Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **8**

Μετασχηματισμοί Laplace

8.1 Εισαγωγή

Η έννοια του **μετασχηματισμού** (transform) στα Μαθηματικά, με εργαλείο τον **τελεστή** (operator), είναι μια απεικόνιση (αντιστοιχία), *μεταξύ όμως δύο συνόλων συναρτήσεων*, όπως ακριβώς και η συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία όλων των x ενός συνόλου αριθμών Χ σ' ένα άλλο σύνολο $f(x) = \mathrm{Y}$ μέσω του τύπου (ή τελεστή) f της συνάρτησης. Έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα διάφορους τελεστές: Π.χ. σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ αντιστοιχίζουμε μέσω του τελεστή της παραγώγου $\frac{d}{dx}$ ή D την παράγωγό της $\frac{d(f(x))}{dx}$ ή $f'(x)$ ή $D(f(x))$. Επίσης, σε μια συνάρτηση $f(x)$ αντιστοιχίζουμε μέσω του τελεστή του ολοκληρώματος $\int dx$ το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\int f(x)dx$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε μετάβαση από ένα σύνολο συναρτήσεων σε ένα άλλο.

Στις τεχνολογικές εφαρμογές, όπως Θεωρία Αυτομάτου Ελέγχου, Θεωρία Σημάτων, Διάδοση Κυμάτων και άλλες, εφαρμόζεται ο λεγόμενος **Γραμμικός Ολοκληρωτικός Μετασχηματισμός** που επιτρέπει τη μετάβαση από ένα σύνολο συναρτήσεων $f(t)$ σε ένα άλλο σύνολο $F(s)$ και έχει γενικό τύπο:

$$\mathrm{T}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s,t)f(t)dt = F(s)\,, \qquad (1)$$

όπου Τ είναι ο μετασχηματισμός που εφαρμόζεται. Με τον τύπο (1) η συνάρτηση $f(t)$ μετασχηματίζεται μέσω του γενικευμένου ολοκληρώματος και της συνάρτησης $k(s,t)$ (εφόσον αυτό υπάρχει) σε μια άλλη συνάρτηση $F(s)$, η οποία λέγεται **μετασχηματισμένη** της $f(t)$ ή **μετασχηματισμός** της $f(t)$. Επειδή η ολοκλήρωση γίνεται με μεταβλητή το t, γι' αυτό το s στη συνάρτηση $k(s,t)$ θεωρείται σταθερή ποσότητα. Η συνάρτηση αυτή $k(s,t)$ λέγεται **πυρήνας** του μετασχηματισμού Τ και δημιουργεί τη μετατροπή των συναρτήσεων $f(t)$ σε $F(s)$. Να σημειωθεί ότι στους μετασχηματισμούς, συνήθως η μεταβλητή στη συνάρτηση $f(t)$ είναι ο χρόνος *t*, διότι εκφράζει τη μεταβολή ενός φυσικού φαινομένου (*με τη γενική ονομασία σήματος*), όπως η ένταση ρεύματος, το φορτίο ηλεκτρικού ρεύματος κλπ, και λέγεται *συνάρτηση εισόδου* (*input function)* όπως αυτή αναφέρεται σε διάφορα συστήματα, π.χ. τα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου.

Από την κατηγορία αυτή των γραμμικών ολοκληρωτικών μετασχηματισμών οι σημαντικότεροι για τις εφαρμογές είναι:

α) ο **Μετασχηματισμός Laplace (ML)** με τύπο:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \text{, όπου } k(s,t) = e^{-st} \text{ και } s \in R, \tag{2}$$
[1]

β) ο **Μετασχηματισμός Fourier (MF)** με τύπο:

$$T\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(t)dt \text{, όπου } k(s,t) = e^{-ist} \text{ και } s \in R, \tag{3}$$

αλλά και άλλοι, όπως **μετασχηματισμός Z, μετασχηματισμός Legendre, μετασχηματισμός Mellin, κλπ** με διαφορετικές ο καθένας συναρτήσεις – πυρήνες. Στα επόμενα, θα ασχοληθούμε μόνο με τους μετασχηματισμούς Laplace (ML).

Στον ML το σύμβολο L αριστερά της συνάρτησης $f(t)$ δηλώνει τη διαδικασία εύρεσης του ML και λέγεται **τελεστής Laplace**, η συνάρτηση $F(s)$ λέγεται **μετασχηματισμένη ή μετασχηματισμός Laplace,** ενώ η αρχική συνάρτηση $f(t)$ λέγεται **αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace** και συμβολίζεται με $L^{-1}\{F(s)\}$ δηλαδή είναι

$$L\{f(t)\} = F(s) \text{ και } L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ ή } L^{-1}\left\{L\left\{f(t)\right\}\right\} = f(t), \tag{4}$$

όπου το σύμβολο L^{-1} λέγεται **αντίστροφος τελεστής Laplace**.

Την αρχική συνάρτηση την συμβολίζουμε με μικρό γράμμα, ενώ την μετασχηματισμένη της με το αντίστοιχο κεφαλαίο. Έτσι, $F(s)$ δηλώνει τη μετασχηματισμένη της $f(t)$, $G(s)$ τη μετασχηματισμένη της $g(t)$ κ.ο.κ.

Ιστορικά, η μέθοδος του ML εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον Heaviside [2] κατά το 1890, στην προσπάθειά του ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων που κατέληξε στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (παρ.

---

[1] Γενικότερα η παράμετρος *s* μπορεί να ανήκει και στο σύνολο των Μιγαδικών αριθμών C.

[2] Oliver Heaviside, Άγγλος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός (Camden Λονδίνου) (1850 – 1925).

1.8). Όμως η μέθοδος ML αναπτύχθηκε πολύ πριν (περί το 1800) από τον Laplace.[1] Αργότερα, κατά το 1920, δόθηκε αυστηρή μαθηματική θεμελίωση του ML.

Στις τεχνολογικές εφαρμογές ο ML μετασχηματίζει, όπως είπαμε, τις συναρτήσεις $f(t)$ ενός σήματος ως προς το χρόνο t, σε συναρτήσεις $F(s)$ ως προς τη συχνότητα s. Όμως, πέρα από το τεχνικό μέρος, η μεγάλη ευκολία που παρέχουν οι ML είναι η μετατροπή προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων ως προς το χρόνο t, σε απλές αλγεβρικές εξισώσεις ως προς το πεδίο συχνότητας s, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Έτσι, ο ML καθίσταται ένα πολυτιμότατο εργαλείο ανάλυσης και επεξεργασίας ενός φυσικού φαινομένου, από το πεδίο του χρόνου t στο πεδίο συχνοτήτων s και αντίστροφα (μέσω του αντίστροφου του ML όπως θα δούμε), απλοποιώντας παράλληλα τη λύση ενός προβλήματος.

8.2 Θεώρημα ύπαρξης και γραμμικότητα του ML

Γεννάται το ερώτημα, αν κάθε συνάρτηση $f(t)$ έχει τη μετασχηματισμένη της $F(s)$ κατά Laplace. Η απάντηση είναι βεβαίως όχι, διότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα (2) που ορίζεται δεν συγκλίνει πάντα. Πριν αποδείξουμε όμως το θεώρημα ύπαρξης μετασχηματισμένης Laplace θα απαιτηθεί ο ακόλουθος

Ορισμός

«Μία συνάρτηση $f(t)$ λέγεται *συνάρτηση εκθετικής τάξης*, αν υπάρχουν σταθεροί αριθμοί $\alpha,\ t_0$, και M με $t_0 > 0,\ M > 0$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$|f(t)| < Me^{\alpha t},\ \ \forall t > t_0 \text{ ».} \tag{4}$$

Θεώρημα ύπαρξης μετασχηματισμένης κατά Laplace:

Αν η πραγματική συνάρτηση $f(t)$, ορισμένη στο διάστημα $[0,\ \infty)$ είναι:

α) *τμηματικά συνεχής* [2] σε κάθε διάστημα $[0, \beta]$ ($\beta \in R,\ \beta > 0$),

β) *συνάρτηση εκθετικής τάξης* (όπως ορίστηκε πριν), τότε *υπάρχει* η

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \ \text{ για } \ s > \alpha. \tag{5}$$

---

[1] Pierre Simon Laplace, Γάλλος Μαθηματικός (Beaumont-en-Auge) (1749 – 1827).

[2] Βλέπε θεώρημα. 7.3.1.

Απόδειξη

Εφόσον η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής, η συνάρτηση $e^{-st}f(t)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του άξονα των *t*, επομένως από την (4) έχουμε

$$\left|L\{f(t)\}\right| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^{\infty} e^{-st}\left|f(t)\right|dt \le \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\alpha t}dt =$$

$$= M\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = M\left(-\frac{1}{s-\alpha}\right)\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}d\left[-(s-\alpha)t\right] =$$

$$= M\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{s-\alpha}\right)\left[e^{-(s-\alpha)t}\right]_0^u = M\left(-\frac{1}{s-\alpha}\right)(0-1) = \frac{M}{s-\alpha}, \text{ όπου } s>\alpha .$$

Επομένως υπάρχει η μετασχηματισμένη της $f(t)$, εφόσον το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν αποκλίνει.

Στα επόμενα ότι όλες οι συναρτήσεις $f(t)$ που θα αναφερόμαστε θα είναι συναρτήσεις εκθετικής τάξης και συνεχείς στο $[0, \infty)$ ή τμηματικά συνεχείς.

Γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace

Ο Μετασχηματισμός Laplace είναι μια γραμμική πράξη, δηλαδή, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(t),\ g(t)$ για τις οποίες υπάρχει η μετασχηματισμένη Laplace, και για οποιουσδήποτε σταθερούς αριθμούς $\alpha,\ \beta$ έχουμε:

$$L\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\}+\beta L\{g(t)\}, \qquad (6)$$

δηλαδή ο τελεστής L είναι γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ML έχουμε

$$L\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]dt =$$

$$= \alpha\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt = \alpha L\{f(t)\}+\beta L\{g(t)\} .$$

8.3 Υπολογισμός ML βασικών συναρτήσεων

Στη παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε με βάση τον ορισμό, τις μετασχηματισμένες $F(s)$ μερικών απλών βασικών συναρτήσεων $f(t)$ που ορίζονται όλες στο διάστημα $[0, \infty)$ και χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές.

1) της συνάρτησης *f(t) = c*.

$$L\{c\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot c\, dt = \lim_{u\to\infty} c\int_0^u e^{-st} dt = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{c}{s}\int_0^u d(e^{-st})\right] = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{c}{s}e^{-st}\right]_0^u =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{c}{s}e^{-su} + \frac{c}{s}e^{-s\cdot 0}\right] = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{c}{s} - \frac{c}{s}e^{-su}\right].$$

Όπως τονίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, πρέπει να υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα, δηλαδή αυτό να συγκλίνει.

- Για $s<0$ είναι $\lim\limits_{u\to\infty} e^{-su} = \infty$ και το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει
- Για $s=0$ είναι $\int_0^\infty e^{0\cdot t} \cdot c \cdot dt = \lim\limits_{u\to\infty} c\int_0^u dt = \lim\limits_{u\to\infty} c\left[t\right]_0^u = \lim\limits_{u\to\infty} c(u-0) = \pm\infty$ ανάλογα αν το c είναι θετικός ή αρνητικός. Δηλαδή το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.
- Για $s>0$ είναι $\lim\limits_{u\to\infty} e^{-su} = \lim\limits_{u\to\infty}\left(\frac{1}{e^{su}}\right) = 0$ και άρα $\lim\limits_{u\to\infty}\left[\frac{c}{s} - \frac{c}{s}e^{-su}\right] = \frac{c}{s}$. Δηλαδή το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τιμή c/s.

Άρα $L\{c\} = \dfrac{c}{s},\ s>0$.

2) της συνάρτησης $f(t)=t$.

$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim\limits_{u\to\infty}\int_0^u e^{-st} t\, dt$. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με κατά παράγοντες ολοκλήρωση (βλ. 9.3.3). Είναι

$$\int e^{-st} t\, dt = \int t\, d\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right) \overset{\kappa.\pi.o.}{=} -\frac{1}{s}te^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st} dt = -\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st} + c.$$

Άρα $\lim\limits_{u\to\infty}\int_0^u e^{-st} t\, dt = \lim\limits_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^u = \lim\limits_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{s}ue^{-su} - \frac{1}{s^2}e^{-su} + \frac{1}{s^2}\right]$.

Όπως και πριν, για $s \le 0$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. Για $s>0$ έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} e^{-su} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^{su}} = 0,\ \lim_{u\to\infty}\left(ue^{-su}\right) = \lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{su}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{u\to\infty}\frac{u'}{(e^{su})'} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{se^{su}} = 0.$$

Άρα, $\lim\limits_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{s}ue^{-su} - \frac{1}{s^2}e^{-su} + \frac{1}{s^2}\right] = -\frac{1}{s}0 - \frac{1}{s^2}0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$. Επομένως

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2},\ s>0.$$

3) της συνάρτησης $f(t)=t^2$.

$L\{t^2\}=\int_0^{\infty} e^{-st}t^2\,dt=\lim_{u\to\infty}\int_0^{u} e^{-st}t^2\,dt$. Και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Έχουμε

$$\int e^{-st}t^2dt=\int t^2 d\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\overset{\kappa.\pi.o.}{=}-\frac{1}{s}t^2e^{-st}+\frac{1}{s}\int e^{-st}d(t^2)=-\frac{1}{s}t^2e^{-st}+\frac{2}{s}\int e^{-st}tdt\,.$$

Αλλά είδαμε πριν ότι $\int e^{-st}t\,dt=-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}$. Έτσι, συνεχίζοντας έχουμε:

$=-\frac{1}{s}t^2e^{-st}+\frac{2}{s}\left(-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)=-\frac{1}{s}t^2e^{-st}-\frac{2}{s^2}te^{-st}-\frac{2}{s^3}e^{-st}+c$. Και άρα

$\int_0^{u} e^{-st}t^2\,dt=-\frac{1}{s}u^2e^{-su}-\frac{2}{s^2}ue^{-su}-\frac{2}{s^3}e^{-su}+\frac{2}{s^3}$. Επίσης είναι

$$\lim_{u\to\infty}(u^2e^{-su})=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u^2}{e^{su}}\right)=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{u\to\infty}\frac{(u^2)'}{(e^{su})'}=\lim_{u\to\infty}\frac{2u}{se^{su}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{u\to\infty}\frac{2}{s^2e^{su}}=0$$

Επομένως προκύπτει τελικά

$L\{t^2\}=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{s}u^2e^{-su}-\frac{2}{s^2}ue^{-su}-\frac{2}{s^3}e^{-su}+\frac{2}{s^3}\right)=\frac{2}{s^3}$, $s>0$. Επομένως

$$L\{t^2\}=\frac{2}{s^3}=\frac{2!}{s^3},\ s>0\,.$$

Αποδεικνύεται ότι (παράγραφος 8.4, 3η ιδιότητα):

$$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0,\ n\in N\,.$$

4) των συναρτήσεων α) $f(t)=e^{at}$ και β) $f(t)=e^{-at}$, $a\in R$.

α) Είναι εξ' ορισμού

$$L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt=\lim_{u\to\infty}\int_0^{u} e^{-(s-a)t}dt=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{s-a}\right)\int_0^{u} d(e^{-(s-a)t})=$$

$=\left(-\frac{1}{s-a}\right)\lim_{u\to\infty}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^{u}=\left(-\frac{1}{s-a}\right)(0-1)=\frac{1}{s-a}$. με $s>a$. Άρα

$$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a},\ s>a\,.$$

β) Αν θέσουμε στην τελευταία σχέση όπου α το $-\alpha$ παίρνουμε

$$L\{e^{-at}\}=\frac{1}{s+a},\ s>-a\,.$$

5) των υπερβολικών συναρτήσεων

α) $f(t)=\sinh(a\,t)=\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$ και **β)** $f(t)=\cosh(a\,t)=\frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$**,** $a\in R$**.**

α) Επειδή $\sinh(a\,t)=\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}$, χρησιμοποιώντας τη γραμμική ιδιότητα (6) του ML, έχουμε $L\{f(t)\}=L\{\sinh(a\,t)\}=L\left\{\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}\right\}=\frac{1}{2}L\{e^{at}\}-\frac{1}{2}L\{e^{-at}\}$,

οπότε λόγω των προηγουμένων συναρτήσεων προκύπτει

$$L\{\sinh(a\,t)\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s>|a|.$$

Ανάλογα βρίσκουμε $L\{\cosh(a\,t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2}$, $s>|a|$.

6) των συναρτήσεων α) $f(t)=\eta\mu(\beta t)$ **και**

β) $f(t)=\sigma\upsilon\nu(\beta t)$**,** $\beta\in R$**.**

Θα υπολογίσουμε πρώτα τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\mathrm{K}=\int e^{at}\eta\mu(\beta\,t)dt \ \text{ και } \ \Lambda=\int e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)dt$$

με την κατά παράγοντες ολοκλήρωση (βλ. παράγραφο 9.3.3, παράδειγμα).

$$\mathrm{K}=\int e^{at}\eta\mu(\beta t)dt=\frac{1}{a}\int e^{at}\eta\mu(\beta\,t)d(a\,t)=\frac{1}{a}\int\eta\mu(\beta\,t)d(e^{at})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{a}e^{at}\eta\mu(\beta\,t)}_{\gamma}-\frac{1}{a}\int e^{at}d\left[\eta\mu(\beta\,t)\right]=\gamma-\frac{1}{a}\int e^{at}\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)dt=$$

$$=\gamma-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\int\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)d\left(e^{at}\right)\overset{\kappa.\pi.o.}{=}\gamma-\frac{\beta}{\alpha^2}\Big[e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)-\int e^{at}d\left[\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)\right]\Big]=$$

$$=\gamma-\underbrace{\frac{\beta}{\alpha^2}e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)}_{\delta}+\frac{\beta}{\alpha^2}\int e^{at}(-\beta\cdot\eta\mu(\beta\,t))dt=\gamma-\delta-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\mathrm{K}\,.\ \text{Έτσι}$$

$$\mathrm{K}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\mathrm{K}=\gamma-\delta=\frac{1}{\alpha}e^{at}\eta\mu(\beta\,t)-\frac{\beta}{\alpha^2}e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)\ \text{ ή}$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\mathrm{K}=\frac{e^{at}}{\alpha^2}\left[\alpha\eta\mu(\beta\,t)-\beta\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)\right].\ \text{Άρα}$$

$$\mathrm{K}=\frac{e^{at}\left[\alpha\cdot\eta\mu(\beta\,t)-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)\right]}{\alpha^2+\beta^2}+c\,. \qquad \textbf{(i)}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίζουμε και το Λ. Βρίσκουμε

$$\Lambda = \frac{e^{at}\left[\beta\cdot\eta\mu(\beta t)+\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta t)\right]}{\alpha^2+\beta^2}+c\,. \qquad \textbf{(ii)}$$

α) Κατόπιν των υπολογισμών αυτών έχουμε

$$L\{\eta\mu(\beta t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\eta\mu(\beta t)\,dt = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-st}\eta\mu(\beta t)\,dt$$

και σύμφωνα με τον τύπο **(i)** που βρήκαμε πριν

$$\int e^{-st}\eta\mu(\beta t)dt = \frac{e^{at}\left[-s\cdot\eta\mu(\beta t)-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta t)\right]}{s^2+\beta^2}+c\,.$$ Άρα

$$L\{\eta\mu(\beta t)\} = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{e^{at}\left[-s\cdot\eta\mu(\beta t)-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta t)\right]}{s^2+\beta^2}\right]_0^u =$$

$$= -\lim_{u\to\infty}\left[\frac{e^{au}\left[s\cdot\eta\mu(\beta u)+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta u)\right]}{s^2+\beta^2}-\frac{\beta\cdot 1}{s^2+\beta^2}\right].$$

Για $s \le 0$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει, ενώ για $s > 0$ έχουμε

$|\eta\mu(\beta u)| \le 1,\ |\sigma\upsilon\nu(\beta u)| \le 1$ και $\lim\limits_{u\to\infty} e^{-su} = 0$. Συνεπώς θα είναι και

$\lim\limits_{u\to\infty}\left(e^{-su}\eta\mu(\beta u)\right) = 0$ καθώς και $\lim\limits_{u\to\infty}\left(e^{-su}\sigma\upsilon\nu(\beta u)\right) = 0$. Επομένως

$$= -\lim_{u\to\infty}\left[\frac{e^{au}\left[s\cdot\eta\mu(\beta u)+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta u)\right]}{s^2+\beta^2}-\frac{\beta\cdot 1}{s^2+\beta^2}\right] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}.$$ Άρα

$$L\{\eta\mu(\beta t)\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}\,,\ s>0\,.$$

β) Με τις ίδιες σκέψεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$L\{\sigma\upsilon\nu(\beta t)\} = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{e^{au}\left[\beta\cdot\eta\mu(\beta u)-s\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta u)\right]}{s^2+\beta^2}-\frac{-s\cdot 1}{s^2+\beta^2}\right] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

Άρα $$L\{\sigma\upsilon\nu(\beta t)\} = \frac{s}{s^2+\beta^2}\,,\ s>0\,.$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η μετασχηματισμένη των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(t) = 2\eta\mu(3t)+4\sigma\upsilon\nu(5t)$, **β)** $g(t) = (2t-1)^2$, **γ)** $h(t) = \eta\mu^2(3t)$.

Λύση

α) Από τη γραμμικότητα του ML και την 6^{η} εφαρμογή της 8.3 έχουμε

$$L\{f(t)\} = L\{2\eta\mu(3t)+4\sigma\upsilon\nu(5t)\} = 2L\{\eta\mu(3t)\}+4L\{\sigma\upsilon\nu(5t)\} =$$

$$= 2\frac{3}{s^2+3^2} + 4\frac{s}{s^2+5^2} = \frac{6}{s^2+9} + \frac{4s}{s^2+25}.$$

β) Μετά το ανάπτυγμα και τη γραμμικότητα του ML χρησιμοποιούμε την $1^η$, $2^η$ και $3^η$ εφαρμογή. Έτσι έχουμε

$$L\{g(t)\} = L\{(2t-1)^2\} = L\{4t^2 - 4t + 1\} = 4L\{t^2\} - 4L\{t\} + L\{1\} =$$

$$= 4\frac{2}{s^3} - 4\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{s^2 - 4s + 8}{s^3}.$$

γ) Ως γνωστό, (βλέπε Τυπολόγιο, Α. Τριγωνομετρία, (τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου και τριπλάσιου τόξου)), είναι

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \Rightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}.$$ Επομένως

$$L\{h(t)\} = L\{\eta\mu^2(3t)\} = L\left\{\frac{1-\sigma\upsilon\nu(6t)}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{\sigma\upsilon\nu(6t)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+6^2} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2s^2+72}.$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι ML των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(t) = \eta\mu(\alpha t + \beta)$, **β)** $f(t) = \sigma\upsilon\nu(\alpha t + \beta)$.

(*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της τριγωνομετρίας (βλέπε τυπολόγιο, Α. Τριγωνομετρία, τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος ή διαφοράς τόξων): $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$).

(*Απάντηση*: $L\{\eta\mu(\alpha t+\beta)\} = \dfrac{\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + s\eta\mu\beta}{s^2+\alpha^2}$, $L\{\sigma\upsilon\nu(\alpha t+\beta)\} = \dfrac{s\,\sigma\upsilon\nu\beta - \alpha\eta\mu\beta}{s^2+\alpha^2}$).

2) Να βρεθούν οι ML των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(t) = 2t^5 - t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 6t + 7$, **β)** $f(t) = 2\sigma\upsilon\nu^2(3t)$.

(*Υπόδειξη για τη (β)*: Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος $\sigma\upsilon\nu^2 t = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu(2t)}{2}$).

(*Απάντηση*: **α)** $L\{f(t)\} = \dfrac{240}{s^6} - \dfrac{24}{s^5} - \dfrac{24}{s^4} + \dfrac{10}{s^3} - \dfrac{6}{s^2} + \dfrac{7}{s}$, **β)** $L\{f(t)\} = \dfrac{2s^2+36}{s(s^2+36)}$).

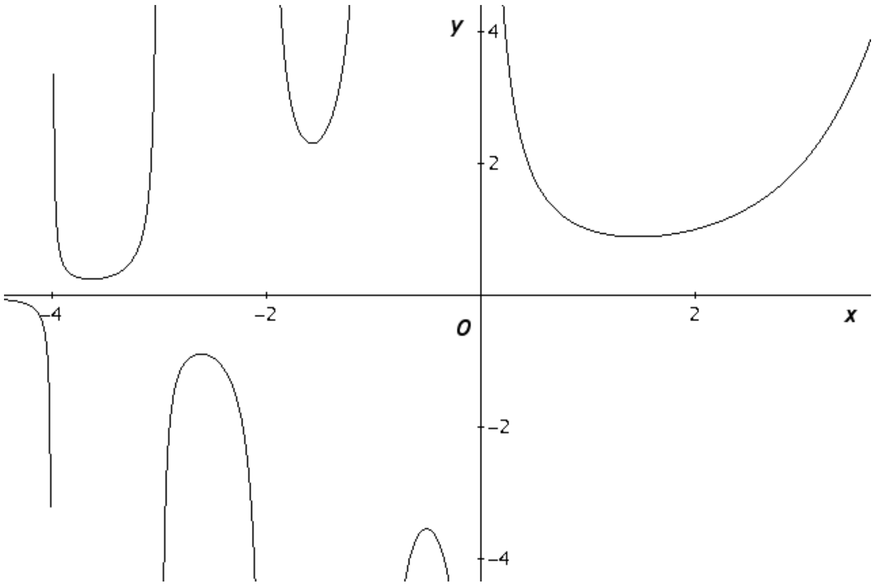
8.4 Συνάρτηση Γ ή Γενικευμένο Παραγοντικό

Η συνάρτηση $\Gamma = \Gamma(x)$ δημιουργήθηκε από τον Euler για την ανάγκη υπολογισμού και μη φυσικών δυνάμεων του *t*. Έχει σημαντικές ιδιότητες και πολλές εφαρμογές στα Μαθηματικά, σχετίζεται δε με τους ML. Ο τύπος της είναι

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Αποδεικνύεται ότι το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα συγκλίνει για $x > 0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης Γ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Ιδιότητες της συνάρτησης Γ

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. (1)

Πράγματι. Αν θέσουμε στη συνάρτηση Γ όπου *x* το *x* +1 έχουμε:

$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = -\int_0^{\infty} t^x e^{-t} d(-t) = -\int_0^{\infty} t^x d(e^{-t})$. Όμως

$-\int t^x d(e^{-t}) \overset{\kappa.\pi.o.}{=} -\left[t^x e^{-t} - \int e^{-t} d(t^x) \right] = -t^x e^{-t} + x\int e^{-t} t^{x-1} dt$. Έτσι,

$\Gamma(x+1) = -\int_0^{\infty} t^x d(e^{-t}) = -\left[t^x e^{-t} \right]_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ και επειδή

$\lim\limits_{t\to\infty}(t^x e^{-t}) = 0$ και $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$ προκύπτει ότι

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

2) $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in N$ (σύνολο φυσικών αριθμών) και $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. (2)

Θα αποδείξουμε τη 2η ιδιότητα με τη μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής. Δηλαδή, υπό τον όρο ότι ισχύει για τον ελάχιστο φυσικό (εδώ n = 0), αν δεχθούμε ότι ισχύει για $n = k$ και αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$, τότε η πρόταση θα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Είναι $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \left(0-(-1)\right) = 1$.

Δηλαδή ισχύει για n = 0, ή $\Gamma(0+1) = 0! = 1$ (εξ ορισμού είναι 0! = 1).

Έστω ότι ισχύει για $n = k$ δηλαδή $\Gamma(k+1) = k!$. (i)

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$, δηλαδή $\Gamma(k+1+1) = (k+1)!$

Πράγματι. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (1) για $x = k+1$ έχουμε

$$\Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1) \overset{\lambda\acute{o}\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ (i)}{=} (k+1)k! = (k+1)!$$

δηλαδή ισχύει και για $n = k+1$. Άρα θα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

3) $L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\forall\, n \in N$ με χρήση της συνάρτησης $\Gamma = \Gamma(x)$.

(Η ιδιότητα αυτή είναι γενίκευση της $L\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^3}$ που γνωρίσαμε, $\forall\, n \in N$).

Είναι εξ ορισμού $L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt$.

Στο ολοκλήρωμα αυτό κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = st$ και έχουμε

$du = d(st) = s\,dt$, οπότε $dt = \dfrac{du}{s}$. Επίσης είναι $t = \dfrac{u}{s}$.

Επομένως, τα νέα όρια του ολοκληρώματος είναι:

Για $t = 0$ είναι $u = 0$, καθώς και για $t = \infty$ είναι $u = \infty$. Επομένως

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^{(n+1)-1}du = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1).$$

Επειδή όπως είδαμε το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $x > 0$ το ολοκλήρωμα

$L\{t^n\} = \dfrac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)$ συγκλίνει για $n+1 > 0$ δηλαδή για $n > -1,\ n \in R$.

Η τελευταία σχέση λόγω της ιδιότητας (2) που αποδείξαμε γίνεται

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\quad n \in N, \text{ (ενώ } L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\ n \in R,\ n > -1 \text{)}.$$

Παραδείγματα

1) Να δειχθεί ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Λύση

Είναι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$. Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $t=u^2$.

Έχουμε $dt=2udu$ και για $t=0$ είναι $u=0$, ενώ για $t=\infty$ είναι $u=\infty$. Άρα

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} u^{-1}e^{-u^2}\cdot 2udu=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du .$$

Όμως, ως γνωστό, (βλέπε παράδειγμα 7 της παραγράφου 4.13) είναι

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ (ολοκλήρωμα Euler–Poisson),

και η συνάρτηση $y=e^{-x^2}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox

(διότι προφανώς ισχύει: $y(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=y(x)$). Άρα θα είναι

$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Επομένως

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi} .$$

2) Να δειχθεί ότι $L\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\}=L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

Λύση

Ο τύπος της 3ης ιδιότητας που είδαμε $L\{t^n\}=\frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)$ για $n=-\frac{1}{2}$ γίνεται

$$L\{t^{-1/2}\}=\frac{1}{s^{(-1/2)+1}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$ (παράδειγμα 1).

3) Να υπολογιστούν οι τιμές: **α)** $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ και **β)** $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$ της συνάρτησης Γ.

Λύση

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Είναι

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$ (διότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$).

β) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Είναι

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{7}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{35}{4}}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{\frac{35}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{105}{8}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{105}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{105}{16}}=\frac{16\sqrt{\pi}}{105}.$$

Ασκήσεις

1) Να εκφραστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-\omega^2}d\omega$ ως έκφραση της συνάρτησης Γ. (*Υπόδειξη*: Να τεθεί $\omega^2=x$ και να εκφραστεί το δοθέν ολοκλήρωμα με μεταβλητή ολοκλήρωσης το *x*). (*Απάντηση*: $\int_0^\infty e^{-\omega^2}d\omega=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$). (βλ. παράδειγμα 1).

2) Να υπολογιστεί ο ML της $f(t)=t^{7/2}$ με τη βοήθεια της ιδιότητας 3 και του παραδείγματος 3 (α) της παραγράφου 8.4. (*Απάντηση*: $L\{f(t)\}=\dfrac{105\sqrt{\pi}}{16s^{9/2}}$).

8.5 Αντίστροφος ML και γραμμικότητα αυτού

Όπως είδαμε (παράγρ. 8.2), για να έχει η συνάρτηση $f(t)$ τη μετασχηματισμένη αυτής $F(s)$ κατά Laplace, θα πρέπει να πληροί το θεώρημα ύπαρξης. Τότε:

$$L\{f(t)\}=F(s).$$

Αντίστροφα, η διαδικασία με την οποία προκύπτει η $f(t)$ από την $F(s)$ λέγεται, όπως είδαμε, *αντίστροφη μετασχηματισμένη* κατά Laplace και συμβολίζεται με

$$L^{-1}\{F(s)\}=f(t).$$

Αν όμως δοθεί η συνάρτηση $F(s)$, ερωτάται:

α) Είναι πάντα αυτή μετασχηματισμένη κάποιας αρχικής $f(t)$;

β) Αν είναι μετασχηματισμένη κάποιας $f(t)$, είναι η $f(t)$ μοναδική;

γ) Υπάρχουν κανόνες υπολογισμού της;

Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι ότι δεν έχει *κάθε* συνάρτηση $F(s)$ αντίστροφη μετασχηματισμένη $f(t)$. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις, όπως π. χ. οι:

$s,\ s^2,\ c,\ s^2/(s^2+c),\ \eta\mu s,\ \sigma\upsilon\nu s$ κλπ,

οι οποίες δεν είναι μετασχηματισμένες καμιάς αρχικής $f(t)$.

Στο το δεύτερο ερώτημα, για να είναι η $f(t)$ μοναδική, θα πρέπει αυτή, αν υπάρχει, να είναι επιπλέον και συνεχής. Ωστόσο, οι συναρτήσεις $f(t)$ που συναντούμε στις εφαρμογές είναι συνήθως συνεχείς, άρα μπορούμε να πούμε πρακτικά ότι οι αναζητούμενες αντίστροφες μετασχηματισμένες κατά Laplace είναι μοναδικές.

Η απάντηση για το τρίτο ερώτημα είναι ότι δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες υπολογισμού της $f(t)$, αλλά μεθοδεύσεις που μετασχηματίζουν την $F(s)$, ανάλογα με τον τύπο αυτής, σε ισοδύναμες συναρτήσεις, έτσι ώστε, με τη βοήθεια τύπων που έχουμε βρει μέχρι τώρα και κάποιων θεωρημάτων που θα αναφέρουμε στη συνέχεια σε επόμενες παραγράφους, να μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστροφες μετασχηματισμένες κατά Laplace.

Αν π.χ. η $F(s)$ δίνεται σε μορφή κλάσματος ρητών συναρτήσεων, τότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα όπως κάνουμε και στα ολοκληρώματα (βλέπε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης, παράγραφος 9.4). Μερικά παραδείγματα που θα παραθέσουμε στη συνέχεια, καθιστούν σαφέστερο τον τρόπο εύρεσης της αντίστροφης μετασχηματισμένης.

Επίσης, αν η συνάρτηση $F(s)$ δίνεται σε μορφή κλάσματος ρητών συναρτήσεων, τότε υπάρχει μια ξεχωριστή μέθοδος του *Heaviside* η οποία παρουσιάζεται στη παράγραφο 8.9. Αυτή η μέθοδος ισοδυναμεί με τη μέθοδο ανάλυσης σε απλά κλάσματα, (όπως αυτή εκτίθεται στην παράγραφο 9.4) για την εύρεση της αρχικής $f(t)$, υπολογίζει όμως απευθείας τους συντελεστές των απλών κλασμάτων.

Γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Ο αντίστροφος μετασχηματισμού Laplace δηλαδή ο τελεστής L^{-1}, είναι και αυτός μια γραμμική πράξη, δηλαδή, για τις συναρτήσεις $F(s),\ G(s)$ για τις οποίες υπάρχει η αντίστροφη μετασχηματισμένη Laplace, και για τους σταθερούς αριθμούς α, β αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$L^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha L^{-1}\{F(s)\}+\beta L^{-1}\{G(s)\}. \tag{1}$$

Δηλαδή ο τελεστής L^{-1} είναι γραμμικός τελεστής, όπως ακριβώς και ο τελεστής L.

Επίσης, αν $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, τότε $L^{-1}\{F(as)\}=\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{t}{a}\right),\ a>0$. $\quad(2)$

Π.χ. αν $L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+3^2}\right\}=\sigma\upsilon\nu(3t)=f(t)$, τότε θα είναι λόγω του (2)

$$L^{-1}\{F(5s)\}=L^{-1}\left\{\frac{(5s)}{(5s)^2+3^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{5s}{25s^2+9}\right\}\overset{(a=5)}{=}\frac{1}{5}\sigma\upsilon\nu\left(3\cdot\frac{t}{5}\right).$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+9}-\dfrac{10}{s+3}+\dfrac{7s}{4s^2+25}\right\}$ και **β)** $L^{-1}\left\{\dfrac{-2s+2}{(s-3)(s-5)}\right\}$.

Λύση

α) Λόγω γραμμικότητας του αντίστροφου τελεστή L^{-1} έχουμε:

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}-\frac{10}{s+3}+\frac{7s}{4s^2+25}\right\}=\frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}-10L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+\frac{7}{2}L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2+5^2}\right\}.$$

Επειδή $L\{\eta\mu(\beta t)\}=\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$, $L\{e^{-at}\}=\dfrac{1}{s+a}$, $L\left\{\dfrac{1}{a}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\beta t}{a}\right)\right\}=\dfrac{as}{(as)^2+\beta^2}$,

προκύπτει ότι οι αντίστροφες μετασχηματισμένες αυτών θα είναι

$L^{-1}\left\{\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\}=\eta\mu(\beta t),\ L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}=e^{-at},\ L^{-1}\left\{\dfrac{as}{(as)^2+\beta^2}\right\}=\dfrac{1}{a}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\beta t}{a}\right)$. Άρα

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}-\frac{10}{s+3}+\frac{7s}{s^2+25}\right\}=\frac{2}{3}\eta\mu(3t)-10e^{-3t}+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{5t}{2}.$$

β) Επειδή ο παρονομαστής του κλάσματος αποτελείται από απλούς (βαθμού πολλαπλότητας ένα) πρωτοβάθμιους παράγοντες, μετασχηματίζουμε το δοθέν κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων (βλέπε παράγραφο 9.4). Είναι

$$\frac{-2s+2}{(s-3)(s-5)}=\frac{\mathrm{A}}{s-3}+\frac{\mathrm{B}}{s-5}=\frac{\mathrm{A}(s-5)+\mathrm{B}(s-3)}{(s-3)(s-5)}=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s-5\mathrm{A}-3\mathrm{B}}{(s-3)(s-5)}.$$

Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών προκύπτει το σύστημα:

$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=-2\\ -5\mathrm{A}-3\mathrm{B}=2\end{cases}$ απ’ το οποίο προκύπτει $\mathrm{A}=2,\ \mathrm{B}=-4$. Επομένως

$$L^{-1}\left\{\frac{-2(s-1)}{(s-3)(s-5)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}-\frac{4}{s-5}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}=2e^{3t}-4e^{5t}.$$

Άρα $\quad L^{-1}\left\{\dfrac{-2s+2}{(s-3)(s-5)}\right\}=2e^{3t}-4e^{5t}$.

2) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $\dfrac{1}{s^4+s^3}$ και **β)** $\dfrac{1}{s^5-4s^3}$.

Λύση

α) Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων (βλ. παράγρ. 9.4)

$$\frac{1}{s^4+s^3}=\frac{1}{s^3(s+1)}=\frac{\mathrm{A}}{s}+\frac{\mathrm{B}}{s^2}+\frac{\Gamma}{s^3}+\frac{\Delta}{s+1}=\frac{\mathrm{A}s^2(s+1)+\mathrm{B}s(s+1)+\Gamma(s+1)+\Delta s^3}{s^3(s+1)}$$

Μετά τις πράξεις στον αριθμητή έχουμε

$$\frac{1}{s^4+s^3}=\frac{1}{s^3(s+1)}=\frac{(\mathrm{A}+\Delta)s^3+(\mathrm{A}+\mathrm{B})s^2+(\mathrm{B}+\Gamma)s+\Gamma}{s^3(s+1)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων του s έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\Delta=0\\ \mathrm{A}+\mathrm{B}=0\\ \mathrm{B}+\Gamma=0\\ \Gamma=1\end{cases}$$ απ' το οποίο προκύπτει $\mathrm{A}=1,\ \mathrm{B}=-1,\ \Gamma=1,\ \Delta=-1$. Έτσι

$$\frac{1}{s^4+s^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s+1}.$$ Συνεπώς

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+s^3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$ ή

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+s^3}\right\}=1-t+\frac{1}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=1-t+\frac{t^2}{2}-e^{-t}$$

β) Εργαζόμενοι παρόμοια έχουμε

$$\frac{1}{s^5-4s^3}=\frac{1}{s^3(s^2-4)}=\frac{1}{s^3(s-2)(s+2)}=\frac{\mathrm{A}}{s}+\frac{\mathrm{B}}{s^2}+\frac{\Gamma}{s^3}+\frac{\Delta}{s-2}+\frac{\mathrm{E}}{s+2}=$$

$$=\frac{\mathrm{A}s^2(s^2-4)+\mathrm{B}s(s^2-4)+\Gamma(s^2-4)+\Delta s^3(s+2)+\mathrm{E}s^3(s-2)}{s^3(s-2)(s+2)}=$$

$$=\frac{(\mathrm{A}+\Delta+\mathrm{E})s^4+(\mathrm{B}+2\Delta-2\mathrm{E})s^3+(-4\mathrm{A}+\Gamma)s^2-4\mathrm{B}s-4\Gamma}{s^3(s-2)(s+2)}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων του s έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \mathrm{A}+\Delta+\mathrm{E}=0 \\ \mathrm{B}+2\Delta-2\mathrm{E}=0 \\ -4\mathrm{A}+\Gamma=0 \\ -4\mathrm{B}=0 \\ -4\Gamma=1 \end{cases} \quad \text{το οποίο δίνει } \mathrm{A}=-\frac{1}{16},\ \mathrm{B}=0,\ \Gamma=-\frac{1}{4},\ \Delta=\mathrm{E}=\frac{1}{32}.$$

Έτσι, $\dfrac{1}{s^5-4s^3}=-\dfrac{1}{16s}-\dfrac{1}{4s^3}+\dfrac{1}{32(s-2)}+\dfrac{1}{32(s+2)}$ και

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5-4s^3}\right\}=L^{-1}\left\{-\frac{1}{16s}-\frac{1}{4s^3}+\frac{1}{32(s-2)}+\frac{1}{32(s+2)}\right\}=$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5-4s^3}\right\}=-\frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}+\frac{1}{32}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\}+\frac{1}{32}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot 1-\frac{1}{8}\cdot t^2+\frac{1}{32}e^{2t}+\frac{1}{32}e^{-2t}=\frac{1}{32}\left(e^{2t}+e^{-2t}-4t^2-2\right).$$

3) Με τη βοήθεια του ορισμού (2) της παρ. 8.1, να υπολογιστούν οι ML των συναρτήσεων:

α) $f(t)=\begin{cases} 0\,,\ 0\le t<2 \\ t\,,\ 2\le t<3 \\ 0\,,\ t\ge 3 \end{cases}$, **β)** $f(t)=\begin{cases} 4\,,\ 0\le t<2 \\ 5\,,\ t\ge 2 \end{cases}$ και **γ)** $f(t)=\begin{cases} t^2,\ t\ge 1 \\ 0\,,\ 0\le t<1 \end{cases}$.

Λύση

α) Είναι

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^2 e^{-st}\cdot 0\cdot dt+\int_2^3 e^{-st}tdt+\int_3^\infty e^{-st}\cdot 0\cdot dt=$$

$$=0+\int_2^3 e^{-st}tdt+0=-\frac{1}{s}\int_2^3 e^{-st}td(-st)=-\frac{1}{s}\int_2^3 td(e^{-st})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}$$

$$=-\frac{1}{s}\left[\left[te^{-st}\right]_2^3-\int_2^3 e^{-st}dt\right]=-\frac{1}{s}\left(3e^{-3s}-2e^{-2s}\right)-\frac{1}{s^2}\int_2^3 e^{-st}d(-st)=$$

$$=-\frac{1}{s}\left(3e^{-3s}-2e^{-2s}\right)-\frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_2^3=-\frac{1}{s}\left(3e^{-3s}-2e^{-2s}\right)-\frac{1}{s^2}\left(e^{-3s}-e^{-2s}\right).$$

β) Είναι

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^2 e^{-st}4\cdot dt+\int_2^\infty e^{-st}5\cdot dt=4\int_0^2 e^{-st}dt+5\int_2^\infty e^{-st}dt=$$

$$=-\frac{4}{s}\int_0^2 e^{-st}d(-st)-\frac{5}{s}\int_2^\infty e^{-st}d(-st)=-\frac{4}{s}\left[e^{-st}\right]_0^2-\frac{5}{s}\left[e^{-st}\right]_2^\infty=$$

$$=-\frac{4}{s}\left(e^{-2s}-1\right)-\frac{5}{s}\left(0-e^{-2s}\right)=\frac{1}{s}\left(e^{-2s}+4\right).$$

γ) Είναι

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{1}e^{-st}0\cdot dt+\int_1^{\infty}e^{-st}t^2\cdot dt=0-\frac{1}{s}\int_1^{\infty}e^{-st}t^2d(-st)=$$

$$=-\frac{1}{s}\int_1^{\infty}t^2d(e^{-st})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}-\frac{1}{s}\left[\left[t^2e^{-st}\right]_1^{\infty}-\int_1^{\infty}e^{-st}d(t^2)\right].$$

Είναι $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{st}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(t^2)'}{(e^{st})'}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t}{se^{st}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(2t)'}{(se^{st})'}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2}{s^2e^{st}}=0,\ \ s>0$.

Άρα: $-\frac{1}{s}\left[\left[t^2e^{-st}\right]_1^{\infty}-\int_1^{\infty}e^{-st}d(t^2)\right]=-\frac{1}{s}(0-e^{-s})+\frac{2}{s}\int_1^{\infty}te^{-st}dt=$

$$=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s^2}\int_1^{\infty}t\cdot d(e^{-st})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s^2}\left[\left[te^{-st}\right]_1^{\infty}-\int_1^{\infty}e^{-st}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s^2}(0-e^{-s})-\frac{2}{s^3}\int_1^{\infty}e^{-st}d(-st)=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{2}{s^2}e^{-s}-\frac{2}{s^3}\left[e^{-st}\right]_1^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{2}{s^2}e^{-s}-\frac{2}{s^3}(0-e^{-s})=e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right).$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $F(s)=\frac{2s-14}{s^2-8s+15}$, **β)** $G(s)=\frac{1}{s^3-s^2}$, **γ)** $H(s)=\frac{1}{s^5+s^4}$.

(*Απάντ.*: **α)** $f(t)=4e^{3t}-2e^{5t}$ **β)** $g(t)=-1-t+e^t$ **γ)** $h(t)=-1+t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+e^{-t}$).

2) Με τη βοήθεια του ορισμού (2) της παρ. 8.1, να υπολογιστούν οι ML των συναρτήσεων: **α)** $f(t)=\begin{cases}t^2\ , & 0\le t<1\\ 0\ , & t\ge 1\end{cases}$, **β)** $g(t)=\begin{cases}2t\ , & 0\le t<1\\ t\ , & t\ge 1\end{cases}$.

(*Απάντηση*: **α)** $F(s)=\frac{2(1-e^{-s})}{s}$, **β)** $G(s)=\frac{2}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$).

8.6 Θεωρήματα μετατόπισης των αξόνων s και t

1ο Θεώρημα μετατόπισης του άξονα των s

Αν υπάρχει ο ML της συνάρτησης $f(t)$ και είναι $L\{f(t)\}=F(s)$ τότε είναι και

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a),\ \ \forall\ a\in R\,. \tag{1}$$

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της (1) έχουμε

$$L^{-1}\left\{L\left\{e^{at}f(t)\right\}\right\}=e^{at}f(t)=L^{-1}\left\{F(s-a)\right\},\ \ \forall\ a\in R \ \text{ή} \tag{2}$$

$$L^{-1}\left\{F(s-a)\right\}=e^{at}L^{-1}\left\{F(s)\right\},\ \ \forall\ a\in R \tag{3}$$

Με βάση τον τύπο (1), οι τύποι για τις μετασχηματισμένες Laplace που βρήκαμε:

$$L\{\eta\mu(\beta t)\}=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\,,\ L\{\sigma\upsilon\nu(\beta t)\}=\frac{s}{s^2+\beta^2}\,,\ L\left\{t^n\right\}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\ n\in R,\ n>-1\\[2mm] \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ n\in N\end{cases}$$

μετασχηματίζονται στους τύπους:

$$L\left\{e^{at}\eta\mu(\beta t)\right\}=\frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}\ \left(L\left\{e^{-at}\eta\mu(\beta t)\right\}=\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}\right), \tag{4}$$

$$L\left\{e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)\right\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2}\ \left(L\left\{e^{-at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)\right\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}\right) \text{ και} \tag{5}$$

$$L\left\{e^{at}t^n\right\}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}},\ n\in R,\ n>-1\\[2mm] \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n\in N\end{cases}\ \left(L\left\{e^{-at}t^n\right\}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+1)}{(s+a)^{n+1}},\ n\in R,\ n>-1\\[2mm] \dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}},\ n\in N\end{cases}\right). \tag{6}$$

2ο Θεώρημα μετατόπισης του άξονα των *t*

Αν υπάρχει ο ML της συνάρτησης $f(t)$ και είναι $L\left\{f(t)\right\}=F(s)$ τότε είναι και

$$L\left\{f(t-a)\right\}=e^{-a\,s}F(s)=e^{-a\,s}L\left\{f(t)\right\},\ \ \forall t\geq a,\ a\in R,\ a>0 \tag{7}$$

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της (7) έχουμε

$$L^{-1}\left\{L\left\{f(t-a)\right\}\right\}=f(t-a)=L^{-1}\left\{e^{-a\,s}F(s)\right\},\ \ \forall t\geq a,\ a\in R,\ a>0 \tag{8}$$

Βασική παρατήρηση στο θεώρημα μετατόπισης του άξονα των t

Επειδή για το ML η αρχική συνάρτηση $f(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[0,\infty)$, ενώ για το υπόλοιπο $(-\infty,\ 0)$ αυτή ορίζεται πάντοτε ίση με μηδέν, ο τύπος (7) ή (8) ισχύει για $\forall t\geq a,\ a\in R,\ a>0$, ενώ για $0\leq t<a$ η τιμή της συνάρτησης $f(t-a)$ εννοείται ότι ορίζεται ίση με μηδέν, (εφόσον $t-a<0$).

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης

$$f(t)=\begin{cases} t-a\,, & \forall\, t\ge a>0 \\ 0 \quad , & \forall\, t<a \end{cases}$$

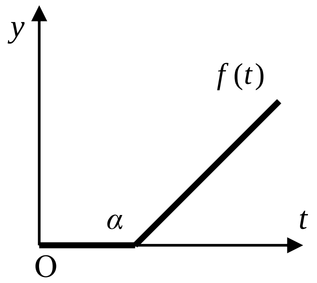
Σύμφωνα με τον τύπο (7) και τη βασική παρατήρηση έχουμε

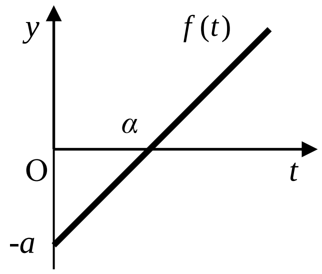
$$L\{\,t-a\}=e^{-as}L\{\,t\}=e^{-as}\cdot\frac{1}{s^2}\,.$$

Αν όμως δεν μας ενδιέφερε ο περιορισμός $t\ge a>0$, αλλά ο $t>0$, θα είχαμε

$$L\{\,t-a\}=L\{\,t\}-L\{\,a\}=\frac{1}{s^2}-\frac{a}{s}\,,\ \text{όπου}\ \ f(t)=t-a\,,\quad \forall\, t>0\,,\quad a\in R\,.$$

Προφανώς πρόκειται για δύο διαφορετικές μετασχηματισμένες Laplace, επειδή οι συναρτήσεις απ' τις οποίες προέρχονται είναι διαφορετικές όπως προκύπτει από τις γραφικές τους παραστάσεις.





$$f(t)=\begin{cases} t-a\,, & \forall\, t\ge a>0 \\ 0 \quad , & \forall\, t<a \end{cases} \qquad\qquad f(t)=t-a\,,\quad \forall\, t>0\,,\quad a\in R$$

Αν εργαστούμε με τη βοήθεια του ορισμού για κάθε μία συνάρτηση χωριστά, προφανώς καταλήγουμε εύκολα στα αποτελέσματα αυτά που βρήκαμε.

2) Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & , \quad t\ge 1 \\ 0 & , \quad 0\le t<1 \end{cases}.$$

(Η άσκηση αυτή λύθηκε με χρήση του ορισμού στο παράδ. 3γ της παρ. 8.5).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t-1)=t^2 \Rightarrow g(t)=(t+1)^2$ (αν τεθεί όπου t το $t+1$).

Έτσι η αρχική συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$f(t)=\begin{cases} g(t-1) & , \quad t\ge 1 \\ 0 & , \quad 0\le t<1 \end{cases}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (7) για τη νέα συνάρτηση έχουμε

$$L\{f(t)\} = L\{g(t-1)\} \overset{(7)}{=} e^{-1\cdot s}L\{g(t)\} = e^{-s}L\left\{(t+1)^2\right\} = e^{-s}L\left\{t^2+2t+1\right\} =$$

$$= e^{-s}L\left\{t^2\right\} + e^{-s}L\{2t\} + e^{-s}L\{1\} = e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3} + 2\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right),$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το παράδειγμα 3γ της παραγράφου 8.5.

3) Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = e^{4t}(t-1)^4 .$$

Λύση

Είναι $f(t) = e^{4t}(t-1)^4 = e^{4t}(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1)$ και άρα

$$L\{f(t)\} = L\left\{e^{4t}t^4\right\} - 4L\left\{e^{4t}t^3\right\} + 6L\left\{e^{4t}t^2\right\} - 4L\left\{e^{4t}t\right\} + L\left\{e^{4t}\right\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο (6) έχουμε:

$$L\{f(t)\} = \frac{4!}{(t-4)^{4+1}} - 4\frac{3!}{(t-4)^{3+1}} + 6\frac{2!}{(t-4)^{2+1}} - 4\frac{1!}{(t-4)^{1+1}} + \frac{0!}{(t-4)^{0+1}} =$$

$$= \frac{24}{(t-4)^5} - \frac{24}{(t-4)^4} + \frac{12}{(t-4)^3} - \frac{4}{(t-4)^2} + \frac{1}{t-4} .$$

4) Να βρεθεί η αρχική συνάρτηση $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ αν

$$F(s) = \frac{3s}{s^2+2s+10} + \frac{12}{(s-\pi)^5} .$$

Λύση

Μετασχηματίζουμε κάθε όρο της συνάρτησης $F(s)$ και έχουμε

$$\frac{3s}{s^2+2s+10} = \frac{3s}{(s^2+2s+1)+3^2} = \frac{3(s+1)-3}{(s+1)^2+3^2} = 3\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - \frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

$$\frac{12}{(s-\pi)^5} = \frac{12}{4!}\cdot\frac{4!}{(s-\pi)^5} = \frac{12}{24}\cdot\frac{4!}{(s-\pi)^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4!}{(s-\pi)^5}$$. Επομένως

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+2s+10} + \frac{12}{(s-\pi)^5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+2s+10}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{12}{(s-\pi)^5}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{3\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - \frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{4!}{(s-\pi)^5}\right\} =$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-\pi)^5}\right\} =$$

$$= 3e^{-t}\sigma\upsilon\nu(3t) - e^{-t}\eta\mu(3t) + \frac{1}{2}e^{\pi t}t^4 .$$

5) Να βρεθεί η αρχική συνάρτηση $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ αν

$$\textbf{α)}\ F(s)=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\cdot s}}{s^2+4s+5} \quad \text{και} \quad \textbf{β)}\ F(s)=\frac{3+e^{-\pi\cdot s}}{s^2+16}.$$

Λύση

α) Είναι $\dfrac{1}{s^2+4s+5}=\dfrac{1}{(s^2+4s+4)+1}=\dfrac{1}{(s+2)^2+1^2}=L\left\{e^{-2t}\cdot \eta\mu\, t\right\}=L\{g(t)\}$

όπου $g(t)=e^{-2t}\cdot \eta\mu t$. **(i)** Έτσι έχουμε

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}\cdot s}}{s^2+4s+5}\right\}=L^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}\cdot s}L\{g(t)\}\right\}\overset{(8)}{=}g\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\overset{(i)}{=}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot \eta\mu\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Είναι όμως $\eta\mu\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sigma\upsilon\nu\, t$ (βλέπε Τυπολόγιο, Α. Τριγωνομετρία, τριγωνομετρικοί αριθμοί αντίθετων και συμπληρωματικών τόξων). Άρα

$$f(t)=\begin{cases}-e^{\pi-2t}\cdot \sigma\upsilon\nu t, & \text{για}\quad t\ge \dfrac{\pi}{2}\\[2ex] 0, \quad \text{για}\quad 0\le t<\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \quad \text{(βλ. παρατήρηση).}$$

β) Έχουμε παρόμοια $f(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{3+e^{-\pi\cdot s}}{s^2+16}\right\}=L^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2+16}\right\}+L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi\cdot s}}{s^2+16}\right\}.$

Τροποποιούμε τον κάθε όρο χωριστά και υπολογίζουμε τους αντιστρόφους ML:

Είναι $\dfrac{3}{s^2+16}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{s^2+4^2}$.

Άρα $L^{-1}\left\{\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{s^2+4^2}\right\}=\dfrac{3}{4}L^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2+4^2}\right\}=\dfrac{3}{4}\eta\mu(4t)$.

Επίσης $\dfrac{e^{-\pi\cdot s}}{s^2+16}=\dfrac{e^{-\pi\cdot s}}{4}\cdot\dfrac{4}{s^2+4^2}$.

Άρα $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi\cdot s}}{4}\cdot\dfrac{4}{s^2+4^2}\right\}=\dfrac{1}{4}L^{-1}\left\{e^{-\pi\cdot s}\cdot\dfrac{4}{s^2+4^2}\right\}=\dfrac{1}{4}L^{-1}\left\{e^{-\pi\cdot s}L\{\eta\mu(4t)\}\right\}$

Θέτουμε $g(t)=\eta\mu(4t)$ (ii). Έτσι έχουμε

$$\frac{1}{4}L^{-1}\left\{e^{-\pi\cdot s}L\{\eta\mu(4t)\}\right\}=\frac{1}{4}L^{-1}\left\{e^{-\pi\cdot s}L\{g(t)\}\right\}\overset{(8)}{=}\frac{1}{4}g(t-\pi)\overset{(ii)}{=}\frac{1}{4}\eta\mu\left[4(t-\pi)\right]=\frac{1}{4}\eta\mu(4t)$$

Επομένως η αρχική $f(t)$ θα είναι

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\eta\mu(4t)+\dfrac{1}{4}\eta\mu(4t)=\eta\mu(4t), & t\geq\pi\\ \dfrac{3}{4}\eta\mu(4t)+0=\dfrac{3}{4}\eta\mu(4t), & 0\leq t<\pi\end{cases}$$ (βλέπε παρατήρηση).

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $F_1(s)=\dfrac{8}{s^3(s^2-s-2)}$, **β)** $F_2(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$, **γ)** $F_3(s)=\dfrac{s}{s^2+2s+6}$.

(*Απάντηση*: **α)** $L^{-1}\left\{F_1(s)\right\}=-3+2t-2t^2+\dfrac{1}{3}e^{2t}+\dfrac{8}{3}e^{-t}$, **β)** $L^{-1}\left\{F_2(s)\right\}=$

$=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-\sigma\upsilon\nu\, t+\eta\mu\, t)$, **γ)** $L^{-1}\left\{F_3(s)\right\}=e^{-t}\left(\sigma\upsilon\nu(\sqrt{5}t)-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\eta\mu(\sqrt{5}t)\right)$).

2) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $\dfrac{2s-13}{s(s^2-4s+13)}$, **β)** $\dfrac{(1/2)s}{s^2+2s+5/4}$, **γ)** $\dfrac{s}{(s^2+9)^2}$.

(*Απάντηση*: **α)** $-1+e^{2t}\sigma\upsilon\nu(3t)$**, β)** $e^{-t}\left(\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{t}{2}\right)-\eta\mu\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)$**, γ)** $\dfrac{1}{6}t\eta\mu(3t)$ **)**.

3) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $\dfrac{s+1}{s^2+3s+5}$, **β)** $\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$**, γ)** $\dfrac{s}{s^2-s+17/4}$.

(*Απάντηση*: **α)** $e^{-3t/2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}t\right)-\dfrac{1}{\sqrt{11}}\eta\mu\left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}t\right)\right)$**, β)** $e^{-t}\left(\sigma\upsilon\nu(2t)+\eta\mu(2t)\right)$,

γ) $e^{t/2}\left(\sigma\upsilon\nu(2t)+1/4\,\eta\mu(2t)\right)$**)**.

4) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $\dfrac{s+1}{(s^2+4s+13)(s^2+1)}$, **β)** $\dfrac{s+2}{(s^2-1)(s^2+4s+5)}$.

(*Απάντηση*: **α)** $\dfrac{1}{20}\sigma\upsilon\nu\, t+\dfrac{1}{10}\eta\mu\, t-\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{4}\sigma\upsilon\nu(3t)+\dfrac{1}{3}\eta\mu(3t)\right]\cdot e^{-2t}$**,**

β) $\dfrac{3}{20}e^{t}-\dfrac{1}{4}e^{-t}+e^{-2t}\left(\dfrac{1}{10}\sigma\upsilon\nu\, t-\dfrac{1}{5}\eta\mu\, t\right)$**)**.

5) Να βρεθούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $\dfrac{1}{(s-1)^2(s+1)^2}$, **β)** $\dfrac{s+2}{(s^2-6s+10)(s^2+6s+10)}$, **γ)** $\dfrac{1}{(s-3)^4(s+2)^4}$.

(*Απάντηση*: **α)** $\dfrac{1}{4}t\left(e^t-e^{-t}\right)$, **β)** $\dfrac{1}{60}e^{3t}\left(-\sigma\upsilon\nu\, t+8\eta\mu\, t\right)+\dfrac{1}{60}e^{-3t}\left(\sigma\upsilon\nu\, t-2\eta\mu\, t\right)$,

γ) $\dfrac{1}{625}e^{3t}\left(\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{2}{5}t^2+\dfrac{2}{5}t-\dfrac{4}{25}\right)+\dfrac{1}{625}e^{-2t}\left(\dfrac{1}{6}t^3+\dfrac{2}{5}t^2+\dfrac{2}{5}t+\dfrac{4}{25}\right)$).

6) Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(t)=e^{2t}\left(3\eta\mu(4t)-4\sigma\upsilon\nu(4t)\right)$, **β)** $g(t)=e^{-2t}\eta\mu^2 t$.

(*Απάντηση*: **α)** $F(s)=\dfrac{12-4s}{s^2-4s+20}$, **β)** $G(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s^2+4s+8)}$).

8.7 ML παραγώγων και ολοκληρώματος συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε:

1) στις ιδιότητες που αφορούν στον ML της παραγώγου (ή των παραγώγων) μιας συνάρτησης $f(t)$ (παράγραφος 8.7.1) και

2) στις ιδιότητες που αφορούν στον ML του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(t)$ (παράγραφος 8.7.2).

Οι ιδιότητες του ML των παραγώγων μιας συνάρτησης $f(t)$ έχουν άμεση εφαρμογή στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων n – στής τάξης με σταθερούς συντελεστές, αλλά και στα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, ενώ οι ιδιότητες του ML του ολοκληρώματος της $f(t)$ έχουν άμεση εφαρμογή στην επίλυση ολοκληρωτικών ή ολοκληρωτικο–διαφορικών εξισώσεων [1], όπως θα φανεί στη συνέχεια.

8.7.1 Μετασχηματισμός Laplace παραγώγων συνάρτησης

Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

“Αν $L\{f(t)\}=F(s)$ είναι η μετασχηματισμένη της συνάρτησης $f(t)$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης, ενώ η παράγωγός της $f'(t)$

[1] Ορίζονται στη παράγραφο 8.7.2.

είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε διάστημα $[0, \beta]$, $\beta \in R$, τότε αποδεικνύεται ότι ο ML της παραγώγου $f'(t)$ υπάρχει και δίνεται από τον τύπο:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \text{.”} \tag{1}$$

Αν $g(t) = f'(t)$ και στην σχέση (1) θέσουμε τη συνάρτηση $g(t)$ έχουμε

$$L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) \text{ ή}$$

$$L\left\{f''(t)\right\} = sL\left\{f'(t)\right\} - f'(0) \overset{(1)}{=} s\left[sL\{f(t)\} - f(0)\right] - f'(0) =$$

$$= s^2 L\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

Οι τύποι (1) και (2) γενικεύονται, αν οι παράγωγοι της $f(t)$ μέχρι $k - 1$ τάξης είναι συνεχείς και εκθετικής τάξης στο διάστημα $[0, \infty)$, ενώ η $f^{(k)}(t)$ είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε διάστημα $[0, \beta]$, $\beta \in R$. Τότε ισχύει:

$$L\left\{f^{(k)}(t)\right\} = s^k L\left\{f(t)\right\} - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - s^{k-3} f''(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0). \tag{3}$$

Από την (3) προκύπτει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την $L\left\{f(t)\right\}$ όταν δίνεται η $L\left\{f^{(k)}(t)\right\}$. Επίσης, όταν η $L\left\{f^{(k)}(t)\right\}$ είναι δυνατόν να εκφραστεί συναρτήσει της $L\left\{f(t)\right\}$, όπως φαίνεται στα επόμενα δύο παράδειγμα που ακολουθούν.

Παραδείγματα

1) Με τη βοήθεια του τύπου (3) να υπολογιστούν οι ML των συναρτήσεων

α) $f(t) = 3t\eta\mu(2t)$ και **β)** $f(t) = 2t\sigma\upsilon\nu(3t)$.

Λύση

α) Βρίσκουμε την 1η και 2η παράγωγο της συνάρτησης $f(t) = t\eta\mu(2t)$. Είναι

$$f'(t) = \left(3t\eta\mu(2t)\right)' = 3\eta\mu(2t) + 6t\sigma\upsilon\nu(2t),$$

$$f''(t) = 6\sigma\upsilon\nu(2t) + 6\sigma\upsilon\nu(2t) - 12t\eta\mu(2t) = 12\sigma\upsilon\nu(2t) - 4f(t).$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή L στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$L\left\{f''(t)\right\} = L\left\{12\sigma\upsilon\nu(2t) - 4f(t)\right\} = 12L\left\{\sigma\upsilon\nu(2t)\right\} - 4L\left\{f(t)\right\}$$

Η τελευταία σχέση λόγω του τύπου (3) γίνεται

$$s^2 L\left\{f(t)\right\} - s \cdot f(0) - f'(0) = 12L\left\{\sigma\upsilon\nu(2t)\right\} - 4L\left\{f(t)\right\} \tag{i}$$

Όμως $f(0) = 3 \cdot 0 \cdot \eta\mu(2 \cdot 0) = 0$, $f'(0) = 3\eta\mu(2 \cdot 0) + 6 \cdot 0 \cdot \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 0) = 0$.

Ακόμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι $L\{\sigma\upsilon\nu(2t)\} = \dfrac{s}{s^2+4}$ η (i) γίνεται

$$s^2L\{f(t)\} = 12\frac{s}{s^2+4} - 4L\{f(t)\}.$$

Λύνοντας την εξίσωση που προέκυψε ως προς $L\{f(t)\}$ παίρνουμε

$$L\{f(t)\} = \frac{12s}{(s^2+4)^2}.$$

Γενικά: $L\{a\,t\eta\mu(\beta\,t)\} = \dfrac{2a\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$ (βλ. παράγρ. 8.13 Πίνακας ML (23)).

β) Εργαζόμενοι παρόμοια για τη συνάρτηση $f(t) = 2t\sigma\upsilon\nu(3t)$ βρίσκουμε

$$f'(t) = \left(2t\sigma\upsilon\nu(3t)\right)' = 2\sigma\upsilon\nu(3t) - 6t\eta\mu(3t)$$

$$f''(t) = -6\eta\mu(3t) - 6\eta\mu(3t) - 18t\sigma\upsilon\nu(3t) = -12\eta\mu(3t) - 9f(t)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή L στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$L\{f''(t)\} = L\{-12\eta\mu(3t) - 9f(t)\} = -12L\{\eta\mu(3t)\} - 9L\{f(t)\}$$

Η τελευταία σχέση λόγω του τύπου (3) γίνεται

$$s^2L\{f(t)\} - s\cdot f(0) - f'(0) = -12L\{\eta\mu(3t)\} - 9L\{f(t)\} \qquad \text{(ii)}$$

Όμως $f(0) = 2\cdot 0\cdot \sigma\upsilon\nu(3\cdot 0) = 0$, $f'(0) = 2\sigma\upsilon\nu(3\cdot 0) - 6\cdot 0\cdot \eta\mu(3\cdot 0) = 2$.

Ακόμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι $L\{\eta\mu(3t)\} = \dfrac{3}{s^2+9}$ η (ii) γίνεται

$$s^2L\{f(t)\} - 2 = -12\frac{3}{s^2+9} - 9L\{f(t)\}.$$

Λύνοντας την εξίσωση που προέκυψε ως προς $L\{f(t)\}$ παίρνουμε

$$L\{f(t)\} = \frac{-36}{(s^2+9)^2} + \frac{2}{s^2+9} = \frac{-36}{(s^2+9)^2} + \frac{2(s^2+9)}{(s^2+9)^2} = \frac{2s^2-18}{(s^2+9)^2}.$$

Γενικά: $L\{a\,t\sigma\upsilon\nu(\beta\,t)\} = \dfrac{a(s^2-\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^2}$ (βλ. παράγρ. 8.13 Πίνακας ML (24)).

2) Με τη βοήθεια του τύπου (3) να υπολογιστούν οι ML των συναρτήσεων

α) $f(t) = 4t\sinh(5t)$ και **β)** $f(t) = 6t\cosh(7t)$.

Λύση

α) Ως γνωστό, (βλέπε Τυπολόγιο στο τέλος του βιβλίου, Α. Τριγωνομετρία, παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων) είναι

$$f'(t) = \left(4t\sinh(5t)\right)' = 4\sinh(5t) + 20\,t\cosh(5t)\,,$$

$$f''(t) = 20\cosh(5t) + 20\cosh(5t) + 100t\sinh(5t) = 40\cosh(5t) + 100t\sinh(5t)\,.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή L στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$L\left\{f''(t)\right\} = L\left\{40\cosh(5t) + 100t\sinh(5t)\right\} = 40L\left\{\cosh(5t)\right\} + 25L\left\{4t\sinh(5t)\right\}.$$

Η τελευταία σχέση λόγω του τύπου (3) γίνεται

$$s^2L\left\{f(t)\right\} - s\cdot f(0) - f'(0) = 40L\left\{\cosh(5t)\right\} + 25L\left\{f(t)\right\} \qquad \text{(iii)}$$

Όμως $f(0) = 4\cdot 0\cdot\sinh(5\cdot 0) = 0$, $f'(0) = 4\sinh(5\cdot 0) + 20\cdot 0\cdot\cosh(5\cdot 0) = 0$.

Ακόμα, (παράγρ. 8.3 5η εφαρμογή) $L\left\{\cosh(5t)\right\} = \dfrac{s}{s^2 - 25}$. Έτσι, η (iii) γίνεται

$$s^2L\left\{f(t)\right\} = 40\frac{s}{s^2 - 25} + 25L\left\{f(t)\right\}.$$

Λύνοντας την εξίσωση που προέκυψε ως προς $L\left\{f(t)\right\}$ παίρνουμε

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{40s}{(s^2 - 25)^2}\,.$$

Γενικά: $L\left\{a\,t\sinh(\beta\,t)\right\} = \dfrac{2a\beta s}{(s^2 - \beta^2)^2}$ (βλ. παράγρ. 8.13 Πίνακας ML (25)).

β) Εργαζόμενοι παρόμοια για τη συνάρτηση $f(t) = 6t\cosh(7t)$ βρίσκουμε

$$f'(t) = \left(6t\cosh(7t)\right)' = 6\cosh(7t) + 42t\cdot\sinh(7t)$$

$$f''(t) = 42\sinh(7t) + 42\sinh(7t) + 294t\cdot\cosh(7t) = 84\sinh(7t) + 294t\cdot\cosh(7t)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή L στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$L\left\{f''(t)\right\} = L\left\{84\sinh(7t) + 294t\cdot\cosh(7t)\right\} = 84L\left\{\sinh(7t)\right\} + 49L\left\{6t\cosh(7t)\right\}.$$

Η τελευταία σχέση λόγω του τύπου (3) γίνεται

$$s^2L\left\{f(t)\right\} - s\cdot f(0) - f'(0) = 84L\left\{\sinh(7t)\right\} + 49L\left\{f(t)\right\} \qquad \text{(iv)}$$

Όμως, $f(0) = 6\cdot 0\cdot\cosh(7\cdot 0) = 0$, $f'(0) = 6\cosh(7\cdot 0) + 42\cdot 0\cdot\sinh(7\cdot 0) = 6$.

Ακόμα, (παράγρ. 8.3 5η εφαρμογή) $L\left\{\sinh(7t)\right\} = \dfrac{7}{s^2 - 49}$. Έτσι, η (iv) γίνεται

$$s^2L\left\{f(t)\right\} - 6 = 84\frac{7}{s^2 - 49} + 49L\left\{f(t)\right\}$$

Λύνοντας την εξίσωση που προέκυψε ως προς $L\left\{f(t)\right\}$ παίρνουμε

$$s^2 L\{f(t)\} = \frac{84\cdot 7}{(s^2-49)^2} + \frac{6}{s^2-49} = \frac{84\cdot 7}{(s^2-49)^2} + \frac{6(s^2-49)}{(s^2-49)^2} = \frac{6s^2+294}{(s^2-49)^2}.$$

Γενικά: $L\{a\,t\cosh(\beta t)\} = \dfrac{a(s^2+\beta^2)}{(s^2-\beta^2)^2}$ (βλ. παράγρ. 8.13 Πίνακας ML (26)). ■

Επίσης, ο τύπος (3) έχει άμεση εφαρμογή στην ***επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές*** της μορφής (βλ. παράγρ. 1.8):

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \tag{4}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

$$y(0)=\beta_0,\ y'(0)=\beta_1,\ y''(0)=\beta_2,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=\beta_{n-1} \tag{5}$$

Με τον τύπο (3) λοιπόν, μπορούμε να βρούμε τη μερική λύση της ΔΕ (4) η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (5) εκτελώντας τα παρακάτω βήματα:

i) Εφαρμόζουμε τον ML στα δύο μέλη της (4), λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμικότητα του ML και αντικαθιστώντας τα $L\{f^{(k)}(t)\}$, $k=1,2,\cdots,n$ με τα ίσα τους από την σχέση (3), καθώς και τα $y(0),\ y'(0),\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)$ με τα ίσα τους από τη σχέση (5).

ii) Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς $L\{y(t)\}$ βρίσκοντας

$$L\{y(t)\} = F(s)$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αντίστροφο τελεστή L^{-1} και στα δύο μέλη αυτής, λαμβάνοντας υπόψη ότι $L^{-1}\{L\{y(t)\}\} = y(t)$ (τύπος (4) της παρ. 8.1) οπότε

$$L^{-1}\{L\{y(t)\}\} = y(t) = L^{-1}\{F(s)\}.$$

iii) Υπολογίζουμε την αντίστροφη μετασχηματισμένη $L^{-1}\{F(s)\}$, οπότε έχουμε τη ζητούμενη μερική λύση της (4).

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η μερική λύση της ΔΕ (ως προς t) $y''+4y'+3y=0$ η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=3,\ y'(0)=1$.

Λύση

i) Εφαρμόζουμε τον ML στα μέλη της ΔΕ και έχουμε

$$L\{y''+4y'+3y\}=L\{0\} \text{ ή } L\{y''\}+4L\{y'\}+3L\{y\}=0$$

(ως γνωστό $L\{a\}=a/s \ \ \forall a\in R$, άρα $L\{0\}=0/s=0$).

Αντικαθιστούμε τώρα στην τελευταία σχέση τα $L\{y''\},\ L\{y'\}$ με τα ίσα τους από τον τύπο (3) και έχουμε διαδοχικά

$$s^2L\{y\}-s\cdot y(0)-y'(0)+4\left(sL\{y\}-y(0)\right)+3L\{y\}=0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y(0)=3,\ \ y'(0)=1$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$s^2L\{y\}-s\cdot 3-1+4\left(sL\{y\}-3\right)+3L\{y\}=0.$$

ii) Λύνουμε την τελευταία σχέση ως προς $L\{y\}$. Είναι

$$L\{y\}\left(s^2+4s+3\right)=3s+13 \text{ και } L\{y\}=\frac{3s+13}{s^2+4s+3}.$$

iii) Υπολογίζουμε την αντίστροφη μετασχηματισμένη της $L\{y\}=\dfrac{3s+13}{s^2+4s+3}$, εφαρμόζοντας σ' αυτή τον τελεστή L^{-1}. Έχουμε

$$L^{-1}\left\{L\{y(t)\}\right\}=y(t)=L^{-1}\left\{\frac{3s+13}{s^2+4s+3}\right\}. \text{ Είναι } \frac{3s+13}{s^2+4s+3}=\frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}.$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Έχουμε

$$\frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}=\frac{\mathrm{A}}{s+3}+\frac{\mathrm{B}}{s+1}=\frac{\mathrm{A}(s+1)+\mathrm{B}(s+3)}{(s+3)(s+1)}=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s+\mathrm{A}+3\mathrm{B}}{(s+3)(s+1)}. \text{ Έτσι}$$

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=3\\ \mathrm{A}+3\mathrm{B}=13\end{cases} \text{ απ' το οποίο προκύπτει } \mathrm{A}=-2,\quad \mathrm{B}=5. \text{ Επομένως}$$

$$y=L^{-1}\left\{\frac{3s+13}{s^2+4s+3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-2}{s+3}+\frac{5}{s+1}\right\}=-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=-2e^{-3t}+5e^{-t}$$

Επομένως η μερική λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες της ΔΕ είναι

$$y(t)=-2e^{-3t}+5e^{-t}.$$

2) Να βρεθεί η μερική λύση της ΔΕ (ως προς t) $y''-y=t\cdot e^t$ η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$.

Λύση

Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε

$$L\{y''-y\}=L\{t\cdot e^t\} \text{ ή } L\{y''\}-L\{y\}=\frac{1}{(s-1)^2} \text{ (βλ. παρ. 8.6, 1° Θεώρημα)}$$

Αντικαθιστούμε το $L\{y''\}$ με το ίσο του από τον τύπο (2) της παραγράφου 8.7.1:

$$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0) \text{ και έχουμε}$$

$$\left(s^2L\{y\}-s\cdot y(0)-y'(0)\right)-L\{y\}=\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες η τελευταία σχέση γίνεται

$$(s^2-1)L\{y\}=1+\frac{1}{(s-1)^2}=\frac{(s-1)^2+1}{(s-1)^2}=\frac{s^2-2s+2}{(s-1)^2}.$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς $L\{y\}$ βρίσκουμε

$$L\{y\}=\frac{s^2-2s+2}{(s^2-1)(s-1)^2}=\frac{s^2-2s+2}{(s+1)(s-1)^3}.$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων (βλ. παρ. 9.4)

$$\frac{s^2-2s+2}{(s-1)^3(s+1)}=\frac{\mathrm{A}}{s-1}+\frac{\mathrm{B}}{(s-1)^2}+\frac{\Gamma}{(s-1)^3}+\frac{\Delta}{s+1}=$$

$$=\frac{\mathrm{A}(s-1)^2(s+1)+\mathrm{B}(s-1)(s+1)+\Gamma(s+1)+\Delta(s-1)^3}{(s-1)^3(s+1)}.$$

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης των Α, Β, Γ, Δ, ίσως πιο απλός από τον κλασσικό, – το να μετασχηματίζουμε τον αριθμητή του κλάσματος σε πολυώνυμο και εξισώνοντας τους ομοιοβάθμιους όρους στα δύο μέλη, να προκύπτει σύστημα εξισώσεων απ' το οποίο να προκύπτουν τα Α, Β, Γ, Δ, – είναι και ο ακόλουθος:

Επειδή τα πολυώνυμα των αριθμητών των κλασμάτων

$$\frac{s^2-2s+2}{(s-1)^3(s+1)} \text{ και } \frac{\mathrm{A}(s-1)^2(s+1)+\mathrm{B}(s-1)(s+1)+\Gamma(s+1)+\Delta(s-1)^3}{(s-1)^3(s+1)}$$

είναι εκ ταυτότητος ίσα, θα αληθεύουν για κάθε τιμή του s. Δίνουμε λοιπόν στο s για τους αριθμητές των κλασμάτων τέτοιες τιμές που να μηδενίζουν κάποιες παραστάσεις· εν προκειμένω τις τιμές $s=1$, $s=-1$, που είναι βασικά οι ρίζες του παρονομαστή. Αν αυτές εξαντληθούν (όπως εδώ συμβαίνει), συνεχίζουμε με άλλες αυθαίρετες μικρές. (Αυτή η περίπτωση εμφανίζεται όταν οι παράγοντες του παρονομαστή έχουν βαθμό πολλαπλότητας $k\geq 2$, όπως εδώ ο παράγοντας $s-1$ είναι βαθμού πολλαπλότητας $k=3$). Έτσι:

Για $s=1$ έχουμε: $1^2-2\cdot 1+2=\Gamma\cdot 2 \Leftrightarrow \Gamma=1/2$.

Για $s=-1$ έχουμε: $(-1)^2-2\cdot(-1)+2=\Delta\cdot(-2)^3 \Leftrightarrow -8\Delta=5 \Leftrightarrow \Delta=-5/8$.

Στη συνέχεια δίνουμε αυθαίρετες μικρές τιμές στο s, θέτοντας στο αποτέλεσμα όπου Γ και Δ τα ίσα τους που βρήκαμε πριν. Έτσι:

Για $s=0$ έχουμε: $2=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma-\Delta=\mathrm{A}-\mathrm{B}+1/2-(-5/8) \Leftrightarrow \mathrm{A}-\mathrm{B}=7/8$.

Για $s=2$ έχουμε: $2=3\mathrm{A}+3\mathrm{B}+3\Gamma+\Delta=3\mathrm{A}+3\mathrm{B}+3/2-5/8 \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}=3/8$.

Λύνοντας το τελευταίο σύστημα ως προς Α, Β, βρίσκουμε $\mathrm{A}=\dfrac{5}{8},\ \mathrm{B}=-\dfrac{1}{4}$. Άρα

$$L\{y\}=\frac{s^2-2s+2}{(s-1)^3(s+1)}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{s+1}.$$

Εφαρμόζοντας στη παραπάνω σχέση τον τελεστή L^{-1} έχουμε

$$L^{-1}\{L\{y\}\}=y=L^{-1}\left\{\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{s+1}\right\}=$$

$$=\frac{5}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}+\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{2!}{(s-1)^3}\right\}-\frac{5}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}.$$ Τελικά

$$y(t)=\frac{5}{8}e^t-\frac{1}{4}t\cdot e^t+\frac{1}{4}t^2e^t-\frac{5}{8}e^{-t}=e^t\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}t^2\right)-\frac{5}{8}e^{-t}.$$

(Να σημειωθεί ότι το παράδειγμα αυτό είναι λυμένο ως παράδειγμα 2 της παραγράφου 1.8.2. Β του κεφαλαίου των Διαφορικών Εξισώσεων). ■

Μία επιπλέον εφαρμογή που έχει ο τύπος (3) των παραγώγων ML είναι και στο πρόβλημα των αρχικών τιμών ενός ***συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές***. Δηλαδή, βρίσκεται η μερική λύση ενός συστήματος γραμμικών ΔΕ με σταθερούς συντελεστές, το οποίο επαληθεύει αρχικές συνθήκες (βλέπε παράγραφο 1.10.1).

Παραδείγματα

3) Να βρεθεί η μερική λύση του συστήματος των γραμμικών ΔΕ

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=2y_1-3y_2\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dt}=y_2-2y_1\end{cases}$$

με σταθερούς συντελεστές και αρχικές συνθήκες $y_1(0)=8,\ y_2(0)=3$.

Λύση

Εφαρμόζουμε στα μέλη των ΔΕ του συστήματος τον τελεστή L (ML):

$$\begin{cases} L\{y_1'\} = L\{2y_1 - 3y_2\} = 2L\{y_1\} - 3L\{y_2\} \\ L\{y_2'\} = L\{y_2 - 2y_1\} = L\{y_2\} - 2\{y_1\} \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τα $L\{y_1'\}$, $L\{y_2'\}$ με τα ίσα τους από τον τύπο (2) και λαμβάνουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 8,\ y_2(0) = 3$. Έτσι έχουμε

$$\begin{cases} sL\{y_1\} - y_1(0) = 2L\{y_1\} - 3L\{y_2\} \\ sL\{y_2\} - y_2(0) = L\{y_2\} - 2L\{y_1\} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} (s-2)L\{y_1\} + 3L\{y_2\} = y_1(0) = 8 \\ 2L\{y_1\} + (s-1)L\{y_2\} = y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα ως προς $L\{y_1\}$, $L\{y_2\}$ με τον κανόνα Cramer

$$L\{y_1\} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4}, \quad L\{y_2\} = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4}.$$

Στη συνέχεια αναλύουμε την κάθε λύση σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

$$L\{y_1\} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{\mathrm{A}}{(s+1)} + \frac{\mathrm{B}}{(s-4)} = \frac{\mathrm{A}(s-4) + \mathrm{B}(s+1)}{(s+1)(s-4)} = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s - 4\mathrm{A} + \mathrm{B}}{(s+1)(s-4)}.$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B} = 8 \\ -4\mathrm{A}+\mathrm{B} = -17 \end{cases}$ με λύση $\mathrm{A} = 5,\ \mathrm{B} = 3$. Ομοίως

$$L\{y_2\} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{\mathrm{A}}{(s+1)} + \frac{\mathrm{B}}{(s-4)} = \frac{\mathrm{A}(s-4) + \mathrm{B}(s+1)}{(s+1)(s-4)} = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s - 4\mathrm{A} + \mathrm{B}}{(s+1)(s-4)}$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B} = 3 \\ -4\mathrm{A}+\mathrm{B} = -22 \end{cases}$ με λύση $\mathrm{A} = 5,\ \mathrm{B} = -2$. Συνεπώς

$$L\{y_1\} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4} \quad \text{και} \quad L\{y_2\} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}.$$

Εφαρμόζουμε τέλος στις παραπάνω λύσεις τον τελεστή L^{-1}, δηλαδή τον αντίστροφο ML και βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$L^{-1}\{L\{y_1\}\} = y_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$L^{-1}\{L\{y_2\}\} = y_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

Επομένως, η μερική λύση του συστήματος ΔΕ που δόθηκε είναι

$$y_1(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}, \quad y_2(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}.$$

4) Να βρεθεί η μερική λύση του συστήματος των γραμμικών ΔΕ

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^t \\ y_2' = 4y_1 + y_2 + 3 \end{cases} \text{ με αρχικές συνθήκες } y_1(0)=0,\ y_2(0)=1$$

Λύση

Εφαρμόζουμε στα μέλη των ΔΕ του συστήματος τον τελεστή L (ML):

$$\begin{cases} L\{y_1'\} = L\{y_1 + y_2 + e^t\} = L\{y_1\} + L\{y_2\} + L\{e^t\} \\ L\{y_2'\} = L\{4y_1 + y_2 + 3\} = 4L\{y_1\} + L\{y_2\} + L\{3\} \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τα $L\{y_1'\}$, $L\{y_2'\}$ με τα ίσα τους από τον τύπο (2) και λαμβάνουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες $y_1(0)=0,\ y_2(0)=1$. Έτσι έχουμε

$$\begin{cases} sL\{y_1\} - y_1(0) = L\{y_1\} + L\{y_2\} + L\{e^t\} \\ sL\{y_2\} - y_2(0) = 4L\{y_1\} + L\{y_2\} + L\{3\} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} (s-1)L\{y_1\} - L\{y_2\} = \dfrac{1}{s-1} \\ -4L\{y_1\} + (s-1)L\{y_2\} = 1 + \dfrac{3}{s} \end{cases}$$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα ως προς $L\{y_1\}$, $L\{y_2\}$ με τον κανόνα Cramer

$$L\{y_1\} = \frac{\begin{vmatrix} 1/(s-1) & -1 \\ 1+3/s & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -4 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{2+3/s}{(s+1)(s-3)} = \frac{2s+3}{s(s+1)(s-3)},$$

$$L\{y_2\} = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & 1/(s-1) \\ -4 & 1+3/s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -4 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{s-1+\dfrac{3(s-1)}{s}+\dfrac{4}{s-1}}{(s+1)(s-3)} = \frac{s^3+s^2-s+3}{s(s-1)(s+1)(s-3)}$$

Στη συνέχεια αναλύουμε την κάθε λύση σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Είναι:

$$L\{y_1\} = \frac{2s+3}{s(s+1)(s-3)} = \frac{\mathrm{A}}{s} + \frac{\mathrm{B}}{s+1} + \frac{\Gamma}{s-3} = \frac{\mathrm{A}(s+1)(s-3) + \mathrm{B}s(s-3) + \Gamma s(s+1)}{s(s+1)(s-3)}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία του παραπάνω παραδείγματος 2, έχουμε:

Για $s=0$ έχουμε: $2\cdot 0+3 = \mathrm{A}\cdot 1\cdot(-3) \Leftrightarrow 3 = -3\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} = -1$.

Για $s=-1$ έχουμε: $2\cdot(-1)+3 = \mathrm{B}(-1)(-4) \Leftrightarrow 1 = 4\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B} = 1/4$.

Για $s=3$ έχουμε: $2\cdot 3+3 = \Gamma\cdot 3\cdot 4 \Leftrightarrow 9 = 12\Gamma \Leftrightarrow \Gamma = 3/4$.

Επομένως θα είναι

$$L\{y_1\} = \frac{2s+3}{s(s+1)(s-3)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s-3}. \qquad \text{(i)}$$

Εργαζόμενοι παρόμοια για το κλάσμα της λύσης $L\{y_2\}$ έχουμε:

$$L\{y_2\} = \frac{s^3+s^2-s+3}{s(s-1)(s+1)(s-3)} = \frac{\mathrm{A}}{s} + \frac{\mathrm{B}}{s-1} + \frac{\Gamma}{s+1} + \frac{\Delta}{s-3} =$$

$$= \frac{\mathrm{A}(s-1)(s+1)(s-3) + \mathrm{B}s(s+1)(s-3) + \Gamma s(s-1)(s-3) + \Delta s(s-1)(s+1)}{s(s-1)(s+1)(s-3)}.$$

Εργαζόμαστε παρόμοια δίνοντας στο s τις τιμές: $s=0,\ s=1,\ s=-1,\ s=3$. Έτσι:

Για $s=0$ έχουμε: $0^3+0^2-0+3 = \mathrm{A}(-1)\cdot 1\cdot(-3) \Leftrightarrow 3 = 3\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} = 1$.

Για $s=1$ έχουμε: $1^3+1^2-1+3 = \mathrm{B}\cdot 1\cdot 2\cdot(-2) \Leftrightarrow 4 = -4\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B} = -1$

Για $s=-1$ έχουμε: $-1+1+1+3 = \Gamma(-1)(-2)(-4) \Leftrightarrow 4 = -8\Gamma \Leftrightarrow \Gamma = -1/2$.

Για $s=3$ έχουμε: $27+9-3+3 = \Delta\cdot 3\cdot 2\cdot 4 \Leftrightarrow 36 = 24\Delta \Leftrightarrow \Delta = 3/2$.

Επομένως θα είναι

$$L\{y_2\} = \frac{s^3+s^2-s+3}{s(s-1)(s+1)(s-3)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-3} \qquad \text{(ii)}$$

Εφαρμόζουμε τέλος στις παραπάνω λύσεις (i), (ii) τον τελεστή L^{-1}, δηλαδή τον αντίστροφο ML και βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$y_1(t) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s-3}\right\} =$$

$$= -L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = -1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \quad \text{και}$$

$$y_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-3}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 1 - e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t}.$$

Δηλαδή, η μερική λύση του συστήματος είναι

$$y_1(t) = -1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} \quad \text{και} \quad y_2(t) = 1 - e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t}.$$

(Να σημειωθεί ότι το παράδειγμα αυτό είναι λυμένο ως παράδειγμα 2 της παραγράφου 1.11.1 (με μεταβλητή το *x*), του κεφαλαίου Διαφορικών Εξισώσεων).

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η μερική λύση των παρακάτω γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, με τις αρχικές συνθήκες που παρατίθενται δίπλα τους:

α) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=t$, με $y(0)=y'(0)=0$,

β) $\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}-y=t^2e^t$, με $y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-2$,

γ) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=12e^{-2t}$, με $y(0)=2,\ y'(0)=6$,

δ) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=3te^{-t}$, με $y(0)=4,\ y'(0)=-2$,

ε) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=0$, με $y(0)=2,\ y'(0)=2$,

στ) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=8\sigma\upsilon\nu\, t$, με $y(0)=1,\ y'(0)=-1$,

ζ) $\dfrac{d^3y}{dt^3}-\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}-4y=t$, με $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=1$,

η) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-2y=4t^2$, με $y(0)=1,\ y'(0)=4$,

θ) $\dfrac{dy}{dt}+y=\eta\mu\, t$, με $y(0)=1$,

ι) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+8y=\eta\mu\, t$, με $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

(*Απάντηση*: **α)** $y(t)=\dfrac{1}{4}e^{2t}-e^t+\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{4}$, **β)** $y(t)=e^t\left(\dfrac{t^5}{60}-\dfrac{t^2}{2}-t+1\right)$,

γ) $y(t)=-6e^t+7e^{2t}+e^{-2t}$, **δ)** $y(t)=\dfrac{1}{2}t^3e^{-t}+6te^{-t}+4e^{-t}$, **ε)** $y(t)=2\sigma\upsilon\nu 2t+\eta\mu 2t$,

στ) $y(t)=4t\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu\, t-\eta\mu\, t$, ζ) $y(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{t}{4}+\dfrac{2}{5}e^t-\dfrac{3}{20}\sigma\upsilon\nu(2t)-\dfrac{3}{40}\eta\mu(2t)$,

η) $y(t)=2e^{2t}+2e^{-t}-2t^2+2t-3$, **θ)** $y(t)=\dfrac{3}{2}e^{-t}-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\, t+\dfrac{1}{2}\eta\mu\, t$,

ι) $y(t)=e^{-2t}\left(\dfrac{69}{65}\sigma\upsilon\nu 2t+\dfrac{131}{130}\eta\mu 2t\right)+\dfrac{7}{65}\eta\mu\, t-\dfrac{4}{65}\sigma\upsilon\nu\, t$).

2) Να βρεθεί η μερική λύση των παρακάτω γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με τις αρχικές συνθήκες που παρατίθενται δίπλα τους:

α) $\begin{cases} y_1' + y_2 = t \\ y_2' + 4y_2 = 0 \end{cases}$ με $y_1(0) = 1,\ \ y_2(0) = -1$,

β) $\begin{cases} y_1' + y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$ με $y_1(0) = 1,\ \ y_2(0) = 2$,

γ) $\begin{cases} y_1' + y_2 = \eta\mu\, t \\ y_2' - y_3 = e^t \\ y_3' + y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$ με $y_1(0) = 0,\ \ y_2(0) = 1,\ \ y_3(0) = 1$,

δ) $\begin{cases} y_1'' + y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' + y_1' = 0 \end{cases}$ με $y_1(0) = 0,\ \ y_1'(0) = 0,\ \ y_2(0) = 1$,

ε) $\begin{cases} y_1'' + y_2' = \sigma\upsilon\nu\, t \\ y_2'' - y_1 = \eta\mu\, t \end{cases}$ με $y_1(0) = -1,\ \ y_1'(0) = -1,\ \ y_2(0) = 1,\ \ y_2'(0) = 0$,

στ) $\begin{cases} y_1'' - 2y_2 = 2 \\ y_2' + y_1 = 5e^{2t} + 1 \end{cases}$ με $y_1(0) = 2,\ \ y_1'(0) = 2,\ \ y_2(0) = 1$,

ζ) $\begin{cases} y_1' - y_1 - 2y_2 = 1 \\ y_2' - 4y_1 - 3y_2 = -1 \end{cases}$ με $y_1(0) = 1,\ \ y_2(0) = 2$,

η) $\begin{cases} y_1'' + y_2 + y_3 = -1 \\ y_1 + y_2'' - y_3 = 0 \\ -y_1' - y_2' + y_3'' = 0 \end{cases}$ με $\begin{matrix} y_1(0) = 0,\ \ y_1'(0) = 1,\ \ y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 0,\ \ y_3(0) = -1,\ \ y_3'(0) = 1 \end{matrix}$,

θ) $\begin{cases} y_1'' - 2y_3 = 0 \\ y_1' + y_2' - y_3 = 2t \\ y_1' - 2y_2 + y_3'' = 0 \end{cases}$ με $\begin{matrix} y_1(0) = 0,\ \ y_1'(0) = 0,\ \ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = -1,\ \ y_3'(0) = 1 \end{matrix}$.

(*Απάντηση*: **α)** $\left(y_1(t) = -\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t} \wedge y_2(t) = t - \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} \right)$,

β) $\left(y_1(t) = 1 + t \wedge y_2(t) = 2 + t \right)$, **γ)** $\left(y_1(t) = 1 - e^t \wedge y_2(t) = e^t + \eta\mu\, t \wedge y_3(t) = \sigma\upsilon\nu\, t \right)$,

δ) $\left(y_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 \wedge y_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 \right)$, **ε)** $\left(y_1(t) = -\sigma\upsilon\nu\, t - \eta\mu\, t \wedge y_2(t) = \sigma\upsilon\nu\, t \right)$,

στ) $\left(y_1(t)=e^{2t}+1 \wedge y_2(t)=2e^{2t}-1\right)$, **ζ)** $\left(y_1(t)=e^{5t}-e^{-t}+1 \wedge y_2(t)=2e^{5t}+e^{-t}-1\right)$,

η) $\left(y_1(t)=\eta\mu t \wedge y_2(t)=-1+\sigma\upsilon\nu t \wedge y_3(t)=\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t\right)$,

θ) $\left(y_1(t)=t^2 \wedge y_2(t)=t \wedge y_3(t)=1\right)$).

8.7.2 Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος συνάρτησης

O ML αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την επίλυση **ολοκληρωτικών εξισώσεων**,[1] καθώς και **ολοκληρωτικο – διαφορικών εξισώσεων**,[2] όπως θα φανεί στα παρακάτω παραδείγματα. Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

“Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και συνάρτηση εκθετικής τάξης (βλ. παράγρ. 8.2), τότε υπάρχει η μετασχηματισμένη κατά Laplace του ολοκληρώματος αυτής $\int_0^t f(u)du$ και δίνεται απ’ τον τύπο

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}=\frac{1}{s}F(s)\,.\text{”} \tag{6}$$

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της (6) παίρνουμε τον τύπο

$$L^{-1}\left\{L\left\{\int_0^t f(u)du\right\}\right\}=\int_0^t f(u)du=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}. \tag{7}$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η συνάρτηση $y(t)$ που επαληθεύει την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t)=t^2+3\int_0^t y(u)du\,.$$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τελεστή L στα μέλη της εξίσωσης και έχουμε

---

[1] Μια εξίσωση, όπου η άγνωστη συνάρτηση $y=y(t)$ εμφανίζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση ενός ολοκληρώματος, αλλά ενδεχομένως και έξω απ’ αυτό, λέγεται ***ολοκληρωτική εξίσωση.***

[2] Μια ολοκληρωτική εξίσωση, όπου έξω από το ολοκλήρωμα εμφανίζεται και κάποια παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης $y=y(t)$ λέγεται ***ολοκληρωτικο – διαφορική εξίσωση.***

$$L\{y(t)\} = L\left\{t^2 + 3\int_0^t y(u)du\right\} = L\{t^2\} + 3L\left\{\int_0^t y(u)du\right\}$$

Είναι όμως $L\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$ και $L\left\{\int_0^t y(u)du\right\} = \dfrac{1}{s}L\{y(t)\}$ (τύπος (6)). Επομένως

$$L\{y(t)\} = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s}L\{y(t)\} \text{ ή } L\{y(t)\}\left(1 - \frac{3}{s}\right) = \frac{2}{s^3} \text{ ή } L\{y(t)\} = \frac{2}{s^2(s-3)}.$$

Εφαρμόζοντας τέλος τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$L^{-1}\{L\{y(t)\}\} = y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s-3)}\right\}.$$

Αναλύουμε το κλάσμα του L^{-1} σε άθροισμα απλών κλασμάτων (βλ. παρ. 9.4)

$$\frac{2}{s^2(s-3)} = \frac{\mathrm{A}}{s} + \frac{\mathrm{B}}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-3} = \frac{\mathrm{A}s(s-3) + \mathrm{B}(s-3) + \Gamma s^2}{s^2(s-3)} = \frac{(\mathrm{A}+\Gamma)s^2 + (\mathrm{B}-3\mathrm{A})s - 3\mathrm{B}}{s^2(s-3)}.$$

Προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} \mathrm{A}+\Gamma = 0 \\ \mathrm{B}-3\mathrm{A} = 0 \\ -3\mathrm{B} = 2 \end{cases}$ με λύση $\mathrm{A} = -\dfrac{2}{9},\ \mathrm{B} = -\dfrac{2}{3},\ \Gamma = \dfrac{2}{9}$. Έτσι,

$$\frac{2}{s^2(s-3)} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s-3} \text{ και τελικά}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s-3)}\right\} = -\frac{2}{9}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{2}{9}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}e^{3t}.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι

$$y(t) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}e^{3t}.$$

2) Να βρεθεί η μερική λύση της ολοκληρωτικο – διαφορικής εξίσωσης

$\dfrac{dy}{dt} + 6y + 5\int_0^t y(u)du = 4$, η οποία επαληθεύει τη συνθήκη $y(0) = 0$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τελεστή L στα μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$L\left\{\frac{dy}{dt} + 6y + 5\int_0^t y(u)du\right\} = L\{4\}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμικότητα, τους τύπους (1) και (6), καθώς και την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ έχουμε:

$$L\{y'(t)\}+6L\{y(t)\}+5L\left\{\int_0^t y(u)du\right\}=L\{4\} \text{ ή}$$

$$sL\{y(t)\}-y(0)+6L\{y(t)\}+5\cdot\frac{1}{s}L\{y(t)\}=\frac{4}{s} \text{ ή}$$

$$L\{y(t)\}\left(s+6+\frac{5}{s}\right)=\frac{4}{s} \text{ ή}$$

$$L\{y(t)\}\left(\frac{s^2+6s+5}{s}\right)=\frac{4}{s}\Rightarrow L\{y(t)\}=\frac{4}{s^2+6s+5}.$$

Εφαρμόζοντας τέλος τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$$L^{-1}\{L\{y(t)\}\}=y(t)=L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+6s+5}\right\}.$$

Αναλύουμε το κλάσμα του L^{-1} σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Είναι

$$\frac{4}{s^2+6s+5}=\frac{4}{(s+1)(s+5)}=\frac{\mathrm{A}}{(s+1)}+\frac{\mathrm{B}}{(s+5)}=\frac{\mathrm{A}(s+5)+\mathrm{B}(s+1)}{(s+1)(s+5)}=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s+5\mathrm{A}+\mathrm{B}}{(s+1)(s+5)}$$

οπότε προκύπτει το σύστημα $\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=0\\ 5\mathrm{A}+\mathrm{B}=4\end{cases}$ με λύση $\mathrm{A}=1,\ \mathrm{B}=-1$. Έτσι,

$$\frac{4}{s^2+6s+5}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+5} \text{ και τελικά}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+6s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}=e^{-t}-e^{-5t}$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι

$$y(t)=e^{-t}-e^{-5t}.$$

3) Να βρεθεί η μερική λύση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (ολοκληρωτικο-διαφορικών):

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=x+y\\ \dfrac{dx}{dt}+2\displaystyle\int_0^t x(u)du-4x+2y=e^{2t}-1\end{cases} \text{ με αρχικές συνθήκες } x(0)=1,\ y(0)=1.$$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον ML στα μέλη των εξισώσεων του συστήματος και έχουμε

$$\begin{cases}L\{\dot{y}\}=L\{x\}+L\{y\}\\ L\{\dot{x}\}+2L\left\{\int_0^t x(u)du\right\}-4L\{x\}+2L\{y\}=L\{e^{2t}-1\}\end{cases}$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη τους τύπους (1) και (6) των παραγράφων 8.7.1 και 8.7.2 αντίστοιχα, καθώς και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος έχουμε

$$\begin{cases} sL\{y\} - y(0) = L\{x\} + L\{y\} \\ sL\{x\} - x(0) + 2\cdot\dfrac{1}{s}L\{x\} - 4L\{x\} + 2L\{y\} = L\{e^{2t}\} - L\{1\} \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} sL\{y\} - 1 = L\{x\} + L\{y\} \\ sL\{x\} - 1 + 2\cdot\dfrac{1}{s}L\{x\} - 4L\{x\} + 2L\{y\} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s} \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} L\{x\} + (1-s)L\{y\} = -1 \\ \left(s + \dfrac{2}{s} - 4\right)L\{x\} + 2L\{y\} = 1 + \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα που προέκυψε ως προς $L\{x\},\ L\{y\}$. Έτσι

$$L\{x\} = \frac{D_x}{D},\quad L\{y\} = \frac{D_y}{D},\ \text{όπου}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1-s \\ 1 + \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s} & 2 \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s + \dfrac{2}{s} - 4 & 1 + \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s} \end{vmatrix} \text{ και } D = \begin{vmatrix} 1 & 1-s \\ s + \dfrac{2}{s} - 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες και τις αντικαθιστούμε στη λύση που έχουμε. Μετά τις αντικαταστάσεις και απλοποιήσεις η τελική λύση που προκύπτει είναι

$$L\{x\} = \frac{1}{s-2},\ L\{y\} = \frac{1}{s-2}.$$

Επομένως, η μερική λύση του συστήματος είναι

$$L^{-1}\{L\{x\}\} = x = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t},\quad L^{-1}\{L\{y\}\} = y = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}.$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η μερική λύση της ολοκληρωτικο-διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} + x + \int_0^t x(u)du = 1 + \eta\mu\, t - \sigma\upsilon\nu\, t$$

η οποία υπόκειται στην αρχική συνθήκη $x(0) = -1$.

(*Απάντηση*: $x(t) = \eta\mu\, t - \sigma\upsilon\nu\, t$).

2) Να βρεθεί η μερική λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} + y - x + 2\int_0^t y(u)du = 1 - e^{-2t} \end{cases}$$

η οποία υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $x(0) = -1, \ y(0) = 1$.

(*Απάντηση*: $x(t) = -e^{-2t}, \quad y(t) = e^{-2t}$).

3) Να βρεθεί η μερική λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = -y \\ \dot{x} + 2x + 6\int_0^t y(u)du = -2 \end{cases}$$

η οποία υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $x(0) = -5, \ y(0) = 6$.

(*Απάντηση*: $x(t) = 2 - 4e^t - 3e^{-4t}, \quad y(t) = 2e^t + 4e^{-4t}$).

8.8 Παραγώγιση και ολοκλήρωση του ML

Στην προηγούμενη παράγραφο 8.7 γνωρίσαμε προτάσεις που σχετίζονται με την εύρεση μετασχηματισμού Laplace παραγώγων και ολοκληρωμάτων της αρχικής συνάρτησης $f(t)$. Εδώ θα δούμε προτάσεις που αναφέρονται σε παραγώγους και ολοκληρώματα της μετασχηματισμένης Laplace $F(s)$.

i) Ισχύει η παρακάτω πρόταση για την παράγωγο του ML:

Αν υπάρχει ο ML της συνάρτησης $f(t)$ και είναι $L\{f(t)\} = F(s)$ τότε είναι και

$$L\{t\,f(t)\} = -F'(s) = -\frac{d\left[L\{f(t)\}\right]}{ds} \tag{1}$$

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της (1) έχουμε

$$L^{-1}\{L\{t\,f(t)\}\} = t\,f(t) = -L^{-1}\{F'(s)\} \text{ ή } f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\} \tag{2}$$

Ο τελευταίος τύπος (2) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$L^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}. \tag{3}$$

Ο τύπος (3) χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας το $L^{-1}\{F(s)\}$, μπορούμε όμως να υπολογίσουμε το $L^{-1}\{F'(s)\}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα 1. Ο τύπος (1) έχει επίσης πολλές εφαρμογές, όπως θα φανεί στα παραδείγματα 3, 4 και 5.

Τέλος, αν εφαρμόσουμε διαδοχικά τον τύπο (1) αποδεικνύεται ότι:

$$L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{d^n\left[L\{f(t)\}\right]}{ds^n}, \quad n \in N .$$

ii) Ισχύει η παρακάτω πρόταση για το ολοκλήρωμα του ML:
Αν υπάρχει ο ML $F(s) = L\{f(t)\}$ της συνάρτησης $f(t)$ και αν υπάρχει επιπλέον το όριο $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)$ ($t \to 0^+$ εφόσον η $f(t)$ ορίζεται για $t \geq 0$), τότε ισχύει

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\omega)d\omega . \tag{4}$$

Αν εφαρμόσουμε στα μέλη της (4) τον τελεστή L^{-1} έχουμε

$$L^{-1}\left\{L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\right\} = \frac{f(t)}{t} = L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\omega)d\omega\right\} \;\; \text{ή} \;\; f(t) = t\cdot L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\omega)d\omega\right\} \tag{5}$$

Ο τελευταίος τύπος (5) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$L^{-1}\{F(s)\} = t\cdot L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\omega)d\omega\right\} . \tag{6}$$

Ο τύπος (6) χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε απ’ ευθείας το $L^{-1}\{F(s)\}$, ενώ μπορούμε το $L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\omega)d\omega\right\}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα 2. Ο τύπος (4) έχει επίσης πολλές εφαρμογές, όπως θα φανεί στα παραδείγματα 6 και 7.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $F(s) = \ln\left(\dfrac{s+4}{s-5}\right)$, $s > 5$ και **β)** $F(s) = 3\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\dfrac{s}{4}\right)$.

Λύση

α) Όπως αναφέραμε πριν, όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τον αντίστροφο ML, δηλ. τον $L^{-1}\{F(s)\}$, τότε εξετάζουμε αν μπορούμε να υπολογίσουμε τον $L^{-1}\{F'(s)\}$. Αν αυτό είναι δυνατόν, τότε, εφαρμόζοντας τον τύπο (3), βρίσκουμε και τον $L^{-1}\{F(s)\}$. Είναι

$$F'(s) = \left[\ln\left(\frac{s+4}{s-5}\right)\right]' = \left[\ln(s+4) - \ln(s-5)\right]' = \frac{(s+4)'}{s+4} - \frac{(s-5)'}{s-5} = \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s-5} .$$

Άρα $L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s-5}\right\}=e^{-4t}-e^{5t}$ και ο τύπος (3) δίνει

$$L^{-1}\{F(s)\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}=-\frac{1}{t}\left(e^{-4t}-e^{5t}\right).$$

β) Παρόμοια σκεπτόμενοι βρίσκουμε τον $L^{-1}\{F(s)\}$. Είναι

$$F'(s)=\left[3\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{s}{4}\right)\right]'=3\frac{1}{1+\left(\frac{s}{4}\right)^2}\cdot\left(\frac{s}{4}\right)'=3\frac{4^2}{4^2+s^2}\cdot\frac{1}{4}=3\frac{4}{s^2+4^2}.$$ Άρα

$$L^{-1}\{F'(s)\}=3L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\}=3\eta\mu(4t)$$ και ο τύπος (3) δίνει

$$L^{-1}\{F(s)\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(s)\}=-\frac{3}{t}\eta\mu(4t).$$

2) Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $F(s)=\frac{2s}{(s^2+9)^2}$ και **β)** $F(s)=\frac{2s+4}{(s^2+4s+20)^2}$.

Λύση

α) Εδώ, επειδή δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας τον $L^{-1}\{F(s)\}$, εξετάζουμε αν μπορούμε να βρούμε τον $L^{-1}\left\{\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega\right\}$. Αν αυτό είναι δυνατόν, τότε, εφαρμόζοντας τον τύπο (6), βρίσκουμε και τον $L^{-1}\{F(s)\}$. Είναι

$$\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_s^{\infty}\frac{2\omega}{(\omega^2+9)^2}d\omega=\int_s^{\infty}(\omega^2+9)^{-2}d(\omega^2+9)=\left[\frac{(\omega^2+9)^{-2+1}}{-2+1}\right]_s^{\infty}=$$

$$=-\left[\frac{1}{\omega^2+9}\right]_s^{\infty}=-\left(0-\frac{1}{s^2+9}\right)=\frac{1}{s^2+9}$$

και ο τύπος (6) δίνει

$$L^{-1}\{F(s)\}=t\cdot L^{-1}\left\{\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega\right\}=t\cdot\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=\frac{t}{3}\eta\mu(3t).$$

β) Παρόμοια σκεπτόμενοι βρίσκουμε τον $L^{-1}\{F(s)\}$. Είναι

$$\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_s^{\infty}\frac{2\omega+4}{(\omega^2+4\omega+20)^2}d\omega=\int_s^{\infty}(\omega^2+4\omega+20)^{-2}d(\omega^2+4\omega+20)=$$

$$= -\left[\frac{1}{\omega^2+4\omega+20}\right]_s^{\infty} = -\left(0-\frac{1}{s^2+4s+20}\right) = \frac{1}{s^2+4s+20}.$$

Είναι $\dfrac{1}{s^2+4s+20} = \dfrac{1}{(s^2+4s+4)+16} = \dfrac{1}{(s+2)^2+4^2} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{(s+2)^2+4^2}$.

Έτσι, ο τύπος (6) δίνει

$$L^{-1}\{F(s)\} = t\cdot L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\omega)d\omega\right\} = t\cdot\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+4^2}\right\} = \frac{t}{4}e^{-2t}\eta\mu(4t).$$

3) Να υπολογιστούν με χρήση του τύπου (1) οι ML των συναρτήσεων:

α) $f_0(t) = t\cdot e^{at}\eta\mu(\beta t)$ και **β)** $f_0(t) = t\cdot e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)$.

Λύση

α) Θέτουμε $f(t) = e^{at}\eta\mu(\beta t)$, οπότε $f_0(t) = t\cdot f(t)$. Επειδή

$L\{f(t)\} = L\{e^{at}\eta\mu(\beta t)\} = \dfrac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2} = F(s)$ (τύπος (4) παρ. 8.6), είναι

$$L\{f_0(t)\} = L\{t\cdot e^{at}\eta\mu(\beta t)\} = L\{t\cdot f(t)\} \overset{(1)}{=} -F'(s) = -\left(\frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}\right)' =$$

$$= -\frac{-\beta\cdot 2(s-a)}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^2} = \frac{2\beta(s-a)}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^2}.$$

β) Ομοίως, θέτουμε $f(t) = e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)$, οπότε $f_0(t) = t\cdot f(t)$. Επειδή

$L\{f(t)\} = L\{e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2} = F(s)$ (τύπος (5) παρ. 8.6), είναι

$$L\{f_0(t)\} = L\{t\cdot e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)\} = L\{t\cdot f(t)\} \overset{(1)}{=} -F'(s) = -\left(\frac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2}\right)' =$$

$$= -\frac{1\cdot\left[(s-a)^2+\beta^2\right]-(s-a)\cdot 2(s-a)}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^2} = \frac{(s-a)^2-\beta^2}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^2}.$$

4) Να υπολογιστούν με χρήση του τύπου (1) οι ML των συναρτήσεων:

α) $f_0(t) = t\cdot\int_0^t e^{-2u}\eta\mu(3u)du$ και **β)** $f_0(t) = t\cdot\int_0^t e^{-2u}\sigma\upsilon\nu(3u)du$.

Λύση

α) Θέτουμε $f(t) = \int_0^t e^{-2u}\eta\mu(3u)du$, οπότε $f_0(t) = t\cdot f(t)$.

Είναι όμως (τύπος (6) της παρ. 8.7.2)

$$L\{f(t)\}=L\left\{\int_0^t e^{-2u}\eta\mu(3u)du\right\}=\frac{1}{s}L\left\{e^{-2t}\eta\mu(3t)\right\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}=F(s)\,.$$

Έτσι, αν εφαρμοστεί ο τύπος (1) της παραγράφου 8.8 έχουμε

$$L\{f_0(t)\}=L\{t\cdot f(t)\}=-F'(s)=-\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)'=\frac{9s^2+24s+39}{s^2\left[(s+2)^2+3^2\right]^2}\,.$$

β) Παρόμοια, θέτουμε $f(t)=\int_0^t e^{-2u}\sigma\upsilon\nu(3u)du$, οπότε $f_0(t)=t\cdot f(t)$.

Είναι όμως (τύπος (6) της παρ. 8.7.2)

$$L\{f(t)\}=L\left\{\int_0^t e^{-2u}\sigma\upsilon\nu(3u)du\right\}=\frac{1}{s}L\left\{e^{-2t}\sigma\upsilon\nu(3t)\right\}=\frac{1}{s}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}=F(s)\,.$$

Έτσι, αν εφαρμοστεί ο τύπος (1) της παραγράφου 8.8 έχουμε

$$L\{f_0(t)\}=L\{t\cdot f(t)\}=-F'(s)=-\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right)'=\frac{2s^3+10s^2+16s+26}{s^2\left[(s+2)^2+3^2\right]^2}\,.$$

5) Να υπολογιστούν με χρήση του τύπου (1) οι ML των συναρτήσεων:

α) $f_0(t)=t\cdot e^{-4t}\sinh(7t)$ και **β)** $f_0(t)=t\cdot e^{-3t}\cosh(5t)$.

Λύση

α) Θέτουμε $f(t)=e^{-4t}\sinh(7t)$ οπότε $f_0(t)=t\cdot f(t)$. Είναι όμως

$$L\{f(t)\}=L\left\{e^{-4t}\sinh(7t)\right\}=L\left\{e^{-4t}\cdot\frac{e^{7t}-e^{-7t}}{2}\right\}=L\left\{\frac{e^{3t}-e^{-11t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+11}\right)=F(s)$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο (1) της παραγράφου 8.8 έχουμε

$$L\{f_1(t)\}=L\{t\cdot f(t)\}=-F'(s)=-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+11}\right)\right]'=\frac{14s+56}{(s-3)^2(s+11)^2}\,.$$

β) Θέτουμε $f(t)=e^{-3t}\cosh(5t)$ οπότε $f_0(t)=t\cdot f(t)$. Είναι όμως

$$L\{f(t)\}=L\left\{e^{-3t}\cosh(5t)\right\}=L\left\{e^{-3t}\cdot\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right\}=L\left\{\frac{e^{2t}+e^{-8t}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+8}\right)=F(s)$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο (1) της παραγράφου 8.8 έχουμε

$$L\{f_1(t)\}=L\{t\cdot f(t)\}=-F'(s)=-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+8}\right)\right]'=\frac{s^2+6s+34}{(s-2)^2(s+8)^2}\,.$$

6) Να υπολογιστούν με τη βοήθεια του τύπου (4) οι ML των συναρτήσεων

α) $f_0(t)=\dfrac{2\eta\mu(3t)}{t}$ και **β)** $f_0(t)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(2t)}{t}$.

Λύση

α) Θέτουμε $f(t)=2\eta\mu(3t)$ οπότε $f_0(t)=\dfrac{f(t)}{t}$. Είναι όμως

$$L\{f(t)\}=L\{2\eta\mu(3t)\}=2L\{\eta\mu(3t)\}=2\cdot\frac{3}{s^2+3^2}=\frac{6}{s^2+9}=F(s).$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (4) της παραγράφου 8.8 έχουμε

$$L\{f_0(t)\}=L\left\{\frac{2\eta\mu(3t)}{t}\right\}=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_s^{\infty}\frac{6}{\omega^2+9}d\omega=$$

$$=\int_s^{\infty}\frac{18\,d\left(\omega/3\right)}{9\left[\left(\omega/3\right)^2+1\right]}=2\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\omega}{3}\right]_s^{\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{s}{3}\right)=2\tau o\xi\sigma\varphi\frac{s}{3}.$$

Άρα $\qquad L\left\{\dfrac{2\eta\mu(3t)}{t}\right\}=2\tau o\xi\sigma\varphi\dfrac{s}{3}$.

β) Θέτουμε $f(t)=1-\sigma\upsilon\nu(2t)$ οπότε $f_0(t)=\dfrac{f(t)}{t}$. Είναι όμως

$$L\{f(t)\}=L\{1-\sigma\upsilon\nu(2t)\}=L\{1\}-L\{\sigma\upsilon\nu(2t)\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+2^2}=F(s),$$

οπότε, εφαρμόζοντας τον τύπο (4) της παρ. 8.8 έχουμε

$$L\{f_0(t)\}=L\left\{\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2t)}{t}\right\}=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\omega}{\omega^2+2^2}\right)d\omega=$$

$$=\int_s^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}-\frac{1}{2}\int_s^{\infty}\frac{d(\omega^2+4)}{\omega^2+4}=\left[\ln\omega-\frac{1}{2}\ln(\omega^2+4)\right]_s^{\infty}=\left[\frac{2\ln\omega-\ln(\omega^2+4)}{2}\right]_s^{\infty}=$$

$$=\left[\frac{\ln\omega^2-\ln(\omega^2+4)}{2}\right]_s^{\infty}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\omega^2}{\omega^2+4}\right)\right]_s^{\infty}.$$

Και επειδή $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left[\ln\left(\dfrac{\omega^2}{\omega^2+4}\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{\omega\to\infty}\left(\dfrac{\omega^2}{\omega^2+4}\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{\omega\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+4/\omega^2}\right)\right]=\ln 1=0$

θα είναι $\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{\omega^2}{\omega^2+4}\right)\right]_s^{\infty}=\dfrac{1}{2}\left(0-\ln\left(\dfrac{s^2}{s^2+4}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2+4}{s^2}=\ln\dfrac{\sqrt{s^2+4}}{s}$.

Άρα $\qquad L\left\{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(2t)}{t}\right\}=\ln\dfrac{\sqrt{s^2+4}}{s}$.

7) Να υπολογιστούν με τη βοήθεια του τύπου (4) οι ML των συναρτήσεων

α) $f_0(t)=\dfrac{e^{3t}-1}{t}$ και **β)** $f_0(t)=\dfrac{e^{-t}\eta\mu(4t)}{t}$.

Λύση

α) Θέτουμε $f(t)=e^{3t}-1$, οπότε $f_0(t)=\dfrac{f(t)}{t}$. Είναι

$$L\{f(t)\}=L\{e^{3t}-1\}=L\{e^{3t}\}-L\{1\}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s}=F(s),$$

οπότε, εφαρμόζοντας τον τύπο (4) της παρ. 8.8 έχουμε

$$L\{f_0(t)\}=L\left\{\frac{e^{3t}-1)}{t}\right\}=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\omega-3}-\frac{1}{\omega}\right)d\omega=\left[\ln\left(\frac{\omega-3}{\omega}\right)\right]_s^{\infty}$$

Αλλά $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left[\ln\left(\dfrac{\omega-3}{\omega}\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{\omega\to\infty}\left(\dfrac{\omega-3}{\omega}\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{\omega\to\infty}(1-3/\omega)\right]=\ln 1=0$.

Άρα $\left[\ln\left(\dfrac{\omega-3}{\omega}\right)\right]_s^{\infty}=\left(0-\ln\left(\dfrac{s-3}{s}\right)\right)=\ln\left(\dfrac{s}{s-3}\right)$. Επομένως είναι

$$L\left\{\frac{e^{3t}-1)}{t}\right\}=\ln\left(\frac{s}{s-3}\right).$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι ML των συναρτήσεων:

α) $F_1(s)=\ln\left(\dfrac{s+3}{s+7}\right)$, **β)** $F_2(s)=\ln\left(\dfrac{s^2-16}{s^2}\right)$, **γ)** $F_3(s)=\ln\left(\dfrac{s^2+4}{s(s+3)}\right)$,

με τη βοήθεια της παραγώγου ML. (*Απάντηση*: **α)** $L^{-1}\{F_1(s)\}=\dfrac{1}{t}(e^{-7t}-e^{-3t})$,

β) $L^{-1}\{F_2(s)\}=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{2t}\cdot\sinh(4t)$, **γ)** $L^{-1}\{F_3(t)\}=\dfrac{1}{t}\left(1+e^{-3t}-2\sigma\upsilon\nu(2t)\right)$).

2) Να υπολογιστούν ο αντίστροφος ML της συνάρτησης: $F(s)=\dfrac{s}{(s^2-4)^2}$

με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της $F(s)$ (τύπος (5)), χωρίς την ανάλυση αυτής σε άθροισμα απλών κλασμάτων. (*Απάντηση*: $L^{-1}\{F(s)\}=\dfrac{t}{4}\sinh(2t)$).

3) Να υπολογιστούν με χρήση του τύπου (1) και τη βοήθεια του παραδείγματος 3α και 3β οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(t) = t^2 e^{at} \eta\mu(\beta t)$ και **β)** $g(t) = t^2 e^{at} \sigma\upsilon\nu(\beta t)$.

(*Απ.*: **α)** $L\{f(t)\} = \dfrac{2\beta\left[3(s-a)^2 - \beta^2\right]}{\left[(s-a)^2 + \beta^2\right]^3}$, **β)** $L\{g(t)\} = \dfrac{2(s-a)\left[(s-a)^2 - 3\beta^2\right]}{\left[(s-a)^2 + \beta^2\right]^3}$).

4) Να υπολογιστούν με χρήση του τύπου (1) οι ML των συναρτήσεων

α) $f(t) = t^4 e^{4t}$ και **β)** $g(t) = t^5 e^{-5t}$.

(*Απάντηση*: **α)** $F(s) = \dfrac{24}{(s-4)^5}$, **β)** $G(s) = -\dfrac{120}{(s+5)^6}$).

8.9 Μέθοδος Heaviside υπολογισμού αντιστρόφου ML

Η Μέθοδος *Heaviside* χρησιμοποιείται για να βρούμε την αρχική συνάρτηση

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

όταν δίνεται η αντίστροφη μετασχηματισμένη αυτής $F(s)$ σε μορφή κλάσματος (ρητής συνάρτησης), δηλαδή όταν

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}, \qquad (1)$$

όπου $p(s)$, $q(s)$ είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, βαθμών n και m αντίστοιχα, με $n < m$.

Πριν αναφερθούμε στη μεθοδολογία που ακολουθούμε, υπενθυμίζουμε [1] ότι κάθε ρητό κλάσμα της μορφής $\dfrac{p(s)}{q(s)}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων, τα οποία αντιστοιχούν στις ρίζες του παρονομαστή $q(s)$, ο οποίος θα πρέπει να παραγοντοποιηθεί, αν δεν είναι παραγοντοποιημένος. Οι ρίζες αυτές μπορούν να είναι πραγματικές (απλές ή πολλαπλές) ή/και συζυγείς μιγαδικές (επίσης απλές ή πολλαπλές). Έτσι λοιπός έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις ανάλυσης απλών κλασμάτων:

♦ Στην απλή ρίζα $s = a$ του παρονομαστή, (η οποία προέρχεται από τον παράγοντα $(s-a)^1$), αντιστοιχεί ένα απλό κλάσμα της μορφής

$$\frac{\mathrm{A}}{s-a} \quad (\mathrm{A} \in R) \qquad (2)$$

---

[1] Βλέπε παράγραφο 9.4 Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης.

♦ Στην πολλαπλή ρίζα $s=a$ του παρονομαστή βαθμού πολλαπλότητας *k*, (η οποία προέρχεται από τον παράγοντα $(s-a)^k$ όπου $k \geq 2$), αντιστοιχεί ένα άθροισμα απλών κλασμάτων της μορφής

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(s-a)^k} \quad (A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k \in R) \tag{3}$$

♦ Στο ζεύγος απλών συζυγών μιγαδικών ριζών $s_{1,2}=a+i\beta$ του παρονομαστή (οι οποίες προέρχονται από τον παράγοντα $\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^1$), αντιστοιχεί ένα απλό κλάσμα της μορφής

$$\frac{As+B}{(s-a)^2+\beta^2} \quad (A,\ B \in R) \tag{4}$$

♦ Στο ζεύγος πολλαπλών συζυγών μιγαδικών ριζών $s_{1,2}=a+i\beta$ του παρονομαστή (οι οποίες προέρχονται από τον παράγοντα $\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^k$ με $k \geq 2$), αντιστοιχεί ένα άθροισμα απλών κλασμάτων της μορφής

$$\frac{A_1 s+B_1}{(s-a)^2+\beta^2}+\frac{A_2 s+B_2}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^2}+\cdots\frac{A_k s+B_k}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^k} \quad (A_i,\ B_i \in R) \qquad (5).$$

Όλοι αυτοί οι συντελεστές A, B, A_i, B_i σε όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν, υπολογίζονται, ως γνωστό, ως εξής: Συμπτύσσουμε τα απλά κλάσματα σε ένα και στη συνέχεια εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων του αριθμητή $p(s)$ του πρώτου κλάσματος με τους συντελεστές του αριθμητή του δευτέρου κλάσματος. Κατόπιν υπολογίζουμε τα A, B, A_i, B_i από το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει. Τον τρόπο αυτό εφαρμόσαμε μέχρι τώρα στα παραδείγματα εύρεσης της αρχικής $f(t)$ από την μετασχηματισμένη $F(s)$ που περιγράψαμε.

Με τη μέθοδο ***Heaviside*** υπολογίζονται απ' ευθείας οι συντελεστές A, A_i, B_i των απλών κλασμάτων που αναφέραμε. Έτσι, τελικά ο αντίστροφος ML

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}=f(t)$$

θα προκύψει ως άθροισμα όρων της μορφής

$$L^{-1}\left\{\frac{A}{s-a}\right\},\ L^{-1}\left\{\frac{A}{(s-a)^k}\right\},\ L^{-1}\left\{\frac{As+B}{(s-a)^2+\beta^2}\right\},\ L^{-1}\left\{\frac{As+B}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]^k}\right\}.$$

Η διαδικασία εύρεσης των όρων αυτών με τη μέθοδο *Heaviside* έχει ως εξής:

♦ Ο όρος (δηλαδή προσθετέος) της συνάρτησης $f(t)$, ο οποίος αντιστοιχεί στην απλή πραγματική ρίζα $s=a$ του παρονομαστή $q(s)$ είναι ο

$$\frac{p(a)}{q'(a)}e^{a\,t} \tag{6}$$

♦ Ο όρος της $f(t)$ που αντιστοιχεί στην πολλαπλή ρίζα $s=a$ του παρονομαστή $q(s)$ βαθμού πολλαπλότητας $k\geq 2$ είναι ο

$$\left[\frac{w^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}+\frac{w^{(k-2)}(a)}{(k-2)!}\cdot\frac{t^1}{1!}+\cdots+\frac{w'(a)}{1!}\cdot\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}+w(a)\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right]e^{a\,t} \tag{7}$$

όπου

$$w(s)=\frac{(s-a)^k\,p(s)}{q(s)}=\frac{(s-a)^k\,p(s)}{(s-a)^k\,q_1(s)}=\frac{p(s)}{q_1(s)} \tag{8}$$

♦ Ο όρος της $f(t)$ ο οποίος αντιστοιχεί στο ζεύγος απλών συζυγών μιγαδικών ριζών $s_{1,2}=a\pm\beta i$ του παρονομαστή $q(s)$ είναι ο

$$\frac{e^{a\,t}}{\beta}\Big[\mathrm{Im}\big[w(a+\beta i)\big]\sigma\upsilon\nu(\beta t)+\mathrm{Re}\big[w(a+\beta i)\big]\eta\mu(\beta t)\Big] \tag{9}$$

όπου

$\mathrm{Im}(x+yi)=y$ (φανταστικό (Imaginary) μέρος του μιγαδικού $x+iy$),

$\mathrm{Re}(x+yi)=x$ (πραγματικό (Real) μέρος του μιγαδικού αριθμού $x+iy$),

$$w(s)=\frac{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]p(s)}{q(s)}=\frac{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]p(s)}{\left[(s-a)^2+\beta^2\right]q_1(s)}=\frac{p(s)}{q_1(s)}\,. \tag{10}$$

Η περίπτωση του όρου της $f(t)$ που αντιστοιχεί στο ζεύγος πολλαπλών συζυγών μιγαδικών ριζών δεν αναφέρεται, γιατί αφενός συναντάται σπάνια, αφετέρου η μέθοδος Heaviside γίνεται στη περίπτωση αυτή δυσεφάρμοστη και επίπονη.
Με τα επόμενα παραδείγματα που ακολουθούν, θα γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος εύρεσης της αρχικής $f(t)$ απ' τη μετασχηματισμένη αυτής $F(s)$.

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ της συνάρτησης

$F(s)=\dfrac{-2s+2}{(s-3)(s-5)}$ (παράδειγμα 1β της παραγράφου 8.5).

Λύση

Ο παρονομαστής $q(s)=(s-3)(s-5)$ έχει δύο απλές πραγματικές ρίζες τις $s_1=3$ και $s_2=5$. Είναι $p(s)=-2s+2$, $q'(s)=1\cdot(s-5)+1\cdot(s-3)=2s-8$ και

$$\frac{p(3)}{q'(3)}=\frac{-4}{-2}=2 \text{ και } \frac{p(5)}{q'(5)}=\frac{-8}{2}=-4 .$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (6), οι όροι που αντιστοιχούν στις ρίζες $s_1=3$ και $s_2=5$ είναι οι $\frac{p(3)}{q'(3)}e^{3t}=2e^{3t}$ και $\frac{p(5)}{q'(5)}e^{5t}=-4e^{5t}$. Άρα

$$f(t)=2e^{3t}-4e^{5t}$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα του παραδείγματος 1β της παρ. 8.5.

2) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ της συνάρτησης

$$F(s)=\frac{1}{s^4+s^3}$$ (παράδειγμα 2α της παραγράφου 8.5).

Λύση

Ο παρονομαστής $q(s)=s^4+s^3$ γράφεται (παραγοντοποιείται) $q(s)=s^3(s+1)$ και έχει ρίζες $s=0$ (τριπλή) και $s=-1$ (απλή). Επίσης, $p(s)=1$, $q'(s)=4s^3+3s^2$.

Είναι ακόμη $p(-1)=1$ και $q'(-1)=4(-1)^3+3(-1)^2=-1$. Έτσι:

- Ο όρος που αντιστοιχεί στην απλή ρίζα $s=-1$, είναι (τύπος (6)) ο

$$\frac{p(-1)}{q'(-1)}e^{-1\cdot t}=\frac{1}{-1}e^{-1\cdot t}=-e^{-t} .$$

Για να βρούμε τον όρο που αντιστοιχεί στην τριπλή ρίζα $s=0$, θα βρούμε πρώτα την συνάρτηση $w(s)$ από τον τύπο (8). Είναι (για $a=0$ και $k=3$)

$$w(s)=\frac{(s-a)^k p(s)}{q(s)}=\frac{(s-0)^3\cdot 1}{(s-0)^3(s+1)}=\frac{1}{s+1} .$$

Για να υπολογίσουμε τον τύπο (7) που δίνει τον όρο για την τριπλή ρίζα $s=0$, θα βρούμε πρώτα την 1^{η} και 2^{η} παράγωγο της $w(s)$. Είναι

$w'(s)=-1\big/(s+1)^2$, $w''(s)=2\big/(s+1)^3$ και $w(0)=1$, $w'(0)=-1$, $w''(0)=2$. Έτσι

- Ο όρος που αντιστοιχεί στην τριπλή ρίζα $s=0$ ($a=0$, $k=3$) είναι ο

$$\left[\frac{w^{(3-1)}(0)}{(3-1)!}+\frac{w^{(3-2)}(0)}{(3-2)!}\cdot\frac{t^1}{1!}+w(0)\cdot\frac{t^{3-1}}{(3-1)!}\right]e^{0\cdot t}=$$

$$=\left[\frac{w''(0)}{2!}+\frac{w'(0)}{1!}\cdot\frac{t^1}{1!}+w(0)\cdot\frac{t^2}{2!}\right]e^{0\cdot t}=\left[\frac{2}{2}+\frac{-1}{1}\cdot t+1\cdot\frac{t^2}{2}\right]\cdot 1=\frac{t^2}{2}-t+1.$$

Επειδή δεν υπάρχουν άλλες ρίζες του παρονομαστή $q(s)$, έχουμε

$$f(t)=-e^{-t}+\frac{t^2}{2}-t+1$$

η οποία συμπίπτει με το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2α της παρ. 8.5.

3) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ της συνάρτησης

$$\frac{s+2}{(s^2-1)(s^2+4s+5)}$$ (Άσκηση 4β της παραγράφου 8.6).

Λύση

Ο παρονομαστής αν παραγοντοποιηθεί γίνεται $q(s)=(s-1)(s+1)\left[(s+2)^2+1^2\right]$ με απλές πραγματικές ρίζες $s_1=1,\ s_2=-1$ και το ζεύγος των απλών συζυγών μιγαδικών ριζών $s_{3,4}=-2\pm i$. Έχουμε:

$p(s)=s+2$

$q'(s)=2s(s^2+4s+5)+(s^2-1)(2s+4)=4s^3+12s^2+8s-4$. Είναι

$p(1)=3,\ q'(1)=4+12+8-4=20,\ p(-1)=1,\ q'(-1)=-4+12-8-4=-4$. Έτσι

- Ο όρος που αντιστοιχεί στην απλή ρίζα $s=1$, είναι (τύπος (6)) ο

$$\frac{p(1)}{q'(1)}e^{1\cdot t}=\frac{3}{20}e^{t}.$$

- Ο όρος που αντιστοιχεί στην απλή ρίζα $s=-1$, είναι ο

$$\frac{p(-1)}{q'(-1)}e^{-1\cdot t}=\frac{1}{-4}e^{-t}=-\frac{1}{4}e^{-t}.$$

Για να βρούμε τον όρο που αντιστοιχεί στο ζεύγος των απλών συζυγών μιγαδικών ριζών $s_{3,4}=-2\pm i$ (για τις ρίζες αυτές είναι $a=-2,\ \beta=1$) βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση $w(s)$. Αυτή είναι (τύπος (10)):

$$w(s)=\frac{\left[(s-2)^2+1^2\right]p(s)}{q(s)}=\frac{\left[(s-2)^2+1^2\right](s+2)}{\left[(s-2)^2+1^2\right](s^2-1)}=\frac{s+2}{s^2-1}=\frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$$

Έχουμε

$$w(a+\beta i)=w(-2+i)=\frac{(-2+i)+2}{(-2+i-1)(-2+i+1)}=\frac{i}{(-3+i)(-1+i)}=$$

$$=\frac{i}{3-3i-i+i^2}=\frac{i}{2-4i}=\frac{i(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}=\frac{-4+2i}{2^2+4^2}=\frac{-4}{20}+\frac{2i}{20}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i\,,$$

με $\mathrm{Im}\left[w(a+\beta i)\right]=\frac{1}{10}$ και $\mathrm{Re}\left[w(a+\beta i)\right]=-\frac{1}{5}$. Επομένως

- ♦ Ο όρος που αντιστοιχεί στο ζεύγος των ριζών $s_{3,4}=-2\pm i$ είναι ο

$$\frac{e^{a\,t}}{\beta}\left[\mathrm{Im}\left[w(a+\beta i)\right]\sigma\upsilon\nu(\beta t)+\mathrm{Re}\left[w(a+\beta i)\right]\eta\mu(\beta t)\right]=$$

$$=\frac{e^{2t}}{1}\left[\mathrm{Im}\left[w(-2+1\cdot i)\right]\sigma\upsilon\nu(1\cdot t)+\mathrm{Re}\left[w(-2+1\cdot i)\right]\eta\mu(1\cdot t)\right]=e^{2t}\left(\frac{1}{10}\sigma\upsilon\nu t-\frac{1}{5}\eta\mu\, t\right).$$

Επομένως

$$f(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+e^{2t}\left(\frac{1}{10}\sigma\upsilon\nu t-\frac{1}{5}\eta\mu\, t\right),$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα της άσκησης 4β της παρ. 8.6.

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ των συναρτήσεων

α) $F_1(s)=\dfrac{8}{s^3(s^2-s-2)}$, **β)** $F_2(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

(*Απάντηση*: **α)** $L^{-1}\{F_1(s)\}=-3+2t-2t^2+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{8}{3}e^{-t}$,

β) $L^{-1}\{F_2(s)\}=\frac{1}{2}(e^{-t}-\sigma\upsilon\nu\, t+\eta\mu\, t)$ **)**.

2) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ των συναρτήσεων

α) $\dfrac{s+2}{(s^2+6s+10)(s^2+4s+5)}$**,** **β)** $\dfrac{s+1}{(s^2+1)(s^2+4s+13)}$.

(*Απάντηση*: **α)** $\frac{1}{5}\left(\sigma\upsilon\nu t+2\eta\mu t\right)e^{-2t}-\frac{1}{5}\left(\sigma\upsilon\nu t+3\eta\mu t\right)e^{-3t}$**,**

β) $\frac{1}{20}\sigma\upsilon\nu\, t+\frac{1}{10}\eta\mu\, t-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu(3t)+\frac{1}{3}\eta\mu(3t)\right]e^{-2t}$).

3) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ των συναρτήσεων

α) $\dfrac{60s+24}{s(s+2)(5s+4)}$**,** **β)** $\dfrac{s^2+1}{s^2(s-1)(s^2+4)}$.

(*Απάντηση*: **α)** $3+5e^{-\frac{4t}{5}}-8e^{-2t}$, **β)** $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t+\frac{2}{5}e^{t}-\frac{3}{20}\sigma\upsilon\nu(2t)-\frac{3}{40}\eta\mu(2t)$).

4) Να βρεθεί με τη μέθοδο Heaviside η $f(t)=L^{-1}\left\{F(s)\right\}$ των συναρτήσεων

α) $\dfrac{25s}{\left[(s+1)^2+1^2\right](s^2+1)}$, **β)** $\dfrac{24s^2}{\left[(s+3)^2+4^2\right](s^2+25)}$.

(*Απάντηση*: **α)** $5\left(\sigma\upsilon\nu t+2\eta\mu t\right)-e^{-t}\left(5\sigma\upsilon\nu t+15\eta\mu t\right)$,

β) $4\sigma\upsilon\nu(5t)-e^{-3t}\left(4\sigma\upsilon\nu(4t)-3\eta\mu(4t)\right)$).

8.10 Συνέλιξη συναρτήσεων – Θεώρημα αυτής

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να υπολογίσουμε την αντίστροφη L^{-1} του γινομένου $F(s)\cdot G(s)$ δύο συναρτήσεων $F(s)$ και $G(s)$ για τις οποίες υπάρχουν οι αντίστροφες αυτών $L^{-1}\left\{F(s)\right\}=f(t)$ και $L^{-1}\left\{\mathrm{G}(s)\right\}=g(t)$. Θα πρέπει δηλαδή να υπολογίσουμε τη συνάρτηση:

$$h(t)=L^{-1}\left\{F(s)\cdot G(s)\right\}.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια με το Θεώρημα Συνέλιξης, ο υπολογισμός της $h(t)$ επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$, αλλά και ενός ολοκληρώματος. Η μέθοδος της συνέλιξης, πέραν του υπολογισμού της αντίστροφης L^{-1} του γινομένου $F(s)\cdot G(s)$ (το οποίο, να σημειωθεί, μπορεί να υπολογιστεί χωρίς τη συνέλιξη σε πολλές περιπτώσεις, π.χ. με τον κλασσικό τρόπο ανάλυσης κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων), εφαρμόζεται και στη περίπτωση ορισμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Πρωτίστως όμως, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

“Αν οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ ορισμένες στο διάστημα $[0,\infty)$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης, τότε ορίζουμε ως ***συνέλιξη*** των f και g (ή ***συνελικτικό γινόμενο*** των f και g) και το συμβολίζουμε με $f*g$ ή $f(t)*g(t)$ ή $(f*g)(t)$ την συνάρτηση:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du\,.\text{”} \qquad (1)$$

Π.χ. για τις συναρτήσεις $f(t)=e^{t}$ και $g(t)=e^{-t}$ η συνέλιξη αυτών είναι

$$f(t)*g(t)=\int_0^t e^{u}\cdot e^{-(t-u)}du=\int_0^t e^{u}\cdot e^{-t}\cdot e^{u}du=e^{-t}\int_0^t e^{2u}du=e^{-t}\frac{1}{2}\int_0^t e^{2u}d(2u)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\left[e^{2u}\right]_0^t=\frac{1}{2}e^{-t}\left(e^{2t}-1\right)=\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)=\sinh t\,.$$

Θεώρημα της συνέλιξης (Convolution theorem)

“Για τις συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ που είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,\ a)$ όπου $a\in R$ ισχύει:

$$L\{f(t)*g(t)\}=F(s)\cdot G(s)=L\{f(t)\}\cdot L\{g(t)\}.\text{”}\qquad(2)$$

Αν εφαρμόσουμε τον αντίστροφο τελεστή L^{-1} θα έχουμε

$$f(t)*g(t)=L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=L^{-1}\{F(s)\}*L^{-1}\{G(s)\}\qquad(3)$$

Ιδιότητες της συνέλιξης

α) Αντιμεταθετική, δηλ. $f*g=g*f$

Πράγματι· σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι

$$f*g=\int_0^t f(u)g(t-u)du\,.$$

Θέτουμε $t-u=\omega$, οπότε $d(t-u)=d\omega$ ή $du=-d\omega$ και $u=t-\omega$.

(Το *t* θεωρείται σταθερό επειδή το διαφορικό του ολοκληρώματος είναι το *du*).

Έτσι, τα νέα όρια του ολοκληρώματος θα είναι:

Για $u=0\Rightarrow\omega=t$ και για $u=t\Rightarrow\omega=0$, οπότε θα έχουμε

$$f*g=\int_0^t f(u)g(t-u)du=\int_t^0 f(t-\omega)g(\omega)(-d\omega)=-\int_t^0 f(t-\omega)g(\omega)d\omega=$$

$$=\int_0^t f(t-\omega)g(\omega)d\omega=\int_0^t g(\omega)f(t-\omega)d\omega=g*f$$

διότι, ως γνωστό, στο ορισμένο ολοκλήρωμα η μεταβλητή μπορεί να είναι οποιαδήποτε *x, y, ω, u*, κλπ.

β) Επιμεριστική, δηλ. $f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$.

Πράγματι· σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι

$$f*(g_1+g_2)=\int_0^t f(u)\left[\left(g_1+g_2\right)(t-u)\right]du=\int_0^t f(u)\left[g_1(t-u)+g_2(t-u)\right]du=$$

$$=\int_0^t f(u)g_1(t-u)du+\int_0^t f(u)g_2(t-u)du=f*g_1+f*g_2\,.$$

γ) Προσεταιριστική, δηλ. $\left(f*g\right)*h=f*\left(g*h\right)$.

δ) Ισχύει: $f*0=0*f=0$

ε) Είναι όμως: $1*f=f*1\neq f$

Π.χ. αν $f(t)=t$, τότε

$$(1*f)(t)=\int_0^t 1\cdot(t-u)du=t\int_0^t du-\int_0^t udu=t\left[u\right]_0^t-\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t=t\cdot t-\frac{t^2}{2}=\frac{t^2}{2}\neq t=f(t).$$

Σημείωση:

Το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει και για n το πλήθος συναρτήσεις, δηλ.

$$L\{f_1*f_2*\cdots*f_n\}=L\{f_1\}\cdot L\{f_2\}\cdot\ldots\cdot L\{f_n\}.$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η $h(t)$ αν είναι $L\{h(t)\}=H(s)=\dfrac{1}{s^2(s-a)}$,

α) με τη μέθοδο της συνέλιξης και **β)** με τον κλασσικό τρόπο.

Λύση

α) Αν θέσουμε $H(s)=F(s)\cdot G(s)$ όπου $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$, $G(s)=\dfrac{1}{s-a}$, τότε ως γνωστό

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t \text{ και } L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3) της συνέλιξης έχουμε

$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}\overset{(3)}{=}L^{-1}\{F(s)\}*L^{-1}\{G(s)\}=t*e^{at}$. Είναι

$$t*e^{at}=\int_0^t u\cdot e^{a(t-u)}du=\int_0^t u\cdot e^{at}\cdot e^{-au}du=-\frac{1}{a}e^{at}\int_0^t u\cdot e^{-au}d(-au)=$$

$$=-\frac{1}{a}e^{at}\int_0^t u\cdot d(e^{-au})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}-\frac{1}{a}e^{at}\left[\left[u\cdot e^{-au}\right]_0^t-\int_0^t e^{-au}du\right]=$$

$$=-\frac{1}{a}e^{at}\left(t\cdot e^{-at}-0\right)+\frac{1}{a}e^{at}\int_0^t e^{-au}du=-\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}e^{at}\int_0^t e^{-au}d(-au)=$$

$$=-\frac{1}{a}e^{at}\left(t\cdot e^{-at}-0\right)+\frac{1}{a}e^{at}\int_0^t e^{-au}du=-\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}e^{at}\int_0^t e^{-au}d(-au)=$$

$$=-\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}e^{at}\left[e^{-au}\right]_0^t=-\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}e^{at}\left(e^{-at}-1\right)=-\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}e^{at}.$$

β) Αναλύουμε το κλάσμα $\dfrac{1}{s^2(s-a)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Είναι

$$\frac{1}{s^2(s-a)}=\frac{\mathrm{A}}{s}+\frac{\mathrm{B}}{s^2}+\frac{\Gamma}{s-a}=\frac{\mathrm{A}s(s-a)+\mathrm{B}(s-a)+\Gamma s^2}{s^2(s-a)}=\frac{(\mathrm{A}+\Gamma)s^2+(\mathrm{B}-\mathrm{A}a)s-\mathrm{B}a}{s^2(s-a)}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων, έχουμε

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\Gamma=0\\ \mathrm{B}-\mathrm{A}a=0\\ -\mathrm{B}a=1\end{cases} \text{ το οποίο δίνει } \mathrm{A}=-\frac{1}{a^2},\ \mathrm{B}=-\frac{1}{a},\ \Gamma=\frac{1}{a^2}.$$ Επομένως

$$L\{h(t)\}=H(s)=\frac{1}{s^2(s-a)}=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s-a}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας, έχουμε

$$L^{-1}\{L\{h(t)\}\}=h(t)=L^{-1}\left\{-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s-a}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{a}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{a^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=-\frac{1}{a^2}\cdot 1-\frac{1}{a}t+\frac{1}{a^2}e^{at}.$$

2) Να βρεθεί η $h(t)$ αν είναι $L\{h(t)\}=H(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2s^2}$,

α) με τη μέθοδο της συνέλιξης και **β)** με τον κλασσικό τρόπο.

Λύση

α) Αν θέσουμε $H(s)=F(s)\cdot G(s)$ όπου $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$, $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$, τότε ως γνωστό

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=t\,e^{-t} \text{ και } L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (3) της συνέλιξης έχουμε

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}\overset{(3)}{=}L^{-1}\{F(s)\}*L^{-1}\{G(s)\}=t\,e^{-t}*t.$$ Είναι

$$t\,e^{-t}*t=\int_0^t ue^{-u}\cdot(t-u)du=\int_0^t ue^{-u}\cdot t\,du-\int_0^t u^2e^{-u}du=$$

$$=t\underbrace{\int_0^t ue^{-u}du}_{\mathrm{K}}-\underbrace{\int_0^t u^2e^{-u}du}_{\Lambda}=t\mathrm{K}-\Lambda.$$ Υπολογίζουμε τα Κ και Λ.

$$\mathrm{K}=\int_0^t ue^{-u}du=-\int_0^t u\cdot d(e^{-u})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}-\left[\left[ue^{-u}\right]_0^t-\int_0^t e^{-u}du\right]=-\left(te^{-t}\right)+\int_0^t e^{-u}du=$$

$$= -te^{-t} - \int_0^t e^{-u} d(-u) = -te^{-t} - \left[e^{-u}\right]_0^t = -te^{-t} - \left(e^{-t} - 1\right) = -te^{-t} - e^{-t} + 1.$$

$$\Lambda = \int_0^t u^2 e^{-u} du = -\int_0^t u^2 e^{-u} d(-u) = -\int_0^t u^2 d(e^{-u}) \overset{\kappa.\pi.o.}{=} -\left[\left[u^2 e^{-u}\right]_0^t - \int_0^t e^{-u} d(u^2)\right] =$$

$$= -\left(t^2 e^{-t}\right) + \int_0^t 2u \cdot e^{-u} du = -t^2 e^{-t} + 2\underbrace{\int_0^t u e^{-u} du}_{\mathrm{K}} = -t^2 e^{-t} + 2\mathrm{K} =$$

$= -t^2 e^{-t} - 2t\, e^{-t} - 2e^{-t} + 2$. Επομένως

$t\mathrm{K} - \Lambda = t\left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) - \left(-t^2 e^{-t} - 2t\, e^{-t} - 2e^{-t} + 2\right) = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$. Άρα

$$h(t) = t\, e^{-t} * t = te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2.$$

β) Αναλύουμε το κλάσμα $\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Είναι

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{\mathrm{A}}{s} + \frac{\mathrm{B}}{s^2} + \frac{\Gamma}{s+1} + \frac{\Delta}{(s+1)^2} = \frac{\mathrm{A}s(s+1)^2 + \mathrm{B}(s+1)^2 + \Gamma s^2(s+1) + \Delta s^2}{s^2(s+1)^2} =$$

$$= \frac{(\mathrm{A}+\Gamma)s^3 + (2\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta)s^2 + (\mathrm{A}+2\mathrm{B})s + \mathrm{B}}{s^2(s+1)^2}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων, έχουμε

$$\begin{cases} \mathrm{A}+\Gamma = 0 \\ 2\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta = 0 \\ \mathrm{A}+2\mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{B} = 1 \end{cases}$$ το οποίο δίνει $\mathrm{A} = -2,\ \mathrm{B} = 1,\ \Gamma = 2,\ \Delta = 1$. Άρα

$$L\{h(t)\} = H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} = -2\cdot\frac{1}{s} + 1\cdot\frac{1}{s^2} + 2\cdot\frac{1}{s+1} + 1\cdot\frac{1}{(s+1)^2}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας, έχουμε

$$L^{-1}\{L\{h(t)\}\} = h(t) = L^{-1}\left\{-2\cdot\frac{1}{s} + 1\cdot\frac{1}{s^2} + 2\cdot\frac{1}{s+1} + 1\cdot\frac{1}{(s+1)^2}\right\} =$$

$= -2L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\} = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t}$. Άρα

$$h(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t}.$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η $h(t)$ αν είναι $L\{h(t)\} = H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+9)}$,

α) με τη μέθοδο της συνέλιξης και **β)** με τον κλασσικό τρόπο.

(*Απάντηση*: $h(t)=\frac{1}{9}\left[1-\sigma\upsilon\nu(3t)\right]$).

2) Να βρεθεί η $h(t)$ αν είναι $L\left\{h(t)\right\}=H(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$,

α) με τη μέθοδο της συνέλιξης και **β)** με τον κλασσικό τρόπο.

(*Υπόδειξη*: $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{s}{s^2+a^2}\cdot\dfrac{1}{a}\dfrac{a}{s^2+a^2}$). (*Απάντηση*: $h(t)=\dfrac{t\eta\mu(at)}{2a}$).

3) Να βρεθεί η $h(t)$ αν είναι $L\left\{h(t)\right\}=H(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$,

α) με τη μέθοδο της συνέλιξης και **β)** με τον κλασσικό τρόπο.

(*Υπόδειξη*: $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{s-a}{s^2+a^2}\cdot\dfrac{s+a}{s^2+a^2}$). (*Απάντηση*: $h(t)=t\sigma\upsilon\nu(at)$).

4) Να βρεθεί η $h(t)$ αν είναι $L\left\{h(t)\right\}=H(s)=\dfrac{2}{(s-3)^3}$,

α) με τη μέθοδο της συνέλιξης και **β)** με τον κλασσικό τρόπο.

(*Υπόδειξη*: $\dfrac{2}{(s-3)^3}=2\dfrac{1}{s-3}\cdot\dfrac{1}{(s-3)^2}$). (*Απάντηση*: $h(t)=t^2\cdot e^{3t}$).

8.11 Εφαρμογές του ML στα ηλεκτρικά κυκλώματα

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές, όπως στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, όπου εκεί έχει πρωτεύοντα ρόλο. Μια άλλη μεγάλη εφαρμογή του ML είναι στα ηλεκτρικά κυκλώματα, με τα οποία ασχοληθήκαμε και στο 1ο Κεφάλαιο στις Διαφορικές εξισώσεις (παράγρ. 1.10.6).

Αναφέρουμε τις γνωστές τις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες διέπουν την ένταση του ρεύματος *I*, καθώς και το φορτίο αυτού *Q* (βλ. παρ. 1.10.6). Είναι:

α) Για *RL* κύκλωμα εν σειρά (αντίστασης και πηνίου):

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t) \qquad (1)$$

β) Για *RC* κύκλωμα εν σειρά (αντίστασης και πυκνωτή):

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t) \qquad (2)$$

γ) <u>Για *RCL* κύκλωμα</u> εν σειρά (αντίστασης, πυκνωτή, πηνίου):

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t) \text{ ή} \tag{3}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E'(t)\,. \tag{4}$$

Επειδή οι διαφορικές εξισώσεις του ρεύματος και του φορτίου είναι γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία του ML για την επίλυσή τους. Θα ακολουθήσουν μερικές εφαρμογές (οι ίδιες που χρησιμοποιήθηκαν και στις διαφορικές εξισώσεις της παραγράφου 1.10.6) για να υπάρχει άμεση σύγκριση των δύο τρόπων επίλυσής τους.

Εφαρμογή 1

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα *RL* σε σειρά έχει ΗΕΔ (σε *Volt*) $E(t)=3\eta\mu 2t\,Volt$, μια αντίσταση $R=10\,Ohm$, ένα πηνίο $L=0,5\,Henry$ και αρχικό ρεύμα $I=6\,Ampere$. Να βρεθεί η εξίσωση του ρεύματος στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή *t*.

Λύση

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα του προβλήματος στη σχέση (1) και έχουμε

$$0,5\frac{dI}{dt}+10I=3\eta\mu 2t \quad \text{ή} \quad \frac{dI}{dt}+20I=6\eta\mu 2t \quad \text{ή} \quad I'+20I=6\eta\mu 2t\,.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή *L* ή ML στα μέλη της τελευταίας ΔΕ έχουμε

$$L\{I'+20I\}=L\{6\eta\mu 2t\} \text{ ή } L\{I'\}+20L\{I\}=6L\{\eta\mu 2t\} \text{ ή}$$

$$sL\{I\}-I(0)+20L\{I\}=6\cdot\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{12}{s^2+4}\,.$$

Όμως, επειδή το αρχικό ρεύμα είναι 6 *Ampere*, θα είναι $I(0)=6$. Έτσι,

$(s+20)L\{I\}=6+\dfrac{12}{s^2+4}$ και λύνοντας ως προς $L\{I\}$ έχουμε:

$$L\{I\}=\frac{6}{(s+20)}+\frac{12}{(s+20)(s^2+4)}=\frac{6(s^2+4)+12}{(s+20)(s^2+4)}=\frac{6s^2+36}{(s+20)(s^2+4)}\,.$$

Αναλύουμε τώρα το κλάσμα $\dfrac{6s^2+36}{(s+20)(s^2+4)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

$$\frac{6s^2+36}{(s+20)(s^2+4)}=\frac{\mathrm{A}}{(s+20)}+\frac{\mathrm{B}s+\Gamma}{(s^2+4)}=\frac{\mathrm{A}(s^2+4)+(\mathrm{B}s+\Gamma)(s+20)}{(s+20)(s^2+4)}=$$

$$=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s^2+(20\mathrm{B}+\Gamma)s+4\mathrm{A}+20\Gamma}{(s+20)(s^2+4)}.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων των αριθμητών του πρώτου και τελευταίου κλάσματος, οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=6\\ 20\mathrm{B}+\Gamma=0\\ 4\mathrm{A}+20\Gamma=36\end{cases}\quad \text{που έχει λύση } \mathrm{A}=\frac{609}{101},\ \mathrm{B}=-\frac{3}{101},\ \Gamma=\frac{60}{101}.\ \text{Άρα}$$

$$\frac{6s^2+36}{(s+20)(s^2+4)}=\frac{609}{101}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{3}{101}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{60}{101}\cdot\frac{1}{s^2+4}=$$

$$=\frac{609}{101}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{3}{101}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{60}{101}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}.\ \text{Δηλαδή}$$

$$L\{I\}=\frac{609}{101}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{3}{101}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{60}{101}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}.$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας έχουμε

$$L^{-1}\{L\{I\}\}=L^{-1}\left\{\frac{609}{101}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{3}{101}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{60}{101}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right\}=$$

$$=\frac{609}{101}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+20}\right\}-\frac{3}{101}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{30}{101}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}.$$

Άρα εξίσωση του ρεύματος στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t είναι:

$$I=\frac{609}{101}e^{-20t}-\frac{3}{101}\sigma\upsilon\nu(2t)+\frac{30}{101}\eta\mu(2t),$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα της εφαρμογής 1 της παραγράφου 1.10.6.

Εφαρμογή 2

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα *RC* εν σειρά υπάρχει μία αντίσταση $R=100\,Ohm$, ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C=10^{-2}\,Farad$ και εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη

$E(t)=400\sigma\upsilon\nu 2t$ σε *Volt*. Αρχικά δεν υπάρχει φορτίο στον πυκνωτή. Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε στιγμή *t*.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε πρώτα τον τύπο (2): $R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{1}{C}Q=E(t)$ για να βρούμε τη συνάρτηση του φορτίου *Q*, και κατόπιν, επειδή $\dfrac{dQ}{dt}=I$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του φορτίου που θα βρούμε, βρίσκουμε το ρεύμα *I*. Είναι:

$$100\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{1/100}Q=400\sigma\upsilon\nu 2t \text{ ή } \frac{dQ}{dt}+Q=4\sigma\upsilon\nu 2t \text{ ή } Q'+Q=4\sigma\upsilon\nu 2t.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή *L* στα μέλη της τελευταίας ΔΕ έχουμε:

$$L\{Q'+Q\}=L\{4\sigma\upsilon\nu 2t\} \text{ ή } L\{Q'\}+L\{Q\}=4L\{\sigma\upsilon\nu 2t\} \text{ ή}$$

$$sL\{Q\}-Q(0)+L\{Q\}=4\frac{s}{s^2+4}.$$

Επειδή αρχικά δεν υπάρχει φορτίο στον πυκνωτή, θα είναι $Q(0)=0$. Άρα

$$(s+1)L\{Q\}=\frac{4s}{s^2+4} \text{ ή } L\{Q\}=\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)}. \text{ Είναι}$$

$$\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{\mathrm{A}}{(s+1)}+\frac{\mathrm{B}s+\Gamma}{(s^2+4)}=\frac{\mathrm{A}(s^2+4)+(\mathrm{B}s+\Gamma)(s+1)}{(s+1)(s^2+4)}=$$

$$=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})s^2+(\mathrm{B}+\Gamma)s+4\mathrm{A}+\Gamma}{(s+1)(s^2+4)}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=0\\ \mathrm{B}+\Gamma=4\\ 4\mathrm{A}+\Gamma=0\end{cases} \text{ το οποίο δίνει } \mathrm{A}=-\frac{4}{5},\ \mathrm{B}=\frac{4}{5},\ \Gamma=\frac{16}{5}. \text{ Άρα}$$

$$L\{Q\}=\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)}=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{s^2+4}.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας έχουμε

$$L^{-1}\{L\{Q(t)\}\}=Q(t)=L^{-1}\left\{-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right\} \text{ ή}$$

$$Q(t)=-\frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{8}{5}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \text{ ή τελικά}$$

$$Q(t) = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{4}{5}\sigma\upsilon\nu(2t) + \frac{8}{5}\eta\mu(2t) .$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση φορτίου βρίσκουμε το ρεύμα $I = I(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε στιγμή *t*.

$$Q'(t) = I(t) = \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{8}{5}\eta\mu(2t) + \frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu(2t) ,$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα της εφαρμογής 2 της παραγράφου 1.10.6.

Εφαρμογή 3

Ηλεκτρικό κύκλωμα *RCL* εν σειρά έχει μία αντίσταση $R = 180\, Ohm$, ένα πυκνωτή $C = 1/280\, Farad$, ένα πηνίο $L = 20\, Henry$ και εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη $E(t) = 10\eta\mu t$ σε *Volt*. Αν θεωρήσουμε ότι ο πυκνωτής δεν είναι αρχικά φορτισμένος και ότι το κύκλωμα διαρρέεται από ένα αρχικό ρεύμα $I_0 = 1\, Ampere$, τη στιγμή που εφαρμόζεται η τάση $(t = 0)$, να βρεθεί το φορτίο του πυκνωτή.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ΔΕ (3): $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$.

Αντικαθιστούμε τις ποσότητες που δίνονται και έχουμε:

$$20\ddot{Q} + 180\dot{Q} + 280Q = 10\eta\mu t \text{ ή } \ddot{Q} + 9\dot{Q} + 14Q = (1/2)\eta\mu\, t .$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή *L* στα μέλη της τελευταίας ΔΕ έχουμε:

$$L\left\{\ddot{Q} + 9\dot{Q} + 14Q\right\} = L\left\{(1/2)\eta\mu\, t\right\} \text{ ή}$$

$$L\left\{\ddot{Q}\right\} + 9L\left\{\dot{Q}\right\} + 14L\left\{Q\right\} = L\left\{(1/2)\eta\mu\, t\right\}$$

$$\left(s^2L\left\{Q\right\} - s\cdot Q(0) - Q'(0)\right) + 9\left(sL\left\{Q\right\} - Q(0)\right) + 14L\left\{Q\right\} = 1/2\, L\left\{\eta\mu\, t\right\} . \qquad \text{(i)}$$

Επειδή ο πυκνωτής δεν είναι αρχικά φορτισμένος, είναι $Q(0) = 0$. Ακόμα, επειδή το κύκλωμα διαρρέεται από ένα αρχικό ρεύμα $I_0 = 1\, Ampere$ είναι

$$I_0 = \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0} = Q'(0) = 1 .$$

Επομένως, λόγω των αρχικών συνθηκών, η τελευταία εξίσωση (i) γίνεται

$$(s^2 + 9s + 14)L\left\{Q\right\} = 1 + \frac{1}{2(s^2+1)} \text{ ή λύνοντας ως προς } L\left\{Q\right\}$$

$$L\{Q\}=\frac{1}{s^2+9s+14}+\frac{1}{2(s^2+9s+14)(s^2+1)}=\frac{s^2+3/2}{(s+2)(s+7)(s^2+1)}.$$ Είναι

$$L\{Q\}=\frac{s^2+3/2}{(s+2)(s+7)(s^2+1)}=\frac{\mathrm{A}}{(s+2)}+\frac{\mathrm{B}}{(s+7)}+\frac{\Gamma s+\Delta}{(s^2+1)}=$$

$$=\frac{\mathrm{A}(s+7)(s^2+1)+\mathrm{B}(s+2)(s^2+1)+(\Gamma s+\Delta)(s+2)(s+7)}{(s+2)(s+7)(s^2+1)}=$$

$$=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma)s^3+(7\mathrm{A}+2\mathrm{B}+9\Gamma+\Delta)s^2+(\mathrm{A}+\mathrm{B}+14\Gamma+9\Delta)s+7\mathrm{A}+2\mathrm{B}+14\Delta}{(s+2)(s+7)(s^2+1)}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=0\\ 7\mathrm{A}+2\mathrm{B}+9\Gamma+\Delta=1\\ \mathrm{A}+\mathrm{B}+14\Gamma+9\Delta=0\\ 7\mathrm{A}+2\mathrm{B}+14\Delta=3/2\end{cases}\text{ που δίνει } \mathrm{A}=\frac{10}{50},\ \mathrm{B}=-\frac{101}{500},\ \Gamma=-\frac{9}{500},\ \Delta=\frac{13}{500}.$$

Άρα, $L\{Q\}=\frac{10}{50}\cdot\frac{1}{s+2}-\frac{101}{500}\cdot\frac{1}{s+7}-\frac{9}{500}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{13}{500}\cdot\frac{1}{s^2+1}$.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον τελεστή L^{-1} στα μέλη της τελευταίας έχουμε

$$L^{-1}\{L\{Q\}\}=Q=L^{-1}\left\{\frac{10}{50}\cdot\frac{1}{s+2}-\frac{101}{500}\cdot\frac{1}{s+7}-\frac{9}{500}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{13}{500}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\},$$

$$Q(t)=\frac{10}{50}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{101}{500}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+7}\right\}-\frac{9}{500}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{13}{500}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\},$$

$$Q(t)=\frac{10}{50}e^{-2t}-\frac{101}{500}e^{-7t}-\frac{9}{500}\sigma\upsilon\nu\, t+\frac{13}{500}\eta\mu\, t,$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα της εφαρμογής 3 της παραγράφου 1.10.6.

Ασκήσεις

1) Σε ένα κύκλωμα *RCL* εν σειρά έχουμε:

$R=10\,Ohm$, $C=10^{-2}\ Farrad$, $L=1/2\ Henry$ και $E(t)=12\,Volt$.

Αν το αρχικό ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν, να υπολογιστεί το φορτίο και το ρεύμα τη χρονική στιγμή *t*.

(*Απάντηση*: $Q=\frac{3}{25}-\frac{3}{25}e^{-10t}\left(\sigma\upsilon\nu 10t+\eta\mu 10t\right)$, $I=\frac{12}{5}e^{-10t}\eta\mu(10t)$).

2) Σε ένα κύκλωμα *RCL* εν σειρά έχουμε:

$R=6\,Ohm$, $C=0{,}02\ Farrad$, $L=1/10\ Henry$ και $E(t)=0\,Volt$.

Αν αρχικά το ρεύμα είναι μηδέν και ο πυκνωτής έχει φορτίο $1/10\ C$ να βρεθεί το ρεύμα τη χρονική στιγμή *t*. (*Απάντηση*: $I = \frac{5}{4}\left(e^{-50t} - e^{-10t}\right)$).

3) Σε ένα κύκλωμα *RCL* εν σειρά έχουμε:

$R = 16\,Ohm$, $C = 0,02\ Farrad$, $L = 2\ Henry$ και $E(t) = 300\,Volt$.

Αρχικά το φορτίο του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος είναι μηδέν. Να βρεθεί το φορτίο και το ρεύμα τη χρονική στιγμή *t*.

(*Απάντηση*: $Q = 6 - e^{-4t}\left(6\sigma\upsilon\nu 3t + 8\eta\mu 3t\right)$, $I = 50e^{-4t}\eta\mu 3t$).

4) Σε ένα κύκλωμα *RCL* εν σειρά έχουμε:

$R = 16\,Ohm$, $C = 0,02\ Farrad$, $L = 2\ Henry$ και $E(t) = 100\eta\mu 3t\ Volt$.

Αρχικά ($t = 0$) το φορτίο του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος είναι μηδέν. Να βρεθεί το φορτίο και το ρεύμα τη χρονική στιγμή *t*.

(*Απάντηση*: $Q = \frac{25}{26}\eta\mu(3t)\left(1 + e^{-4t}\right) + \frac{75}{26}\sigma\upsilon\nu(3t)\left(-1 + e^{-4t}\right)$,

$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}\left(2\sigma\upsilon\nu 3t + 3\eta\mu 3t\right) - \frac{25}{52}e^{-4t}\left(6\sigma\upsilon\nu 3t + 17\eta\mu 3t\right)$).

8.12 Μετασχηματισμός Laplace περιοδικών συναρτήσεων

Οι περιοδικές συναρτήσεις [1] εμφανίζονται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές και στις περισσότερες αυτών είναι πολύ πιο σύνθετες από αυτές του ημιτόνου και συνημιτόνου. Στη παρούσα παράγραφο θα αναφερθούμε σε μια συστηματική προσέγγιση του Μετασχηματισμού Laplace περιοδικών συναρτήσεων.

Θεώρημα Μετασχηματισμού Laplace περιοδικής συνάρτησης

Έστω $f(t)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $p > 0$, η οποία ορίζεται στο διάστημα $[0, \infty)$. Αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης σ' ένα διάστημα μήκους *p*, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace αυτής και είναι

[1] Ο ορισμός περιοδικής συνάρτησης έχει δοθεί στην παράγραφο 7.1

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt \tag{1}$$

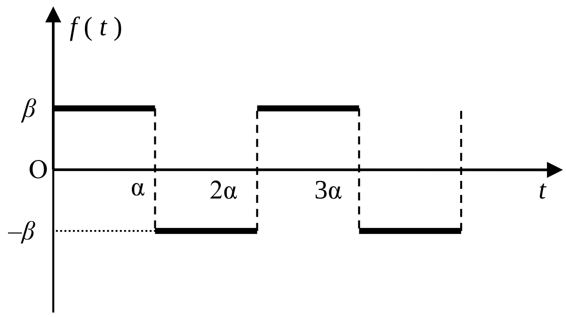
Παραδείγματα

1) Να βρεθεί ο ML της συνάρτησης $f(t)$ που ορίζεται απ' τη σχέση:

$$f(t)=\begin{cases}\beta, & 0\le t<\alpha\\ -\beta, & \alpha\le t<2\alpha\end{cases},\quad f(t+2\alpha)=f(t),\quad \forall\, t\ge 0,\quad (\alpha,\beta>0)\,.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***περιοδικό τετραγωνικό κύμα (periodic square wave)*** και το γράφημά της δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Λύση



Η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2a$. Έτσι, ο τύπος (1) δίνει

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2as}}\left(\int_0^a e^{-st}\beta\,dt+\int_\alpha^{2a}e^{-st}(-\beta)\,dt\right).$$ Είναι:

$$\int_0^a e^{-st}\beta\,dt+\int_\alpha^{2a}e^{-st}(-\beta)\,dt=-\frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}\beta\,d(-st)+\frac{1}{s}\int_\alpha^{2a}e^{-st}\beta\,d(-st)=$$

$$=-\frac{\beta}{s}\Big[e^{-st}\Big]_0^a+\frac{\beta}{s}\Big[e^{-st}\Big]_a^{2a}=-\frac{\beta}{s}\left(e^{-sa}-1\right)+\frac{\beta}{s}\left(e^{-2sa}-e^{-sa}\right)=$$

$$=\frac{\beta}{s}\left(e^{-2sa}-2e^{-sa}+1\right)=\frac{\beta}{s}\left(e^{-sa}-1\right)^2.$$ Επομένως

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2as}}\cdot\frac{\beta}{s}(e^{-sa}-1)^2=\frac{\beta}{s}\cdot\frac{(1-e^{-sa})^2}{(1-e^{-as})(1+e^{-as})}=\frac{\beta}{s}\cdot\frac{(1-e^{-sa})}{(1+e^{-as})}=$$

$$=\frac{\beta}{s}\cdot\frac{e^{sa/2}}{e^{sa/2}}\cdot\frac{(1-e^{-sa})}{(1+e^{-as})}=\frac{\beta}{s}\cdot\frac{e^{sa/2}-e^{-sa/2}}{e^{sa/2}-e^{-sa/2}}=\frac{\beta}{s}\cdot\tanh\left(\frac{sa}{2}\right).$$

(Βλ. στο τέλος βιβλίου Τυπολόγιο, Α. Τριγωνομετρία, υπερβολικές συναρτήσεις).

2) Να βρεθεί ο ML της συνάρτησης $f(t)$ που ορίζεται απ' τη σχέση:

$$f(t)=\frac{\beta}{\alpha}t,\quad 0\le t<\alpha,\quad f(t+\alpha)=f(t),\quad \forall\, t\ge 0,\quad (\alpha,\beta>0)\,.$$

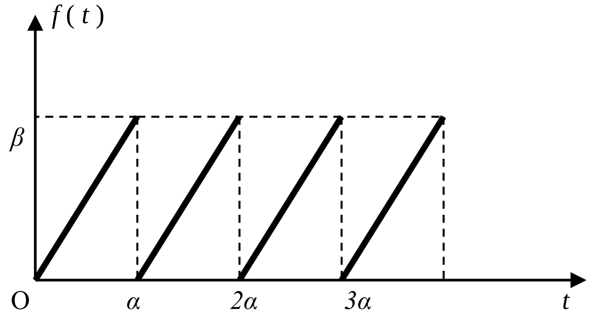
Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***περιοδικό πριονωτό κύμα (periodic saw–tooth wave)*** και το γράφημά της δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Λύση

Η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο *α*. Ο τύπος (1) γίνεται:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-as}}\int_0^a e^{-st}\frac{\beta}{\alpha}t\,dt \text{. Είναι}$$

$$\int_0^a e^{-st}\frac{\beta}{\alpha}t\,dt = -\frac{\beta}{\alpha s}\int_0^a t\,d(e^{-st}) \overset{\kappa.\pi.o.}{=} -\frac{\beta}{\alpha s}\left[\left[te^{-st}\right]_0^a - \int_0^a e^{-st}dt\right] =$$



$$= -\frac{\beta}{\alpha s}\left[\left[te^{-st}\right]_0^a - \int_0^a e^{-st}dt\right] = -\frac{\beta}{\alpha s}\left(ae^{-sa} - 0\right) + \frac{\beta}{\alpha s}\int_0^a e^{-st}dt =$$

$$= -\frac{\beta}{s}e^{-sa} - \frac{\beta}{\alpha s^2}\int_0^a e^{-st}d(-st) = -\frac{\beta}{s}e^{-sa} - \frac{\beta}{\alpha s^2}\left[e^{-st}\right]_0^a =$$

$$= -\frac{\beta}{s}e^{-sa} - \frac{\beta}{\alpha s^2}\left(e^{-sa} - 1\right) = -\frac{\beta}{s}e^{-sa} + \frac{\beta}{\alpha s^2}\left(1 - e^{-sa}\right)\text{. Επομένως}$$

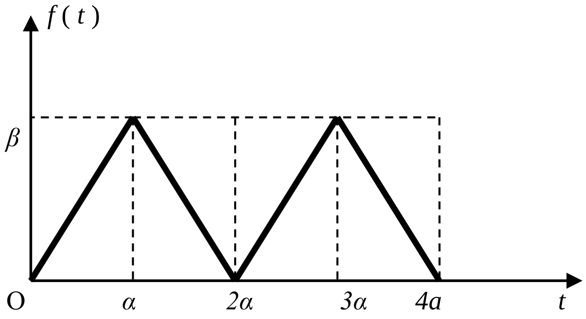
$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-as}}\left[-\frac{\beta}{s}e^{-sa} + \frac{\beta}{\alpha s^2}\left(1-e^{-sa}\right)\right] = \frac{\beta}{\alpha s^2} - \frac{\beta}{s}\cdot\frac{1}{e^{as}-1}.$$

3) Να βρεθεί ο ML της συνάρτησης $f(t)$ που ορίζεται απ’ τη σχέση:

$$f(t) = \begin{cases} t & ,\ 0 \le t < a \\ 2a - t\ , & a \le t < 2a \end{cases}\ ,\quad f(t+2a) = f(t),\ \forall\, t \ge 0,\ (a > 0)\textbf{.}$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***περιοδικό τριγωνικό κύμα (periodic triangular wave)*** και το γράφημά της δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Λύση



Η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο 2α. Ο τύπος (1) γίνεται:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt \text{ . Είναι}$$

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt = \underbrace{\int_0^a e^{-st} t\,dt}_{\mathrm{K}} + \underbrace{\int_a^{2a} e^{-st}(2a-t)\,dt}_{\Lambda} \text{ . Υπολογίζουμε τα Κ και Λ.}$$

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{s}\int_0^a e^{-st} t\,d(-st) = -\frac{1}{s}\int_0^a t\,d(e^{-st}) \overset{\kappa.\pi.o.}{=} -\frac{1}{s}\left[\left[t\cdot e^{-st}\right]_0^a - \int_0^a e^{-st}dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{s}a\cdot e^{-sa} + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}dt = -\frac{a\cdot e^{-sa}}{s} - \frac{1}{s^2}\int_0^a e^{-st}d(-st) = -\frac{a\cdot e^{-st}}{s} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^a =$$

$$= -\frac{a\cdot e^{-sa}}{s} - \frac{1}{s^2}\left(e^{-sa}-1\right) = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-sa}-as\cdot e^{-sa}\right).$$

$$\Lambda = -\frac{1}{s}\int_a^{2a} e^{-st}(2a-t)\,d(-st) = -\frac{1}{s}\int_a^{2a}(2a-t)\,d(e^{-st}) \overset{\kappa.\pi.o.}{=}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\left[(2a-t)e^{-st}\right]_a^{2a} - \int_a^{2a} e^{-st}d(2a-t)\right] = -\frac{1}{s}\left(0-ae^{-sa}\right) + \frac{1}{s}\int_a^{2a} e^{-st}d(2a-t) =$$

$$= \frac{ae^{-sa}}{s} + \frac{1}{s^2}\int_a^{2a} e^{-st}d(-st) = \frac{a\cdot e^{-sa}}{s} + \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_a^{2a} = \frac{a\cdot e^{-sa}}{s} + \frac{1}{s^2}\left(e^{-2sa}-e^{-sa}\right) =$$

$$= \frac{a\cdot e^{-sa}}{s} + \frac{1}{s^2}\left(e^{-2sa}-e^{-sa}\right) = \frac{1}{s^2}\left(e^{-2sa}-e^{-sa}+a\cdot se^{-sa}\right). \text{ Επομένως:}$$

$$\mathrm{K}+\Lambda = \frac{1}{s^2}\left((1-e^{-sa}-as\cdot e^{-sa}) + (e^{-2sa}-e^{-sa}+a\cdot se^{-sa})\right) = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-sa}\right)^2.$$

Έτσι, ο τύπος (1) δίνει τελικά

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2as}}\cdot\frac{1}{s^2}(1-e^{-sa})^2 = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{(1-e^{-sa})^2}{(1-e^{-as})(1+e^{-as})} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} =$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\frac{e^{as/2}}{e^{as/2}}\cdot\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{e^{as/2}-e^{-as/2}}{e^{as/2}-e^{-as/2}} = \frac{1}{s^2}\cdot\tanh\left(\frac{as}{2}\right).$$

4) Να βρεθεί ο ML της συνάρτησης $f(t)$ που ορίζεται απ' τη σχέση:

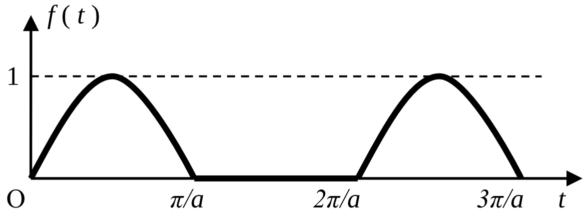
$$f(t)=\begin{cases}\eta\mu(at), & 0\le t<\pi/a\\ 0 \quad , & \pi/a\le t<2\pi/a\end{cases},\quad f\left(t+2\pi/a\right)=f(t),\quad \forall\, t\ge 0,\quad (a>0).$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***περιοδικός ανορθωτής μισού κύματος (periodic half – wave rectifier)*** και το γράφημά της δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Λύση

Η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/a$. Ο τύπος (1) γίνεται:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/a}}\int_0^{\frac{2\pi}{a}} e^{-st}f(t)\,dt.$$ Είναι



$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-st}\eta\mu(at)\,dt+\int_{\frac{\pi}{a}}^{\frac{2\pi}{a}} e^{-st}\cdot 0\cdot dt=\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-st}\eta\mu(at)\,dt.$$

Όμως (βλ. παρ. 8.3, 6η εφαρ.) $\int e^{at}\eta\mu(\beta t)dt=\dfrac{e^{at}\left[\alpha\cdot\eta\mu(\beta t)-\beta\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta t)\right]}{\alpha^2+\beta^2}+c$. Άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-st}\eta\mu(at)\,dt=\left[\frac{e^{-st}\left[-s\cdot\eta\mu(at)-a\cdot\sigma\upsilon\nu(at)\right]}{(-s)^2+a^2}\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=$$

$$=\frac{e^{-\pi s/a}\left[-s\cdot\eta\mu(\pi)-a\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi)\right]}{s^2+a^2}-\frac{e^0\left(-s\cdot\eta\mu(0)-a\cdot\sigma\upsilon\nu(0)\right)}{s^2+a^2}=$$

$$=\frac{e^{-\pi s/a}\left[-s\cdot 0-a\cdot(-1)\right]}{s^2+a^2}-\frac{1\cdot\left(-s\cdot 0-a\cdot 1\right)}{s^2+a^2}=\frac{a}{s^2+a^2}\left(1+e^{-\pi s/a}\right).$$

Έτσι, ο τύπος (1) δίνει τελικά

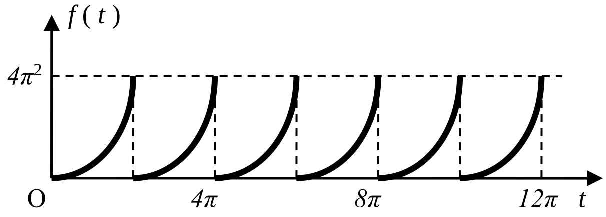
$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/a}}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}(1+e^{-\pi s/a})=\frac{a}{(s^2+a^2)(1-e^{-\pi s/a})}.$$

5) Να βρεθεί ο ML της συνάρτησης $f(t)$ που ορίζεται απ' τη σχέση:

$$f(t)=t^2\,,\quad 0\le t<2\pi,\quad f(t+2\pi)=f(t)\,,\quad \forall\, t\ge 0\,.$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και το γράφημά της δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έχουμε:



$L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)dt=\dfrac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi}e^{-st}t^2dt$. Είναι

$$\int_0^{2\pi}e^{-st}t^2dt=-\frac{1}{s}\int_0^{2\pi}e^{-st}t^2d(-st)=-\frac{1}{s}\int_0^{2\pi}t^2d(e^{-st})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}$$

$$=-\frac{1}{s}\left[\left[t^2e^{-st}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}e^{-st}d(t^2)\right]=-\frac{1}{s}\left(4\pi^2e^{-2s\pi}-0\right)+\frac{2}{s}\int_0^{2\pi}e^{-st}tdt=$$

$$=-\frac{1}{s}\cdot 4\pi^2e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^2}\int_0^{2\pi}e^{-st}td(-st)=-\frac{1}{s}\cdot 4\pi^2e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^2}\int_0^{2\pi}td(e^{-st})\overset{\kappa.\pi.o.}{=}$$

$$=-\frac{1}{s}\cdot 4\pi^2e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^2}\left[\left[te^{-st}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}e^{-st}dt\right]=-\frac{1}{s}\cdot 4\pi^2e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^2}2\pi e^{-2s\pi}-$$

$$-\frac{2}{s^3}\int_0^{2\pi}e^{-st}d(-st)=-\frac{1}{s}\cdot 4\pi^2e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^2}2\pi e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^3}\left[e^{-st}\right]_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{1}{s}\cdot 4\pi^2e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^2}2\pi e^{-2s\pi}-\frac{2}{s^3}\left(e^{-2s\pi}-1\right)=-\frac{e^{-2s\pi}}{s}\left(4\pi^2+\frac{4\pi}{s}+\frac{2}{s^2}\right)+\frac{2}{s^3}\,.$$

Έτσι, ο τύπος (1) δίνει τελικά

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[-\frac{e^{-2s\pi}}{s}\left(4\pi^2+\frac{4\pi}{s}+\frac{2}{s^2}\right)+\frac{2}{s^3}\right].$$

Ασκήσεις

Να βρεθεί ο ML της συνάρτησης $f(t)$ που ορίζεται απ' τη σχέση:

α) $f(t)=e^t\;,\quad 0\le t<2\pi\;,\quad f(t+2\pi)=f(t)\;,\quad \forall t\ge 0\,.$

(*Απάντηση*: $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{s-1} \cdot \dfrac{1-e^{-2\pi(s-1)}}{1-e^{-2\pi s}}$).

β) $f(t) = \begin{cases} -2\ , & 0 \le t < \pi \\ 3\ , & \pi \le t < 2\pi \end{cases}, \quad f(t+2\pi) = f(t), \quad \forall t \ge 0$.

(*Απάντηση*: $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{-2+5e^{-s\pi} - 3e^{-2s\pi}}{1-e^{-2s\pi}}$).

γ) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ t-\pi, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}, \ f(t+2\pi) = f(t), \ \forall t \ge 0$.

(*Απάντηση*: $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-2s\pi}} \cdot \left(\dfrac{1}{s^2} e^{-s\pi} - \dfrac{1}{s} \pi e^{-2s\pi} - \dfrac{1}{s^2} e^{-2s\pi} \right)$).

δ) $f(t) = t - \pi\ , \quad 0 \le t < 2\pi\ , \quad f(t+2\pi) = f(t)\ , \quad \forall t \ge 0$.

(*Απάντηση*: $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{\pi}{s} \cdot \coth(\pi s)$).

8.13 Πίνακας μερικών Μετασχηματισμών Laplace

α/α	$f(t)$	$L\{f(t)\}=F(s)$	α/α	$f(t)$	$L\{f(t)\}=F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$	17	$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	18	$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ n\in N$	19	$e^{at}\eta\mu(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$
4	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\ \left\| \begin{array}{l} n\in R, \\ n>-1 \end{array}\right.$	20	$e^{at}\sigma\upsilon\nu(\beta t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2}$
5	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	21	$1-\sigma\upsilon\nu(\beta t)$	$\frac{\beta^2}{s(s^2+\beta^2)}$
6	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s^{3/2}}$	22	$1-\eta\mu(\beta t)$	$\frac{s^2+\beta^2-\beta s}{s(s^2+\beta^2)}$
7	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	23	$at\,\eta\mu(\beta t)$	$\frac{2a\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$
8	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	24	$at\,\sigma\upsilon\nu(\beta t)$	$\frac{a(s^2-\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^2}$
9	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n\in N$	25	$at\sinh(\beta t)$	$\frac{2a\beta s}{(s^2-\beta^2)^2}$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}},\ \left\| \begin{array}{l} n\in R, \\ n>-1 \end{array}\right.$	26	$at\cosh(\beta t)$	$\frac{a(s^2+\beta^2)}{(s^2-\beta^2)^2}$
11	$\frac{e^{at}-e^{\beta t}}{a-\beta},\ a\neq\beta$	$\frac{1}{(s-a)(s-\beta)}$	27	$\frac{\sigma\upsilon\nu(at)-\sigma\upsilon\nu(\beta t)}{\beta^2-a^2}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+\beta^2)}$
12	$\frac{ae^{at}-\beta e^{\beta t}}{a-\beta}$	$\frac{s}{(s-a)(s-\beta)}$	28	$\sinh(at)\cdot\eta\mu(at)$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$
13	$\eta\mu(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	29	$\sinh(at)-\eta\mu(at)$	$\frac{2a^3}{s^4-a^4}$
14	$\sigma\upsilon\nu(\beta t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	30	$\cosh(at)-\sigma\upsilon\nu(at)$	$\frac{2a^2 s}{s^4-a^4}$
15	$\frac{\eta\mu(\beta t)}{t}$	$\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{s}\right)$	31	$\frac{2[1-\sigma\upsilon\nu(\beta t)]}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2+\beta^2}{s^2}\right)$
16	$\beta t-\eta\mu(\beta t)$	$\frac{\beta^3}{s^2(s^2+\beta^2)}$	32	$\frac{2[1-\cosh(\beta t)]}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2-\beta^2}{s^2}\right)$