Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Παράρτημα – Απλά ολοκληρώματα

Α. ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

9.1. Ορισμοί

Με τον όρο «*στοιχειώδεις συναρτήσεις*» εννοούμε ένα σύνολο συναρτήσεων που περιέχει ως στοιχεία:

1. την συνάρτηση $y = x$,

2. την συνάρτηση $y = a^x$, $a > 0$ και ειδικότερα την συνάρτηση $y = e^x$,

3. την αντίστροφη αυτής $y = \log_a |x|$, $(0 < a \neq 1)$

4. τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \eta\mu x,\ y = \sigma\upsilon\nu x,\ y = \varepsilon\varphi x,\ y = \sigma\varphi x$,

5. τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \tau o\xi\eta\mu\, x$, $y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$, $y = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$, $y = \tau o\xi\varepsilon\sigma\varphi x$,

6. τις υπερβολικές συναρτήσεις $y = shx = (e^x - e^{-x})/2$, $y = chx = (e^x + e^{-x})/2$, $y = thx = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$, $y = cothx = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$,

7. τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις $y = \tau o\xi shx$, $y = \tau o\xi chx$, $y = \tau o\xi thx$, $y = \tau o\xi cothx$,

8. όλες τις συναρτήσεις που παράγονται με τους πραγματικούς αριθμούς και τις παραπάνω συναρτήσεις, με πεπερασμένο πλήθος πράξεων,

9. τις συναρτήσεις $\varphi(x) = e^{f(x)}$, $g(x) = \eta\mu(f(x))$, $h(x) = sh(f(x))$ κ.ο.κ. όπου $f(x)$ είναι μια στοιχειώδης συνάρτηση. Στα επόμενα, οι συναρτήσεις που θα αναφερόμαστε θα είναι στοιχειώδεις.

Έστω οι συναρτήσεις $F(x)$ και $f(x)$ ορισμένες στο διάστημα (α, β). Θα λέμε ότι η $F(x)$ είναι **παράγουσα, ή αρχική, ή αόριστο ολοκλήρωμα** της $f(x)$ στο διάστημα (α, β), όταν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό τέτοια ώστε

$$F'(x) = f(x).$$

Για την συνάρτηση $F(x)$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό: $F(x) = \int f(x)dx$.

Το σύμβολο $\int$ ονομάζεται σύμβολο της ολοκλήρωσης, η δε συνάρτηση $f(x)$ καλείται ολοκληρωτέα συνάρτηση.
Όμως και για τη συνάρτηση $F(x)+c,\ c\in R$ ισχύει επίσης $(F(x)+c)'=f(x)$. Επομένως, αν υπάρχει το $\int f(x)dx$, τότε $F(x)=\int f(x)dx+c,\ x\in(\alpha,\beta)$, δηλαδή υπάρχουν άπειρες αρχικές της $f(x)$ που διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα c. Η ποσότητα αυτή λέγεται *αυθαίρετη σταθερή* της ολοκλήρωσης. Έτσι, κατά την εύρεση ενός ολοκληρώματος που απαιτεί την επίλυση άλλων ολοκληρωμάτων, την αυθαίρετη σταθερή c θα την τοποθετούμε στο τέλος της ολοκλήρωσης.

Η αναζήτηση της αρχικής συνάρτησης κάποιας δοσμένης συνάρτησης $f(x)$ λέγεται ***ολοκλήρωση*** και είναι πράξη αντίστροφη της διαφόρισης, διότι

$d\int f(x)dx=d(F(x)-c)=f(x)dx$ (διότι: $d(f(x))=f'(x)dx$), και

$\int d(F(x))=\int f(x)dx=F(x)$

δηλ. τα σύμβολα $d,\ \int$ γραμμένα το ένα αμέσως μετά το άλλο αλληλοαναιρούνται.

Από όσα αναφέραμε παραπάνω, δεν προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση έχει αρχική, δηλ. ότι πάντοτε το σύμβολο $\int f(x)dx$ έχει νόημα. Υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν μπορούν να ολοκληρωθούν. Επίσης, ακόμα και όταν μια συνάρτηση έχει αόριστο ολοκλήρωμα, αυτό δεν είναι πάντα δυνατόν να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις, δηλ. το αόριστο ολοκλήρωμα μιας στοιχειώδους συνάρτησης δεν είναι πάντα στοιχειώδης συνάρτηση.

9.2 Ιδιότητες αόριστου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα (α,β) και $F(x)$ μια αρχική αυτής, δηλ. $F'(x)=f(x)$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx,\ c\in R$

2. $\int(\kappa f(x)\pm\lambda g(x))dx=\kappa\int f(x)dx\pm\lambda\int g(x)dx$ (και για $n\in N$ συναρτήσεις)

3. $\int f(x)g(x)dx\neq\int f(x)dx\int g(x)dx$

Παρατηρήσεις

1. Στο διαφορικό μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε μια σταθερή, χωρίς να αλλάξει το ολοκλήρωμα. Π.χ. $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+c) = \int f(x)d(x-c)$

2. Αν πολλαπλασιαστεί ή διαιρεθεί το διαφορικό με μια σταθερή c, τότε πρέπει να διαιρεθεί ή να πολλαπλασιαστεί το ολοκλήρωμα με τη σταθερή αυτή για να παραμείνει αναλλοίωτο. Π.χ. $\int f(x)dx = \frac{1}{c}\int f(x)d(cx) = c\int f(x)d\left(\frac{x}{c}\right)$.

3. Στο διαφορικό μπορεί να εισαχθεί οποιαδήποτε παράσταση, αρκεί να βρεθεί το ολοκλήρωμα αυτής, το οποίο και εισάγεται στο διαφορικό. Π.χ.

$$\int x^2 \eta\mu x dx = \int \eta\mu x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \int x^2 d(-\sigma\upsilon\nu x)$$

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, με $n \neq -1$,

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$,

3) $\int e^x dx = e^x + c$,

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $(0 < a \neq 1)$,

5) $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$,

6) $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$,

7) $\int \varepsilon\varphi x dx = -\ln(\sigma\upsilon\nu x) + c$,

8) $\int \sigma\varphi x dx = \ln(\eta\mu x) + c$,

9) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + c$,

10) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + c$,

11) $\int shx dx = chx + c$,

12) $\int chx dx = shx + c$,

13) $\int \frac{dx}{cosh^2 x} = thx + c$,

14) $\int \frac{dx}{sinh^2 x} = -cothx + c$,

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = τοξημ\, x + c = -τοξσυν\, x + c$,

16) $\int \frac{dx}{1+x^2} = τοξεφ\ x + c = -τοξσφ\ x + c$,

17) $\int \frac{dx}{1-x^2} = τοξ\, thx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + c,\ |x| < 1$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = τοξ\, sinhx + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = τοξ\, coshx + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$, με $|x| > 1$.

Μερικά άλυτα ολοκληρώματα

1) $\int \frac{dx}{\ln x}$, $0 < x \neq 1$, **2)** $\int \frac{xdx}{\ln x}$, **3)** $\int \frac{e^x dx}{x}$, **4)** $\int \frac{e^x dx}{x^n}$, **5)** $\int x^x dx$, **6)** $\int e^{-x^2} dx$ *,

7) $\int e^{x^2} dx$, **8)** $\int e^x \ln x dx$, **9)** $\int \frac{ημ\, x}{x^n} dx$, **10)** $\int \frac{συν\, x}{x^n} dx$, **11)** $\int ημ(x^2) dx$,

12) $\int x εφ\, x dx$, **13)** $\int ημ\sqrt{x} dx$, **14)** $\int \sqrt{1+x^3} dx$, **15)** $\int \sqrt[3]{1+x^2} dx$, **16)** $\int e^{τοξεφ\, x} dx$,.

17) $\int συν(x^2) dx$, **18)** $\int συν\sqrt{x} dx$, **19)** $\int \sqrt{ημ\, x} dx$, **20)** $\int \sqrt{x} ημ\, x dx$, κ.α.

9.3 Κανόνες ολοκλήρωσης

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η ολοκλήρωση συνάρτησης $f(x)$ είναι μια πράξη αντίστροφη της παραγώγισης. Κι' όμως είναι δυσκολότερη από αυτή, γιατί δεν υπάρχει γενικός κανόνας που να μπορούμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της $f(x)$. Παρακάτω, θα δώσουμε μερικούς κανόνες, οι οποίοι σε συνδυασμό με τις ιδιότητες που αναφέραμε, οδηγούν στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων ορισμένων κατηγοριών απ' τις στοιχειώδεις συναρτήσεις.

9.3.1 Ολοκλήρωση κατά μέρη

* Το ολοκλήρωμα αυτό, αν δοθεί στη γενικευμένη του μορφή: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (ολοκλήρωμα των Euler – Poisson), τότε λύνεται (παράδειγμα 7 της παραγράφου 4.13)

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3 της παρ. 8.2 έχουμε

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx .$$

Επομένως, όταν η συνάρτηση είναι άθροισμα συναρτήσεων, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτής, ολοκληρώνουμε κατά μέρη.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int (3x^2 - 2x + 1)dx$.

Λύση

$$\int (3x^2 - 2x + 1)dx = 3\int x^2 dx - 2\int x dx + \int dx = 3\frac{x^3}{2} - 2\frac{x^2}{2} + x + c = x^3 - x^2 + x + c .$$

9.3.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int f(x)dx$ ανάγεται πολλές φορές στον υπολογισμό ενός απλούστερου ολοκληρώματος με μια αντικατάσταση $x = \varphi(t)$, που μπορεί να γίνει έτσι ώστε $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int (2x+3)^5\, dx$.

Λύση

Θέτουμε $2x + 3 = t$, οπότε $x = \frac{t-3}{2}$ και $dx = \frac{1}{2}dt$. Άρα

$$\int (2x+3)^5\, dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + c .$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x} = t$, οπότε $x = t^2$ και $dx = 2tdt$. Άρα

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\, t}{t} 2t\,dt = 2\int \sigma\upsilon\nu t\,dt = 2\eta\mu\, t + c = 2\eta\mu\sqrt{x} + c.$$

9.3.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν οι συναρτήσεις $u(x)$ και $v(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int v(x)u'(x)dx$, τότε υπάρχει και το $\int u(x)v'(x)dx$ και μάλιστα

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

ή συντομότερα $\int udv = uv - \int vdu$.

Πράγματι, διαφορίζοντας τη συνάρτηση $u \cdot v$ έχουμε $d(u \cdot v) = udv + vdu$ και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη προκύπτει

$\int d(u \cdot v) = \int udv + \int vdu \Rightarrow u \cdot v = \int udv + \int vdu$. Άρα $\int udv = uv - \int vdu$.

Στην ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα πρέπει η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση να είναι γινόμενο δύο διαφορετικού τύπου συναρτήσεων, π.χ. εκθετικής και τριγωνομετρικής, ή λογαριθμικής και πολυωνυμικής, ή συνδυασμός των τεσσάρων αυτών τύπων ανά δύο. Πρέπει να τονιστεί ότι ποτέ δεν μπαίνει στο διαφορικό η λογαριθμική συνάρτηση (εννοείται ως ολοκλήρωμα). Επίσης όταν έχουμε γινόμενο πολυωνυμικής με τριγωνομετρική ή εκθετική, ποτέ δεν μπαίνει το πολυώνυμο στο διαφορικό. Έτσι, πριν εφαρμόσουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, εισάγουμε μία από τις δύο ως ολοκλήρωμα στο διαφορικό και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης. Στα επόμενα παραδείγματα αυτό γίνεται πιο κατανοητό.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int x\sigma\upsilon\nu x dx$.

Λύση

Έχουμε γινόμενο πολυωνυμικής επί τριγωνομετρική συνάρτηση. Άρα εισάγουμε πρώτα το *συνx* μέσα στο διαφορικό ως ολοκλήρωμα (*ημx*) και έχουμε:

$\int x\sigma\upsilon\nu x dx = \int xd(\eta\mu x)$.

Τώρα εφαρμόζουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση (*κ.π.ο.*) με συναρτήσεις

$u = x,\ v = \eta\mu x$ και έχουμε:

$\int xd(\eta\mu x) = \kappa.\pi.o. = x\eta\mu x - \int \eta\mu x dx = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + c$.

2) Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$.

Λύση

Εδώ έχουμε γινόμενο πολυωνυμικής επί εκθετική συνάρτηση. Άρα εισάγουμε την εκθετική e^x στο διαφορικό ως ολοκλήρωμα (e^x) και έχουμε:

$\int xe^x dx = \int xd(e^x) = \kappa.\pi.o. = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

3) Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$.

Λύση

Εδώ εφαρμόζουμε αμέσως την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, με συναρτήσεις

$u = \ln x$ και $v = x$. Έτσι

$$\int \ln x dx = \kappa.\pi.o. = x\ln x - \int x d(\ln x) = x\ln x - \int x\cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + c$$

Παρατήρηση

Είναι δυνατόν, εφαρμόζοντας την κατά παράγοντες ολοκλήρωση πλέον της μιας φοράς, να εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος το ζητούμενο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$.

Θέτουμε τότε $\int f(x)dx = I$ και λύνουμε την εξίσωση ως προς *I*.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int e^x \eta\mu x dx$.

Λύση

Εισάγουμε την e^x στο διαφορικό ως ολοκλήρωμα (e^x). Έτσι έχουμε:

$$I = \int e^x \eta\mu x dx = \int \eta\mu x d(e^x) = \kappa.\pi.o. = e^x\eta\mu x - \int e^x d(\eta\mu x) =$$

$$= e^x\eta\mu x - \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx = e^x\eta\mu x - \int \sigma\upsilon\nu\, x d(e^x) = \kappa.\pi.o. =$$

$$= e^x\eta\mu x - \left\{ e^x\sigma\upsilon\nu\, x - \int e^x d(\sigma\upsilon\nu x)\right\} = e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu\, x + \int e^x d(\sigma\upsilon\nu x) =$$

$$= e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu\, x - \underbrace{\int e^x\eta\mu x dx}_{I}.$$

Άρα $2I = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow I = \dfrac{e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}{2} + c$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \varepsilon\varphi x dx$ (*Απάντηση*: $-\ln|\sigma\upsilon\nu\, x| + c$)

β) $\int \sigma\varphi x dx$ (*Απάντηση*: $\ln|\eta\mu\, x| + c$)

γ) $\int \eta\mu(5x-1)dx$ (*Απάντηση*: $-\dfrac{\sigma\upsilon\nu(5x-1)}{5} + c$).

2) Επίσης τα ολοκληρώματα

α) $\int x^2 e^x dx$ (*Απάντηση*: $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$),

β) $\int x\ln x dx$ (*Απάντηση*: $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c$),

γ) $\int x^2\ln x dx$ (*Απάντηση*: $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+c$),

δ) $\int x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$ (*Απάντηση*: $x^2\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x+c$),

ε) $\int x a^x dx$ (*Απάντηση*: $\frac{xa^x}{\ln a}-\frac{a^x}{\ln^2 a}+c$),

στ) $\int \ln^2 x dx$ (*Απάντηση*: $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$),

ζ) $\int x\ln(x+1)dx$ (*Απάντηση*: $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+c$),

η) $\int e^{2x}\eta\mu x dx$ (*Απάντηση*: $\frac{e^{2x}(2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)}{5}+c$),

θ) $\int e^{x/2}\sigma\upsilon\nu x dx$ (*Απάντηση*: $\frac{e^{x/2}(2\sigma\upsilon\nu x+4\eta\mu x)}{5}+c$),

ι) $\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x)dx$ (*Απάντηση*: $\frac{e^{2x}(2\sigma\upsilon\nu 3x+3\eta\mu 3x)}{13}+c$),

ια) $\int \tau o\xi\varepsilon\varphi\, x dx$ (*Απάντηση*: $x\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$),

ιβ) $\int x\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x dx$ (*Απάντηση*: $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x-\frac{x}{2}+c$),

ιγ) $\int x^2\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x dx$ $\frac{x^3}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{6}+c$).

3) Ακόμα να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{3}{(x+2)^3}dx$ (*Απάντηση*: $-\frac{3}{2(x+2)^3}+c$),

β) $\int \frac{e^x}{(2+e^x)^3}dx$ (*Απάντηση*: $-\frac{1}{2(e^x+2)^2}+c$),

γ) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ (*Απάντηση*: $\frac{\ln^2 x}{2}+c$),

δ) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{1+\eta\mu(2x)}dx$ (*Απάντηση*: $\frac{\ln(\eta\mu 2x+1)}{2}+c$),

9.4 Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Έστω η ρητή συνάρτηση $p(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, όπου οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\varphi(x)$ είναι πολυώνυμα *n* και *m* βαθμού αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, δηλαδή $n<m$, και ότι τα πολυώνυμα $f(x)$ και $\varphi(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα. Αν έχουν, διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τον Μ.Κ.Δ. των $f(x)$, $\varphi(x)$. Αν επίσης είναι $n\geq m$, διαιρούμε το $f(x)$ με το $\varphi(x)$ και έχουμε $f(x)=\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$, όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης, και $\upsilon(x)\neq 0$ το υπόλοιπο, με βαθμό μικρότερο του *m*. Άρα

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)},$$

όπου τα $\upsilon(x)$, $\varphi(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα και βαθμός $\upsilon(x)<$ βαθμού $\varphi(x)$.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις υπάρχει πάντα το ολοκλήρωμα $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ σε κάθε διάστημα $[\alpha,\beta]$ που δεν υπάρχουν ρίζες του παρονομαστή.

Είναι γνωστό από την Άλγεβρα, ότι το κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων της μορφής: $\frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^{\lambda}}$, $\frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{(x^2+\kappa x+\mu)^2}$ $(\kappa^2-4\mu<0)$.

Το πλήθος των κλασμάτων αυτών ορίζεται ως εξής:

α) Σε κάθε πραγματική ρίζα *ρ*, βαθμού πολλαπλότητας *λ*, δηλαδή σε κάθε παράγοντα $(x-\rho)^{\lambda}$ του $\varphi(x)$ αντιστοιχούν τα κλάσματα

$$\frac{\mathrm{A}_1}{x-\rho},\ \frac{\mathrm{A}_2}{(x-\rho)^2},\ \ldots\ldots,\ \frac{\mathrm{A}_{\lambda}}{(x-\rho)^{\lambda}}.$$

β) Σε κάθε παράγοντα $(x^2+\kappa x+\mu)^{\nu}$ του $\varphi(x)$ με μιγαδικές ρίζες αντιστοιχούν τα κλάσματα

$$\frac{\mathrm{B}_1x+\Gamma_1}{x^2+\kappa x+\mu},\ \frac{\mathrm{B}_2x+\Gamma_2}{(x^2+\kappa x+\mu)^2},\ \ldots\ldots,\ \frac{\mathrm{B}_{\nu}x+\Gamma_{\nu}}{(x^2+\kappa x+\mu)^{\nu}}.$$

Ο προσδιορισμός των A_i, B_i, Γ_i γίνεται γενικά με απαλοιφή των παρονομαστών και εξίσωση των ίσων δυνάμεων του *x*. (Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών). Επομένως ο υπολογισμός του $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ ανάγεται σε ολοκληρώματα της μορφής:

1) $$\int \frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^{\lambda}}dx = \mathrm{A}\int (x-\rho)^{-\lambda}d(x-\rho) = \begin{cases} \mathrm{A}\dfrac{(x-\rho)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}, & \lambda \neq 1 \\ \mathrm{A}\ln|x-\rho|, & \lambda = 1 \end{cases}$$

2) $\int \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{(x^2+\kappa x+\mu)^{\nu}}dx$, όπου $\kappa^2 - 4\mu < 0$.

Για να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα εργαζόμαστε ως εξής: Μετασχηματίζουμε το τριώνυμο $x^2+\kappa x+\mu$ σε άθροισμα τετραγώνων. Έτσι:

$$x^2+\kappa x+\mu = x^2 + 2x\cdot\frac{\kappa}{2} + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 - \frac{\kappa^2}{4} + \mu = \left(x+\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \frac{4\mu-\kappa^2}{4}$$

$$= \left(x+\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\mu-\kappa^2}}{2}\right)^2, \quad 4\mu-\kappa^2 > 0$$

Θέτουμε $x+\frac{\kappa}{2} = \frac{\sqrt{4\mu-\kappa^2}}{2}t = \delta t$ ($\delta = \frac{\sqrt{4\mu-\kappa^2}}{2}$), οπότε $x = \delta t - \frac{\kappa}{2}$, $dx = \delta dt$ και $x^2+\kappa x+\mu = \delta^2 t^2 + \delta^2 = \delta^2(t^2+1)$. Άρα

$$\int \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{(x^2+\kappa x+\mu)^{\nu}}dx =$$

$$\int \frac{\mathrm{B}(\delta t-\kappa/2)+\Gamma}{\delta^{2\nu}(t^2+1)^{\nu}}\cdot\delta dt = \frac{\mathrm{B}}{\delta^{2\nu-2}}\int\frac{t}{(t^2+1)^{\nu}}dt + \frac{\Gamma-\mathrm{B}\kappa/2}{\delta^{2\nu-1}}\cdot\int\frac{1}{(t^2+1)^{\nu}}dt$$

Αρκεί επομένως να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$J_{\nu} = \int \frac{tdt}{(1+t^2)^{\nu}}$ και $I_{\nu} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu}}$. Είναι:

$$J_{\nu} = \int \frac{tdt}{(1+t^2)^{\nu}} = \frac{1}{2}\int (1+t^2)^{-\nu}d(1+t^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}, & \nu\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2), & \nu = 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$I_{\nu} = \int\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu}} = \int\frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{\nu}}dt = \int\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu-1}} - \int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^{\nu}} =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2}\int t\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^{\nu}} = I_{\nu-1} - \frac{1}{2}\int td\left(\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right) =$$

$$I_{\nu-1} - \frac{1}{2}\left\{ t\cdot\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} - \int \frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1}dt \right\} =$$

$$= I_{\nu-1} - \frac{1}{2}t\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\nu}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{\nu-1}}.$$ Δηλαδή

$$I_\nu = I_{\nu-1} - \frac{1}{2}t\frac{(1+t^2)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\nu}I_{\nu-1},$$ ή τελικά

$$I_\nu = \int\frac{1}{(1+t^2)^\nu} = \frac{t}{2(\nu-1)(1+t^2)^{\nu-1}} + \frac{2\nu-3}{2(\nu-1)}I_{\nu-1}, \quad \nu \geq 2. \qquad (2)$$

Σημείωση:

Για $\nu = 1$ έχουμε το γνωστό ολοκλήρωμα $I_1 = \int\frac{dt}{(1+t^2)^1} = \tau o\xi\varepsilon\phi\ t + c$.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_2 = \int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$

Λύση

Για $\nu = 2$ εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο (2) βρίσκουμε:

$$I_2 = \int\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t + c.$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$.

Λύση

Επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, διαιρώντας (αφού εκτελέσουμε τις πράξεις στον παρονομαστή) έχουμε

$$\frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = x+1+\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

Αναλύουμε τώρα το κλάσμα του δευτέρου μέλους σε άθροισμα κλασμάτων

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{x^2+1} + \frac{\Delta x+\mathrm{E}}{(x^2+1)^2}.$$

Εκτελώντας τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων βρίσκουμε μετά τις πράξεις $\mathrm{A}=1,\ \mathrm{B}=\Gamma=-1,\ \Delta=\mathrm{E}=1$. Άρα

$$\frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$ Επομένως

$$\int \frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx.$$

Είναι

$\int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$, (η σταθερή c θα προστεθεί στο τελικό αποτέλεσμα)

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| \ ,$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+1} = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tau o\xi\varepsilon\varphi\ x,$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = J_2 + I_2 \ .$$

Αλλά απ’ την (1) έχουμε

$$J_2 = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{2(x^2+1)} \ .$$

Επίσης απ’ τη (2):

$I_2 = \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2(2-1)}I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x$. Άρα

$$\int \frac{x^6+x^4+2x^2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\tau o\xi\varepsilon\phi\, x + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + c \ .$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{4x^2-6x+1}{x^3-x^2}dx$.

Λύση

Πρώτα παραγοντοποιώ τον παρονομαστή: $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

Αναλύω τώρα το κλάσμα $\frac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Ο παράγοντας x^2 έχει ως ρίζα το 0 βαθμού πολλαπλότητας 2,

ενώ ο παράγοντας $x-1$ έχει το 1 ως απλή ρίζα.

Άρα η ανάλυση θα γίνει ως εξής:

$\frac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)} = \frac{\mathrm{A}}{x} + \frac{\mathrm{B}}{x^2} + \frac{\Gamma}{x-1}$ Ε.Κ.Π. $= x^2(x-1)$. Άρα

$$4x^2 - 6x + 1 = \mathrm{A}x(x-1) + \mathrm{B}(x-1) + \Gamma x^2 = (\mathrm{A}+\Gamma)x^2 + (\mathrm{B}-\mathrm{A})x - \mathrm{B} \ .$$

Επειδή τα πολυώνυμα αυτά είναι εκ ταυτότητος ίσα, δηλαδή αληθεύουν για κάθε τιμή του x, οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους θα είναι ίσοι. Άρα
$\mathrm{A}+\Gamma=4,\ \mathrm{B}-\mathrm{A}=-6,\ -\mathrm{B}=1$, με λύση του συστήματος $\mathrm{A}=5,\ \mathrm{B}=-1,\ \Gamma=-1$.

Τις τιμές αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε και διαφορετικά.
Θέτουμε και στα δύο μέλη της σχέσης

$$4x^2-6x+1=\mathrm{A}x(x-1)+\mathrm{B}(x-1)+\Gamma x^2$$

τυχαίες τιμές του x, εφόσον η σχέση αυτή ισχύει για κάθε x, κυρίως εκείνα τα x που μηδενίζουν τις παραστάσεις Α, Β, Γ. Οι τιμές αυτές είναι $x = 0$ και $x = 1$. Επειδή όμως έχουμε τρεις αγνώστους Α, Β, Γ, δίνουμε μία ακόμα τιμή (αυθαίρετη) $x = 2$.
Έτσι, προκύπτουν εύκολα τις τιμές των Α, Β, Γ.

Για $x = 0$ προκύπτει: $1 = -\mathrm{B}$, άρα $\mathrm{B} = -1$.

Για $x = 1$ προκύπτει: $-1 = \Gamma$, άρα $\Gamma = -1$.

Για $x = 2$ προκύπτει: $5 = 2\mathrm{A}+\mathrm{B}+4\Gamma$, άρα $\mathrm{A} = 5$.

Επομένως

$$\frac{4x^2-6x+1}{x^2(x-1)}=\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-1}.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int\frac{4x^2-6x+1}{x^3-x^2}dx=\int\frac{5dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x-1}=5\ln|x|+\frac{1}{x}-\ln|x-1|+c.$$

4) Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.

Λύση

Επειδή ο παρονομαστής δεν παραγοντοποιείται, εφόσον έχει αρνητική διακρίνουσα, θα το λύσουμε σύμφωνα με τον τρόπο που αναφέραμε, με αντικατάσταση, αφού μετασχηματίσουμε τον παρονομαστή σε άθροισμα τετραγώνων. Έτσι έχουμε

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Θέτουμε $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$, οπότε $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$ και $x=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}dt = \int \frac{\frac{3}{4}t+\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}(t^2+1)}dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t$$

Αντικαθιστώντας το t με το ίσο του $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, (απ’ τη σχέση $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$), βρίσκουμε

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4x^2+4x+1}{3}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c \text{ ή}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c_1, \text{ όπου } c_1 = c+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα το υπολογίζουμε στη πράξη πιο εύκολα ως εξής (υπό τον όρο ότι η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική). Επειδή ο αριθμητής είναι πρωτοβάθμιος ως προς x, τον μετασχηματίζουμε έτσι ώστε να δημιουργήσουμε την παράγωγο του παρονομαστή, που είναι $2x+1$, και κάποιο άλλο αριθμό. Στη συνέχεια διασπάμε το αρχικό ολοκλήρωμα σε δύο άλλα που λύνονται εύκολα. Έτσι έχουμε

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με το γνωστό τρόπο που είδαμε πριν. Έτσι, θέτουμε $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$, οπότε $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$. Άρα

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t \text{ . Επομένως}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\,.$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$ (*Απάντηση*: $-\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right| + c$),

β) $\int \frac{dx}{x^2-9}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$),

γ) $\int \frac{dx}{x^3+x}$ (*Απάντηση*: $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$),

δ) $\int \frac{dx}{x^4-1}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x + c$),

ε) $\int \frac{xdx}{(x-2)^2}$ (*Απάντηση*: $\ln|x-2| - \frac{x}{x-2} + c$),

στ) $\int \frac{(x+1)dx}{2x^2-3x+1}$ (*Απάντηση*: $2\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|2x-1| + c$),

ζ) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ (*Απάντηση*: $\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\ln|x+1| + c$),

η) $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ (*Απ.*: $\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x - \ln(x^2+1) + 2\ln|x-1| + \frac{x(3x-1)}{(x-1)(x^2+1)} + c$),

θ) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3-x^2-2x}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{6}\ln\left|x^3(x-2)\right| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + c$),

ι) $\int \frac{1}{x(x+1)(x^2+1)^2}dx$ (*Απ.* $-\frac{\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x}{2} - \frac{3}{8}\ln(x^2+1) - \frac{\ln|x+1|}{4} + \ln|x| + \frac{1-x}{4(x^2+1)} + c$)

ια) $\int \frac{(3x^2+x-2)dx}{(x-1)(x^2+1)}$ (*Απάντηση*: $3\tau o\xi\varepsilon\varphi\, x + \ln\left|(x-1)(x^2+1)\right| + c$),

ιβ) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3}$ (*Απάντηση*: $\ln|x-1| - \frac{2x-1}{(x-1)^2} + c$),

ιγ) $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx$, (*Απάντηση*: $\frac{2}{3}\ln\left|(x-1)(x^3-1)^2\right| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + c$),

ιδ) $\int \frac{x^5}{x^3+1}dx$ (*Απάντηση*: $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$),

ιε) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx$ (*Απάντηση*: $\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+c$),

ιστ) $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ (*Απάντηση*: $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}+c$),

ιζ) $\int \frac{1-x^3}{x(x^2+1)}dx$ (*Απάντηση*: $\textit{τοξεφ}\, x-\frac{\ln(x^2+1)}{2}+\ln|x|-x+c$).

9.5 Ολοκληρώματα που ανάγονται με αντικατάσταση σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Θα εξετάσουμε τώρα διάφορες μορφές ολοκληρωμάτων, τα οποία με κατάλληλη αντικατάσταση ανάγονται σε ολοκληρώματα ρητής συνάρτησης.

9.5.1 1η Μορφή: $\int R(e^x)dx$ όπου $R(e^x)$ ρητή συνάρτηση του e^x

Κάνουμε την αντικατάσταση $e^x=t$ οπότε $d(e^x)=dt$ ή $e^x dx=dt$ ή $tdx=dt$ οπότε $dx=dt/t$. Τελικά προκύπτει ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx$.

Λύση

Θέτουμε $e^x=t$ οπότε το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx=\int \frac{t^3}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{t^2dt}{t+1}=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$ (εκτελέσαμε τη διαίρεση). Άρα

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|+c=\frac{e^{2x}}{2}-e^x+\ln(e^x+1)+c$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ (*Απάντηση*: $\frac{e^{-x}}{3}+\frac{\ln\left|e^x-3\right|-x}{9}+c$),

β) $\int \frac{e^{2x}-4e^x}{e^{2x}-1}dx$ (*Απάντηση*: $\frac{\ln\left|e^{2x}-1\right|}{2}-2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c$),

γ) $\int \dfrac{dx}{e^{2x}(e^x-1)}$ (*Απάντηση*: $e^{-x}+\dfrac{e^{-2x}}{2}+\ln\left|e^x-1\right|-x+c$),

δ) $\int \dfrac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$ (*Απάντηση*: $x-\ln(3e^x+1)+c$),

ε) $\int \dfrac{e^x-1}{e^x+1}dx$ (*Απάντηση*: $2\ln(e^x+1)-x+c$),

στ) $\int e^x\sqrt{1-e^x}\,dx$ (*Απάντηση*: $-\dfrac{2(1-e^x)^{3/2}}{3}+c$).

9.5.2 2η Μορφή: $\int R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$ όπου $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ είναι ρητή συνάρτηση των $\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x$.

Γενικά εκτελούμε τον μετασχηματισμό $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}=t$ και εκφράζουμε το ημίτονο και συνημίτονο του x συναρτήσει του t απ' τους τύπους

$$\eta\mu x=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Επίσης $d(\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2})=dt$ ή $\left(1+\varepsilon\varphi^2\dfrac{x}{2}\right)\dfrac{1}{2}dx=dt$ ή $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Με αντικατάσταση όλων αυτών προκύπτει τελικά ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

Ωστόσο, σε ειδικές περιπτώσεις ρητών συναρτήσεων του ημx, συνx είναι προτιμότερο, αντί της αντικατάστασης $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}=t$ να κάνουμε άλλες αντικαταστάσεις. Και μάλιστα:

α) Αν η $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ είναι *περιττή* συνάρτηση ως προς $\eta\mu x$,
θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=t$.

β) Αν η $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ είναι *περιττή* συνάρτηση ως προς $\sigma\upsilon\nu x$,
θέτουμε $\eta\mu x=t$

γ) Αν η $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ είναι *άρτια* συνάρτηση ως προς $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$,
θέτουμε $\varepsilon\varphi x$.

Και στις τρεις περιπτώσεις, το ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης του t.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση

Θέτουμε $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t$, οπότε ως γνωστό $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\eta\mu x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Έτσι: $\int \frac{dx}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{1+t}=\ln|t+1|+c=\ln\left|\varepsilon\phi\frac{x}{2}+1\right|+c$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 xdx$.

Λύση

Η συνάρτηση $\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι περιττή ως προς $\eta\mu x$.

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=t$, οπότε $d(\sigma\upsilon\nu x)=dt$ ή $\eta\mu xdx=-dt$.

Έτσι έχουμε

$$\int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 xdx=\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x\,dx=\int (1-t^2)\cdot t^2(-dt)=-\int (t^2-t^4)dt=$$

$$=-\int (t^2-t^4)dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=-\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3}+\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5}+c$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{2\eta\mu^2 x+3\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Λύση

Η συνάρτηση $R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ είναι άρτια ως προς $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$.

Επομένως θέτουμε $\varepsilon\varphi x=t$.

Διαφορίζουμε $d(\varepsilon\varphi x)=dt$ ή $(1+\varepsilon\varphi^2 x)dx=dt$ ή $(1+t^2)dx=dt$, άρα

$$dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Εκφράζουμε τώρα τα $\eta\mu^2 x,\ \sigma\upsilon\nu^2 x$ συναρτήσει της $\varepsilon\varphi x$. Είναι:

$\eta\mu^2 x=\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+t^2}$. Έτσι,

$$\int \frac{dx}{2\eta\mu^2 x+3\sigma\upsilon\nu^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\frac{t^2}{1+t^2}+3\frac{1}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{3+2t^2}=\int \frac{dt}{2(t^2+\frac{3}{2})}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}.$$

Θέτουμε $t=\sqrt{\frac{3}{2}}\omega$, οπότε $dt=\sqrt{\frac{3}{2}}d\omega$ και επομένως

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+3/2}=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{3/2}\,d\omega}{3/2\,(\omega^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3/2}}{3/2}\int\frac{d\omega}{\omega^2+1}=\frac{\sqrt{6}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\omega=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)=\frac{\sqrt{6}}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon\varphi\, x\right)+c$$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{dx}{1+\sigma\varphi\, x}$.

Λύση

Θέτουμε $\varepsilon\varphi\, x=t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Επίσης $\sigma\varphi\, x=\frac{1}{t}$. Έτσι έχουμε

$$I=\int\frac{dx}{1+\sigma\varphi\, x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{t}}=\int\frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{\mathrm{A}}{t+1}+\frac{\mathrm{B}t+\Gamma}{t^2+1}\Rightarrow t=\mathrm{A}(t^2+1)+(\mathrm{B}t+\Gamma)(t+1)\text{ ή}$$

$$t=\mathrm{A}t^2+\mathrm{A}+\mathrm{B}t^2+\mathrm{B}t+\Gamma t+\Gamma=(\mathrm{A}+\mathrm{B})t^2+(\mathrm{B}+\Gamma)t+\mathrm{A}+\Gamma.$$

Έτσι προκύπτει:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=0,\ \mathrm{B}+\Gamma=1,\ \mathrm{A}+\Gamma=0,\text{ και } \mathrm{A}=-\frac{1}{2},\ \mathrm{B}=\frac{1}{2},\ \Gamma=\frac{1}{2}.$$

Άρα $\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}=-\frac{1}{2(t+1)}+\frac{t+1}{2(t^2+1)}$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int\frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{t+1}{t^2+1}dt=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\int\frac{2tdt}{t^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}+\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\ln(t^2+1)+\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, t$$

Με αντικατάσταση στο τελευταίο αποτέλεσμα $t=\varepsilon\varphi\, x$, παίρνουμε

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\varepsilon\varphi\, x + 1\right| + \frac{1}{4}\ln(\varepsilon\varphi^{2} x + 1) + \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\,(\varepsilon\varphi\, x) + c.$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{\eta\mu^{3} x\sigma\upsilon\nu\, x}$ (*Απάντηση*: $\ln\left|\varepsilon\varphi\, x\right| - \frac{1}{2\eta\mu^{2} x} + c$),

β) $\int \frac{1+\eta\mu^{2} x}{\sigma\upsilon\nu^{2} x}dx$ (*Απάντηση*: $2\varepsilon\varphi\, x - x + c$),

γ) $\int \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu\, x}$ (*Απάντηση*: $\varepsilon\varphi(x/2) + c$),

δ) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu(x/2)}$ (*Απάντηση*: $\ln\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(x/2)} + \varepsilon\varphi(x/2)\right) + c$),

ε) $\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi^{2} x}$ (*Απάντηση*: $-\sigma\varphi\, x - x + c$),

στ) $\int \sigma\upsilon\nu^{3}(x+3)dx$ (*Απάντηση*: $\ln\left|\varepsilon\varphi\, x\right| - \frac{1}{2\eta\mu^{2} x} + c$),

ζ) $\int \frac{\varepsilon\varphi^{3} x}{\sigma\upsilon\nu^{4} x}dx$ (*Απάντηση*: $\left(\frac{\eta\mu^{2} x}{4} - \frac{1}{12}\right)\Big/\sigma\upsilon\nu^{6} x + c$),

η) $\int \frac{\eta\mu(2x)dx}{1+\eta\mu^{2} x}$ (*Απάντηση*: $\ln(\eta\mu^{2} x + 1) + c$),

θ) $\int \frac{1-\eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x}{1+\eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu\, x}dx$ (*Απάντηση*: $-2\ln\left|\sigma\varphi\, x + \frac{1}{\eta\mu\, x} + 1\right| - x + c$),

ι) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu\, x dx}{1+\sigma\upsilon\nu\, x}$ (*Απάντηση*: $\frac{x\sigma\upsilon\nu\, x - \eta\mu\, x + x}{1+\sigma\upsilon\nu\, x} + c$).

9.5.3 3η Μορφή: $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\alpha x + \beta}\right)dx$ ή $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται πάντα, θέτοντας

$$\sqrt[n]{\alpha x + \beta} = t \text{ αντίστοιχα } \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t,$$

απ' όπου προκύπτει

$$\alpha x + \beta = t^{n} \text{ αντίστοιχα } \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^{n}.$$

Λύνοντας τις τελευταίες σχέσεις ως προς x, παίρνουμε

$$x=\frac{t^n-\beta}{\alpha} \text{ αντίστοιχα } x=\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}$$

και διαφορίζοντας έχουμε

$$dx=\frac{nt^{n-1}dt}{\alpha} \text{ αντίστοιχα } dx=n(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}dt\,.$$

Μετά την αντικατάσταση προκύπτουν ολοκληρώματα ρητής συνάρτησης.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{2x-3}dx$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{2x-3}=t$ και έχουμε $2x-3=t^2$, $2dx=2tdt$, $x=\dfrac{t^2+3}{2}$. Άρα

$$\int x\sqrt{2x-3}dx=\int\frac{t^2+3}{2}t\cdot tdt=\frac{1}{2}\int(t^4+3t^2)dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{3}{2}\cdot\frac{t^3}{3}=\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{2}=$$
$$=\frac{1}{10}(2x-3)^{5/2}+\frac{1}{2}(2x-3)^{3/2}+c$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}dx$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$ και έχουμε $\dfrac{1-x}{1+x}=t^2$ ή $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ και $dx=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$,

οπότε με τις αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int t\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt=-4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=-4\int\frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^2}dt=$$
$$=-4\int\frac{dt}{1+t^2}+4\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=-4\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t+4I_2$$

όπου $I_2=\dfrac{t}{2(1+t^2)}+\dfrac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t$ (παράδειγμα 1, παρ. 8.4). Άρα

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=-4\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t+\frac{2t}{1+t^2}+2\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t=\frac{2t}{1+t^2}-2\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t\,.$$

Τελικά, αντικαθιστούμε στο τελευταίο ολοκλήρωμα το t με το ίσο του

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\frac{1-x}{1+x}}-2\tau o\xi\varepsilon\varphi\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{1-x^2}-2\tau o\xi\varepsilon\varphi\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c\ .$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$ (*Απάντηση*: $2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)+c$),

β) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ (*Απάντηση*: $3\ln\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}-2\right)+c$),

γ) $\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ (*Απάντηση*: $\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c$).

9.5.4 4η Μορφή: $\int R(x,\ \sqrt[\nu_1]{\omega},\ \sqrt[\nu_2]{\omega},\ \ldots,\ \sqrt[\nu_\kappa]{\omega})\,dx$, όπου $\omega=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$

Αν ν είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των $\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\nu_\kappa$,

θέτουμε $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/\nu}=t$, οπότε $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^\nu$

και εργαζόμενοι όπως πριν καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[6]{1+x}=(1+x)^{1/6}=t$ (6 είναι το Ε.Κ.Π. των 2 και 3),

οπότε $1+x=t^6$ και $dx=6t^5dt$. Επίσης

$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=(t^6)^{1/2}=t^3$ και $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{1/3}=(t^6)^{1/3}=t^2$,

και μετά την αντικατάσταση των ριζικών και του διαφορικού το I γίνεται

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx=\int\frac{t^3}{1+t^2}6t^5dt=6\int\frac{t^8dt}{1+t^2}=6\int\left(t^6-t^4-t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=6\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+6\frac{t^3}{3}-6t+6\tau o\xi\varepsilon\varphi\ t.$$

Με αντικατάσταση του t με το ίσο του έχουμε τελικά

$$\frac{6}{7}(1+x)^{7/6}-\frac{6}{5}(1+x)^{5/6}+2(1+x)^{1/2}-6(1+x)^{1/6}+6\tau o\xi\varepsilon\varphi\left\{(1+x)^{1/6}\right\}+c.$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (*Απάντηση*: $4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+c$),

β) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ (*Απάντηση*: $-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+c$),

γ) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$ (*Απάντηση*: $\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(80\sqrt{x+1}+35x^2-42x+63\right)}{280}+c$).

9.5.5 5η Μορφή: i) $\int R(x,\ \sqrt{x^2-\mu^2})\,dx$, ii) $\int R(x,\ \sqrt{x^2+\mu^2})\,dx$,

Και στις δύο περιπτώσεις αντικαθιστούμε τα ριζικά με $t-x$. Έτσι έχουμε

i) $\sqrt{x^2-\mu^2}=t-x$ ή $x^2-\mu^2=t^2+x^2-2tx \Rightarrow x=\frac{t^2+\mu^2}{2t}$. Άρα

$$\sqrt{x^2-\mu^2}=t-\frac{t^2+\mu^2}{2t}=\frac{t^2-\mu^2}{2t}.$$

Διαφορίζοντας τη σχέση $x=\frac{t^2+\mu^2}{2t}$ έχουμε

$$dx=\frac{2t\cdot 2t-(t^2+\mu^2)\cdot 2}{4t^2}dt=\frac{t^2-\mu^2}{2t^2}dt,$$

οπότε καταλήγουμε σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης ως προς *t*.

ii) $\sqrt{x^2+\mu^2}=t-x$ ή $x^2+\mu^2=t^2+x^2-2tx \Rightarrow x=\frac{t^2-\mu^2}{2t}$. Άρα

$$\sqrt{x^2+\mu^2}=t-\frac{t^2-\mu^2}{2t}=\frac{t^2+\mu^2}{2t}.$$

Διαφορίζοντας τη σχέση $x=\frac{t^2-\mu^2}{2t}$ έχουμε

$$dx=\frac{2t\cdot 2t-(t^2-\mu^2)\cdot 2}{4t^2}dt=\frac{t^2+\mu^2}{2t^2}dt,$$

οπότε καταλήγουμε πάλι σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης ως προς *t*.

Παρατήρηση

Η δεύτερη περίπτωση (ii) μπορεί να αντιμετωπιστεί και διαφορετικά.

Θέτουμε $x = \mu \cdot \varepsilon\varphi\omega$, οπότε $dx = \mu(1+\varepsilon\varphi^2\omega)d\omega$. Επίσης

$$\sqrt{x^2+\mu^2} = \sqrt{\mu^2\varepsilon\varphi^2\omega+\mu^2} = \mu\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{\mu}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται ολοκλήρωμα ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

Λύση

Το ολοκλήρωμα γράφεται $\int \frac{dx}{\sqrt{3(x^2-2/3)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2/3}}$.

Θέτουμε $\sqrt{x^2-2/3} = t-x$, $x^2-2/3 = t^2+x^2-2tx$ ή $x = \frac{t^2+2/3}{2t}$ και

$dx = \frac{t^2-2/3}{2t^2}dt$. Άρα $\sqrt{x^2-2/3} = t - \frac{t^2+2/3}{2t} = \frac{t^2-2/3}{2t}$.

Αντικαθιστώντας τώρα το ριζικό και το διαφορικό *dx* στο ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2/3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{t^2-2/3}{2t^2}dt}{\frac{t^2-2/3}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t|.$$

Αντικαθιστώντας το $t = \sqrt{x^2-2/3}+x$ στο τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{x^2-2/3}+x\right|+c$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.

Λύση

Το ολοκλήρωμα γράφεται $\int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2+3/2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3/2}}$.

Θέτουμε $\sqrt{x^2+3/2} = t-x$, $x^2+3/2 = t^2+x^2-2tx \Rightarrow x = \frac{t^2-3/2}{2t}$ και

$dx = \frac{t^2+3/2}{2t^2}dt$. Άρα $\sqrt{x^2+3/2} = t - \frac{t^2-3/2}{2t} = \frac{t^2+3/2}{2t}$.

Αντικαθιστώντας τώρα το ριζικό και το διαφορικό *dx* στο ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{t^2+3/2}{2t^2}dt}{\frac{t^2+3/2}{2t}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|t|.$$

Αντικαθιστώντας το $t=\sqrt{x^2+3/2}+x$ στο τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{x^2+3/2}+x\right|+c$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

Λύση

Θέτουμε $x=2\varepsilon\varphi\omega$, οπότε $dx=2\frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$, $\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{1+\varepsilon\phi^2\omega}=2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Αντικαθιστώντας το x^2, dx και το ριζικό στο αρχικό ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int\frac{\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}d\omega}{4\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\cdot\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\omega}}=\frac{1}{4}\int\frac{\sigma\upsilon\nu\omega\, d\omega}{\eta\mu^2\omega}=\frac{1}{4}\int\frac{d(\eta\mu\omega)}{\eta\mu^2\omega}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\eta\mu^{-2}\omega d(\eta\mu\omega)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\eta\mu^{-2+1}\omega}{-2+1}=-\frac{1}{4\eta\mu\omega}$$

Στο τελευταίο αποτέλεσμα αντικαθιστούμε ολόκληρο το $\eta\mu\omega$ συναρτήσει της $\varepsilon\varphi\omega$ απ' τον τύπο $\eta\mu\omega=\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}=\frac{x/2}{\sqrt{1+(x/2)^2}}$. Άρα το τελικό ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=-\frac{\sqrt{1+(x/2)^2}}{4\cdot x/2}=-\frac{\sqrt{1+(x/2)^2}}{2x}+c$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (*Απάντηση*: $2\ln\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}+c$),

β) $\int\frac{dx}{x+1+\sqrt{x^2+1}}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)-\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}-x)+c$),

γ) $\int\frac{(x^2+x+1)dx}{\sqrt{x^2-1}}$ (*Απάντηση*: $\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)+\frac{(x+2)\sqrt{x^2-1}}{2}+c$).

2) Θέτοντας $x=\alpha\varepsilon\varphi\ t$, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{2\alpha^3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{x}{2\alpha^2(\alpha^2+x^2)}+c$),

β) $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ (*Απάντηση*: $\ln\left(\sqrt{\alpha^2+x^2}+x\right)+c$),

γ) $\int \frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}}{x}dx$. (*Απάντηση*: $\alpha\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+x^2}-\alpha}{x}\right)+\sqrt{\alpha^2+x^2}+c$).

9.5.6 6η Μορφή: $\int R(x,\ \sqrt{\mu^2-x^2})\,dx$

Εδώ κάνουμε πάντα την αντικατάσταση:

$$x=\mu\cdot\eta\mu\omega \text{, οπότε } dx=\mu\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\, d\,\omega,\ \sqrt{\mu^2-x^2}=\mu\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}=\mu\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\ ,$$

δηλαδή το αρχικό ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Λύση

Θέτουμε $x=2\eta\mu\omega$, οπότε $dx=2\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$, $\sqrt{4-x^2}=2\sigma\upsilon\nu\omega$.

Αντικαθιστούμε στο αρχικό ολοκλήρωμα και έχουμε

$$I=\int \frac{4\eta\mu^2\omega+2\eta\mu\omega+1}{2\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\omega\, d\,\omega=\int(4\eta\mu^2\omega+2\eta\mu\omega+1)\,d\,\omega=$$

$$=4\int\eta\mu^2\omega\, d\,\omega+2\int\eta\mu\omega\ d\,\omega+\int d\,\omega=4\int\eta\mu^2\omega\, d\,\omega-2\sigma\upsilon\nu\omega+\omega\ .$$

Υπολογίζουμε τώρα το $\int\eta\mu^2\omega\, d\,\omega$.

Απ' την Τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\omega=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2}$. Άρα

$$\int\eta\mu^2\omega\, d\,\omega=\int\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2}d\omega=\int\frac{d\omega}{2}-\int\frac{\sigma\upsilon\nu(2\omega)d\omega}{2}=$$

$$=\frac{\omega}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{\sigma\upsilon\nu(2\omega)d(2\omega)}{2}=\frac{\omega}{2}-\frac{1}{4}\eta\mu 2\omega=\frac{\omega}{2}-\frac{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}{2}.$$

(Στην επόμενη παράγραφο θα γνωρίσουμε αναγωγικούς τύπους με τους οποίους υπολογίζονται τα ολοκληρώματα $\int \eta\mu^{\nu} x dx,\ \int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx,\ \nu \geq 2$).

Έτσι έχουμε τελικά μετά τις αντικαταστάσεις

$$I = 3\omega - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega = 3\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{2} - x\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \sqrt{4-x^2} + c$$

(απ' τη σχέση $x = 2\eta\mu\omega,\ \Rightarrow \eta\mu\omega = \frac{x}{2},\ \Rightarrow \omega = \tau o\xi\eta\mu\frac{x}{2}$).

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (*Απάντηση*: $2\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c$),

β) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (*Απάντηση*: $-\frac{\sqrt{4-x^2}(x^2+8)}{3} + c$),

γ) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ (*Απάντηση*: $2\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4}\sqrt{(4-x^2)^3} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c$).

9.5.7 7η Μορφή: $\int R(x,\ \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})dx$

Όπως είναι γνωστό από τη στοιχειώδη Άλγεβρα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left\{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2\right\} \text{ όταν } \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \text{ όταν } \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left\{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}\right)^2\right\} \text{ όταν } \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση, όταν $\alpha > 0$

α) Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, θέτουμε $\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \mu,\ x + \frac{\beta}{2\alpha} = t$, οπότε $dx = dt$ και $x = t - \frac{\beta}{2\alpha}$ και το ολοκλήρωμα $\int R(x,\ \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})dx$ παίρνει τη μορφή

$$\int R\left(t - \beta/2\alpha\,,\ \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{t^2 - \mu^2}\right)dt = \int R_1(t,\ \sqrt{t^2 - \mu^2})\,dt\,,$$

δηλαδή καταλήγει στη **5η μορφή (i)** της παρ. 8.5.5.

β) Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ τότε $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \sqrt{\alpha}\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$ δηλαδή η συνάρτηση R είναι ρητή συνάρτηση του x.

γ) Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ η συνάρτηση R γίνεται όπως και στη πρώτη περίπτωση, $\int R_1(t,\ \sqrt{t^2 + \mu^2})\,dt$ και το ολοκλήρωμα παίρνει τη **5η μορφή (ii)** της παρ. 8.5.5.

2η περίπτωση, όταν α < 0

α) Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \le 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γίνεται αρνητικό για κάθε πραγματικό x, επομένως το ριζικό δεν ορίζεται.

β) Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ τότε το τριώνυμο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (-\alpha)\left\{\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2 - \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right\} \text{ όπου } -\alpha > 0\,.$$

Θέτουμε: $\dfrac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \mu$, $x + \dfrac{\beta}{2\alpha} = t$, οπότε $dx = dt$ και $x = t - \dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Επίσης είναι $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\mu^2 - t^2}$. Άρα

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx = \int R\left(t - \beta/2\alpha, \sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\mu^2 - t^2}\right)dt = \int R_1(t, \sqrt{\mu^2 - t^2})\,dt\,,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα παίρνει τη **6η μορφή** της παρ. 8.5.6.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

Λύση

Το τριώνυμο στο ριζικό γράφεται

$$x^2 + x - 1 = x^2 + 2x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\,.$$

Θέτουμε $x + \dfrac{1}{2} = t$, $x = t - \dfrac{1}{2}$, $dx = dt$ και το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} \,.$$

Ακολουθούμε τώρα τον τρόπο επίλυσης της 5ης μορφής **(i)** παρ. 8.5.5.

Θέτουμε $\sqrt{t^2-\frac{5}{4}} = \omega - t$, $t^2 - \frac{5}{4} = \omega^2 + t^2 - 2\omega \cdot t$ ή $t = \frac{\omega^2 + 5/4}{2\omega}$.

Άρα $\sqrt{t^2-\frac{5}{4}} = \omega - \frac{\omega^2+5/4}{2\omega} = \frac{\omega^2-5/4}{2\omega}$, $dt = \frac{\omega^2-5/4}{2\omega^2} d\,\omega$ και

$t - \frac{1}{2} = \frac{\omega^2+5/4}{2\omega} - \frac{1}{2} = \frac{\omega^2-\omega+5/4}{2\omega}$.

Έτσι το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται με τις αντικαταστάσεις

$$\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} = \int \frac{\frac{\omega^2-5/4}{2\omega^2}d\omega}{\frac{\omega^2-\omega+5/4}{2\omega}\cdot\frac{\omega^2-5/4}{2\omega}} = 2\int \frac{d\omega}{\omega^2-\omega+5/4} = 2\int \frac{d(\omega-1/2)}{(\omega-1/2)^2-1} =$$

$$= 2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\omega-\frac{1}{2}\right) = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}+t-\frac{1}{2}\right) = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)+c$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2+4x+4}}$.

Λύση

Εδώ είναι $\alpha = -1 < 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 + 4\cdot 4 = 32 > 0$. Άρα

$$-x^2+4x+4 = -x^2+2x\cdot 2-4+4+4 = 8-(x^2-4x+4) = 8-(x-2)^2 .$$

Θέτουμε $x-2=t$, οπότε $x=t+2$, $dx = dt$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2+4x+4}} = \int \frac{(t+2)dt}{\sqrt{8-t^2}}$$

δηλαδή ολοκλήρωμα της 6ης μορφής της παρ. 8.5.6.

Θέτουμε $t = \sqrt{8}\eta\mu\omega$, $dt = \sqrt{8}\sigma\upsilon\nu\omega\, d\,\omega$,

Άρα $\sqrt{8-t^2} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{1-\eta\mu^2\omega} = \sqrt{8}\sigma\upsilon\nu\omega$. Έτσι έχουμε

$$\int \frac{(t+2)dt}{\sqrt{8-t^2}} = \int \frac{(\sqrt{8}\eta\mu\omega+2)\sqrt{8}\sigma\upsilon\nu\omega\, d\,\omega}{\sqrt{8}\sigma\upsilon\nu\omega} = 2\int d\,\omega + \sqrt{8}\int \eta\mu\omega\, d\,\omega = 2\omega - \sqrt{8}\sigma\upsilon\nu\omega \,.$$

Τα ω, $\sigma\upsilon\nu\omega$ αντικαθιστούμε ως εξής:

Απ’ τη σχέση $t=\sqrt{8}\eta\mu\omega \Rightarrow \eta\mu\omega=\frac{t}{\sqrt{8}}=\frac{x-2}{\sqrt{8}} \Rightarrow \omega=\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x-2}{\sqrt{8}}\right)$.

Πάλι, απ’ τη σχέση $t=\sqrt{8}\eta\mu\omega \Rightarrow t^2=8\eta\mu^2\omega=8(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega)$, οπότε

$8\sigma\upsilon\nu^2\omega=8-t^2$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\sqrt{8-t^2}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{-x^2+4x+4}}{\sqrt{8}}$.

Άρα τελικά το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{-x^2+4x+4}}=2\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x-2}{\sqrt{8}}\right)-\sqrt{-x^2+4x+4}+c.$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int\sqrt{x^2-3x+2}dx$

($A\pi.$: $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)}{4}-\frac{\ln\left(2\sqrt{x^2-3x+2}+2x-3\right)}{8}+c$),

β) $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$ (*Απάντηση*: $\ln\left(\sqrt{x(x+2)}+x+1\right)+\sqrt{x(x+2)}+c$),

γ) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (*Απάντηση*: $\frac{3}{2}\tau o\xi\eta\mu\,(x-1)-\frac{(x+3)\sqrt{2x-x^2}}{2}+c$),

δ) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{2}\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{\sqrt{5}(2x+1)}{5}\right)-\sqrt{1-x-x^2}+c$),

ε) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ (*Απάντηση*: $\ln\left(\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right)+c$),

στ) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+4)}}$ (*Απάντηση*: $\ln\left(\sqrt{x(x+4)}+x+2\right)+c$).

9.5.8 8η Μορφή: $\int R(x,\ \sqrt{\alpha x+\beta},\ \sqrt{\gamma x+\delta})dx$

Θέτουμε ένα από τα δύο ριζικά ίσο με t π.χ.

$\sqrt{\gamma x+\delta}=t$, οπότε $x=\frac{t^2-\delta}{\gamma}$, $dx=\frac{2t}{\gamma}dt$

και το άλλο ριζικό γίνεται

$$\sqrt{\alpha x+\beta}=\sqrt{\frac{\alpha t^2-\alpha\delta}{\gamma}+\beta}=\sqrt{\kappa t^2+\lambda}\text{, όπου } \kappa=\frac{\alpha}{\gamma},\ \lambda=\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}.$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα τελικά ανάγεται στην 5η μορφή **(ii)** της παρ. 8.5.5.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$.

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x+1}=t$, οπότε $x=t^2-1,\ dx=2tdt$ και $\sqrt{x+2}=\sqrt{t^2+1}$.

Έτσι, το ολοκλήρωμα μετά τις αντικαταστάσεις γίνεται

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2+1}+t}.$$

Για την επίλυση του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε

$$\sqrt{t^2+1}=t-\omega\text{, οπότε } t^2+1=t^2+\omega^2-2t\omega \text{ ή}$$

$$t=\frac{\omega^2-1}{2\omega},\ dt=\frac{\omega^2+1}{2\omega^2}d\omega\text{, και } \sqrt{t^2+1}=\frac{\omega^2-1}{2\omega}-\omega=-\frac{\omega^2+1}{2\omega}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2+1}+t}=\int \frac{2\frac{\omega^2-1}{2\omega}\cdot\frac{\omega^2+1}{2\omega^2}d\omega}{-\frac{\omega^2+1}{2\omega}+\frac{\omega^2-1}{2\omega}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\omega^4-1}{\omega^2}d\omega=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\omega^2 d\omega+\frac{1}{2}\int\frac{d\omega}{\omega^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega^3}{3}-\frac{1}{2\omega}=-\frac{\omega^3}{6}-\frac{1}{2\omega}+c$$

όπου $\omega=t-\sqrt{t^2+1}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}$.

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{(x+1)^3}\right)+c$),

β) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{30}\left(3\sqrt{(x+1)^5}-\sqrt{(x-3)^3}(3x+11)\right)+c$),

γ) $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}dx$

(*Απάντηση*: $\frac{\sqrt{x+1}\left(3\sqrt{x-1}+2x-4\right)}{3}-2\ln\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)+c$).

9.6 Αναγωγικοί τύποι

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης υψωμένης σε δύναμη, οδηγεί πολλές φορές με κατάλληλους μετασχηματισμούς σε ολοκλήρωμα της ίδιας μορφής με το αρχικό αλλά με μικρότερο εκθέτη. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα συναντήσαμε στην παράγραφο 8.4 το $I_\nu = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\nu}$. Στην περίπτωση αυτή, με επανειλημμένη εφαρμογή του τύπου που υπολογίσαμε, αναγόμαστε τελικά σε γνωστά ολοκληρώματα. Τέτοιοι αναγωγικοί τύποι υπάρχουν σε πολλές περιπτώσεις συναρτήσεων που υψώνονται στη ν – στή δύναμη. Σ’ όλες τις περιπτώσεις, εφαρμόζουμε πάντα την κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Ακολουθούν αναγωγικοί τύποι ολοκληρωμάτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που υψώνονται στη ν – στή δύναμη

1) Υπολογισμός του $\mathrm{A}_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx$.

$$\mathrm{A}_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx = \int \eta\mu^{\nu-1} x \cdot \eta\mu x dx = -\int \eta\mu^{\nu-1} x d(\sigma\upsilon\nu x) = \kappa.\pi.o. =$$
$$= -\left\{\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int \sigma\upsilon\nu x d(\eta\mu^{\nu-1}x)\right\} = -\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x +$$
$$+(\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^{\nu-2}x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = -\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int (1-\eta\mu^2 x)\eta\mu^{\nu-2} x dx =$$
$$= -\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}x dx - (\nu-1)\int \eta\mu^\nu x dx$$

Αν θέσουμε $\mathrm{A}_{\nu-2} = \int \eta\mu^{\nu-2} x dx$ έχουμε

$$\mathrm{A}_\nu = -\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\mathrm{A}_{\nu-2} - (\nu-1)\mathrm{A}_\nu .$$

Λύνοντας ως προς A_ν την τελευταία εξίσωση έχουμε

$$\mathrm{A}_\nu = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\mathrm{A}_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2$$

2) Υπολογισμός του $\mathrm{B}_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$.

$$\mathrm{B}_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x d(\eta\mu x) = \kappa.\pi.o. =$$
$$= \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x \cdot \eta\mu x - \int \eta\mu x d(\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x) = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x \cdot \eta\mu x +$$
$$+(\nu-1)\int \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x \cdot \eta\mu x dx = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x \cdot \eta\mu x + (\nu-1)\int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x dx =$$
$$= \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x \cdot \eta\mu x + (\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x dx - (\nu-1)\int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$$

Θέτοντας πάλι $\mathrm{B}_{\nu-2} = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x dx$ έχουμε

$$\mathrm{B}_\nu = \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\cdot\eta\mu x + (\nu-1)\mathrm{B}_{\nu-2} - (\nu-1)\mathrm{B}_\nu .$$

Λύνοντας ως προς B_ν την τελευταία εξίσωση έχουμε

$$\mathrm{B}_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\cdot\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\mathrm{B}_{\nu-2},\ \nu\ge 2$$

3) Υπολογισμός του $\Gamma_\nu = \int \varepsilon\phi^\nu x dx$.

$$\Gamma_\nu = \int \varepsilon\phi^\nu x dx = \int \varepsilon\phi^{\nu-2}x \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int \varepsilon\phi^{\nu-2}x\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int \varepsilon\phi^{\nu-2}x\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} -$$

$$-\int \varepsilon\phi^{\nu-2}xdx = \int \varepsilon\phi^{\nu-2}xd(\varepsilon\phi x) - \int \varepsilon\phi^{\nu-2}xdx = \frac{\varepsilon\phi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \varepsilon\phi^{\nu-2}xdx$$

και τελικά

$$\Gamma_\nu = \frac{\varepsilon\phi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \Gamma_{\nu-2}$$

4) Υπολογισμός του $\Delta_\nu = \int \sigma\phi^\nu x dx$.

$$\Delta_\nu = \int \sigma\phi^\nu x dx = \int \sigma\phi^{\nu-2}x \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int \sigma\phi^{\nu-2}x\frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}dx = \int \sigma\phi^{\nu-2}x\frac{dx}{\eta\mu^2 x} -$$

$$-\int \sigma\phi^{\nu-2}xdx = -\int \sigma\phi^{\nu-2}xd(\sigma\phi x) - \int \sigma\phi^{\nu-2}xdx = -\frac{\sigma\phi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \sigma\phi^{\nu-2}xdx$$

και τελικά

$$\Delta_\nu = -\frac{\sigma\phi^{\nu-1}x}{\nu-1} - \Delta_{\nu-2} .$$

Ειδικές περιπτώσεις

1) Από τους αναγωγικούς τύπους που βρήκαμε πριν για τα $\mathrm{A}_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx$ και $\mathrm{B}_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$ μπορούμε να υπολογίσουμε και τα $\int \frac{dx}{\eta\mu^\nu x} = \int \eta\mu^{-\nu}x dx$ καθώς και το $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^\nu x} = \int \sigma\upsilon\nu^{-\nu}xdx$. Προς τούτο, λύνουμε τους αναγωγικούς τύπους των A_ν και B_ν ως προς $\mathrm{A}_{\nu-2}$ και $\mathrm{B}_{\nu-2}$ αντίστοιχα, όπου όμως τώρα ο ν υποτίθεται αρνητικός και $|\nu|\ge 3$. Έτσι προκύπτει τελικά:

$$\mathrm{A}_{\nu-2} = \frac{\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x}{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu-1}\mathrm{A}_\nu \text{ και } \mathrm{B}_{\nu-2} = -\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x}{\nu-1} + \frac{\nu}{\nu-1}\mathrm{B}_\nu,\ |\nu|\ge 3 .$$

Π.χ. για $\nu=-5$ θα έχουμε:

$A_{\nu-2} = A_{-7} = \int \eta\mu^{-7} x dx$ και $A_{\nu} = A_{-5} = \int \eta\mu^{-5} x dx$, αντίστοιχα

$B_{\nu-2} = B_{-7} = \int \sigma\upsilon\nu^{-7} x dx$ και $B_{\nu} = B_{-5} = \int \sigma\upsilon\nu^{-5} x dx$.

2) Τα ολοκληρώματα $\int \frac{dx}{\eta\mu x}$ και $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}$ υπολογίζονται κανονικά με τον γενικό τρόπο, θέτοντας $\varepsilon\varphi \frac{x}{2} = t$ και εκφράζοντας τα $\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x$ συναρτήσει της $\varepsilon\varphi \frac{x}{2}$.

Ως γνωστό (2η μορφή της παρ. 8.5.2) είναι:

$$\eta\mu x = \frac{2\varepsilon\varphi \frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$ Άρα

$$A_{-1} = \int \eta\mu^{-1} x dx = \int \frac{dx}{\eta\mu x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c.$$

$$B_{-1} = \int \sigma\upsilon\nu^{-1} x dx = \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{2dt}{(1+t)(1-t)}.$$

Αναλύω το κλάσμα $\frac{2}{(1+t)(1-t)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Είναι

$$\frac{2}{(1+t)(1-t)} = \frac{\alpha}{1+t} + \frac{\beta}{1-t} = \frac{\alpha(1-t)+\beta(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{(\beta-\alpha)t+\alpha+\beta}{(1+t)(1-t)}.$$

Άρα $\beta-\alpha = 0,\ \alpha+\beta = 2$ απ' όπου προκύπτει $\alpha = \beta = 1$.

Έτσι, $\frac{2}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{2dt}{(1+t)(1-t)} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \int \frac{d(1+t)}{1+t} - \int \frac{d(1-t)}{1-t} =$$
$$= \ln|1+t| - \ln|1-t| = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|.$$

Άρα $B_{-1} = \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left|\frac{1+\varepsilon\varphi \frac{x}{2}}{1-\varepsilon\varphi \frac{x}{2}}\right| + c.$

3) Όταν ο εκθέτης των ολοκληρωμάτων $\int \eta\mu^{\nu} x dx$ και $\int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$ είναι ***περιττός*** αριθμός, τότε τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογιστούν και διαφορετικά ως εξής: Αναλύουμε τον περιττό αριθμητή σε γινόμενο ενός άρτιου και ενός πρωτοβάθμιου όρου και τον πρωτοβάθμιο όρο τον εισάγουμε στο διαφορικό, μετατρέποντας τον άρτιο όρο στον τριγωνομετρικό αριθμό του διαφορικού χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$. Π.χ.

$$\int \eta\mu^5 x dx = \int \eta\mu^4 x \cdot \eta\mu\, x dx = -\int \eta\mu^4 x d(\sigma\upsilon\nu\, x) = -\int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 d(\sigma\upsilon\nu\, x) =$$

$$= -\int (1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)\, d(\sigma\upsilon\nu\, x) = -\int d(\sigma\upsilon\nu\, x) + 2\int \sigma\upsilon\nu^2 x d(\sigma\upsilon\nu\, x) -$$

$$-\int \sigma\upsilon\nu^4 x d(\sigma\upsilon\nu\, x) = -\sigma\upsilon\nu\, x + 2\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} - \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5} + c$$

4) Επίσης, όταν ο εκθέτης των ολοκληρωμάτων $\int \eta\mu^{\nu} x dx$ και $\int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$ είναι ***άρτιος*** αριθμός, τότε τα ολοκληρώματα αυτά μπορούν να υπολογιστούν και διαφορετικά ως εξής: Χρησιμοποιούμε τον τύπο της Τριγωνομετρίας

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 \\ 1 - 2\eta\mu^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \\ \eta\mu^2 x = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \end{cases}$$

και υποβιβάζουμε έτσι τις δυνάμεις του $\eta\mu\, x$ και $\sigma\upsilon\nu\, x$. Π.χ.

$$\int \eta\mu^4 x dx = \int (\eta\mu^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \sigma\upsilon\nu 2x d(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1+\sigma\upsilon\nu 4x) dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\int \sigma\upsilon\nu 4x d(4x) = \frac{3x}{8} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + \frac{\eta\mu 4x}{32} + c$$

5) Όταν έχουμε συνδυασμό γινομένου των $\eta\mu\, x$, $\sigma\upsilon\nu\, x$ με διαφορετικές δυνάμεις, της μορφής $\int \eta\mu^{\kappa} x \cdot \sigma\upsilon\nu^{\lambda} x dx$, εφαρμόζουμε την παρακάτω διαδικασία:

α) Αν ένας απ' τους εκθέτες, π.χ. ο κ είναι <u>περιττός</u>, τότε εκφράζουμε το $\eta\mu^{\kappa} x$ ως γινόμενο $\eta\mu^{\kappa-1} x \cdot \eta\mu\, x$ ($\kappa - 1$ άρτιος) και εισάγουμε το $\eta\mu\, x$ στο διαφορικό ως $d(-\sigma\upsilon\nu\, x)$, και εκφράζουμε το $\eta\mu^{\kappa-1} x$ συναρτήσει του $\sigma\upsilon\nu\, x$, οπότε προκύπτει τελικά πολυωνυμικό ολοκλήρωμα.

β) Αν και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι, εκφράζουμε έναν από τους δύο (συνήθως εκείνον με τη μικρότερη δύναμη) συναρτήσει του άλλου, οπότε προκύπτει τελικά ολοκλήρωμα της μορφής $\int \eta\mu^{\nu} x dx$ ή $\int \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$.

6) Τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \eta\mu(\kappa x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\,dx,\ \int \eta\mu(\kappa x)\eta\mu(\lambda x)\,dx,\ \int \sigma\upsilon\nu(\kappa x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\,dx$$

εκφράζονται πάντα σε αθροίσματα ή διαφορές ολοκληρωμάτων απ' τους γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας:

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2}\{\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)\}$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{1}{2}\{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2}\{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\}$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx$.

Λύση

Επειδή το συνημίτονο υψώνεται σε περιττή δύναμη, έχω (ειδική περίπτωση 5α):

$$\int \eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx = \int \eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu^4 x\sigma\upsilon\nu\, x dx = \int \eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu^4 x d(\eta\mu\, x) =$$

$$= \int \eta\mu^4 x(1-\eta\mu^2 x)^2 d(\eta\mu\, x) = \int \eta\mu^4 x(1+\eta\mu^4 x - 2\eta\mu^2 x)d(\eta\mu\, x) =$$

$$= \int \eta\mu^4 x d(\eta\mu\, x) + \int \eta\mu^8 x d(\eta\mu\, x) - 2\int \eta\mu^6 x d(\eta\mu\, x) = \frac{\eta\mu^5 x}{5} + \frac{\eta\mu^9 x}{9} - 2\frac{\eta\mu^7 x}{7} + c$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$.

Λύση

Έχουμε (ειδική περίπτωση 5β):

$$\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int \sigma\upsilon\nu^4 x dx - \int \sigma\upsilon\nu^6 x dx .$$

Εκφράζουμε τα $\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx$, $\int \sigma\upsilon\nu^6 x dx$ με τον αναγωγικό τύπο B_{ν}. Είναι

$$\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\,\eta\mu\, x}{4} + \frac{3}{4}\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\,\eta\mu\, x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\, x\,\eta\mu\, x}{2} + \frac{1}{2}x\right),$$

$$\int \sigma\upsilon\nu^6 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x \eta\mu\, x}{6} + \frac{5}{6}\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x\eta\mu\, x}{6} +$$

$$+\frac{5}{6}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^3\, x\eta\mu\, x}{4} + \frac{3}{8}\eta\mu\, x\sigma\upsilon\nu\, x + \frac{3}{8}x\right).$$

Άρα $\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx - \int \sigma\upsilon\nu^6 x dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu^5 x\eta\mu\, x}{6} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu\, x}{24} + \frac{\sigma\upsilon\nu\, x\eta\mu\, x}{16} + \frac{x}{16} + c$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 5x dx$.

Λύση

Είναι $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$. Άρα

$$\int \sigma\upsilon\nu 4x\sigma\upsilon\nu 5x dx = \frac{1}{2}\int 2\sigma\upsilon\nu 4x\sigma\upsilon\nu 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sigma\upsilon\nu 9x + \sigma\upsilon\nu\, x)dx =$$

$$\frac{1}{18}\int \sigma\upsilon\nu 9x d(9x) + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu\, x dx = \frac{1}{18}\eta\mu 9x + \frac{1}{2}\eta\mu\, x + c$$

Ασκήσεις

Να βρεθούν οι αναγωγικοί τύποι για τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $I_\nu = \int \ln^\nu x dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = x\ln^\nu x - \nu I_{\nu-1}$)

β) $I_\nu = \int e^{-x} x^\nu dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = e^{-x}x^\nu + \nu I_{\nu-1},\ \nu \geq 1$)

γ) $I_\nu = \int (\tau o\xi\eta\mu\, x)^\nu dx$.

(*Απάντηση*: $I_\nu = x(\tau o\xi\eta\mu\, x)^\nu + \nu(\sqrt{1-x^2}(\tau o\xi\eta\mu\, x)^{\nu-1} - \nu(\nu-1)I_{\nu-2},\ \nu \geq 2$)

δ) $I_\nu = \int x^\nu \sigma\upsilon\nu\, x dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = x^\nu \eta\mu\, x + \nu x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu\, x - \nu(\nu-1)I_{\nu-2}$)

ε) $I_\nu = \int x^\nu \eta\mu\, x dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = -x^\nu\sigma\upsilon\nu\, x + \nu x^{\nu-1}\eta\mu\, x - \nu(\nu-1)I_{\nu-2}$)

στ) $I_\nu = \int \frac{\eta\mu\, x}{x^\nu}dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = -\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-1}} - \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)}I_{\nu-2}$)

ζ) $I_\nu = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x^\nu}dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = \frac{\eta\mu\, x}{(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-1}} - \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)}I_{\nu-2}$)

η) $I_\nu = \int \frac{e^x}{x^\nu}dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = -\frac{e^x}{(\nu-1)x^{\nu-1}} + \frac{1}{(\nu-1)}I_{\nu-1}$)

ζ) $I_\nu = \int e^x \eta\mu^\nu x dx$. (*Απάντηση*: $I_\nu = \frac{e^x\eta\mu^{\nu-1}x(\eta\mu\, x - \nu\sigma\upsilon\nu\, x)}{\nu^2+1} + \frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2+1}I_{\nu-2}$)

ι) $I_\nu = \int e^x \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$. (*Απάντ.*: $I_\nu = \frac{e^x\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x(\sigma\upsilon\nu\, x + \nu\eta\mu\, x)}{\nu^2+1} + \frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2+1}I_{\nu-2}$).

Β. ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

9.7 Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο κλειστό διάστημα [*α*, *β*]. Διαιρούμε το διάστημα αυτό σε ν υποδιαστήματα τα $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_\nu$ παρεμβάλλοντας $\nu-1$ σημεία τα $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{\nu-1}$, όπου $\alpha<\xi_1<\xi_2<\ \ldots\ <\xi_{\nu-1}<\beta$, και θέτουμε $\alpha=\xi_0$ και $\beta=\xi_\nu$. Συμβολίζουμε το μήκος του υποδιαστήματος l_1 με $\Delta_1 x=\xi_1-\xi_0$, του l_2 με $\Delta_2 x=\xi_2-\xi_1$, …, του l_ν με $\Delta_\nu x=\xi_\nu-\xi_{\nu-1}$. Σε κάθε υποδιάστημα εκλέγουμε ένα σημείο, το x_1 στο $\Delta_1 x$, το x_2 στο $\Delta_2 x$, …, το x_ν στο $\Delta_\nu x$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_\kappa)\Delta_\kappa x = f(x_1)\Delta_{1\kappa}x+f(x_2)\Delta_2 x+\ \ldots\ +f(x_\nu)\Delta_\nu x.$$

Έστω λ_ν το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος που εμφανίζεται στο άθροισμα S_ν. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των υποδιαστημάτων αυξάνεται απεριόριστα, έτσι ώστε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=0$. Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει το

$$\lim_{\nu\to\infty} S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_\kappa)\Delta_\kappa x$$

και είναι το ίδιο, ανεξάρτητα απ’ τον τρόπο υποδιαίρεσης του διαστήματος [*α*, *β*] και την εκλογή των σημείων x_κ εφόσον το $\lambda_\nu\to\infty$.

Το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu$ λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** (ή ολοκλήρωμα κατά **Riemann**) της συνάρτησης $f(x)$ και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Οι αριθμοί *α* και *β* λέγονται κατώτερο και ανώτερο όριο του ολοκληρώματος αντίστοιχα.

9.8 Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο συνεχείς συναρτήσεις στο κοινό διάστημα ολοκλήρωσης [*α*, *β*]. Τότε, με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$

2. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$

3. $\int_{\alpha}^{\beta} k f(x)dx = k\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$, όπου k σταθερή

4. $\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \pm \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$

5. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ όταν $\alpha < \gamma < \beta$

6. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta - \alpha) f(\xi)$ όπου $\alpha \le \xi \le \beta$

Η ιδιότητα 6. είναι το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αν το πέρας β του διαστήματος [α, β] δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται, τότε σε κάθε τιμή t του β, αντιστοιχεί και μια τιμή του ολοκληρώματος η $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx$. Έτσι δημιουργείται μια συνάρτηση για το ορισμένο ολοκλήρωμα που τη συμβολίζουμε με $F(t)$, δηλαδή $F(t) = \int_{\alpha}^{t} f(x)dx$. Αποδεικνύεται ότι $[F(t)]' = f(t)$.

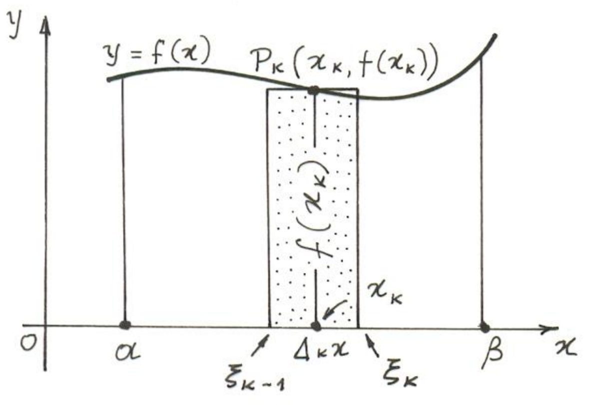
Με βάση την παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται το **θεμελιώδες θεώρημα** του Ολοκληρωτικού Λογισμού που λέει ότι αν $f(x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα αυτής, δηλαδή

$\int f(x)dx = F(x)$, τότε

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$.

9.8.1 Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση συνεχής και μη αρνητική, δηλ. $f(x) \ge 0$, ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α, β]. Έστω $\Delta_{\kappa}x$ μια από τις υποδιαιρέσεις του διαστήματος [α, β] και x_{κ} σημείο του διαστήματος αυτού. Αν $f(x_{\kappa})$ είναι η τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$ για $x = x_{\kappa}$, το $f(x_{\kappa})$ παριστάνει το ύψος της ορθογώνιας λωρίδας με βάση το διάστημα $\Delta_{\kappa}x$. (σχήμα 1).

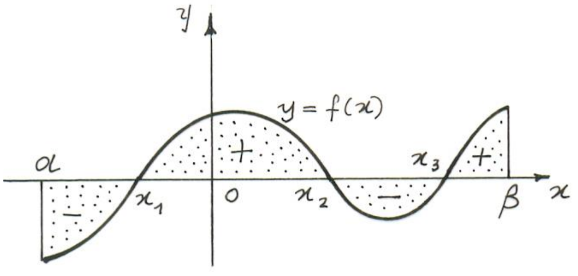


Σχήμα 1

Δηλαδή το γινόμενο $f(x_{\kappa}) \cdot \Delta_{\kappa}x$ παριστάνει το εμβαδό της λωρίδας αυτής.

Όταν το μήκος του διαστήματος αυτού τείνει στο μηδέν, και αθροίσουμε όλα τα γινόμενα $f(x_\kappa)\cdot\Delta_\kappa x$, τότε θα πάρουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Επομένως, γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς μη αρνητικής συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$, απ' τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, καθώς και τον άξονα Ox.



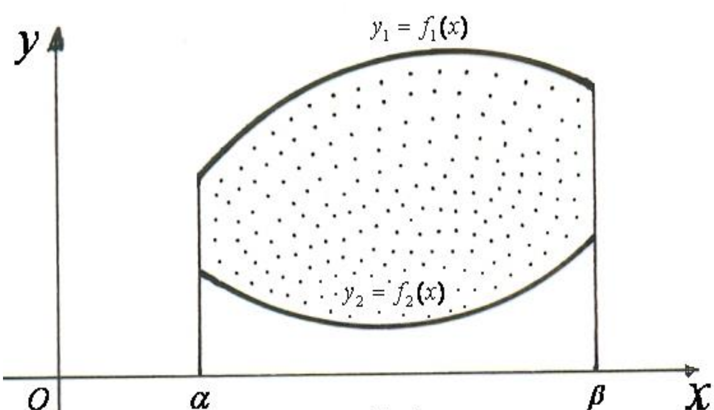
Σχ. 2

Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, π.χ. στα σημεία x_1, x_2, x_3 όπως φαίνεται στο σχήμα 2, όπου $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < \beta$, τότε το χωρίο χωρίζεται σε μέρη τα οποία βρίσκονται, άλλα μεν πάνω του Ox, άλλα κάτω αυτού. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{\beta} f(x)dx$$

ισούται προφανώς με το αλγεβρικό άθροισμα των προσημασμένων εμβαδών των μερών αυτού. Αν όμως θέλουμε το εμβαδόν του χωρίου χωρίς το πρόσημο, δηλαδή ως γεωμετρικό εμβαδό, τότε θα έχουμε

$$E = \left|\int_\alpha^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{\beta} f(x)dx\right|.$$

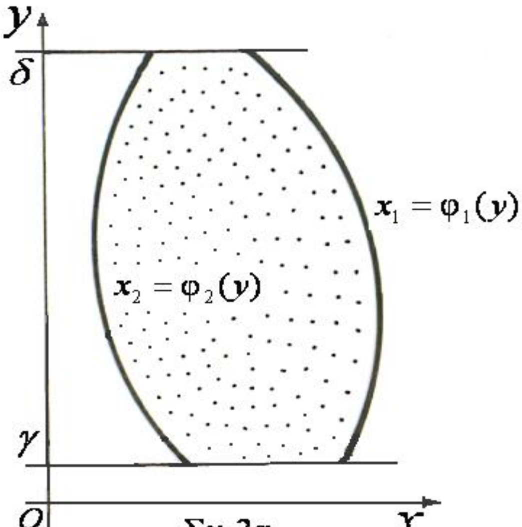


Σχ. 3

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε το χωρίο που περιορίζεται από τις καμπύλες $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ και από τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, όπου $f_2(x) \le f_1(x)$ για $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε προφανώς το εμβαδό του χωρίου αυτού θα είναι

$$E = \int_\alpha^\beta [f_1(x) - f_2(x)]dx. \text{ (σχ. 3)}$$

Παρατηρήσεις



Σχ. 3α

1) Αν θέλουμε να βρούμε το χωρίο που περικλείεται αφενός από τις καμπύλες $x_1 = \varphi_1(y)$ και $x_2 = \varphi_2(y)$, οι οποίες είναι συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το y (λυμένες ως προς x), και αφετέρου από τις ευθείες $y = \gamma$ και $y = \delta$ (σχ. 3α), με τη δέσμευση $\varphi_2(y) \le \varphi_1(y)$ για $\forall y \in [\gamma, \delta]$, τότε προφανώς το εμβαδό του χωρίου αυτού θα είναι

$$E = \int_\gamma^\delta \left[\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\right] dy .$$

2) Αν για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος απαιτείται κατά παράγοντες ολοκλήρωση, τότε ο γνωστός τύπος της ολοκλήρωσης αυτής γίνεται

$$\int_\alpha^\beta u dv = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v du .$$

3) Αν για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος απαιτείται αλλαγή μεταβλητής με νέα συνάρτηση της μορφής $u = g(x)$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει νέα μορφή με νέα αλλαγμένα όρια και γίνεται

$$\int_\alpha^\beta f\big(g(x)\big) d(g(x)) = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du \text{ όπου } u_1 = g(\alpha) \text{ και } u_2 = g(\beta).$$

Έτσι, αν θέλουμε π.χ. να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx$ εργαζόμαστε ως εξής: Αυτό γίνεται $\int_1^e \ln x d(\ln x)$. Στο τελευταίο θέτουμε $u = g(x) = \ln x$ με $u_1 = g(1) = \ln 1 = 0$, $u_2 = g(e) = \ln e = 1$. Άρα

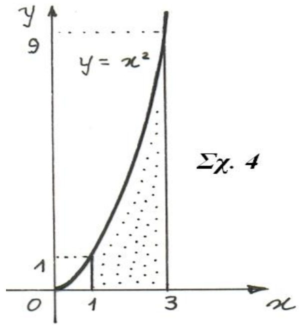
$$\int_1^e \ln x d(\ln x) = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Να σημειωθεί ότι, αν δεν θέλουμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στο δοσμένο ολοκλήρωμα, τότε θα έχουμε

$$\int_1^e \ln x d(\ln x) = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ της καμπύλης $y = x^2$, του άξονα Ox και των ευθειών $x = 1,\ x = 3$.



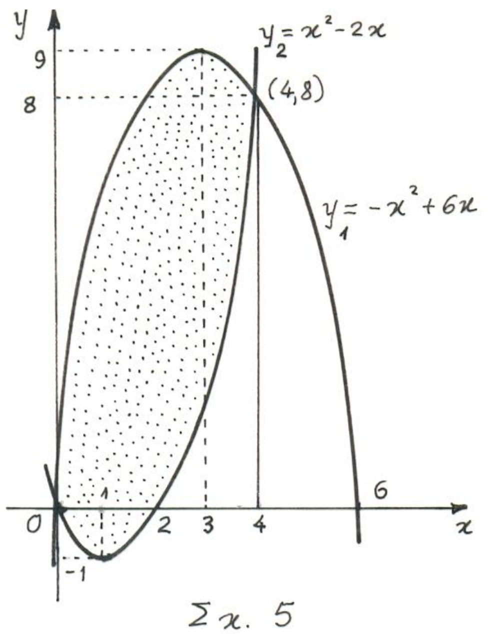
Λύση

Το ζητούμενο εμβαδό είναι η εστιγμένη επιφάνεια του σχήματος 4 η οποία ως γνωστό δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3} \text{ τετρ. μονάδες.}$$

(Η ολοκλήρωση έγινε κατά τον άξονα των x).

2) Να βρεθεί το εμβαδό που περιλαμβάνεται μεταξύ των δύο παραβολών $y_1 = -x^2 + 6x$ και $y_2 = x^2 - 2x$.



Λύση

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων των παραβολών βρίσκουμε $x = 0$ και $x = 4$ που δίνουν αντίστοιχα $y = 0$ και $y = 8$. Επομένως, τα σημεία τομής των παραβολών είναι τα (0, 0) και (4, 8). Απ' τις γραφικές παραστάσεις των παραβολών φαίνεται ότι $x^2 - 2x \le -x^2 + 6x$, $\forall x \in [0, 4]$. (Αυτό προκύπτει και απ' τη λύση της ανισότητας $2x^2 - 8x \le 0 \Rightarrow 2x(x-4) \le 0$ που αληθεύει για $\forall x \in [0, 4]$). Άρα το εστιγμένο εμβαδό υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

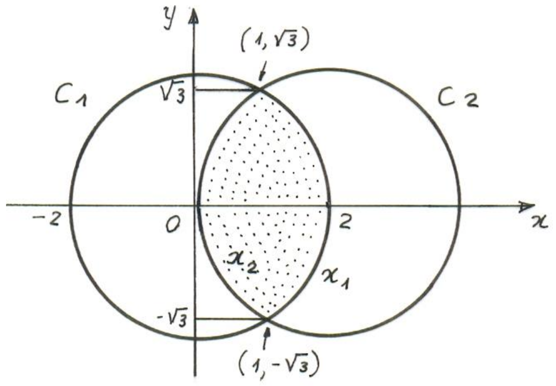
$$\int_0^4 (y_1 - y_2)dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \left(-2\frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2\right) - 0 = \frac{64}{3} \text{ τ. μ.}$$

3) Να βρεθεί η κοινή επιφάνεια των κύκλων $c_1 : x^2 + y^2 = 4$, $c_2 : x^2 + y^2 = 4x$.

Λύση

Ο κύκλος c_1 έχει κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα 2, ενώ ο κύκλος c_2 έχει κέντρο το σημείο (2, 0) και ακτίνα 2. [Αυτό προκύπτει αν μετασχηματιστεί η εξίσωση του c_2. Αυτή γράφεται $(x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$]. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων των κύκλων βρίσκουμε τα κοινά σημεία τομής τους που είναι τα $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ (σχ. 6). Φέρνοντας τις ευθείες $y = \sqrt{3}$ και $y = -\sqrt{3}$, παρατηρούμε ότι το κοινό εμβαδό που θέλουμε να υπολογίσουμε αποτελείται από το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$, του άξονα των y και του κύκλου c_1, μείον το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ του άξονα των y και του κύκλου c_2.

Επομένως, θα λύσουμε τις εξισώσεις των κύκλων ως προς *x* (θεωρώντας το *y* ως ανεξάρτητη μεταβλητή), και θα ολοκληρώσουμε κατά τον άξονα των y, σύμφωνα με την παρατήρηση (1).



Σχ. 6

Η εξίσωση του κύκλου c_1 δίνει

$$x^2 = 4 - y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2},$$

και επειδή μας ενδιαφέρει το θετικό μέρος του c_1, παίρνουμε τη συνάρτηση

$$x_1 = \sqrt{4 - y^2}.$$

Η εξίσωση του κύκλου c_2 δίνει

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2},$$

και επειδή μας ενδιαφέρει το μέρος του c_2 που περιέχει τα μικρότερα *x* που ανήκουν στο κοινό μέρος των κύκλων, παίρνουμε τη συνάρτηση

$x_2 = 2 - \sqrt{4 - y^2}$. Επομένως θα είναι:

$$E = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x_1 - x_2)\, dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} - (2 - \sqrt{4-y^2})\right) dy = 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\, dy$$

και επειδή το εμβαδό είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα Ox, προκύπτει

$$E = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\, dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2}\, dy - 4\int_0^{\sqrt{3}} dy.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{4 - y^2}\, dy$. Αυτό είναι της 6ης μορφής, § 8.5.6.

Θέτουμε $y = 2\eta\mu\omega$ οπότε $dy = 2\sigma\upsilon\nu\omega\, d\omega$ και

$$\sqrt{4 - y^2} = \sqrt{4 - 4\eta\mu^2\omega} = 2\sigma\upsilon\nu\omega.$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \sqrt{4-y^2}\,dy = \int 2\sigma\upsilon\nu\omega \cdot 2\sigma\upsilon\nu\omega\, d\omega = 4\int \sigma\upsilon\nu^2\omega\, d\omega =$$

$$= 4\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\omega}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + 2\omega$$

Όμως απ' τη σχέση $y = 2\eta\mu\omega \Rightarrow \eta\mu\omega = \dfrac{y}{2} \Rightarrow \omega = \tau o\xi\eta\mu\,\dfrac{y}{2}$.

Επίσης το αποτέλεσμα $2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega$ γράφεται:

$$2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\omega \cdot 2\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}\cdot y \cdot \sqrt{4-y^2}\ .$$ Άρα

$$\int \sqrt{4-y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\tau o\xi\eta\mu\,\frac{y}{2}.$$

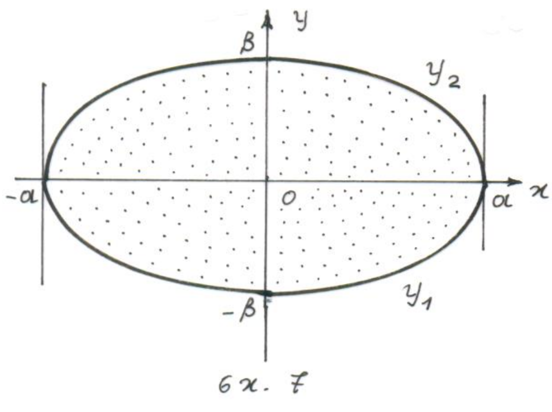
Επομένως το αποτέλεσμα του εμβαδού είναι:

$$E = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\,dy = 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\tau o\xi\eta\mu\,\frac{y}{2} - y\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}1 + 2\tau o\xi\eta\mu\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) - (0 + 2\cdot 0 - 0) = 2\sqrt{3} + 4\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\ \text{τ. μ.}$$

4) Να βρεθεί το εμβαδό της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Λύση



σχ. 7

Το εμβαδό της έλλειψης μπορεί να θεωρηθεί ότι περικλείεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$ και από τις καμπύλες y_2, y_1, όπου $y_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $y_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ αν λυθεί ως προς y. (Η καμπύλη y_1 έχει αρνητικές τεταγμένες, ενώ η y_2 έχει θετικές για $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$). Άρα

$$E = \int_{-\alpha}^{\alpha} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx$ υπολογίζεται όπως ακριβώς και το προηγούμενο του παραδείγματος 3, θέτοντας $x = \alpha\eta\mu\omega$. Έτσι, έχουμε

$$\int\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}.$$ Άρα

$$E = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx = \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu 1 - \frac{\alpha^2}{2}\tau o\xi\eta\mu(-1)\right] = \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\beta}{\alpha}\cdot\frac{2\pi\alpha^2}{4} = \pi\alpha\beta.$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται πάνω από τον άξονα Ox και κάτω από την παραβολή $y = -x^2 + 4x$. (*Απάντηση*: $32/3$ τ.μ.)

2) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = e$. (*Απάντηση*: 1 τ.μ.)

3) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x = y^2$ και τις ευθείες $y = 1$, $y = 8$ και $x = 0$. (*Απάντηση*: $511/3$ τ.μ.)

4) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των παραβολών $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$. (*Απάντηση*: $4p^2/3$ τ.μ.)

5) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \varepsilon\phi\, x$, του άξονα των x και της ευθείας $x = \pi/3$. (*Απάντηση*: $\ln 2$ τ.μ.)

6) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των παραβολών $y = x^2$, $y = x^2/2$ και της ευθείας $y = 2x$. (*Απάντηση*: 4 τ.μ.)

7) Να βρεθεί το εμβαδό του μικρότερου από τα δύο μέρη που κόβει η ευθεία $x = 3$ τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$. (*Απάντηση*: $\frac{25\pi - 24}{2} - 50\tau o\xi\varepsilon\varphi(1/3)$ τ.μ.)

8) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις ευθείες $x = 2$, $x = 6$, τον άξονα των x και την παραβολή $y = x^2 - 7x + 6$. (*Απάντηση*: $56/3$ τ.μ.)

9) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την ευθεία $y = x$ και την παραβολή $y = x^2$. (*Απάντηση*: $1/6$ τ.μ.)

10) Να βρεθεί το εμβαδό των δύο τμημάτων στα οποία ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ τέμνεται από την παραβολή $y^2 = 2x$. (*Απάντηση*: μικρό: $\dfrac{6\pi + 4}{3}$, μεγάλο: $\dfrac{18\pi - 4}{3}$)

11) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x^3$. (*Απάντηση*: $E = 1/12$)

12) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2 - x - 6$ και την ευθεία $y = -6$. (*Απάντηση*: $E = 1/6$)

13) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3$ και την εφαπτομένη της στο σημείο $x = 1$. (*Απάντηση*: $E = 27/4$)

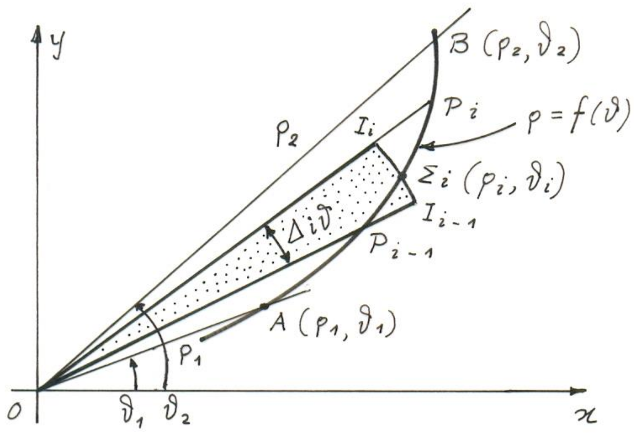
9.9 Εφαρμογές ορισμένου ολοκληρώματος

Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας καμπύλης $y = f(x)$ προκύπτουν διάφορες εφαρμογές του, στον υπολογισμό εμβαδών επιφανειών, μήκους μιας καμπύλης, όγκων επιφανειών εκ περιστροφής κ.τ.λ. Θα αναφέρουμε μερικές τέτοιες εφαρμογές του.

9.9.1 Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Έστω $\rho = f(\theta)$ η εξίσωση καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες και $\mathrm{A}(\rho_1, \theta_1)$, $\mathrm{B}(\rho_2, \theta_2)$ δύο σημεία της καμπύλης, με $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ δύο πολικές ακτίνες και $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ δύο πολικές γωνίες. Θα ζητήσουμε το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των δύο πολικών ακτίνων ρ_1, ρ_2 και της καμπύλης $\rho = f(\theta)$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\rho = f(\theta)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ και μονότονη σ' αυτό, π.χ. αύξουσα.

Χωρίζουμε τη γωνία ΑΟΒ σε ν υποδιαιρέσεις με τις πολικές ακτίνες $OP_0 = OA$ OP_1, OP_2, $\ldots$, OP_{i-1}, OP_i, $\ldots$, $OP_{\nu-1}$, $OP_\nu = OB$. Στο σχήμα 8 φαίνεται ένας αντιπροσωπευτικός τομέας $P_{i-1}OP_i$ γωνίας $\Delta_i\theta$ και ο αντίστοιχος κυκλικός τομέας $I_{i-1}OI_i$ ακτίνας ρ_i με $\Sigma_i(\rho_i, \theta_i)$ εσωτερικό σημείο του τμήματος $P_{i-1}P_i$ της κα-



Σχ. 8

μπύλης $\rho = f(\theta)$. Όπως ξέρουμε απ' τη Γεωμετρία, το εμβαδό ενός κυκλικού τομέα ακτίνας R και γωνίας ω (σε ακτίνια) είναι $E_{\kappa.\tau.} = \frac{1}{2}R^2\omega$. Δηλαδή το εμβαδό του κυκλικού τομέα $I_{i-1}OI_i$ θα είναι $E_{\kappa.\tau.} = \frac{1}{2}{\rho_i}^2\Delta_i\theta = \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2\Delta_i\theta$. Όταν η γωνία $\Delta_i\theta$ (σε ακτίνια) γίνει πολύ μικρή έτσι ώστε $\lim \Delta_i\theta = 0$ και αυτό γίνεται όταν οι υποδιαιρέσεις της γωνίας γίνουν πάρα πολλές, οπότε το $\nu \to \infty$, τότε το εμβαδό του κυκλικού τομέα $I_{i-1}OI_i$ είναι ισοδύναμο με το εμβαδό του τομέα $P_{i-1}OP_i$, οπότε το εμβαδό που ζητάμε θα είναι:

$$E = \lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{2}\left(f(\theta_i)\right)^2\Delta_i\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)\,d\theta\,.$$

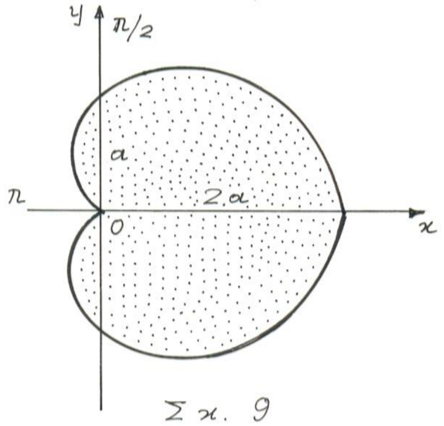
Ο τύπος αυτός ισχύει και όταν η $\rho = f(\theta)$ δεν είναι μονότονη σ' όλο το διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ αλλά μονότονη σε πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων αυτού.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδό της καρδιοειδούς καμπύλης με εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες: $\rho = \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$.

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > 0$, τότε στο διάστημα [0, π] η $\rho = \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι μονότονη (φθίνουσα). Λόγω συμμετρίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 9, αν υπολογίσουμε το πάνω μέρος, τότε το συνολικό εμβαδό θα είναι:



Σχ. 9

$$E = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\alpha^2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi}\alpha^2(1+2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \alpha^2\int_0^{\pi}(1+2\sigma\upsilon\nu\theta)\,d\theta + \alpha^2\int_0^{\pi}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}d\theta = \alpha^2\left[\theta+2\eta\mu\theta\right]_0^{\pi} +$$

$$+\frac{\alpha^2}{4}\int_0^\pi (1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)d(2\theta)=\alpha^2\pi+\frac{\alpha^2}{4}\left[2\theta+\eta\mu 2\theta\right]_0^\pi=\alpha^2\pi+\frac{\alpha^2\pi}{2}=\frac{3\pi\alpha^2}{2}.$$

Η παραπάνω καμπύλη ανήκει στην κατηγορία των επικυκλοειδών και είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σταθερό σημείο Μ περιφέρειας κύκλου διαμέτρου *α*, ο οποίος κυλιέται (χωρίς τριβή) στο εξωτερικό ενός άλλου ίσου κύκλου.

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περιλαμβάνεται εσωτερικά της καρδιοειδούς $\rho=1+\sigma\upsilon\nu\theta$ και εξωτερικά του κύκλου $\rho=1$. (*Απάντηση*: $E=2+\pi/4$)

2) Να βρεθεί το εμβαδόν της κοινής περιοχής που δημιουργείται από τις καρδιοειδείς $\rho=1+\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\rho=1-\sigma\upsilon\nu\theta$. (*Απάντηση*: $E=(3\pi-8)/2$)

3) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μέσα από τον κύκλο $\rho=5\eta\mu\theta$ και έξω από την καμπύλη $\rho=2+\eta\mu\theta$. (*Απάντηση*: $E=\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}$)

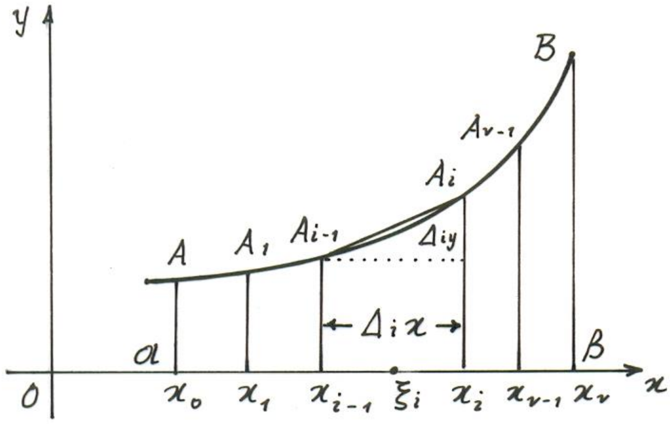
4) Να βρεθεί το εμβαδόν της κοινής περιοχής που δημιουργείται από τους κύκλους $\rho=4\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\rho=4\sqrt{3}\eta\mu\theta$. (*Απάντηση*: $E=\frac{10\pi}{3}-4\sqrt{3}$)

5) Να βρεθεί το εμβαδόν που δημιουργείται από τους κύκλους $\rho=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\rho=\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta$. (*Απάντηση*: $E=(\pi-1)/4$).

9.9.2 Μήκος τόξου καμπύλης

Έστω συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [*α*, *β*] με πεπερασμένη και συνεχή παράγωγο $f'(x)$ στο [*α*, *β*].

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη του τόξου της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο αυτού δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy και ο συντελεστής κατεύθυνσης της $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση της τετμημένης του σημείου επαφής. Θα ζητήσουμε λοιπόν με τις προϋποθέσεις αυτές να υπολογίσουμε το μήκος του τόξου AB της



Σχ. 10

καμπύλης (σχ. 10).

Παίρνουμε πάνω στο τόξο AB διαδοχικά σημεία A_i με τετμημένες

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_\nu = \beta .$$

Η τεθλασμένη γραμμή $AA_1A_2\ldots B$ λέγεται πολυγωνική γραμμή εγγεγραμμένη στο τόξο AB. Η περίμετρος Π αυτής θα είναι

$$\Pi = \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} .$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού έχουμε

$y_i - y_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i)$ όπου $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Άρα

$$\Pi = \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2} .$$

Το μήκος L του τόξου AB είναι η περίμετρος της πολυγωνικής γραμμής $AA_1A_2\ldots B$ όταν $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x \to 0$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Αλλά η συνάρτηση $\sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, επομένως, κατά τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είναι

$$L = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\, \Delta_i x = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx . \qquad (1)$$

Αν η καμπύλη c ορίζεται με παραμετρικές εξισώσεις $x = \varphi(t),\ y = \sigma(t)$, τότε ως γνωστό η παράγωγος της συνάρτησης y ως προς x είναι

$y'_x = \dfrac{\sigma'(t)}{\varphi'(t)}$ και $dx = \varphi'(t)\, dt$. Άρα

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{\sigma'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \cdot \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\sigma'(t)\right]^2}\, dt . \qquad (2)$$

Ειδικά, αν η καμπύλη έχει εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες $\rho = \rho(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ τότε, ως γνωστό $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y = \rho\eta\mu\theta$ (έκφραση των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y συναρτήσει των ρ, θ). Έτσι,

$\dfrac{dx}{d\theta} = \rho'\sigma\upsilon\nu\theta - \rho\eta\mu\theta$ και $\dfrac{dy}{d\theta} = \rho'\eta\mu\theta + \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε

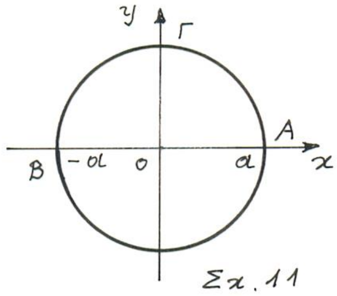
$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = (\rho')^2 + \rho^2$ και επομένως

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\theta, \text{ όπου } \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}. \qquad (3)$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το μήκος περιφέρειας κύκλου $x^2 + y^2 = a^2$.

Λύση



Σχ. 11

Το τόξο ΒΓΑ του κύκλου (σχ. 11) έχει εξίσωση $y = \sqrt{a^2 - y^2}$. Είναι $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ και

$$(y')^2 + 1 = \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2 - x^2} + 1 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}.$$

Άρα το μήκος του τόξου ΒΓΑ είναι (τύπος (1)):

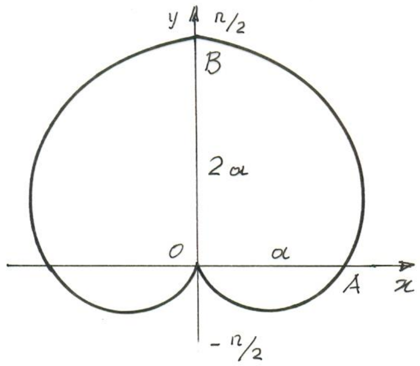
$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\,dx = \alpha \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \alpha\,\tau o\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha}\bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \alpha\left[\tau o\xi\eta\mu 1 - \tau o\xi\eta\mu(-1)\right] = \alpha\left[\pi/2 - (-\pi/2)\right] = \pi\alpha$$

Επομένως, το μήκος της περιφέρειας του κύκλου είναι $L = 2\pi\alpha$.

2) Να βρεθεί το μήκος της καρδιοειδούς $\rho = \alpha(1 + \eta\mu\theta)$, όπου $\alpha > 0$.

Λύση



Σχ. 12

Εφαρμόζουμε τον τύπο (3) για πολικές συντεταγμένες $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\eta\mu\theta$.

$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\theta$. Είναι

$\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta} = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\rho^2 + (\rho')^2 = \alpha^2(1 + \eta\mu\theta)^2 + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\alpha^2(1 + \eta\mu\theta)$.

Ολοκληρώνοντας από $-\pi/2$ μέχρι $\pi/2$ παίρνουμε το μήκος του κλάδου ΟΑΒ δηλ. το μισό μήκος της καρδιοειδούς. Άρα το μήκος της L θα είναι

$$L = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2\alpha^2(1+\eta\mu\theta)}\, d\theta =$$
$$= 2\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1+\eta\mu\theta)}\, d\theta$$

Υπολογίζουμε τώρα το $\int \sqrt{2(1+\eta\mu\theta)}\, d\theta$.

Ως γνωστό από την Τριγωνομετρία έχουμε

$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu \dfrac{\alpha+\beta}{2} \sigma\upsilon\nu \dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Έτσι,

$$1+\eta\mu\theta = \eta\mu \frac{\pi}{2} + \eta\mu\theta = 2\eta\mu \frac{\pi/2+\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi/2-\theta}{2} = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) =$$

$= 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)\eta\mu\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)\right] = 2\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$. Άρα

$$\int \sqrt{2(1+\eta\mu\theta)}\, d\theta = \int 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\int \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) =$$
$$= -4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

Επομένως, το ορισμένο ολοκλήρωμα δίνει τελικά

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1+\eta\mu\theta)}\, d\theta = -4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$
$$= -4\sigma\upsilon\nu\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -4(0-1) = 4$$

Επομένως $L = 2\alpha \cdot 4 = 8\alpha$.

3) Να βρεθεί το μήκος της καρδιοειδούς $\rho = \alpha(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$, όπου $\alpha > 0$.

Λύση

Το σχήμα της δοσμένης καρδιοειδούς είναι όμοιο με το προηγούμενο και προκύπτει αν το προηγούμενο σχήμα περιστραφεί κατά γωνία $+\pi/2$ (αντίθετη των δεικτών ωρολογίου) διότι $\eta\mu\theta = -\sigma\upsilon\nu(\pi/2+\theta)$.

Είναι $\rho' = \alpha\eta\mu\theta$, και επομένως

$$\rho^2 + (\rho')^2 = \alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + \alpha^2\eta\mu^2\theta = 2\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu\theta) =$$
$$= 2\alpha^2(2\eta\mu^2\,\theta/2) = 4\alpha^2\eta\mu^2\,\theta/2$$

(απ' τον γνωστό τύπο της Τριγωνομετρίας: $\sigma\upsilon\nu 2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta$).

Η καμπύλη ορίζεται από $\theta = 0$ έως $\theta = 2\pi$, αλλά λόγω συμμετρίας ως προς τον ά-ξονα Οx, αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης που βρίσκεται πάνω από τον *x* και να διπλασιάσουμε το αποτέλεσμα. Έτσι,

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\alpha^2 \eta\mu^2 (\theta/2)}d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\alpha\,\eta\mu(\theta/2)\,d\theta =$$

$$= 4\alpha\int_0^{\pi} \eta\mu(\theta/2)\,d\theta = 8\alpha\int_0^{\pi} \eta\mu(\theta/2)\,d(\theta/2) = -8\alpha\sigma\upsilon\nu(\theta/2)\Big|_0^{\pi} = 8\alpha$$

4) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $x = e^t \eta\mu\, t$, $y = e^t \sigma\upsilon\nu\, t$ όταν το *t* παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \pi/2]$.

Λύση

Επειδή η καμπύλη δίνεται με την παραμετρική της μορφή θα είναι (τύπος (2)):

$x'_t = \varphi'(t) = e^t(\sigma\upsilon\nu\, t + \eta\mu\, t)$, $y'_t = \sigma'(t) = e^t(\sigma\upsilon\nu\, t - \eta\mu\, t)$, οπότε

$$[\varphi'(t)]^2 + [\sigma'(t)]^2 = e^{2t}(\sigma\upsilon\nu\, t + \eta\mu\, t)^2 + e^{2t}(\sigma\upsilon\nu\, t - \eta\mu\, t)^2 = 2e^{2t}.$$

Άρα το ζητούμενο μήκος θα είναι

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\sigma'(t)]^2}dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2t}}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{2}\, e^t\Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1).$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = (e^x + e^{-x})/2$ από $x = 0$ μέχρι $x = 1$. (*Απάντηση*: $L = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$)

2) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $x = 2y^{3/2} - 1$ για $0 \le y \le 2$. (*Απάντηση*: $L = \dfrac{2}{27}(19\sqrt{19} - 1)$)

3) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = \ln(\sigma\upsilon\nu\, x)$ όταν το *x* μεταβάλλεται από $\pi/6$ μέχρι $\pi/3$. (*Απάντηση*: $L = \ln\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$)

4) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y^3 = 27x^2$ από $x = 1$ μέχρι $x = 8$. (*Απάντηση*: $L = 16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}$)

5) Η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t δίνεται απ' τις σχέσεις $x = 1 + t^3$ και $y = 2 - t^2$. Να βρεθεί η απόσταση που θα διανύσει αν ταξιδεύει από $t = 0$ μέχρι $t = 2$. (*Απάντηση*: $L = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$)

6) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\rho = \theta^2/2$ για $0 \le \theta \le 2$.

(*Απάντηση*: $L = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1)$)

7) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\rho = \sigma\upsilon\nu^3 \frac{\theta}{3}$ όταν $0 \le \theta \le \pi$.

(*Απάντηση*: $L = \frac{1}{8}(3\sqrt{3} + 4\pi)$)

8) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\rho = 2/\theta$ όταν $\sqrt{3}/3 \le \theta \le 1$.

(*Απάντηση*: $L = 2(2 - \sqrt{2}) + \ln\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{3}$)

9) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\rho = \alpha\theta$ (σπείρα του Αρχιμήδη) όταν $0 \le \theta \le 1$. (*Απάντηση*: $L = \frac{\alpha}{2}\left[\ln(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}\right]$)

10) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $x = t + \eta\mu\, t$, $y = 2 + \sigma\upsilon\nu\, t$ όταν το t μεταβάλλεται από 0 μέχρι π. (*Απάντηση*: $L = 4$)

11) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης (υποκυκλοειδούς ή αστροειδούς) με εξισώσεις $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^3\theta$ και $y = \alpha\eta\mu^3\theta$. (*Απάντηση*: $L = 6\alpha$)

12) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = (x^4 + 3)/6x$ όταν $1 \le x \le 3$.

(*Απάντηση*: $L = 14/3$)

13) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = x^{3/2}$ από $x = 0$ μέχρι $x = 5$.

(*Απάντηση*: $335/27$)

14) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης που δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2$, $y = t^3$ από $t = 0$ μέχρι $t = 4$. (*Απάντηση*: $(296\sqrt{37} - 8)/27$)

15) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της παραβολής $y = 2\sqrt{x}$ από το σημείο $x = 0$ μέχρι το σημείο $x = 1$. (*Απάντηση*: $\ln(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$)

16) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης $y=\ln x$ από το σημείο $x=\sqrt{2}$ μέχρι το σημείο $x=\sqrt{3}$. (*Απάντηση*: $\frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{3}+2)/3\right)-\sqrt{3}+2$)

17) Να βρεθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x=\alpha(\sigma\upsilon\nu\, t+t\eta\mu\, t)$, $y=\alpha(\eta\mu\, t-t\sigma\upsilon\nu\, t)$, όπου $\alpha>0,\ t\in[0,\pi]$.

18) Ομοίως και της $x=\alpha(2\sigma\upsilon\nu\, t-\sigma\upsilon\nu 2t)$ $y=\alpha(2\eta\mu\, t-\eta\mu 2t)$, $t\in[0,\pi]$

19) Να βρεθεί το μήκος της σπείρας $\rho=e^{2\theta}$ από $\theta=0$ μέχρι $\theta=2\pi$.

(*Απάντηση*: $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$)

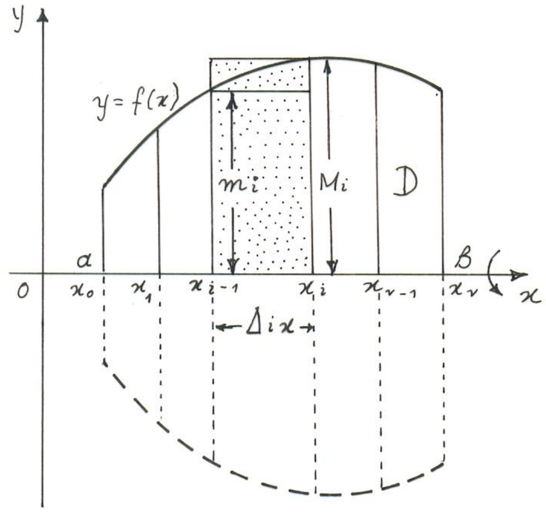
9.9.3 Όγκος στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα Ox

Έστω *c* μια καμπύλη με εξίσωση $y=f(x)$, όπου $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)>0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε το χωρίο D που ορίζεται απ' την καμπύλη *c*, τον άξονα Ox, και τις ευθείες $x=\alpha,\ x=\beta$. Η περιστροφή του χωρίου αυτού D γύρω από τον άξονα Ox παράγει ένα στερεό. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού αυτού.

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε μικρότερα διαστήματα με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_\nu=\beta$. Έστω m_i και M_i οι άκρες τιμές της $f(x)$ σε κάθε ένα διάστημα $\Delta_i x=[x_i-x_{i-1}]$ για $i=1,2,\ldots,\nu$ (σχ. 13). Ο όγκος του παραγόμενου στερεού προφανώς περιέχεται μεταξύ των αθροισμάτων

$$\sum_{i=1}^{\nu}\pi m_i^{\,2}\Delta_i x \text{ και } \sum_{i=1}^{\nu}\pi M_i^{\,2}\Delta_i x$$

(το $\pi m_i^{\,2}\Delta_i x$ είναι ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης m_i και ύψος $\Delta_i x$). Αλλά όταν $\Delta_i x\to 0$, τα δύο αθροίσματα έχουν κοινό όριο που είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\pi\int_\alpha^\beta [f(x)]^2dx$. Επομένως, ο όγκος του στερεού είναι



Σχ 13

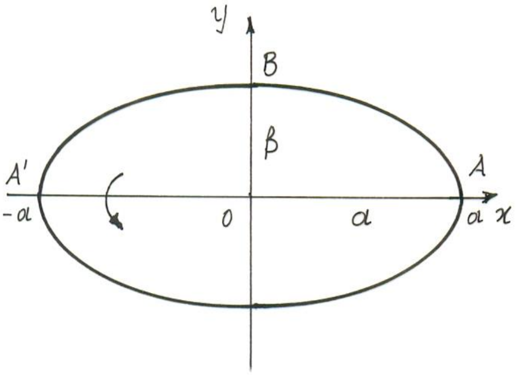
$$V=\pi\int_\alpha^\beta [f(x)]^2dx=\pi\int_\alpha^\beta y^2dx.$$

Αν $y_1 = f_1(x)$ και $y_2 = f_2(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι $y_2 > y_1$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε ο όγκος του στερεού ο οποίος προκύπτει με περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του χωρίου που ορίζεται απ' τις καμπύλες $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha,\ x = \beta$ δίνεται α' τον τύπο

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} ({y_2}^2 - {y_1}^2)\, dx .$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί ο όγκος ελλειψοειδούς εκ περιστροφής .



Σχ. 14

Λύση

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι το στερεό που προκύπτει όταν το τόξο Α΄ΒΑ της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Ox. Το τόξο Α΄ΒΑ έχει εξίσωση $y = \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Επομένως έχουμε τον όγκο

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx = \pi \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha^2 - x^2) dx = \pi \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \pi \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} + \alpha^3 - \frac{\alpha^3}{3} \right) = \pi \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{4\alpha^3}{3} = \frac{4\pi\alpha\beta^2}{3} \text{ κυβικές μονάδες.}$$

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση κύκλου ($\alpha = \beta$) ο όγκος της σφαίρας απ' την περιστροφή του κύκλου γύρω από τον άξονα Ox είναι $V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \dfrac{4\pi\alpha^3}{3}$ όπου α η ακτίνα του κύκλου.

2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε την καμπύλη $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα [1, 4] γύρω από τον άξονα Ox.

Λύση

Ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής της $y = \sqrt{x}$ γύρω από τον Ox θα είναι

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx = \pi \int_{1}^{4} (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_{1}^{4} x dx = \left. \frac{\pi x^2}{2} \right|_{1}^{4} = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2} \text{ κ.μ.}$$

9.9.4 Όγκος στερεού εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα Oy

Στην περίπτωση που η περιστροφή της καμπύλης $y = f(x)$ γίνει γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oy, τότε η σχέση που δίνει τον όγκο του στερεού αλλάζει.

Έστω συνεχής και θετική συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, που περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oy. Τότε αποδεικνύεται ότι το στερεό που προκύπτει έχει όγκο που δίνεται απ' τη σχέση

$$V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx .$$

Αν η καμπύλη $y = f(x)$ δίνεται με την παραμετρική μορφή $x = x(t),\ y = y(t)$ και η περιστροφή γίνει ως προς τον άξονα Oy, τότε η σχέση του όγκου γράφεται

$$V = \pi \left| \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 y'(t) dt \right| \text{ ή } V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 y'(t) dt \text{ με } y'(t) \geq 0 \ \forall t \in [t_1, t_2]$$

όπου βεβαίως είναι $dy = y'(t) dt$.

Αξιοσημείωτη παρατήρηση

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ που μας δίνεται, με $x \in [\alpha, \beta]$ έχει αντίστροφη στο διάστημα αυτό την $x = f^{-1}(y)$ με $y \in [\gamma, \delta]$, (όπου το $[\gamma, \delta]$ είναι το πεδίο τιμών της $y = f(x)$), τότε, κατά τον υπολογισμό των όγκων εκ περιστροφής, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Έτσι:

- Αν ολοκληρώνουμε ως προς μία μεταβλητή (*x* ή *y*) και η περιστροφή γίνεται ως προς τον **<u>ίδιο</u>** άξονα (*x* ή *y* αντίστοιχα), τότε ο όγκος δίνεται από τις σχέσεις:
  $$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx \text{ ή } V = \pi \int_{\gamma}^{\delta} \left[f^{-1}(y)\right]^2 dy .$$
- Αν ολοκληρώνουμε ως προς μία μεταβλητή (*x* ή *y*) και η περιστροφή γίνεται ως προς τον **<u>άλλο</u>** άξονα (*y* ή *x* αντίστοιχα), τότε ο όγκος δίνεται από τις σχέσεις:
  $$V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \text{ ή } V = 2\pi \int_{\gamma}^{\delta} y f^{-1}(y) dy .$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε την καμπύλη $y = 2/x^2$ στο διάστημα [1, 2] γύρω από τον άξονα Oy.

Λύση

Ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y = 2/x^2$ γύρω από τον άξονα Oy όταν $1 \le x \le 2$ υπολογίζεται με βάση τον τύπο

$$V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = 2\pi \int_{1}^{2} x \frac{2}{x^2} dx = 4\pi \ln x \Big|_1^2 = \pi \ln 16 .$$

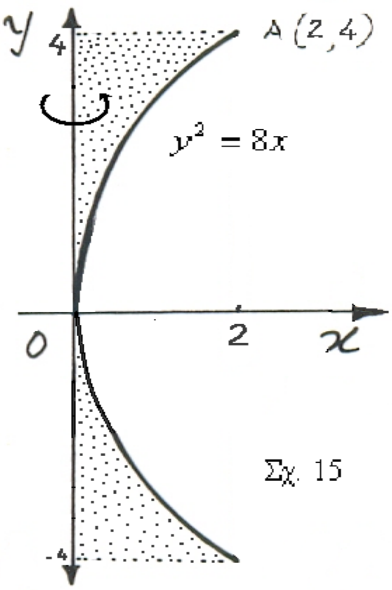
2) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε την εστιγμένη περιοχή *R* που ορίζεται από την παραβολή $y^2 = 8x$ και την ευθεία $x = 0$, στο διάστημα $x \in [0, 2]$ γύρω από τον άξονα Oy. (να λυθεί με δύο τρόπους)

Λύση

1ος τρόπος. Η εστιγμένη περιοχή *R* φαίνεται στο σχήμα 15. Άρα το διάστημα που κινείται το *y* είναι το $[-4, 4]$ (πεδίο τιμών των συναρτήσεων $y_{1,2} = \pm\sqrt{8x}$). Αν ολοκληρώσουμε ως προς *y* (και επειδή η περιστροφή είναι ως προς τον άξονα Oy) θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $V = \pi \int_{\gamma}^{\delta} \left[f^{-1}(y) \right]^2 dy$ όπου $x = f^{-1}(y) = \frac{y^2}{8}$. Άρα

$$V = \pi \int_{\gamma}^{\delta} \left[f^{-1}(y) \right]^2 dy = \pi \int_{-4}^{4} \left[\frac{y^2}{8} \right]^2 dy = \frac{\pi\, y^5}{320} \Bigg|_{-4}^{4} = \frac{32\pi}{5} \text{ κυβικές μονάδες}$$

(Λόγω συμμετρίας του στερεού ως προς τον άξονα Ox, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα παίρνοντας τα όρια του *y* από 0 έως 4 και διπλασιάζοντας το τελικό αποτέλεσμα).



Σχ. 15

2ος τρόπος. Αν τώρα αποφασίσουμε να ολοκληρώσουμε ως προς *x* (την περιστροφή δεν μπορούμε να την αλλάξουμε και παραμένει ως προς τον άξονα Oy), τότε θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $V = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$, όπου $y = f(x) = \pm\sqrt{8x}$. Λόγω συμμετρίας του στερεού, μπορούμε να ολοκληρώσουμε μόνο τη θετική συνάρτηση και να διπλασιάσουμε το αποτέλεσμα. Τέλος, παρατηρούμε ότι η εστιγμένη περιοχή *R* περικλείεται από την καμπύλη $y = 4$ (πάνω καμπύλη) και την $y = \sqrt{8x}$ (κάτω καμπύλη). Έτσι, ο όγκος θα είναι

$$V = 2\cdot 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = 4\pi\int_{0}^{2} x(4-\sqrt{8x})dx = 8\pi\left(x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{2}\cdot x^{5/2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ κ.μ.}$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα Ox της περιοχής που περιέχεται μεταξύ των παραβολών $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$. (*Απάντηση*: $V = 3\pi/10$)

2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής που παράγεται όταν το χωρίο που δημιουργείται από την παραβολή $y = -x^2 - 3x + 6$ και την ευθεία $x + y = 3$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Ox.. (*Απάντηση*: $V = 1792\pi/15$)

3) Έστω η περιοχή στο πρώτο τεταρτημόριο που ορίζεται από τις $y = x^3$ και $y = 8$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται όταν η περιοχή περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy. (*Απάντηση*: $V = 96\pi/5$)

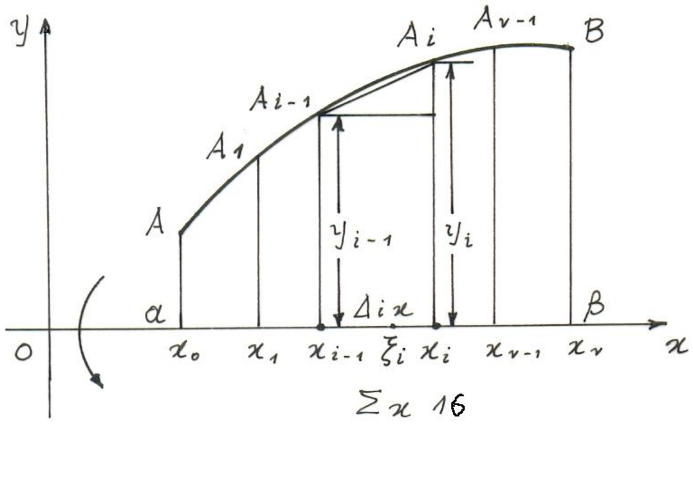
4) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από την περιοχή *R* του 1[ου] τεταρτημόριου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = 0$, $y = x^2$ και $x^2 + y^2 = 2$, όταν η *R* περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy. (*Απάντηση*: $V = \pi(8\sqrt{2} - 7)/5$)

5) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της περιοχής *R* η οποία ορίζεται από τις καμπύλες $y = (x-2)^3$ και $y = x - 2$, γύρω από τον άξονα Ox. (*Απάντηση*: $V = 8\pi/21$)

9.9.5 Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής

Έστω *c* μια καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$, όπου $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και θετική σ' αυτό, με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Η περιστροφή της καμπύλης *c* γύρω από τον άξονα Ox παράγει ένα στερεό του οποίου θα υπολογίσουμε την επιφάνεια.

Χωρίζουμε με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_\nu = \beta$ το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε *ν* μικρότερα διαστήματα και θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή $AA_1\ldots A_{i-1}A_i\ldots B$ που είναι εγγεγραμμένη στο τόξο *AB* (σχήμα 16). Η περιστροφή



Σχ 16

της πολυγωνικής γραμμής γύρω από τον άξονα Ox παράγει ένα στερεό με μια επιφάνεια εκ περιστροφής ($S_{\pi\varepsilon\rho}$) της οποίας το εμβαδό είναι το άθροισμα των εμβαδών των στοιχειωδών κόλουρων κώνων, επομένως είναι

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = \sum_{i=1}^{\nu} 2\pi(A_{i-1}A_i)\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$$

Αλλά $(A_{i-1}A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ και σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε $y_i - y_{i-1} = (x_i - x_{i-1})f'(\xi_i)$ όπου $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $i = 1, 2, ..., \nu$. Άρα

$(A_{i-1}A_i) = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}$ και $S_{\pi\varepsilon\rho} = 2\pi\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\dfrac{y_{i-1}+y_i}{2}$.

Προφανώς το εμβαδό της επιφάνειας που γράφεται απ' το τόξο AB θα είναι το $\lim_{\nu\to\infty} S_{\pi\varepsilon\rho}$ όταν $(x_i - x_{i-1}) \to 0$. Αλλά τότε τα x_i και x_{i-1} τείνουν και τα δύο στο ξ_i και επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα είναι

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = f(\xi_i).$$

Έτσι, απ' τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος θα έχουμε

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\cdot f(\xi_i)\Delta_i x = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,f(x)\,dx.$$

Άρα $S_{\pi\varepsilon\rho} = E = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,f(x)\,dx = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(y'_x)^2}\cdot y\,dx$. (1)

Με εντελώς ανάλογες σκέψεις, αν η καμπύλη $x = f^{-1}(y) = g(y)$ (αντίστροφη της δοθείσας $y = f(x)$) που ορίζεται στο διάστημα $[\gamma, \delta]$ το οποίο είναι πεδίο τιμών της $y = f(x)$, περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy, το εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής που δημιουργείται θα είναι

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = E = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,g(y)\,dy = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(x'_y)^2}\cdot x\,dy. \quad (2)$$

Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ τότε $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$, $(y'_x)^2 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2$ επομένως ο τύπος (1) γίνεται

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = E = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(y'_x)^2}\cdot y\,dx = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\cdot y(t)\,dt, \quad (3)$$

ενώ ο (2) γίνεται

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(x'_y)^2} \cdot x\, dy = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \cdot x(t)\, dt\,. \qquad (4)$$

Τέλος, στην περίπτωση που η καμπύλη $y = f(x)$ δίνεται σε πολικές συντεταγμένες ως $\rho = \rho(\theta)$ με $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ τότε,

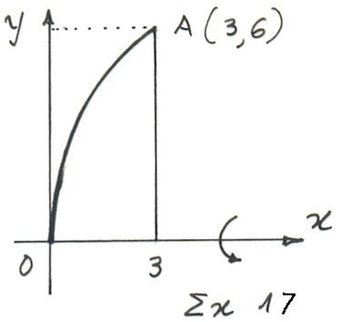
- αν η $\rho = \rho(\theta)$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Οx, αποδεικνύεται ότι

$$E = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)\eta\mu\theta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta \qquad (5)$$

- αν η $\rho = \rho(\theta)$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Οy, αποδεικνύεται ότι

$$E = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta \qquad (6)$$

Παραδείγματα



1) Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας εκ περιστροφής που δημιουργείται από την παραβολή $y^2 = 12x$ από $x = 0$ μέχρι $x = 3$, όταν αυτή περιστραφεί γύρω από τον άξονα Οx.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα την παράσταση $1 + (y')^2$.

Είναι $2yy' = 12 \Rightarrow y' = \dfrac{6}{y}$. Άρα $1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{36}{y^2} = \dfrac{y^2 + 36}{y^2}$. Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο έχουμε

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(y')^2}\, y\, dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{\frac{y^2+36}{y^2}}\, y\, dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{y^2+36}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x+36}\, dx = 4\sqrt{3}\pi \int_0^3 \sqrt{x+3}\, dx$$

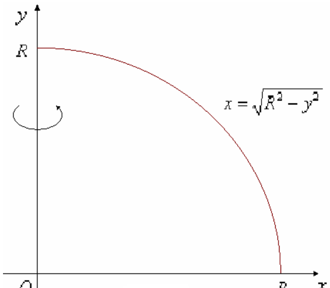
Είναι $\int \sqrt{x+3}dx = \int (x+3)^{1/2} d(x+3) = \dfrac{(x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{1/2+1} = \dfrac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3}$. Άρα

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = 4\sqrt{3}\pi \int_0^3 \sqrt{x+3}\, dx = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\left[\sqrt{(x+3)^3}\right]_0^3 = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}(\sqrt{6^3} - \sqrt{3^3}) =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\sqrt{3^3}(\sqrt{2^3} - 1) = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} 3\sqrt{3}(2\sqrt{2} - 1) = 24(2\sqrt{2} - 1)\pi \text{ τ. μ.}$$

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας ακτίνας *R*.

Λύση



Σχ. 18

Θεωρούμε την εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο, όπως φαίνεται στο σχήμα 18. Περιστρέφουμε την καμπύλη γύρω από τον άξονα Oy, οπότε δημιουργούμε το πάνω ημισφαίριο του στερεού. Λόγω συμμετρίας, αρκεί να βρούμε το εμβαδόν του πάνω ημισφαιρίου και να διπλασιάσουμε το αποτέλεσμα. Αφού η περιστροφή είναι γύρω από τον άξονα Oy, το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται απ' τη σχέση

$$S_{\pi\varepsilon\rho} = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,g(y)\,dy = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(x'_y)^2}\cdot x\,dy =$$

$$= 2\cdot 2\pi\int_0^R\sqrt{1+\left(-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)^2}\cdot\sqrt{R^2-y^2}\,dy =$$

$$= 4\pi\int_0^R\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\cdot\sqrt{R^2-y^2}\,dy = 4\pi\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\sqrt{R^2-y^2}\,dy =$$

$$= 4\pi R\int_0^R dy = 4\pi R y\Big|_0^R = 4\pi R^2.$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y = x/4$, όταν $0 \le x \le 4$. (*Απάντηση*: $E = \pi\sqrt{17}$)

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y^2 = 6x$ όταν $0 \le x \le 2$, γύρω από τον άξονα Ox.

(*Απάντηση*: $E = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\left(7\sqrt{7} - 3\sqrt{3}\right)$)

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$ όταν $0 \le x \le \sqrt{2}$ γύρω από τον άξονα Oy.

(*Απάντηση*: $E = \frac{\pi}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$)

4) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y = 2x^3$ όταν $0 \le x \le 1$, γύρω από τον άξονα Ox. (*Απάντηση*: $E = \frac{\pi}{54}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$)

5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της κυκλοειδούς καμπύλης $x = \alpha(t - \eta\mu\, t)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\, t)$ όταν $0 \le t \le 2\pi,\ \alpha > 0$ γύρω από τον άξονα Ox. (*Απάντηση*: $E = \frac{64\pi\alpha^2}{3}$)

6) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της κυκλοειδούς καμπύλης $x = \alpha(t - \eta\mu\, t)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\, t)$ όταν $0 \le t \le 2\pi,\ \alpha > 0$ γύρω από τον άξονα Oy . (*Απάντηση*: $E = 16\alpha^2\pi^2$)

7) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ και τον οριζόντιο άξονα όταν $x \in [0, 2]$, γύρω από τον άξονα Ox. (*Απάντηση*: $E = \frac{13\pi}{3}$)

8) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται, αν περιστραφεί η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$ γύρω από το μεγάλο της άξονα (Ox). (*Απάντηση*: $E = \frac{2\pi}{9}\left(9 + 4\pi\sqrt{3}\right)$)