1$, $\beta = \varepsilon\varphi\vartheta$ οπότε $\alpha = \sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\vartheta}$

Άρα:

$$\eta\mu\vartheta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\vartheta}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\vartheta}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\vartheta}}, \quad \sigma\varphi\vartheta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\vartheta}$$

4) Συναρτήσει της συνεφαπτομένης.



Έχουμε $\sigma\varphi\vartheta = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sigma\varphi\vartheta}{1}$, οπότε

$$\eta\mu\vartheta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\vartheta}},$$

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sigma\varphi\vartheta}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\vartheta}}, \quad \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{1}{\sigma\varphi\vartheta}$$

Ακόμα, μπορούν να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μερικών χαρακτηριστικών γωνιών όπως των $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ με βάση απλές γεωμετρικές ιδιότητες που ισχύουν σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γωνίες $45°$ ή $30°$ ($\frac{\pi}{4}$ ή $\frac{\pi}{6}$ ακτίν. αντίστοιχα).

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

τρ. α. \ θ	0°	30°	45°	60°	90°
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
σφ	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Τέλος αναφέρουμε μερικούς τύπους της Τριγωνομετρίας, χρήσιμους σε διάφορες εφαρμογές.

1) Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος ή διαφοράς τόξων

$$\text{συν}(\alpha-\beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$

$$\text{συν}(\alpha+\beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta$$

$$\text{ημ}(\alpha-\beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

$$\text{ημ}(\alpha+\beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

$$\text{εφ}(\alpha+\beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}\beta}, \quad \text{εφ}(\alpha-\beta) = \frac{\text{εφ}\alpha - \text{εφ}\beta}{1 + \text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}\beta}$$

$$\text{σφ}(\alpha+\beta) = \frac{\text{σφ}\alpha\,\text{σφ}\beta - 1}{\text{σφ}\beta + \text{σφ}\alpha}, \quad \text{σφ}(\alpha-\beta) = \frac{\text{σφ}\alpha \cdot \text{σφ}\beta + 1}{\text{σφ}\beta - \text{σφ}\alpha}$$

2) Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλασίου, τριπλασίου τόξου.

$$\text{ημ}2\alpha = 2\,\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha, \quad \text{ημ}3\alpha = 3\,\text{ημ}\alpha - 4\,\text{ημ}^3\alpha.$$

$$\text{συν}2\alpha = \begin{cases} 2\,\text{συν}^2\alpha - 1 \\ \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha \\ 1 - 2\,\text{ημ}^2\alpha \end{cases} \quad \text{συν}3\alpha = 4\,\text{συν}^3\alpha - 3\,\text{συν}\alpha$$

Το ημ2α, συν2α συναρτ. της εφα.

$$\text{ημ}2\alpha = \frac{2\,\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}, \quad \text{συν}2\alpha = \frac{1-\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}, \quad \sigma\varphi 3\alpha = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}$$

3) Μετασχηματισμοί αθροίσματος ή διαφοράς σε γινόμενο.

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = -2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{A-B}{2} = 2\,\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B-A}{2}$$

4) Μετασχηματισμοί γινομένου σε άθροισμα ή διαφορά.

$$2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta)$$

$$2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta)$$

$$2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

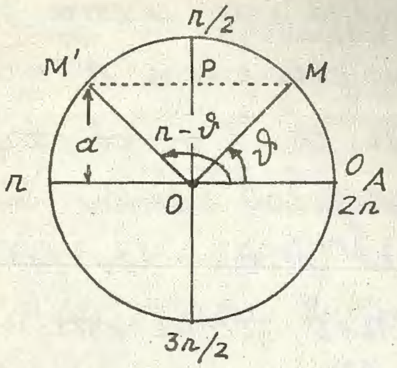
$$2\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

Απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι εκείνες που ο άγνωστος x εμφανίζεται σε ένα τριγωνομετρικό αριθμό. Λύση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι η εύρεση εκείνων των τόξων x που την επαληθεύουν. Οι πιο απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι της μορφής:

$\eta\mu x = \alpha$	όπου	$-1 \le \alpha \le 1$
$\sigma\upsilon\nu x = \alpha$	"	$-1 \le \alpha \le 1$
$\varepsilon\varphi x = \alpha$	"	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sigma\varphi x = \alpha$	"	$\alpha \in \mathbb{R}$.

1). Λύση της $\eta\mu x = \alpha$. με $-1 \leq \alpha \leq 1$



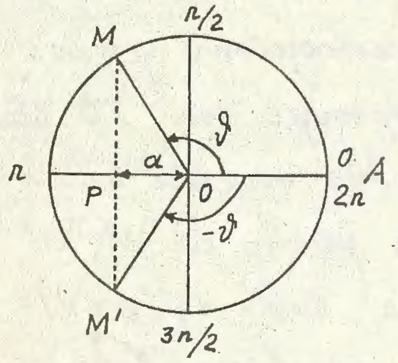
Παίρνουμε σ' ένα τριγωνομετρικό κύκλο πάνω στον κατακόρυφο άξονα των ημιτόνων ένα μήκος $OP=\alpha$. Έστω ϑ το μικρότερο θετικό τόξο, τέτοιο ώστε $\eta\mu\vartheta = \alpha$. Εκτός αυτού υπάρχει και το τόξο $\pi-\vartheta$ τέτοιο ώστε $\eta\mu(\pi-\vartheta) = OP = \alpha$. Τα τόξα αυτά ϑ, $\pi-\vartheta$ είναι οι λύσεις στον πρωτεύοντα κύκλο. Αν στις μερικές αυτές λύσεις τις $x=\vartheta$, $x=\pi-\vartheta$ (ϑ σε ακτίνια) προσθέσουμε και ακέραιο αριθμό περιφερειών $k \cdot 2\pi$ ή $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) τότε η τελική ακτίνα θα είναι πάλι η OM η OM'. Επομένως οι γενικές λύσεις θα είναι:

$$x = 2k\pi + \vartheta \qquad\qquad x = 360^\circ k + \vartheta^\circ$$

$$\text{ή } x = 2k\pi + (\pi-\vartheta) \qquad\qquad \text{ή } x = 360^\circ k + 180^\circ - \vartheta^\circ$$

(ϑ σε ακτίνια) (ϑ σε μοίρες)

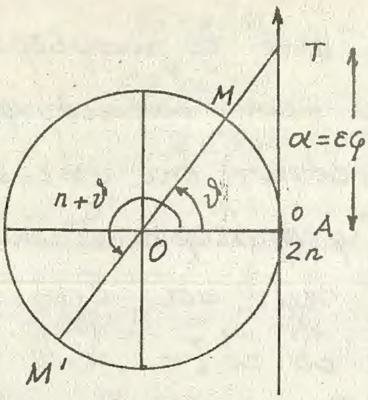
2) Λύση της $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ $-1 \leq \alpha \leq 1$



Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε πάνω στον οριζόντιο άξονα των συνημιτόνων ένα μήκος $OP = \alpha$ (εδώ είναι $\alpha < 0$). Απ το P φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα και προσδιορίζουμε δύο σημεία στον κύκλο M, M' τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu(-\vartheta) = \alpha$, που είναι οι μερικές λύσεις στον πρωτεύοντα κύκλο. Αν σ' αυτές προσθέσουμε ακέραιο αριθμό περιφερειών $2k\pi$ παίρνουμε τις γενικές λύσεις που είναι:

$x = 2k\pi \pm \vartheta$ (ϑ σε ακτίνια) ή $x = 360^\circ k + \vartheta^\circ$ (ϑ° σε μοίρες)

3) Λύση της $εφx = α$ $α \in \mathbb{R}$.

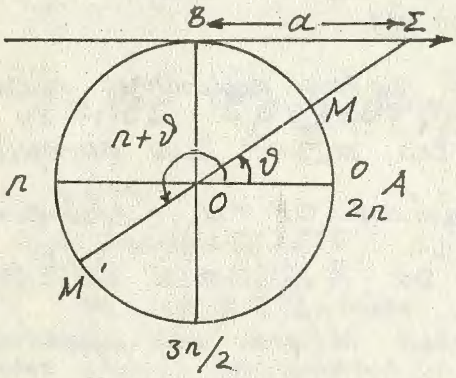


Παίρνουμε πάνω στον άξονα των εφαπτομένων ένα μήκος $AT = α$ και ενώνουμε το T με τό κέντρο του τριγωνομετρικού κύκλου. Τα σημεία M, M' δίνουν δύο τόξα τα $ϑ$ και $π+ϑ$ τέτοια ώστε $εφϑ = εφ(π+ϑ) = α$. Οι γενικές λύσεις βρίσκονται βέβαια αν στις μερικές λύσεις $x = ϑ$ και $x = π+ϑ$ προσθέσουμε ακέραιο αριθμό περιφερειών δηλ. $x = 2kπ+ϑ$ ή $2kπ+π+ϑ$ Οι δύο τελευταίες γενικές λύσεις συγχωνεύονται σε μία γενική την

$$x = kπ+ϑ \qquad k \in \mathbb{Z},\ ϑ \text{ σε ακτίνια}$$

διότι για $k=2μ$ παίρνουμε την πρώτη, ενώ για $k=2μ+1$ παίρνουμε τη δεύτερη.

4) Λύση της $σφx = α$ $α \in \mathbb{R}$.



Με ανάλογους συλλογισμούς παίρνουμε πάνω στον άξονα των συνεφαπτομένων μήκος $BΣ = α$. Φέρνουμε την ΣΟ και βρίσκουμε δύο σημεία στον πρωτεύοντα κύκλο τα M, M' τέτοια ώστε $σφϑ = σφ(π+ϑ) = α$

Όπως και στην περίπτωση της εφαπτομένης βρίσκουμε ότι η $σφx = α = σφϑ$ έχει τις γενικές λύσεις που δίδονται απ τους τύπους:

$$x = kπ+ϑ \qquad k \in \mathbb{Z},\ ϑ \text{ σε ακτίνια}.$$

($ϑ$ το μικρότερο θετικό τόξο τέτοιο ώστε $σφϑ = α$).

Ειδικές περιπτώσεις τριγωνομ. εξισώσεων.

Είναι οι εξισώσεις της μορφής:

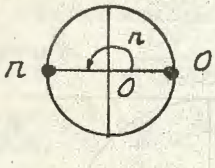
1) $\eta\mu x = 0$, $\eta\mu x = 1$, $\eta\mu x = -1$

2) $\sigma\upsilon\nu x = 0$, $\sigma\upsilon\nu x = 1$, $\sigma\upsilon\nu x = -1$.

Σ' όλες τις περιπτώσεις αυτών των εξισώσεων η γενική λύση δίνεται μόνο από ένα γενικό τύπο. Και μάλιστα:

i) αν υπάρχουν δύο τόξα στον πρωτεύοντα κύκλο που να ικανοποιούν την εκάστοτε εξίσωση, τότε στον γενικό τύπο έχουμε ακέραιο αριθμό ημιπεριφερειών ($k\pi$) και το μικρότερο απολύτως από τα δύο τόξα.

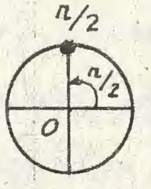
ii) αν υπάρχει ένα τόξο στον πρωτεύοντα κύκλο τότε έχουμε στο γενικό τύπο ακέραιο αριθμό περιφερειών ($2k\pi$) και το τόξο αυτό. Έτσι έχουμε:



$\eta\mu x = 0$

<u>δύο</u> σημεία

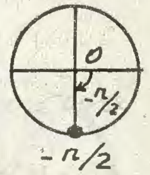
άρα $x = \underline{k\pi}$



$\eta\mu x = 1$

<u>ένα</u> σημείο

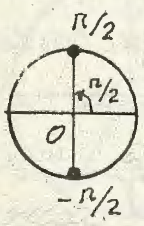
άρα $x = \underline{2k\pi} + \frac{\pi}{2}$



$\eta\mu x = -1$

<u>ένα</u> σημείο

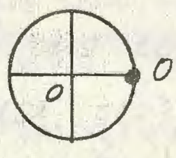
άρα $x = \underline{2k\pi} - \frac{\pi}{2}$



$\sigma\upsilon\nu x = 0$

<u>δύο</u> σημεία

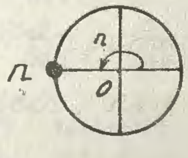
άρα $x = \underline{k\pi} + \frac{\pi}{2}$



$\sigma\upsilon\nu x = 1$

<u>ένα</u> σημείο

άρα $x = \underline{2k\pi}$



$\sigma\upsilon\nu x = -1$

<u>ένα</u> σημείο

άρα $x = \underline{2k\pi} + \pi$.

Απλές τριγωνομετρικές ανισώσεις

Τριγωνομετρικές ανισώσεις είναι εκείνες που ο άγνωστος x εμφανίζεται σ' ένα τριγωνομετρικό αριθμό. Λύση μιας τριγωνομετρικής ανίσωσης είναι η εύρεση εκείνων των διαστημάτων που την επαληθεύουν τα οποία περιέχουν όλα τα τόξα x. Οι πιο απλές τριγωνομετρικές ανισώσεις είναι της μορφής:

$ημx > α$ ή $ημx < α$ όπου $-1 \leq α \leq 1$

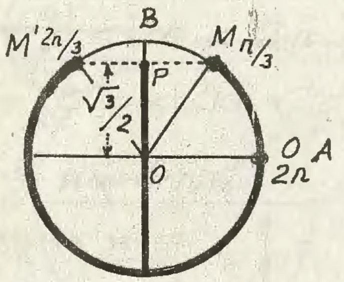
$συνx > α$ ή $συνx < α$ " $-1 \leq α \leq 1$

$εφx > α$ ή $εφx < α$ " $α \in \mathbb{R}$

$σφx > α$ ή $σφx < α$ " $α \in \mathbb{R}$

Για να γίνουν πιό κατανοητές οι λύσεις αυτών των ανισώσεων θα εξετάσουμε κάθε μία περίπτωση με συγκεκριμένο παράδειγμα.

1) Να λυθεί η ανίσωση: $2ημx - \sqrt{3} < 0$

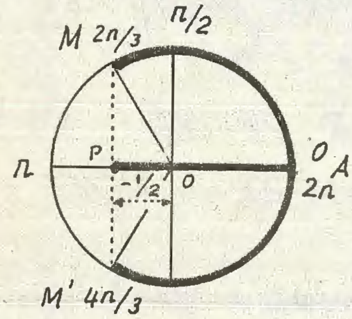


Αυτή γράφεται $ημx < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Αυτή θα αληθεύει για όλα τα τόξα x, που το ημίτονό τους θα είναι μικρότερο του $\sqrt{3}/2$. Πάνω στον άξονα των ημιτόνων παίρνουμε ένα μήκος (προσημασμένο) $OP = \sqrt{3}/2$. Απ το P φέρνουμε κάθετη στον άξονα των ημιτόνων που τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M, M'. Όλα τα τόξα που έχουν αρχή το σημείο A του τριγωνομετρικού κύκλου και πέρας ένα σημείο του γεωμετρικού τόξου $M'AM$ έχουν ημίτονο μικρότερο του $\sqrt{3}/2$ επομένως επαληθεύουν την ανίσωση. Επειδή $\sqrt{3}/2 = ημ\, π/3 = ημ\, 2π/3$ και επειδή η αρχή A μέτρησης των τόξων περιέχεται στο σύνολο λύσεων $M'AM$, χωρίζουμε το τόξο αυτό λύσεων σε δύο τόξα το ένα $\widehat{AM}$ και το άλλο $M'A$. Το σύνολο λύσεων επομένως στον πρωτεύοντα κύκλο είναι: $0 \leq x < \pi/3$ ή $2\pi/3 < x < 2\pi$.

Αν σ' αυτές τις μερικές λύσεις προσθέσουμε ακέραιο αριθμό περιφερειών θα έχουμε τις γενικές λύσεις:

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + \pi/3 \quad \text{ή} \quad 2k\pi + 2\pi/3 < x < 2k\pi + 2\pi.$$

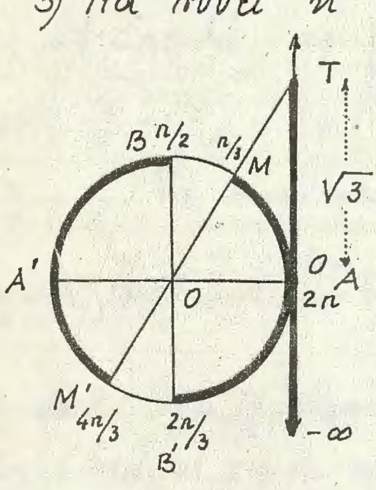
2) Να λυθεί η ανίσωση: $\sigma\upsilon\nu x > -\frac{1}{2}$



Πάνω στον άξονα των συνημιτόνων παίρνουμε ένα μήκος $OP = -\frac{1}{2}$. Απ' το P φέρνουμε κάθετη στον άξονα των συνημιτόνων που τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο M, M'. Επειδή $-\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\, 2\pi/3 = \sigma\upsilon\nu\, 4\pi/3$, το σύνολο λύσεων στον πρωτεύοντα κύκλο θα είναι (το A περιέχεται στο τόξο $M'AM$): $0 \leq x < 2\pi/3$ και $4\pi/3 < x < 2\pi$ ενώ η γενική λύση θα είναι:

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi/3 \quad \text{ή} \quad 2k\pi + 4\pi/3 < x < 2k\pi + 2\pi$$

3) Να λυθεί η ανισότητα $\varepsilon\varphi x < \sqrt{3}$

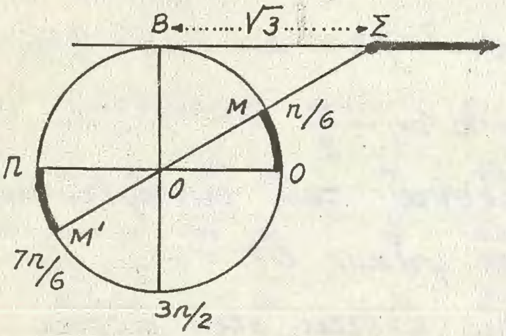


Στον άξονα των εφαπτομένων παίρνουμε το μήκος $AT = \sqrt{3}$ και φέρνουμε την OT που τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στα M, M'. Επειδή $\sqrt{3} = \varepsilon\varphi\, \pi/3 = \varepsilon\varphi\, 4\pi/3$, όλα τα τόξα x που είναι τέτοια ώστε $\varepsilon\varphi x < \sqrt{3}$ θα περιέχονται στα τόξα $BA'M'$ και MAB' δηλ.

$0 \le x < \pi/3, \quad \pi/2 < x < 4\pi/3, \quad 2\pi/3 < x < 2\pi$. Άρα.

$$\begin{aligned} 2k\pi &\le x < 2k\pi + \pi/3 \\ 2k\pi + \pi/2 &< x < 2k\pi + 4\pi/3 \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + 2\pi/3 &< x < 2k\pi + 2\pi \end{aligned}$$

4) Να λυθεί η ανισότητα $\sigma\varphi x > \sqrt{3}$



Στον άξονα των συνεφαπτομένων παίρνουμε μήκος $B\Sigma = \sqrt{3}$ και επειδή $\sqrt{3} = \sigma\varphi\, \pi/6 = \sigma\varphi\, 7\pi/6$ θα έχουμε κάνοντας παρόμοιες σκέψεις: $0 < x < \pi/6$ ή $\pi < x < 7\pi/6$ ή γενικά

$$2k\pi < x < 2k\pi + \pi/6 \quad \text{ή} \quad 2k\pi + \pi < x < 2k\pi + 7\pi/6.$$

Οι ασκήσεις που θα αναφερθούν στη συνέχεια θα είναι συνθέσεις των απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων και ανισώσεων παρέχοντας έτσι μια μεγαλύτερη ευχέρεια στη λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων και ανισώσεων που είναι απαραίτητες στη μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων με παραμέτρους.

Ασκήσεις

6.1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ β) $\sigma\upsilon\nu 7x = \sigma\upsilon\nu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

γ) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma\upsilon\nu(\pi - x)$ δ) $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\frac{x}{2}$

Λύση. α) Επειδή τα τόξα $4x - \frac{\pi}{5}$, $x + \frac{\pi}{4}$ έχουν ίδια ημίτονα, θα συνδέονται με τους τύπους:

$4x - \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (1) και $4x - \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (2).

Η (1) δίνει $3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$ ή $3x = 2k\pi + \frac{9\pi}{20}$ άρα $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{3\pi}{20}$. Η (2) δίνει $5x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$ ή $5x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{20}$. Άρα $x = \frac{(2k+1)\pi}{5} - \frac{\pi}{100}$.

β) Επειδή τα τόξα $7x$ και $3x + \frac{\pi}{6}$ έχουν το ίδιο συνημίτονο θα συνδέονται με τους τύπους:

$7x = 2k\pi + \left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ (1) και $7x = 2k\pi - \left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$. (2)

Η (1) δίνει αν λυθεί ως προς x τη γενική λύση $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$ ενώ η (2) τη λύση $x = \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{60}$.

γ) Επειδή τα τόξα x, $\pi - x$ είναι παραπληρωματικά θα είναι συν$(\pi - x) = -$συνx άρα η εξίσωση γράφεται:

ημ$\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) =$ συν$x =$ ημ$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Απ την τελευταία προκύπτουν: $2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x$ (1), $2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (2). Η (1) δίνει $x = \frac{2k\pi}{3}$ και η (2) $x = 2k\pi$.

δ) Επειδή σφ $\frac{x}{2}$ = εφ $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ η εξίσωση γράφεται εφ $\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ = εφ $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$. Επομένως τα τόξα $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ θα συνδέονται με τις σχέσεις:

$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ απ όπου $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$.

6.2. Να βρεθούν οι τιμές του τόξου x μεταξύ 0 και 2π (δηλ. οι τιμές του x στον πρωτεύοντα κύκλο που επαληθεύουν την εξίσωση ημ^2x − συνx = $1/4$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται: $4\,\text{ημ}^2x - 4\,\text{συν}x = 1$ ή $4(1-\text{συν}^2x) - 4\,\text{συν}x - 1 = 0$ ή $4\,\text{συν}^2x + 4\,\text{συν}x - 3 = 0$.
Αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς συνx και έχει ρίζες
$\text{συν}x = \frac{1}{2}$ (δεκτή), $\text{συν}x = -\frac{3}{2}$ (απορρίπτεται)

Απ την πρώτη έχουμε $\text{συν}x = \frac{1}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{3}$ οπότε οι γενικές λύσεις θα είναι $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Όμως εμείς θέλουμε εκείνες τις τιμές του x που περιλαμβάνονται μεταξύ 0 και 2π ακτινίων, δηλ. $0 < x < 2\pi$. Άρα
$0 < 2k\pi + \frac{\pi}{3} < 2\pi$ (1) και $0 < 2k\pi - \frac{\pi}{3} < 2\pi$ (2).
Η λύση της (1) δίνει: $-\frac{\pi}{3} < 2k\pi < 2\pi - \frac{\pi}{3}$ ή
$-\frac{\pi}{3} < 2k\pi < \frac{5\pi}{3}$ οπότε $-\frac{1}{6} < k < \frac{5}{6}$ και επειδή $k \in \mathbb{Z}$ προκύπτει μόνο η τιμή $k=0$. Άρα η (1) δίνει $x = \frac{\pi}{3}$.
Η λύση της (2) δίνει: $\frac{\pi}{3} < 2k\pi < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ ή
$\frac{\pi}{3} < 2k\pi < \frac{7\pi}{3}$ ή $\frac{1}{6} < k < \frac{7}{6}$ και επειδή $k \in \mathbb{Z}$ προκύπτει μόνο η τιμή $k = 1$. Άρα η (2) δίνει $x = \frac{5\pi}{3}$.

6.3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\text{ημ}2x + \text{συν}2x = 1$ β) $\text{εφ}3x = \text{ημ}6x$
γ) $\text{συν}x \cdot \text{συν}5x = \text{συν}2x \cdot \text{συν}4x$ δ) $\text{ημ}3x = 8\,\text{ημ}^3x$.

Λύση α) Αυτή γράφεται: $2\,\text{ημ}x\,\text{συν}x + 1 - 2\,\text{ημ}^2x = 1$ ή $2\,\text{ημ}x(\text{ημ}x - \text{συν}x) = 0$. Αυτή δίνει είτε $\text{ημ}x = 0$ (1) ή $\text{ημ}x - \text{συν}x = 0$ (2). Η λύση της (1) είναι $x = k\pi$. Η (2) δίνει $\text{ημ}x = \text{συν}x$ ή $\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x} = 1$ ή $\text{εφ}x = 1 = \text{εφ}\frac{\pi}{4}$. Άρα
$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

β) Αυτή γράφεται: $\frac{\text{ημ}3x}{\text{συν}3x} = 2\,\text{ημ}3x\,\text{συν}3x$ ή ακόμα:

$\text{ημ}3x - 2\,\text{ημ}3x\,\text{συν}^2 3x = 0$ ή $\text{ημ}3x\,(1 - 2\,\text{συν}^2 3x) = 0$ απ' όπου προκύπτει είτε $\text{ημ}3x = 0$ (1) είτε $1 - 2\,\text{συν}^2 3x = 0$ (2). Η (1) δίνει $3x = k\pi$ ή $x = k\pi/3$. Η (2) δίνει $\text{συν}^2 3x = \frac{1}{2}$ ή $\text{συν}3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\,\text{συν}\frac{\pi}{4}$. Η $\text{συν}3x = \text{συν}\frac{\pi}{4}$ δίνει $3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$. Η $\text{συν}3x = -\text{συν}\frac{\pi}{4}$ γράφεται $\text{συν}3x = \text{συν}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \text{συν}\frac{3\pi}{4}$ και δίνει:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}.$$

γ) Αυτή γράφεται (απ τον τύπο: $2\,\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta = \text{συν}(\alpha+\beta) + \text{συν}(\alpha-\beta)$): $\text{συν}6x + \text{συν}4x = \text{συν}6x + \text{συν}2x$ ή $\text{συν}4x = \text{συν}2x$ απ την οποία προκύπτει: $4x = 2k\pi \pm 2x$ απ τις οποίες προκύπτουν $x = k\pi$ και $x = \frac{k\pi}{3}$.

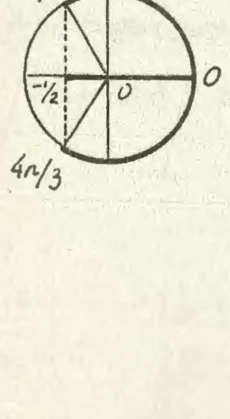
δ) Απ τον τύπο του ημιτόνου του τριπλασίου τόξου έχουμε: $3\text{ημ}x - 4\,\text{ημ}^3 x = 8\,\text{ημ}^3 x$ ή $3\text{ημ}x - 12\,\text{ημ}^3 x = 0$ ή $3\text{ημ}x\,(1 - 4\,\text{ημ}^2 x) = 0$. Απ' αυτή προκύπτει είτε $\text{ημ}x = 0$ (1) είτε $1 - 4\,\text{ημ}^2 x = 0$ (2). Η (1) δίνει $x = k\pi$. Η (2) δίνει $\text{ημ}^2 x = 1/4$ ή $\text{ημ}x = \pm 1/2 = \text{ημ}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$. Άρα

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi \mp \frac{\pi}{6}.$$

6.4. Να λυθούν οι ανισότητες:

α) $\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < 1/2$, β) $\text{συν}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$

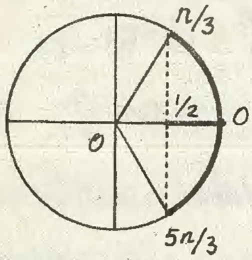
Λύση. α) Αυτή γράφεται: $\text{ημ}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] < \frac{1}{2}$ ή $-\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < \frac{1}{2}$ ή $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > -\frac{1}{2}$ ή $\text{συν}x > -\frac{1}{2}$



που έχει μερική λύση $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$ και $4\pi/3 < x < 2\pi$ και γενική λύση την:

$$2k\pi \le x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad 2k\pi + \frac{4\pi}{3} < x < 2k\pi + 2\pi.$$

β) Θέτουμε $x-\frac{\pi}{3}=y$, οπότε η αρχική ανισότητα γράφεται: $\sigma\upsilon\nu y>\frac{1}{2}$ που έχει μερική λύση:



$0\leq y<\frac{\pi}{3}$ ή $5\pi/3<y<2\pi$ και γενική $2k\pi\leq y<2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $2k\pi+\frac{5\pi}{3}<y<2k\pi+2\pi$. Οι δύο τελευταίοι τύποι, αν αντικατασταθεί το y με το $x-\frac{\pi}{3}$, γίνονται:

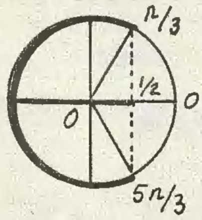
$$2k\pi\leq x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } 2k\pi+\frac{5\pi}{3}<x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+2\pi$$

ή τελικά

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x<2k\pi+\frac{2\pi}{3} \text{ ή } 2k\pi+2\pi<x<2k\pi+2\pi+\frac{\pi}{3}.$$

6.5. Να λυθεί η ανισότητα: $\sigma\upsilon\nu 3x<\frac{1}{2}$.

Λύση. Θέτουμε $3x=y$ και έχουμε $\sigma\upsilon\nu y<\frac{1}{2}$ με γενική λύση $2k\pi+\frac{\pi}{3}<y<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $k\in\mathbb{Z}$



Θέτοντας $y=3x$ έχουμε:

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<3x<2k\pi+\frac{5\pi}{3} \iff$$

$$\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}<x<\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{9}.$$ Επειδή $k=3\mu+v$ (όπου $v=0,1,2$ και $\mu\in\mathbb{Z}$) η τελευταία σχέση γίνεται:

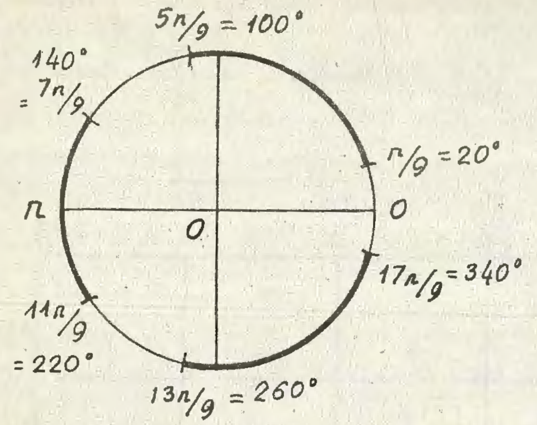
$$\frac{2(3\mu+v)\pi}{3}+\frac{\pi}{9}<x<\frac{2(3\mu+v)\pi}{3}+\frac{5\pi}{9} \text{ ή}$$

$$2\mu\pi+\frac{2v\pi}{3}+\frac{\pi}{9}<x<2\mu\pi+\frac{2v\pi}{3}+\frac{5\pi}{9}.$$ Άρα για

$v=0$ προκύπτει: $2\mu\pi+\frac{\pi}{9}<x<2\mu\pi+\frac{5\pi}{9}$. Για

$v=1$ " : $2\mu\pi+\frac{7\pi}{9}<x<2\mu\pi+\frac{11\pi}{9}$. Για

$v=2$ " : $2\mu\pi+\frac{13\pi}{9}<x<2\mu\pi+\frac{17\pi}{9}$.



Επομένως οι λύσεις στον πρωτεύοντα κύκλο είναι τρία ίσα τόξα που κατανέμονται συμμετρικά και σημειώνονται με έντονη γραμμή. Αν είχαμε π.χ. ημίτονο 5-πλάσιου τόξου, τότε στην τελική λύση θα θέταμε $k = 5\mu + \upsilon$, όπου $\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4$ και $\mu \in \mathbb{Z}$ και θα βρίσκαμε στον πρωτεύοντα κύκλο 5 ίσα τόξα σε ίσες αποστάσεις μεταξύ των.

6.6. Να λυθεί η ανισότητα

$$(\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\varepsilon\varphi x - 1) < 0.$$

Λύση. Θέτουμε $\eta\mu x - 1 = A$, $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = B$ και $\varepsilon\varphi x - 1 = \Gamma$ οπότε η αρχική ανισότητα γράφεται $A \cdot B \cdot \Gamma < 0$ (1). Για να λύσουμε την (1) βρίσκουμε τα πρόσημα των A, B, Γ όταν το x παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Έτσι βρίσκουμε τις ειδικές λύσεις των ανισώσεων π.χ. $A > 0$, $B > 0$, $\Gamma > 0$. Έτσι έχουμε:

1) $A > 0 \iff \eta\mu x - 1 > 0 \iff \eta\mu x > 1$ που δεν αληθεύει για καμμία τιμή του x στο $[0, 2\pi]$ δηλ η $\eta\mu x - 1$ γίνεται αρνητική για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

2) $B > 0 \iff 2\sigma\upsilon\nu x - 1 > 0 \iff \sigma\upsilon\nu x > \frac{1}{2}$ που ως γνωστό έχει λύση στον πρωτεύοντα κύκλο στα διαστήματα: $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ και $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$.

3) $\Gamma > 0 \iff \varepsilon\varphi x - 1 > 0 \iff \varepsilon\varphi x > 1$ που έχει λύση στα διαστήματα:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$$

Με βάση τα παραπάνω σχηματίζουμε ένα πίνακα γράφοντας τις χαρακτηριστικές τιμές που βρήκαμε κατά τάξη μεγέθους στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
A	−	−	−	−	−	−	−	
B	+	+	−	−	−	−	+	
Γ	−	+	+	−	+	−	−	
A·B·Γ	+	−	+	−	+	−	+	

Επειδή θέλουμε η αρχική ανισότητα να γίνεται αρνητική τα διαστήματα στον πρωτεύοντα κύκλο είναι τα $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}$. Οι γενικές λύσεις βρίσκονται προσθέτοντας παντού το $2k\pi$.

6.7. Να λυθεί η ανισότητα:

$$\sigma\upsilon\nu 2x > \eta\mu^2 x - 1.$$

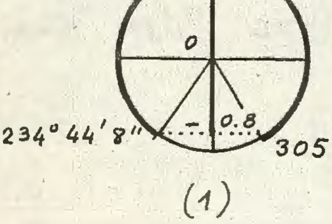
Λύση. Η ανισότητα αυτή γράφεται:

$1 - 2\eta\mu^2 x > \eta\mu^2 x - 1 \iff 3\eta\mu^2 x < 2$ η οποία γράφεται: $3\eta\mu^2 x - 2 < 0 \iff (\sqrt{3}\,\eta\mu x + \sqrt{2})(\sqrt{3}\,\eta\mu x - \sqrt{2}) < 0$

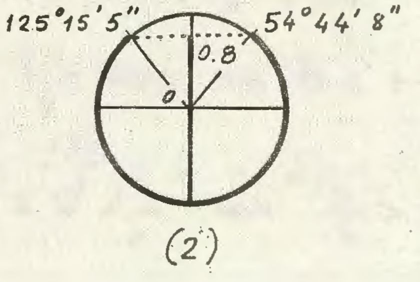
Αυτή αληθεύει για τιμές του $\eta\mu x$ μεταξύ των ριζών $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ και $\sqrt{\frac{2}{3}}$ δηλ $-\sqrt{\frac{2}{3}} < \eta\mu x < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Έχουμε επομένως να λύσουμε τις δύο ανισότητες:

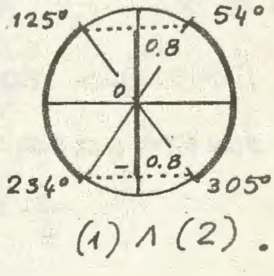
(1) $\eta\mu x > -\sqrt{\frac{2}{3}}$ και $\eta\mu x < \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8$ (2) με λύσεις



(1)



(2)



(1) ∧ (2) .—