Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **7**

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

7.1. Εισαγωγή

Ως γνωστό, περιοδική είναι μια συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f(x+\tau)=f(x)$ όπου τ είναι θετικός σταθερός, για κάθε x που ορίζεται η $f(x)$. Ο μικρότερος $\mathrm{T} > 0$ από όλους τους τ λέγεται περίοδος της $f(x)$ – ακριβέστερα **ελάχιστη ή πρωταρχική** περίοδος της $f(x)$. Προφανώς, κάθε πολλαπλάσιο του Τ αποτελεί επίσης περίοδο της $f(x)$ δηλαδή $\nu\cdot \mathrm{T}=\tau$ για κάθε φυσικό αριθμό.

Παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων είναι όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu\, x, \sigma\upsilon\nu\, x, \varepsilon\phi\, x, \sigma\phi\, x$. Έτσι,

$f(x)=\eta\mu x$ με $T=2\pi$ γιατί $\eta\mu(x+2\pi)=\eta\mu x \quad \forall x\in R$. Επίσης

$f(x)=\eta\mu\,\dfrac{\alpha\, x}{\beta}$ με $T=\dfrac{2\beta\pi}{\alpha}$ $\left(\alpha,\beta\in R-\{0\}\right)$ γιατί

$$\eta\mu\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(x+\frac{2\beta\pi}{\alpha}\right)\right)=\eta\mu\left(\frac{\alpha x}{\beta}+2\pi\right)=\eta\mu\frac{\alpha x}{\beta} \quad \forall x\in R\text{. Ακόμα}$$

$f(x)=\varepsilon\varphi x$ με $T=\pi$ γιατί $\varepsilon\varphi(x+\pi)=\varepsilon\varphi\, x \quad \forall x\in R-\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$, k ακέραιος.

Περιοδικές συναρτήσεις εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα τεχνολογικών εφαρμογών. Η δυνατότητα της παράστασης αυτών με όρους απλών περιοδικών συναρτήσεων, όπως ημίτονου και συνημίτονου δίνει τις λεγόμενες **τριγωνομετρικές σειρές ή σειρές Fourier.**[1] Οι σειρές αυτές αποτελούν ένα δυνατό μέσο σε πολλές εφαρμογές των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Η θεωρία των σειρών Fourier δεν είναι εύκολη, αλλά οι εφαρμογές τους είναι απλές. Οι σειρές Fourier είναι κατά κάποιο τρόπο πιο γενικευμένες απ’ ότι οι σειρές Taylor, κι’ αυτό γιατί οι συναρτήσεις που μπορούν να παρασταθούν με σειρές Taylor

[1] από το όνομα του Γάλλου φυσικού Joseph Fourier (1768-1830)

(ή Mac-Laurin) πρέπει να είναι συνεχείς και να έχουν παραγώγους όλων των τάξεων στο διάστημα σύγκλισης της σειράς δυνάμεων. Ενώ αντίθετα, συναρτήσεις που δεν είναι ούτε παραγωγίσιμες, ούτε συνεχείς σε ορισμένα σημεία ενός διαστήματος μπορούν να παρασταθούν με τριγωνομετρικές σειρές της μορφής:

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \sigma\upsilon\nu\, x + \beta_1 \eta\mu\, x + \alpha_2 \sigma\upsilon\nu 2x + \beta_2 \eta\mu 2x + \cdots = \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\alpha_\nu \sigma\upsilon\nu(\nu\, x) + \beta_\nu \eta\mu(\nu\, x) \right) \end{aligned} \tag{1}$$

όπου ν φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu$ σταθερές.

7.2 Σειρές Fourier

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα $(-L, L)$ όπου $L > 0$, ενώ έξω απ' το διάστημα αυτό η $f(x)$ ορίζεται με το τύπο $f(x+2L) = f(x)$, δηλαδή η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$.

Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε – αν γίνεται – τους συντελεστές $\alpha_0,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu$ για κάθε φυσικό ν έτσι ώστε

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\alpha_\nu \sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L} + \beta_\nu \eta\mu \frac{\nu\pi\, x}{L} \right) \tag{2}$$

Η σειρά (2) λέγεται **τριγωνομετρική σειρά** και το ανάπτυγμα της $f(x)$ σε τέτοια σειρά λέγεται **ανάπτυγμα της** $f(x)$ **κατά Fourier** ή **σειρά Fourier** της $f(x)$.

Παρατηρήσεις

1. Οι συναρτήσεις $\sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L},\ \eta\mu \frac{\nu\pi\, x}{L}$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2L$ γιατί $\sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi(x+2L)}{L} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi\, x}{L} + 2\nu\pi \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L} \quad (\nu \in N)$.

2. Για $L = \pi$ η σχέση (2) παίρνει τη μορφή (1).

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια τα παρακάτω δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 7.2.1

Ισχύουν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί τύποι ολοκληρωμάτων:

α) $\int_{-L}^{L} \eta\mu \frac{k\pi\, x}{L} dx = 0$, k ακέραιος

β) $\int_{-L}^{L} \sigma\upsilon\nu \frac{k\pi\, x}{L} dx = 0$, k ακέραιος

γ) $\int_{-L}^{L} \sigma\upsilon\nu \frac{\mu\pi\, x}{L} \sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \eta\mu \frac{\mu\pi\, x}{L} \eta\mu \frac{\nu\pi\, x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \ \ \mu \neq \nu \\ L & \alpha\nu \ \ \mu = \nu \neq 0 \end{cases}$

ενώ για $\mu = \nu = 0 \begin{cases} \int_{-L}^{L} \sigma\upsilon\nu \frac{\mu\pi\, x}{L} \sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L} dx = 2L \\ \int_{-L}^{L} \eta\mu \frac{\mu\pi\, x}{L} \eta\mu \frac{\nu\pi\, x}{L} dx = 0 \end{cases}$ όπου $\mu,\ \nu \in N$

δ) $\int_{-L}^{L} \eta\mu \frac{\mu\pi\, x}{L} \sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L} dx = 0$, όπου $\mu,\ \nu \in N$

Απόδειξη

α) Είναι

$$\int_{-L}^{L} \eta\mu \frac{k\pi\, x}{L} dx = \frac{L}{k\pi} \int_{-L}^{L} \eta\mu \frac{k\pi\, x}{L} d\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right) = -\frac{L}{k\pi}\left[\sigma\upsilon\nu \frac{k\pi\, x}{L}\right]_{-L}^{L} =$$
$$= -\frac{L}{k\pi}\sigma\upsilon\nu(k\pi) + \frac{L}{k\pi}\sigma\upsilon\nu(-k\pi) = 0 \quad (k \in Z)$$

β) Παρόμοια έχουμε

$$\int_{-L}^{L} \sigma\upsilon\nu \frac{k\pi\, x}{L} dx = \frac{L}{k\pi} \int_{-L}^{L} \sigma\upsilon\nu \frac{k\pi\, x}{L} d\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right) = \frac{L}{k\pi}\left[\eta\mu \frac{k\pi\, x}{L}\right]_{-L}^{L} =$$
$$= \frac{L}{k\pi}\eta\mu(k\pi) - \frac{L}{k\pi}\eta\mu(-k\pi) = 0 \quad (k \in Z)$$

γ) Όπως ξέρουμε απ' τη Τριγωνομετρία

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta &= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\right] \\ \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta &= \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\right] \end{aligned}.$$

Έτσι, αν $\mu \neq \nu$ για το ολοκλήρωμα των συνημιτόνων έχουμε:

$$\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\pi x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu-\nu)\pi x}{L}+\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu+\nu)\pi x}{L}\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu-\nu)\pi x}{L}dx+\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu+\nu)\pi x}{L}dx=0 \text{ (λόγω της β)}$$

Παρόμοια για $\mu\neq\nu$ το ολοκλήρωμα των ημιτόνων γίνεται:

$$\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\mu\pi x}{L}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu-\nu)\pi x}{L}-\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu+\nu)\pi x}{L}\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu-\nu)\pi x}{L}dx-\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{(\mu+\nu)\pi x}{L}dx=0 \text{ (λόγω της β)}$$

Αν τώρα $\mu=\nu$ το ολοκλήρωμα των συνημιτόνων γίνεται:

$$\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx=\frac{L}{\nu\pi}\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu^{2}\frac{\nu\pi x}{L}d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)=$$ (αναγωγικοί τύποι ημίτονου, συνημίτονου της παραγρ. 8.6 στο παράρτημα ολοκληρωμάτων) =

$$=\frac{L}{\nu\pi}\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\right)\Big/2+\frac{1}{2}\frac{\nu\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}=$$
$$=\frac{L}{\nu\pi}\left[\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\nu\pi\cdot\eta\mu\nu\pi}{2}+\frac{\nu\pi}{2}\right)-\left(\frac{\sigma\upsilon\nu(-\nu\pi)\cdot\eta\mu(-\nu\pi)}{2}-\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]=\frac{L}{\nu\pi}\nu\pi=L.$$

Επίσης για $\mu=\nu$ το ολοκλήρωμα των ημιτόνων γίνεται:

$$\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx=\frac{L}{\nu\pi}\int_{-L}^{L}\eta\mu^{2}\frac{\nu\pi x}{L}d\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)=$$

$$=\frac{L}{\nu\pi}\left[-\left(\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}\right)\Big/2+\frac{1}{2}\frac{\nu\pi x}{L}\right]_{-L}^{L}=$$
$$=\frac{L}{\nu\pi}\left[\left(-\frac{\eta\mu\nu\pi\cdot\eta\mu\nu\pi}{2}+\frac{\nu\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\eta\mu(-\nu\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu(-\nu\pi)}{2}-\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]=\frac{L}{\nu\pi}\nu\pi=L.$$

Τέλος, για $\mu=\nu=0$ έχουμε:

$$\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{0\cdot\pi x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{0\cdot\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}1\cdot 1dx=\big(L-(-L)\big)=2L$$, ενώ

$$\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{0\cdot\pi x}{L}\eta\mu\frac{0\cdot\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}0\cdot 0dx=0.$$

δ) Απ’ τη Τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι:

$$\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{1}{2}\left[\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)\right]$$

Έτσι, αν $\mu\neq\nu$ έχουμε:

$$\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\mu\pi\,x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\,x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\eta\mu\frac{(\mu-\nu)\pi\,x}{L}+\eta\mu\frac{(\mu+\nu)\pi\,x}{L}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{(\mu-\nu)\pi\,x}{L}dx+\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{(\mu+\nu)\pi\,x}{L}dx=0\ \text{(λόγω της α)}$$

Αν τώρα $\mu=\nu$ έχουμε

$$\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\nu\pi\,x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\,x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{2\nu\pi\,x}{L}dx=0\quad\text{(λόγω της α)}\ .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις (γ) και (δ) ισχύουν ακόμα και όταν τα όρια ολοκλήρωσης $-L, L$ γίνουν $c,\ c+2L$ αντίστοιχα, όπου c τυχαία σταθερή.

Θεώρημα 7.2.2

Για τη σειρά Fourier $f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\alpha_\nu\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\,x}{L}+\beta_\nu\eta\mu\frac{\nu\pi\,x}{L}\right)$ αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές α_0, α_ν, β_ν δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}\alpha_0&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx,\\ \alpha_\nu&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\,x}{L}dx\\ \beta_\nu&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi\,x}{L}dx\end{aligned}\qquad(3)$$

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε τον πρώτο τύπο της (3), ολοκληρώνουμε τη σειρά Fourier από $-L$ ως L και απ' τις σχέσεις (α) και (β) που αποδείξαμε πριν, παίρνουμε:

$$\int_{-L}^{L}f(x)dx=\int_{-L}^{L}\frac{\alpha_0}{2}dx+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\alpha_\nu\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\,x}{L}dx+\beta_\nu\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\nu\pi\,x}{L}dx\right]=\frac{\alpha_0}{2}\left[x\right]_{-L}^{L}=\alpha_0L\ .$$

Άρα $\alpha_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$.

Για να δείξουμε το δεύτερο τύπο της (3), πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σειράς με $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\mu\pi\, x}{L}$ (μ σταθερός φυσικός) και ολοκληρώνουμε από –L μέχρι L.

$$\begin{aligned}&\int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx + \\ &+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\alpha_\nu\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\pi\, x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\, x}{L}dx + \beta_\nu\int_{-L}^{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\pi\, x}{L}\eta\mu\frac{\nu\pi\, x}{L}dx\right]\end{aligned} \qquad (4)$$

Όμως στο δεύτερο όρο του β΄ μέλους της τελευταίας σχέσης έχουμε άθροισμα όρων, όπου το ν διατρέχει όλες τις τιμές (ακέραιες) από το 1 μέχρι το ∞, ενώ το μ είναι κάποιος σταθερός φυσικός, οπότε κάποτε το ν γίνεται ίσο με το μ. Έτσι, απ’ τους τύπους (δ) και (γ) που αποδείξαμε, προκύπτει ότι για $\nu \neq \mu$ όλα τα αθροίσματα της αγκύλης γίνονται μηδέν, ενώ για $\nu = \mu$ ο πρώτος όρος της αγκύλης (4) γίνεται $\alpha_\mu L$ (λόγω του τύπου (γ)), ενώ ο δεύτερος γίνεται $\beta_\mu \cdot 0$ (λόγω του τύπου (δ)).

Έτσι η σχέση (4) γράφεται $\int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\dfrac{\mu\pi\, x}{L}dx = \dfrac{\alpha_0}{2}\cdot 0 + \alpha_\mu L$ ή τελικά

$$\alpha_\mu = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Τέλος, για να αποδείξουμε το τρίτο τύπο της (3), εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σειράς με $\eta\mu\dfrac{\mu\pi\, x}{L}$ και ολοκληρώνοντας από –L μέχρι L. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}&\int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx + \\ &+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\alpha_\nu\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\mu\pi\, x}{L}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi\, x}{L}dx + \beta_\nu\int_{-L}^{L}\eta\mu\frac{\mu\pi\, x}{L}\eta\mu\frac{\nu\pi\, x}{L}dx\right]\end{aligned} \qquad (5)$$

Κάνοντας παρόμοιες σκέψεις όπως παραπάνω, η (5) γράφεται:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx = \frac{\alpha_0}{2}\cdot 0 + \beta_\mu L \text{ ή τελικά}$$

$$\beta_\mu = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\mu\pi\, x}{L}dx, \text{ όπου } \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Αποδεικνύεται ότι αν η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $2L$, τότε το διάστημα ολοκλήρωσης $(-L,\ L)$ στους συντελεστές $\alpha_0,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu$ μπορεί να αντικατασταθεί με το $(c,\ c+2L)$, c = σταθερό. Οι συντελεστές $\alpha_\mu,\ \beta_\mu$ λέγονται **συντελεστές Fourier** της $f(x)$ και υπολογίστηκαν με την προϋπόθεση ότι οι σειρές (4) και (5) συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $f(x)$ στο διάστημα $(-L,\ L)$. Για το αν η σειρά (2) συγκλίνει ή όχι στην $f(x)$ το εξετάζουμε παρακάτω.

7.3 Συνθήκες σύγκλισης του Dirichlet

Στη προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε τους συντελεστές $\alpha_0,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $f(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\alpha_\nu \sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\nu\pi\,x}{L}+\beta_\nu \eta\mu\,\dfrac{\nu\pi\,x}{L}\right).$ (1)

Το άθροισμα όμως της σειράς Fourier δεν είναι αναγκαία ίσο με τη συνάρτηση $f(x)$ απ' την οποία δημιουργήθηκε, γι' αυτό και θέσαμε απ' την αρχή την επιφύλαξη "- αν γίνεται -". Οι συνθήκες κάτω απ' τις οποίες η σειρά Fourier της $f(x)$ συγκλίνει προς την $f(x)$ έτσι ώστε να ισχύει η (1), εξαρτώνται κατά πολύ απ' την ιδιαίτερη μορφή της συνάρτησης $f(x)$. Αναφέρουμε το θεώρημα το οποίο δίνει ικανές μόνο συνθήκες – που λέγονται συνθήκες Dirichlet – τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί η $f(x)$ έτσι ώστε να ισχύει η (1).

Θεώρημα 7.3.1 (Συνθήκες σύγκλισης Dirichlet)

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ η οποία πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

α) ορίζεται μονότιμα στο διάστημα $(-L,\ L)$ εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του $(-L,\ L)$, ενώ έξω από το $(-L,\ L)$ ορίζεται έτσι ώστε να είναι περιοδική με περίοδο $2L$, δηλαδή $f(x+2L)=f(x)\ \ \forall x\in R$,

β) οι συναρτήσεις $f(x)$, $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχείς* στο $(-L,\ L)$,

---

* Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα [α,β] ή (α, β) αν το διάστημα αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένο πλήθος ανοιχτών διαστημάτων, ώστε στο καθένα απ' αυτά η συνάρτηση να είναι συνεχής και να έχει πεπερασμένα όρια από δεξιά και από αριστερά. Προφανώς μια τέτοια συνάρτηση έχει μόνο πεπερασμένο πλήθος ασυνέχειες.

τότε η σειρά $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\alpha_\nu \sigma\upsilon\nu \frac{\nu\pi\, x}{L}+\beta_\nu \eta\mu \frac{\nu\pi\, x}{L}\right)$ όπου οι συντελεστές α_0, α_ν, β_ν ορίζονται απ' τις σχέσεις (3) του θεωρήματος 7.2.2 **συγκλίνει προς:**

i) την $f(x)$ αν το σημείο *x* όπου $x \in (-L, L)$ ή $x \in (x_0 - L,\ x_0 + L)$ $x_0 \in R$ είναι σημείο συνέχειας της $f(x)$,

ii) την $1/2 \lim_{h\to 0}\{f(x+h)+f(x-h)\}$ $(h>0)$ αν το σημείο *x* είναι ένα από τα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$,

iii) την $1/2 \lim_{h\to 0}\{f(-L+h)+f(L-h)\}$ $(h>0)$ αν το σημείο *x* είναι $-L$ ή *L*.

Τονίζεται ότι οι συνθήκες (α) και (β) του Dirichlet είναι μόνο ικανές. Δηλαδή δεν ι-σχύει και το αντίστροφο.

7.4 Σειρές ημιτόνων και σειρές συνημιτόνων

Ως γνωστό, μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού *I* το οποίο είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν λέγεται

- άρτια αν $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I$
- περιττή αν $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I$

Οι συναρτήσεις π. χ. x^4, $\sigma\upsilon\nu x$, $x\eta\mu x$, $\sqrt{1-x^2}$ είναι άρτιες, ενώ οι συναρτήσεις $\eta\mu x$, $x\sigma\upsilon\nu x$, x^3, $\varepsilon\varphi x$ είναι περιττές. Όμως υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν εί-ναι ούτε άρτιες ούτε περιττές π. χ. οι $1+x^3$, $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, e^{2x} κ.τ.λ. Ως προς τις γρα-φικές τους παραστάσεις, οι μεν άρτιες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα Oy, ενώ οι περιττές είναι συμμετρικές ως προς την αρχή O.

Έστω τώρα μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$, η οποία είναι περιττή στο διάστημα $(-L,\ L)$. Τότε θα είναι

$$f(-x) = -f(x) \text{ και} \tag{1}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \tag{2}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $x=-t$ στο πρώτο ολοκλήρωμα του β΄ μέλους της (2) οπότε για $x=-t=-L \Rightarrow t=L$, ενώ για $x=-t=0 \Rightarrow t=0$. Δηλαδή τα νέα όρια ολοκλήρωσης με τη νέα μεταβλητή γίνονται από L μέχρι 0. Έτσι η (2) γίνεται

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{L}^{0} f(-t)d(-t) + \int_{0}^{L} f(x)dx \text{ ή λόγω της (1)}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{L}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx = -\int_{0}^{L} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0 \qquad (3)$$

εφόσον $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \cdots = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$, όπου $t, \ldots, z$ είναι συναρτήσεις του x.

Αν τώρα η $f(x)$ είναι άρτια στο ίδιο διάστημα $(-L,\ L)$ θα είναι

$$f(-x) = f(x) \qquad (4)$$

και εκτελώντας την ίδια αντικατάσταση $x=-t$ έχουμε:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{L}^{0} f(-t)d(-t) + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

ή λόγω της σχέσης (4):

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = -\int_{L}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx \qquad (5)$$

Έστω πάλι ότι η $f(x)$ είναι άρτια στο διάστημα $(-L,\ L)$. Τότε η συνάρτηση $F(x) = f(x)\eta\mu x$ είναι περιττή στο ίδιο διάστημα διότι

$$F(-x) = f(-x)\eta\mu(-x) = f(x)\cdot(-\eta\mu x) = -f(x)\eta\mu x = -F(x)$$

Επομένως, για τη περιττή συνάρτηση $F(x)$ λόγω της (3) θα έχουμε

$$\int_{-L}^{L} F(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu x dx = 0 \qquad (6)$$

Έτσι, για την άρτια συνάρτηση $f(x)$ οι συντελεστές β_ν της σειράς Fourier είναι όλοι μηδέν στο διάστημα $(-L,\ L)$.

Όμως, για την άρτια συνάρτηση $f(x)$, η συνάρτηση $G(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x$ είναι επίσης άρτια γιατί

$$G(-x) = f(-x)\sigma\upsilon\nu(-x) = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = G(x)$$

Επομένως, για την άρτια συνάρτηση $G(x)$ λόγω της (5) θα έχουμε

$$\int_{-L}^{L} G(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx \qquad (7)$$

Έτσι, για την άρτια συνάρτηση $f(x)$ οι συντελεστές α_0, α_ν της σειράς Fourier στο διάστημα $(-L, L)$ γίνονται:

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \text{ και} \qquad (8)$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx \qquad (9)$$

Επομένως όταν η $f(x)$ είναι **άρτια** συνάρτηση, τότε η σειρά Fourier για την $f(x)$ είναι σειρά **συνημιτόνων**, δηλαδή

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx \qquad (10)$$

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι, αν η $f(x)$ είναι περιττή στο $(-L, L)$ τότε και η $f(x)$συνx είναι επίσης περιττή στο $(-L, L)$ οπότε απ' το τύπο (3) έχουμε

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0 \text{, και } \alpha_\nu = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx = 0 \text{, ενώ}$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx \qquad (11)$$

επομένως, όταν η $f(x)$ είναι **περιττή** συνάρτηση, τότε η σειρά Fourier για την $f(x)$ είναι σειρά **ημιτόνων** δηλαδή

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx \qquad (12)$$

Για $L = \pi$, οι τύποι (8), (9) και (11) γίνονται:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad \alpha_\nu = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx, \quad \beta_\nu = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\eta\mu(\nu x)dx\,.$$

7.5 Παραδείγματα και εφαρμογές ανάλυσης συναρτήσεων κατά Fourier

Στα επόμενα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η ανάλυση διαφόρων συναρτήσεων κατά Fourier, αλλά και οι εφαρμογές που προκύπτουν από τις εκάστοτε αναλύσεις των συναρτήσεων αυτών. Οι εφαρμογές αυτές αναφέρονται σε τιμές σειρών ως εκφράσεις του αριθμού *π*, όπως προκύπτει ως συμπέρασμα της ανάλυσης.

Παραδείγματα

1) Να γίνει ανάλυση κατά Fourier της συνάρτησης

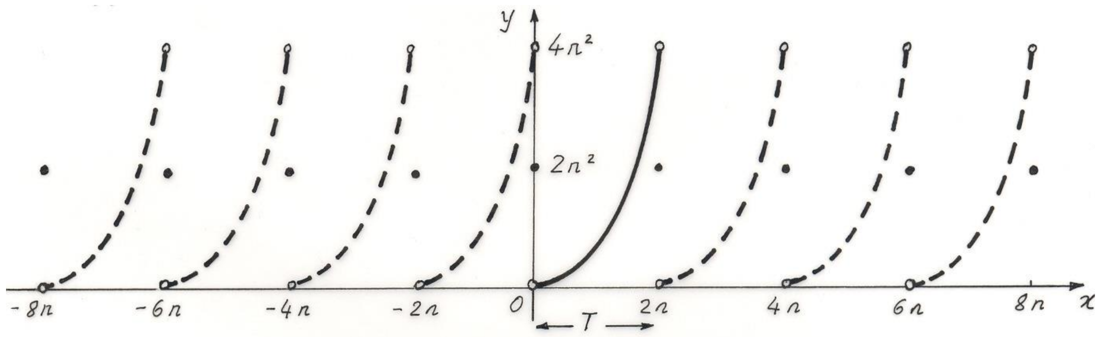
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{για} \quad 0 < x < 2\pi \\ 2\pi^2 & \text{για} \;\; x = 0 \text{ ή } x = 2\pi \end{cases}, \text{ ενώ } f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in R - [0, 2\pi]$$

και στη συνέχεια να δειχτεί ότι: $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^2}$.

Λύση

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η δοθείσα συνάρτηση πληροί όλες τις συνθήκες του Dirichlet επομένως αναλύεται κατά Fourier στο διάστημα (0, 2π).

Η περίοδος είναι $2L = 2\pi$ δηλαδή $L = \pi$. (σχήμα 66)



Σχ. 66

Οι συντελεστές α_0, α_ν, β_ν είναι:

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sigma\upsilon\nu(\nu x)dx \qquad (1)$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} f(x)\eta\mu \frac{\nu\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\eta\mu(\nu x)dx \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα (1).

Είναι

$$I = \int x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = \int x^2 d\left(\frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu}\right) = x^2\cdot\frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu} - \int \frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu}d(x^2) =$$

$$= \frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} - \frac{2}{\nu}\int x\eta\mu(\nu x)dx = \frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\int xd\left(\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu}\right) =$$

$$= \frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\left[x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} - \int\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu}dx\right] =$$

$$= \frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\left(\frac{x\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}\int\sigma\upsilon\nu(\nu x)d(\nu x)\right) =$$

$$= \frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2x\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^2} - \frac{2\eta\mu(\nu x)}{\nu^3}.$$ Επομένως

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2x\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^2} - \frac{2\eta\mu(\nu x)}{\nu^3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{4\pi^2\eta\mu(\nu\cdot 2\pi)}{\nu} + \frac{2\cdot 2\pi\sigma\upsilon\nu(\nu\cdot 2\pi)}{\nu^2} - \frac{2\eta\mu(\nu\cdot 2\pi)}{\nu^3}\right) - 0\right] = \frac{4}{\nu^2}$$

Υπολογίζουμε τώρα το αόριστο ολοκλήρωμα (2).

Είναι

$$J = \int x^2\eta\mu(\nu x)dx = \int x^2 d\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu}\right) = -x^2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} - \int -\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu}d(x^2) =$$

$$= -\frac{x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\int x\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = -\frac{x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\int xd\left(\frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu}\right) =$$

$$= -\frac{x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\left[x\cdot\frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu} - \int\frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu}dx\right] =$$

$$= -\frac{x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} + \frac{2}{\nu}\left(\frac{x\eta\mu(\nu x)}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}\int\eta\mu(\nu x)d(\nu x)\right) =$$

$$= -\frac{x^2 \eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2x\eta\mu(\nu x)}{\nu^2} + \frac{2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^3}. \quad \text{Επομένως}$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \eta\mu(\nu x)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} + \frac{2x\eta\mu(\nu x)}{\nu^2} + \frac{2\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{4\pi^2 \cdot 1}{\nu} + \frac{2\cdot 2\pi \cdot 0}{\nu^2} + \frac{2\cdot 1}{\nu^3}\right) - \left(-0 + 0 + \frac{2\cdot 1}{\nu^3}\right)\right] = -\frac{4\pi}{\nu}$$

Άρα $\quad f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\nu^2}\sigma\upsilon\nu(\nu x) - \frac{4\pi}{\nu}\eta\mu(\nu x)\right) \qquad (3)$

Η σχέση (3) ισχύει για κάθε $x \in (0, 2\pi)$.

Απ’ τις συνθήκες του Dirichlet η σειρά συγκλίνει για $x = 0$ ή $x = 2\pi$ στο

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{f\left(0+h\right) + f\left(2\pi - h\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(0 + 4\pi^2\right) = 2\pi^2.$$

Στο σημείο $x = 0$ το δεύτερο μέλος της (3) γίνεται

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\nu^2}\sigma\upsilon\nu(\nu\cdot 0) - \frac{4\pi}{\nu}\eta\mu(\nu\cdot 0)\right) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4}{\nu^2}.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4}{\nu^2} = 2\pi^2 \ \text{ άρα } \ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2) Να γίνει ανάλυση κατά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 \text{ για } -\pi \le x \le \pi \text{, με } f(x+2\pi) = f(x) \ \ \forall x \in R - [-\pi,\ \pi]$$

και να γίνει η γραφική παράσταση της σειράς.

Λύση

Η παραπάνω συνάρτηση εύκολα διαπιστώνεται ότι πληροί τις συνθήκες του Dirichlet επομένως αναλύεται κατά Fourier. Επειδή το διάστημα ορισμού της $f(x)$ το $[-\pi,\ \pi]$ είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν και η $f(x) = x^2$ είναι άρτια επειδή

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

αρκεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές α_0 και α_ν $(\nu \geq 1)$ που δίνονται απ' τις σχέσεις (8) και (9) αντίστοιχα της παραγρ. 7.4, καθότι οι συντελεστές β_ν είναι όλοι μηδέν όπως προκύπτει για άρτιες συναρτήσεις. Έτσι,

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3} \text{ και}$$

$$\alpha_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = (\text{προηγούμενο παράδειγμα}) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\eta\mu(\nu x)}{\nu} + \frac{2x\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^2} - \frac{2\eta\mu(\nu x)}{\nu^3}\right]_0^\pi = \frac{4\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)}{\nu^2} = \frac{(-1)^\nu \cdot 4}{\nu^2}$$

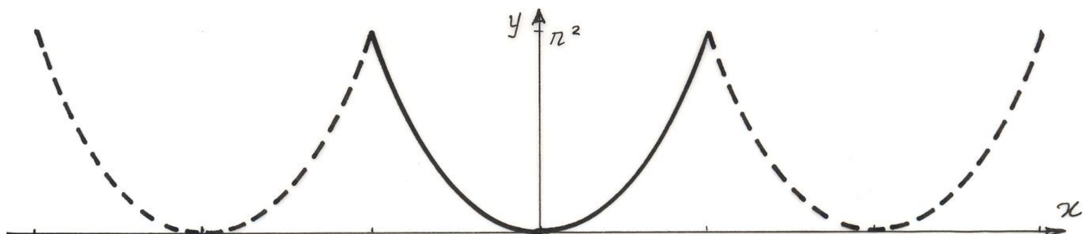
Έτσι η σειρά Fourier της δοθείσας συνάρτησης $f(x)$ είναι (σχήμα 67):

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\frac{\sigma\upsilon(\nu x)}{1^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{2^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu(3x)}{3^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu(4x)}{4^2} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^2} \quad \forall x \in (-\pi,\ \pi)$$

Για $x = \pi$ ή $x = -\pi$ η παραπάνω σειρά συγκλίνει στον αριθμό

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left\{f(-\pi+h) + f(\pi-h)\right\} = \frac{1}{2}\left(\pi^2+\pi^2\right) = \pi^2 \text{ (σχήμα 67)}$$



Σχ. 67

3) Να γίνει ανάλυση κατά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{για } -\pi < x < 0 \\ k & \text{για } 0 < x < \pi \end{cases}, \text{ ενώ } f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in R - (-\pi,\ \pi)$$

και να γίνει η γραφική παράσταση των τριών πρώτων αθροισμάτων της σειράς.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ το $(-\pi, \pi)$ είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν και η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση γιατί

αν $x \in (0, \pi)$ τότε $-x \in (-\pi, 0)$ οπότε $f(-x) = -k = -(k) = -f(x)$, ενώ

i) αν $x \in (-\pi, 0)$ τότε $-x \in (0, \pi)$ οπότε $f(-x) = k = -(-k) = -f(x)$.

Επομένως η $f(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά ημιτόνων, δηλαδή οι συντελεστές α_0 και α_ν $(\nu \geq 1)$ είναι παντού μηδέν (παράγρ. 7.4). Είναι (τύπος 11 της παρ. 7.4) για $L = \pi$.

$$\beta_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi k\eta\mu(\nu x)dx = \frac{2k}{\pi\nu}\int_0^\pi \eta\mu(\nu x)d(\nu x) = \frac{2k}{\pi\nu}\left[-\sigma\upsilon(\nu x)\right]_0^\pi =$$
$$= \frac{2k}{\pi\nu}\left[\left(-\sigma\upsilon\nu(\nu\cdot\pi)\right)-\left(-\sigma\upsilon\nu(\nu\cdot 0)\right)\right] = \frac{2k}{\pi\nu}\left[-\left(-1\right)^\nu+1\right] = \begin{cases} 4k/\pi\nu & (\nu = \text{περιττός}) \\ 0 & (\nu = \text{άρτιος}) \end{cases}$$

Έτσι, $\beta_1 = \frac{4k}{\pi}\eta\mu x, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \frac{4k}{3\pi}\eta\mu(3x), \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = \frac{4k}{5\pi}\eta\mu(5x), \quad \cdots$

Τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι:

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\eta\mu x,\ S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\eta\mu x + \frac{1}{3}\eta\mu 3x\right),\ S_3 = \frac{4k}{\pi}\left(\eta\mu x + \frac{1}{3}\eta\mu 3x + \frac{1}{5}\eta\mu 5x\right) \text{ κλπ.}$$

και η σειρά Fourier είναι:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\eta\mu x + \frac{1}{3}\eta\mu 3x + \frac{1}{5}\eta\mu 5x + \frac{1}{7}\eta\mu 7x + \cdots\right) = \frac{2k}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left(-1\right)^\nu\right)}{\nu}\eta\mu(\nu x)$$

Στο σχήμα 68 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ καθώς και των μερικών αθροισμάτων S_1, S_2, S_3 που φαίνεται ότι συγκλίνουν στην $f(x)$.

Στα σημεία $x = 0$ ή $x = \pi$ η σειρά συγκλίνει στη τιμή:

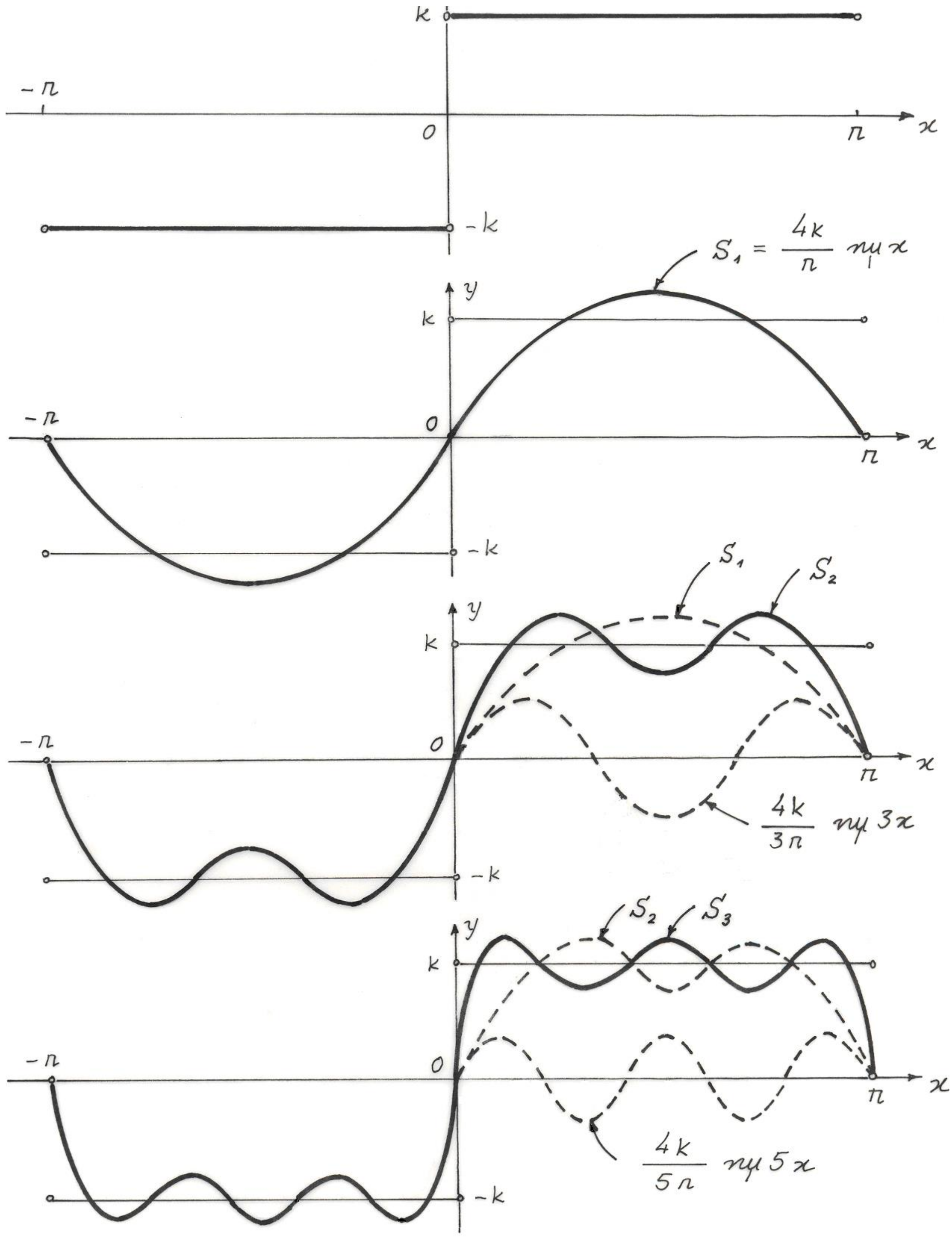
$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\{f(-\pi+h)+f(\pi-h)\} = \frac{1}{2}(-k+k) = 0.$$

Επειδή πληρούνται οι συνθήκες του Dirichlet, η σειρά συγκλίνει προς την $f(x)$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=k=\frac{4k}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ \cdots\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ \cdots$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα υπολογίστηκε για πρώτη φορά απ' τον Leibniz (Λάϊμπνιτς) το 1673 από γεωμετρικά προβλήματα. Είναι φανερό λοιπόν, όπως και στο πρώτο παράδειγμα, ότι μπορούμε να αποκτήσουμε τις τιμές διαφόρων σειρών με σταθερούς όρους, υπολογίζοντας τη σειρά Fourier σε ειδικά σημεία.



Σχ. 68

4) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{για } 0 < x < 2 \\ -x & \text{για } -2 < x < 0 \end{cases}, \text{ ενώ } f(x+4) = f(x) \quad \forall x \in R - (-2, 2).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της $f(x)$ το $(-2, 2)$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή και ακόμα είναι

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ δηλαδή η $f(x)$ είναι άρτια.

Επιπλέον δε, πληρούνται όλες οι συνθήκες του Dirichlet, συνεπώς αναπτύσσεται σε σειρά συνημιτόνων Fourier, δηλαδή θα έχει όλους τους συντελεστές β_ν μηδέν, ενώ οι συντελεστές α_0 και α_ν υπολογίζονται απ' τους τύπους (L = 2):

$$\alpha_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 |x|dx = \int_0^2 xdx = 2\,,$$

$$\alpha_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 |x|\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}dx = \int_0^2 x\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}dx =$$

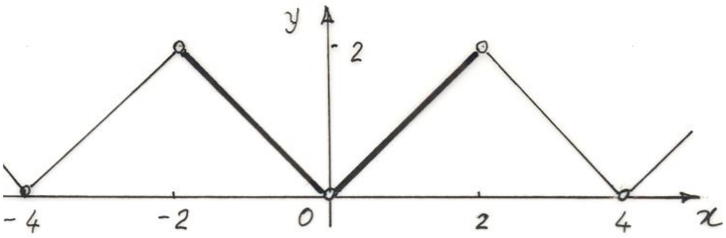
$$= \frac{2}{\nu\pi}\int_0^2 x\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}d\left(\frac{\nu\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\nu\pi}\int_0^2 xd\left(\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\nu\pi}\left(\left[x\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\nu\pi}\left(2\eta\mu(\nu\pi) - \frac{2}{\nu\pi}\int_0^2 \eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}d\left(\frac{\nu\pi x}{2}\right)\right) = \frac{2}{\nu\pi}\left(0 + \frac{2}{\nu\pi}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}\right]_0^2\right) =$$

$$= \frac{4}{\nu^2\pi^2}\left(\sigma\upsilon\nu\nu\pi - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{8}{\nu^2\pi^2} & \text{όταν } \nu = \text{περιττός} \\ 0 & \text{όταν } \nu = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Επομένως η $f(x)$ αναπτύσσεται στη σειρά Fourier:

$$f(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4}{\nu^2\pi^2}\left(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi) - 1\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2} =$$
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi x}{2}\cdots\right]$$



σχ. 69

Στη γραφική παράσταση της $f(x)$ (σχήμα 69), επειδή το x = 0 είναι σημείο συνέχειας της $f(x)$, το άθροισμα της σειράς συγκλίνει για x = 0 προς τον αριθμό $f(0) = 0$ (θεώρημα 7.3 (i)). Έτσι έχουμε:

$$0=1-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2\lambda+1)^2}\right) \text{ ή}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \text{ (θέσαμε όπου } \lambda=\nu\text{)}$$

5) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$f(x)=x$ για $0<x<2$, ενώ $f(x+2)=f(x)$ για κάθε $x\in R-(0,2)$.

Λύση

Η $f(x)$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, γιατί το πεδίο ορισμού της δεν είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. (Αν ήταν συμμετρικό, τότε η $f(x)$ θα ήταν περιττή).

Είναι $2L = 2$ δηλαδή $L = 1$. Άρα

$\alpha_0=\frac{1}{1}\int_0^2 x dx=2$. Επίσης,

$$\alpha_\nu=\frac{1}{1}\int_0^2 x\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)dx=\frac{1}{\nu\pi}\int_0^2 x\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)d(\nu\pi x)=\frac{1}{\nu\pi}\int_0^2 xd(\eta\mu\nu\pi x)=$$

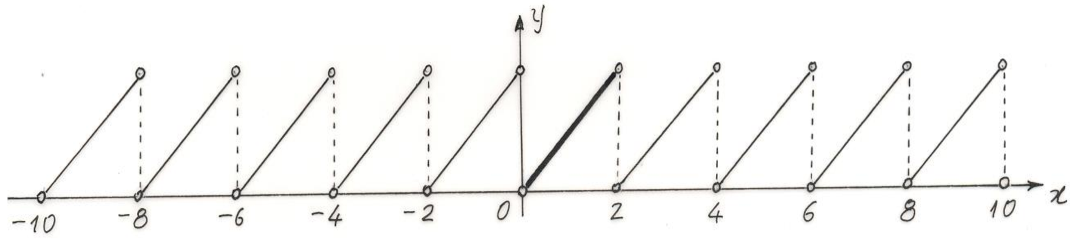
$$=-\frac{1}{\nu\pi}\left(\left[x\eta\mu(\nu\pi x)\right]_0^2-\int_0^2\eta\mu(\nu\pi x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\nu\pi}\left[x\eta\mu(\nu\pi x)+\frac{1}{\nu\pi}\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)\right]_0^2=\frac{1}{\nu\pi}\left[\left(0+\frac{1}{\nu\pi}\right)-\left(0+\frac{1}{\nu\pi}\right)\right]=0$$

$$\beta_\nu=\frac{1}{1}\int_0^2 x\eta\mu(\nu\pi x)dx=\frac{1}{\nu\pi}\int_0^2 x\eta\mu(\nu\pi x)d(\nu\pi x)=-\frac{1}{\nu\pi}\int_0^2 xd(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x))=$$

$$=-\frac{1}{\nu\pi}\left(\left[x\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)\right]_0^2-\int_0^2\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\nu\pi}\left[x\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)-\frac{1}{\nu\pi}\eta\mu(\nu\pi x)\right]_0^2=-\frac{1}{\nu\pi}\left[(2-0)-(0-0)\right]=-\frac{2}{\nu\pi}$$



σχ. 70

Έτσι, προκύπτει η παρακάτω ανάλυση κατά Fourier της $f(x)$:

$$f(x) = x = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\eta\mu(\nu\pi x) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\eta\mu\pi x + \frac{1}{2}\eta\mu 2\pi x + \frac{1}{3}\eta\mu 3\pi x + \cdots\right).$$

Αν $x \neq 0,\ \pm 2,\ \pm 4, \cdots$ τότε η παραπάνω σειρά συγκλίνει στη περιοδική επέκταση της $f(x)$ δηλαδή την $f(x+2) = f(x)$ με γραφική παράσταση το σχήμα 70.

6) Να αναπτυχθεί κατά Fourier η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad -\pi/\omega < x < 0 \\ A\eta\mu\omega x & \text{αν} \quad 0 < x < \pi/\omega \end{cases},\quad f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x) \ \text{ αν } \ x \in R - \left(-\pi/\omega,\ \pi/\omega\right)$$

όπου A και ω σταθερές. Να γίνει η γραφική παράσταση της περιοδικής της επέκτασης και να δειχτεί ότι: $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\mu-1)(2\mu+1)} = \frac{1}{2}$.

Λύση

Η παραπάνω συνάρτηση, όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, πληροί τις συνθήκες του Dirichlet επομένως αναπτύσσεται σε σειρά Fourier και είναι:

$$2L = \frac{\pi}{\omega} - \left(-\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ή} \quad L = \frac{\pi}{\omega}. \text{ Έτσι,}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{\pi/\omega}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\eta\mu(\omega x)dx =$$

$$= \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\eta\mu(\omega x)d(\omega x) = -\frac{A}{\pi}\left[\sigma\upsilon\nu(\omega x)\right]_0^{\pi/\omega} = -\frac{A}{\pi}(-1-1) = \frac{2A}{\pi}$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi/\omega}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{\pi/\omega}dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\eta\mu(\omega x)\sigma\upsilon\nu(\nu\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\eta\mu(\nu+1)\omega x - \eta\mu(\nu-1)\omega x\right]dx =$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega} \frac{\eta\mu(\nu+1)\omega x}{(\nu+1)\omega} d(\nu+1)\omega x - \int_0^{\pi/\omega} \frac{\eta\mu(\nu-1)\omega x}{(\nu-1)\omega} d(\nu-1)\omega x\right] =$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\omega x}{(\nu+1)\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\omega x}{(\nu-1)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} =$$

$$= \frac{A}{2\pi}\left[-\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\pi}{\nu+1} + \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\pi}{\nu-1} + \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu-1}\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 \ \text{αν} \ \nu = \text{περιττός} \ \text{και} \ \neq 1 \\ -\dfrac{2A}{(\nu-1)(\nu+1)\pi} \ \text{αν} \ \nu = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Για $\nu = 1$ είναι:

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\eta\mu(\omega x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)dx = \frac{A}{4\pi}\int_0^{\pi/\omega}\eta\mu(2\omega x)d(2\omega x) = 0$$

Επίσης

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi/\omega}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{\pi/\omega}dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} A\eta\mu(\omega x)\eta\mu(\nu\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\omega x - \sigma\upsilon\nu(\nu-1)\omega x\right]dx =$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega} \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\omega x}{(\nu+1)\omega} d(\nu+1)\omega x - \int_0^{\pi/\omega} \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\omega x}{(\nu-1)\omega} d(\nu-1)\omega x\right] =$$

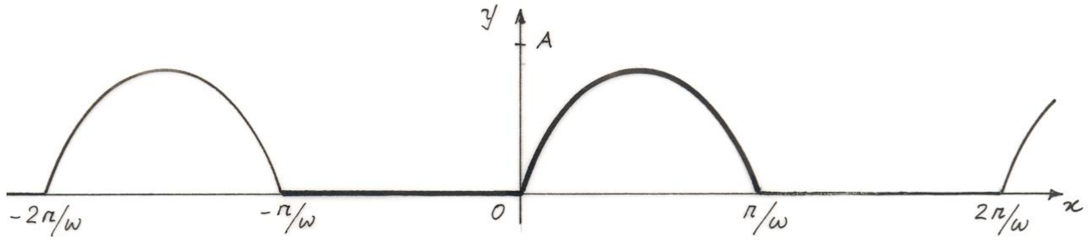
$$= \frac{A\omega}{2\pi}\left[\frac{\eta\mu(\nu+1)\omega x}{(\nu+1)\omega} - \frac{\eta\mu(\nu-1)\omega x}{(\nu-1)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = 0 \quad (\text{για } \nu \geq 2)$$

Για $\nu = 1$ είναι: $\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/\omega} A\eta\mu^2\omega x dx = \dfrac{A}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/\omega}\eta\mu^2\omega x d(\omega x) = \\ = \dfrac{A}{\pi}\left[\dfrac{\eta\mu\omega x\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x}{2} + \dfrac{1}{2}\omega x\right]_0^{\pi/\omega} = \dfrac{A}{\pi}\left(0 + \dfrac{1}{2}\pi\right) = \dfrac{A}{2} \end{cases}$

Επομένως η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην $f(x)$ είναι:

$$f(x) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\eta\mu(\omega x) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{-2A}{(2\mu-1)(2\mu+1)}\sigma\upsilon\nu(2\mu\omega x) =$$

$$= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \eta\mu(\omega x) - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3} \sigma\upsilon\nu(2\omega x) + \frac{1}{3\cdot 5} \sigma\upsilon\nu(4\omega x) + \cdots \right)$$



Σχ. 71

Η γραφική παράσταση της $f(x)$ και της περιοδικής της φαίνεται στο σχήμα 71.

Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$, θα είναι

$$f(0) = 0 = \frac{A}{\pi} - \frac{2A}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)(2\mu+1)} \text{ ή } \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)(2\mu+1)} = \frac{1}{2}.$$

Βλέπουμε λοιπόν και στο παράδειγμα αυτό, ότι με τη βοήθεια της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορούμε να πάρουμε αμέσως το άθροισμα συγκλινουσών αριθμητικών σειρών.

7.6. Ολοκλήρωση σειράς Fourier

Ας υποθέσουμε ότι η $f(x)$ ορίζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet. Τότε ως γνωστό η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στη συνάρτηση αυτή είναι

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\alpha_\nu \sigma\upsilon\nu(\nu x) + \beta_\nu \eta\mu(\nu x) \right) \qquad (1)$$

η οποία

- συγκλίνει για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ προς την $f(x)$, αν το x είναι σημείο συνέχειας της $f(x)$,
- ή συγκλίνει προς τον αριθμό $1/2 \lim_{h\to 0} \{ f(x-h) + f(x+h) \}$ αν το x είναι σημείο ασυνέχειας της $f(x)$,
- ενώ, για τα άκρα του διαστήματος δηλαδή τα σημεία $x = \pm\pi$ οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν προς τον αριθμό $1/2 \lim_{h\to 0} \{ f(-\pi + h) + f(\pi + h) \}$.

Θα δείξουμε ότι:

Αν ολοκληρώσουμε τη παραπάνω συνάρτηση $f(x)$ σε κάθε υποδιάστημα $[-\pi, x]$ του $[-\pi, \pi]$, τότε η συνάρτηση που προκύπτει δηλαδή η

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt$$

είναι τέτοια ώστε, αν ολοκληρώσουμε τη σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην $f(x)$, (δηλαδή το 2^{o} μέλος της (1)) όρο προς όρο στο διάστημα $[-\pi, x]$, η αντίστοιχη σειρά που προκύπτει θα συγκλίνει για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ στην $\int_{-\pi}^{x} f(t)dt$, δηλαδή :

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{x} \frac{\alpha_0}{2} dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{x} \alpha_\nu \sigma\upsilon\nu(\nu t)dt + \int_{-\pi}^{x} \beta_\nu \eta\mu(\nu t)dt \right) =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2}\left(x+\pi\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\alpha_\nu \int_{-\pi}^{x} \frac{1}{\nu} \sigma\upsilon\nu(\nu t)d(\nu t) + \beta_\nu \int_{-\pi}^{x} \frac{1}{\nu} \eta\mu(\nu t)d(\nu t) \right) =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2}\left(x+\pi\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_\nu}{\nu} \left[\eta\mu(\nu t)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\beta_\nu}{\nu} \left[-\sigma\upsilon\nu(\nu t)\right]_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2}\left(x+\pi\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_\nu}{\nu} \left(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi) - \sigma\upsilon\nu(\nu x)\right) + \frac{\alpha_\nu}{\nu} \eta\mu(\nu x) \right) \qquad (2)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt - \frac{\alpha_0}{2} x \qquad (3)$$

που ορίζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, εφόσον η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Είναι:

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{\alpha_0}{2}\pi = \alpha_0\pi - \frac{\alpha_0}{2}\pi = \frac{\alpha_0\pi}{2}$$

$$F(-\pi) = \int_{-\pi}^{-\pi} f(t)dt - \frac{\alpha_0}{2}(-\pi) = 0 + \frac{\alpha_0}{2}\pi = \frac{\alpha_0\pi}{2} \quad \text{δηλαδή}$$

$$F(\pi) = F(-\pi) = \frac{\alpha_0\pi}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $F(x)$ συγκλίνει προς την $F(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(A_\nu \sigma\upsilon\nu(\nu x) + B_\nu \eta\mu(\nu x)\right) \qquad (4)$$

για $x \in [-\pi, \pi]$.

Έτσι λοιπόν θα πρέπει να υπολογίσουμε τα A_0, A_ν, B_ν. Είναι

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx\,,\quad A_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx\,,\quad B_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\eta\mu(\nu x)dx$$

Εφαρμόζοντας τη κατά παράγοντες ολοκλήρωση, (παράγρ. 8.3.3) υπολογίζουμε τους συντελεστές A_ν. Έτσι βρίσκουμε:

$$A_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu} d(\nu x) = \frac{1}{\nu\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)d(\eta\mu(\nu x)) =$$

$$= \frac{1}{\nu\pi}\left(\left[F(x)\eta\mu(\nu x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\eta\mu(\nu x)dF(x)\right) = \frac{1}{\nu\pi}\left(0 - \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2}\right)\eta\mu(\nu x)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\nu\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\eta\mu\nu x dx + \frac{\alpha_0}{2\pi\nu}\int_{-\pi}^{\pi}\eta\mu(\nu x)dx = -\frac{1}{\nu}\cdot\beta_\nu + \frac{\alpha_0}{2\pi\nu}\cdot 0 = -\frac{\beta_\nu}{\nu}$$

Παρόμοια υπολογίζουμε και τους συντελεστές B_ν.

$$B_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x)\eta\mu(\nu x)}{\nu} d(\nu x) = -\frac{1}{\nu\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)d(\sigma\upsilon\nu(\nu x)) =$$

$$= -\frac{1}{\nu\pi}\left(\left[F(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu(\nu x)dF(x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\nu\pi}\left(\left[F(\pi)\sigma\upsilon\nu(\nu\pi) - F(-\pi)\sigma\upsilon\nu(-\nu\pi)\right] - \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2}\right)\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx - \frac{\alpha_0}{2\pi\nu}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx = \frac{1}{\nu}\cdot\alpha_\nu - \frac{\alpha_0}{2\pi\nu}\cdot 0 = \frac{\alpha_\nu}{\nu}$$

Έτσι, η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $F(x)$ είναι:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{\beta_\nu}{\nu}\sigma\upsilon\nu(\nu x) + \frac{\alpha_\nu}{\nu}\eta\mu(\nu x)\right) \quad x \in [-\pi, \pi] \qquad (5)$$

Θέτοντας στη παραπάνω σειρά $x=\pi$ έχουμε:

$$F(\pi)=\frac{\pi\alpha_0}{2}=\frac{A_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{\beta_\nu}{\nu}\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)\right) \qquad (6)$$

Αφαιρώντας τις (5) και (6) κατά μέλη παίρνουμε

$$F(x)-\frac{\pi\alpha_0}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_\nu}{\nu}\big(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)-\sigma\upsilon\nu(\nu x)\big)+\frac{\alpha_\nu}{\nu}\eta\mu(\nu x)\right)$$

και τελικά, λαμβάνοντας υπόψη την (3) έχουμε

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt=\frac{\alpha_0}{2}\big(x+\pi\big)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_\nu}{\nu}\big(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)-\sigma\upsilon\nu(\nu x)\big)+\frac{\alpha_\nu}{\nu}\eta\mu(\nu x)\right).$$

Παρατηρήσεις

1. Η τελευταία σειρά που προέκυψε από ολοκλήρωση δεν είναι σειρά Fourier, εκτός εάν $\alpha_0=0$.

2. Τα παραπάνω ισχύουν και όταν το x μεταβάλλεται στο διάστημα

$(k-1)\pi\le x\le(k+1)\pi$, όπου $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$.

Παραδείγματα

1) Αφού βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης

$f(x)=x$ στο διάστημα $-\pi\le x\le\pi$

να βρεθεί με ολοκλήρωση η σειρά Fourier της $g(x)=x^2$ στο ίδιο διάστημα.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x$ στο συμμετρικό ως προς το μηδέν διάστημα [-*π, π*] είναι περιττή επειδή $f(-x)=-x=-f(x)$. Συνεπώς θα έχει τα α_0 και α_ν ίσα με μηδέν και επομένως θα αναπτύσσεται σε σειρά ημιτόνων. Είναι δε

$$\beta_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\eta\mu\frac{\nu\pi x}{\pi}dx=\frac{2}{\pi\nu}\int_0^{\pi}x\eta\mu(\nu x)d(\nu x)=-\frac{2}{\pi\nu}\int_0^{\pi}xd(\sigma\upsilon(\nu x))=$$

$$=-\frac{2}{\pi\nu}\left(\big[x\sigma\upsilon\nu(\nu x)\big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx\right)=-\frac{2}{\pi\nu}\left(\pi\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)-\frac{1}{\nu}\big[\eta\mu(\nu x)\big]_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi\nu}\big(\pi\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)\big)=\begin{cases}2/\nu & \text{αν}\quad \nu=\text{περιττός}\\ -2/\nu & \text{αν}\quad \nu=\text{άρτιος}\end{cases}$$

Επομένως, η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι η

$$x = 2\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\eta\mu 2x + \frac{1}{3}\eta\mu 3x - \frac{1}{4}\eta\mu 4x + \ \cdots \right) \text{ για } -\pi \le x \le \pi \,.$$

Ολοκληρώνοντας τη σειρά αυτή από $-\pi$ μέχρι x παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{x} t\,dt = 2\int_{-\pi}^{x} \eta\mu t\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x} \eta\mu(2t)dt + \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{x} \eta\mu(3t)dt - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{x} \eta\mu(4t)dt + \cdots \text{ ή}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = 2\begin{bmatrix} -\left(\sigma\upsilon(\nu x) - \sigma\upsilon(\nu\pi)\right) + \frac{1}{2^2}\left(\sigma\upsilon\nu(2x) - \sigma\upsilon\nu(2\pi)\right) - \\ -\frac{1}{3^2}\left(\sigma\upsilon\nu(3x) - \sigma\upsilon\nu(3\pi)\right) + \cdots \end{bmatrix}$$

Έτσι, $x^2 = \pi^2 - 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\cdots\right) - 4\left(\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{2^2}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{3^2}\sigma\upsilon\nu 3x - \cdots\right)$ ή

$$x^2 = \pi^2 - 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} + 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-1\right)^{\nu}\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^2} \qquad (1)$$

Παρατήρηση

Στο παράδειγμα 2 της παραγράφου 7.5 βρήκαμε

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-1\right)^{\nu}\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu x)}{\nu^2} \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) θα πρέπει λοιπόν να έχουμε:

$$\pi^2 - 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$

σχέση που αποδείχτηκε στο παράδειγμα 1 της παραγράφου 7.5.

2) Να δειχτεί η **ταυτότητα του Parseval**:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left\{f(x)\right\}^2 dx = \frac{{\alpha_0}^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left({\alpha_\nu}^2 + {\beta_\nu}^2\right)$$

αν υποθέσουμε ότι η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ στο διάστημα $(-L, L)$.

Απόδειξη

Είναι $f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\alpha_\nu \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L} + \beta_\nu \eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\right)$ (1)

για κάθε $x \in (-L, L)$ (παρ. 6.2 σχέση 2). Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $f(x)$ και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε από $-L$ μέχρι L, παίρνουμε

$$\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \int_{-L}^{L}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\alpha_\nu f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L} + \beta_\nu f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\right)\right\}dx\,. \quad (2)$$

Επειδή η σειρά (1), όπως υποθέσαμε, συγκλίνει ομοιόμορφα προς την $f(x)$, τότε και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\alpha_\nu f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L} + \beta_\nu f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα προς την $f^2(x)$. Επομένως, μπορούμε να εναλλάξουμε τα σύμβολα ολοκλήρωσης και άθροισης και έτσι η (2) γράφεται

$$\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\alpha_\nu\int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx + \beta_\nu\int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx\right\}. \quad (3)$$

Είναι όμως (σχέσεις (3) του θεωρήματος 7.2.2)

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = L\alpha_0, \quad \int_{-L}^{L} f(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L}dx = L\alpha_\nu, \quad \int_{-L}^{L} f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx = L\beta_\nu$$

οπότε η (3) γράφεται

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx = \frac{{\alpha_0}^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left({\alpha_\nu}^2 + {\beta_\nu}^2\right).$$

3) Εφαρμόστε τη ταυτότητα του Parseval για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ (του παραδείγματος 4 της παραγράφου 6.5) και δείξτε ότι:

α) $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$, **β)** $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$.

Λύση

α) Στο παράδειγμα 4 είναι

$$L = 2,\ \alpha_0 = 2,\ \alpha_\nu = \frac{4}{\nu^2\pi^2}\left(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi) - 1\right) \text{ και } \beta_\nu = 0.$$

Επομένως, η ταυτότητα του Parseval γίνεται:

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|^2 dx = \frac{2^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{16}{\nu^4\pi^4}\left(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi) - 1\right)^2 + 0^2\right) \text{ ή}$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{16\cdot(-2)^2}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \text{ ή } \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

β) Το 1ο μέλος της 2ης σχέσης χωρίζεται στα μερικά αθροίσματα:

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{\pi^4}{96}+\left(\frac{1}{2^4\cdot 1^4}+\frac{1}{2^4\cdot 2^4}+\frac{1}{2^4\cdot 3^4}+\frac{1}{2^4\cdot 4^4}\cdots\right)=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)$$

Επομένως $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}\Big/\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{\pi^4}{90}$.

4) Αφού βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x)=x$ στο διάστημα $-2\le x\le 2$, να βρεθεί με ολοκλήρωση η σειρά Fourier της $g(x)=x^2$ και να δειχτεί ότι:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

Λύση

Επειδή το διάστημα [–2, 2] είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, και επιπλέον $f(-x)=-x=-f(x)$, η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή, επομένως είναι $\alpha_0=\alpha_\nu=0$ δηλαδή η $f(x)$ αναπτύσσεται σε σειρά ημιτόνων με

$$\beta_\nu=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}dx=\frac{2}{\nu\pi}\int_0^2 x\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}d\left(\frac{\nu\pi x}{2}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\nu\pi}\int_0^2 xd\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}\right)=-\frac{2}{\nu\pi}\left(\left[x\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}\right]_0^2-\int_0^2\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\nu\pi}\left(\left[x\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{2}\right]_0^2-\frac{2}{\nu\pi}\left[\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}\right]_0^2\right)=-\frac{4}{\nu\pi}\sigma\upsilon\nu(\nu\pi).$$

Έτσι, $f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{-4}{\nu\pi}\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)\cdot\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\left(\eta\mu\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\eta\mu\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right)$ (1)

Παρατηρούμε ότι η σειρά που βρήκαμε στο παράδειγμα 1 της παραγράφου 7.6 για τη συνάρτηση $f(x)=x$, όπου $-\pi\le x\le\pi$, δηλαδή η

$$x=2\left(\eta\mu x-\frac{1}{2}\eta\mu 2x+\frac{1}{3}\eta\mu 3x-\frac{1}{4}\eta\mu 4x+\cdots\right),$$

προκύπτει απ' την (1) όπως φαίνεται, για $\pi=2$ $(-2\le x\le 2)$

Ολοκληρώνοντας τώρα την (1) από 0 μέχρι x έχουμε

$$\int_0^x t\,dt = \frac{4}{\pi}\left(\int_0^x \eta\mu\frac{\pi t}{2}dt - \int_0^x \frac{1}{2}\eta\mu\frac{2\pi t}{2}dt + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{3}\eta\mu\frac{3\pi t}{2}dt - \cdots\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^x \eta\mu\frac{\pi t}{2}d\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2\pi}\int_0^x \eta\mu\frac{2\pi t}{2}d\left(\frac{2\pi t}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3\pi}\int_0^x \eta\mu\frac{3\pi t}{2}d\left(\frac{3\pi t}{2}\right) - \cdots\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(-\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} - \sigma\upsilon\nu 0\right) + \frac{1}{2^2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{2} - \sigma\upsilon\nu 0\right) - \frac{1}{3^2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi x}{2} - \sigma\upsilon\nu 0\right) + \cdots\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right) - \frac{8}{\pi^2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right).$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας και το πρώτο μέλος έχουμε τελικά

$$x^2 = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right) - \frac{16}{\pi^2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right) \quad (2)$$

Παρατηρούμε ακόμα στο παράδειγμα 2 της 7.5, ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για $-\pi \le x \le \pi$ η οποία αναπτύσσεται στη σειρά

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{4^2} - \cdots\right)$$

προκύπτει απ' τη (2) για $\pi = 2$ $(-2 \le x \le 2)$. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{16}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{3} \text{ ή τελικά } \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

7.7 Μιγαδική παράσταση της σειράς Fourier

Ως γνωστό, οι συναρτήσεις e^x, $\sigma\upsilon\nu x$, $\eta\mu x$ αναπτύσσονται σε σειρά Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \quad (2)$$

$$\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \quad (3)$$

Για $x = i\theta$, όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα, η (1) γίνεται

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \quad (4)$$

και επειδή

$$i^{4\nu} = 1, \quad i^{4\nu+1} = i, \quad i^{4\nu+2} = -1, \quad i^{4\nu+3} = -i \quad \forall \nu \in N ,$$

λαμβάνοντας υπόψη τις (2) και (3), η (4) χωρίζεται σε δύο όρους:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) = \sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta \quad (5)$$

Παρόμοια, αν θέσουμε στην (4) αντί $i\theta$ το $-i\theta$, βρίσκουμε:

$$e^{-i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) - i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) = \sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta \quad (6)$$

Οι σχέσεις (5) και (6) είναι γνωστές ως ταυτότητες του **Euler**. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5) και (6) ως προς $\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\eta\mu\theta$ παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \eta\mu\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (7)$$

Έτσι η σειρά Fourier λόγω των (7) για $\theta = \dfrac{\nu\pi x}{L}$ γίνεται:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_\nu}{2}\left(e^{i\frac{\nu\pi x}{L}} + e^{-i\frac{\nu\pi x}{L}}\right) + \frac{\beta_\nu}{2i}\left(e^{i\frac{\nu\pi x}{L}} - e^{-i\frac{\nu\pi x}{L}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + i\beta_\nu\right)e^{-i\frac{\nu\pi x}{L}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu - i\beta_\nu\right)e^{i\frac{\nu\pi x}{L}} \quad (8)$$

Θέτουμε $\quad c_0 = \dfrac{\alpha_0}{2}, \quad c_{-\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_\nu + i\beta_\nu\right), \quad c_\nu = \dfrac{1}{2}\left(\alpha_\nu - i\beta_\nu\right) \quad (9)$

Οπότε η σχέση (8) γίνεται

$$f(x) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{-\nu}e^{-i\frac{\nu\pi x}{L}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{L}} \quad (10)$$

Οι σχέσεις (9), λόγω των (3) της παραγράφου 7.2 για τα α_ν, β_ν γίνονται

$$c_{-\nu} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L} + i\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\right]dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i\frac{\nu\pi x}{L}}dx \quad (11)$$

$$c_\nu = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{L} - i\eta\mu\frac{\nu\pi x}{L}\right]dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{\nu\pi x}{L}}dx \qquad (12)$$

Είναι φανερό πως ο τύπος (10) μπορεί να συμπτυχθεί στο τύπο

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\frac{\nu\pi x}{L}} \qquad (13)$$

ενώ οι τύποι (11) και (12) μπορούν να συμπτυχθούν στο τύπο

$$c_\nu = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{\nu\pi x}{L}}dx \qquad (14)$$

Ο τύπος (14) για $\nu = 0$ δίνει c_0 αντίστοιχο με το α_0 του τύπου (3) της παρ. 7.2.2.

Ασκήσεις

1) Κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier στο διάστημα ορισμού της, αφού πρώτα γίνει η γραφική της παράσταση

i) $f(x) = x^2 + x$ για $-\pi < x < \pi$ και $f(x+2\pi) = f(x)$

ii) $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ για } -\pi < x < \pi \\ -x \text{ για } 0 < \mathrm{x} < \pi \end{cases}$ και $f(x+2\pi) = f(x)$

iii) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ για } -\pi \le x < 0 \\ 1 \text{ για } 0 < x \le \pi \end{cases}$ και $f(x+2\pi) = f(x)$

2) Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αναπτύσσονται σε σειρές Fourier και βρείτε τα αναπτύγματά τους:

i) $f(x) = \eta\mu x$ για $0 < x < \pi$ και $f(x+\pi) = f(x)$

Δείξτε ακόμα ότι: $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2} + \dfrac{1}{3^2\cdot 5^2} + \dfrac{1}{5^2\cdot 7^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2 - 8}{16}$

(*Απάντηση*: $f(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu(\nu\pi))}{\nu^2 - 1}\sigma\upsilon\nu(\nu x)$)

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ για } -\pi \le x < 0 \\ x \text{ για } 0 < x \le \pi \end{cases}$ και $f(x+2\pi) = f(x)$

Δείξτε ακόμα ότι: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

(*Απάντηση*: $f(x)=\frac{\pi+2}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(2\nu-1\right)x}{(2\nu-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\left(\nu-1\right)+1}{\nu}\eta\mu(\nu x)$).

iii) $f(x)=e^x$ για $-\pi<x<\pi$ και $f(x+2\pi)=f(x)$

(*Απάντηση*: $f(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}+\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{1+\nu^2}\left(\sigma\upsilon\nu(\nu x)-\nu\eta\mu(\nu x)\right)$, όπου

$\sinh\pi=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}$ (υπερβολικό ημίτονο), ενώ σε μιγαδική μορφή η σειρά είναι

$$f(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1+i\nu}{1+\nu^2}e^{i\nu x}).$$

3) Να παρασταθεί η συνάρτηση $f(x)=e^x,\quad 0<x<1$

i) σε σειρά συνημιτόνων, **ii)** σε σειρά ημιτόνων

<u>*Σημείωση*</u>: Όταν το πεδίο ορισμού δεν είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, και θέλουμε να αναπτύξουμε την $f(x)$ σε σειρά μόνο συνημιτόνων ή μόνο ημιτόνων, που σημαίνει ότι η συνάρτηση πρέπει να είναι άρτια ή περιττή, θεωρούμε τότε την άρτια ή περιττή επέκταση της $f(x)$. Έτσι, για τη παραπάνω συνάρτηση θεωρήστε:

άρτια επέκταση της $f(x)$: $f_1(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{για } -1<x<0 \\ e^{x} & \text{για } 0<x<1 \end{cases}$

περιττή επέκταση της $f(x)$: $f_2(x)=\begin{cases} -e^{-x} & \text{για } -1<x<0 \\ e^{x} & \text{για } 0<x<1 \end{cases}$

4) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{για } 0<x<2/3 \\ 0 & \text{για } 2/3<x<1 \end{cases}$

σε σειρά Fourier συνημιτόνων και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Υπόδειξη: Θεωρείστε την άρτια επέκταση: $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\left[-2/3,\ 2/3\right] \\ 0, & x\in\left(-1,\ -2/3\right)\cup\left(2/3,\ 1\right) \end{cases}$

(*Απάντηση*: $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\eta\mu\frac{2\nu\pi}{3}\sigma\upsilon\nu(\nu\pi x)$.

Δείξτε ακόμα ότι $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

5) Βρείτε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, ή περιττές, ή τίποτε από τα δύο:

1) $y=|x|$, 2) $y=e^{x}$, 3) $y=e^{x^2}$, 4) $y=x^2+x$, 5) $y=\eta\mu^2 x$, 6) $y=x\eta\mu x$,
7) $y=x\sigma\upsilon\nu x$, 8) $y=x^2\sigma\upsilon\nu x$, 9) $y=\sinh x$, 10) $y=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

6) Εξετάστε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις που είναι περιοδικές με περίοδο 2π είναι άρτιες, ή περιττές, ή τίποτε από τα δύο:

$$i)\ f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases},\quad ii)\ f(x)=\begin{cases}-x^2, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0<x<\pi\end{cases},$$

$$iii)\ f(x)=|\eta\mu x|,\quad -\pi<x<\pi,\quad iv)\ f(x)=x|x|,\quad -\pi<x<\pi,$$

$$v)\ f(x)=e^{|x|},\quad -\pi<x<\pi,\quad vi)\ f(x)=e^{-|x|},\quad -\pi<x<\pi.$$

7) Δείξτε ότι:

i) Το άθροισμα περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.

ii) Το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

iii) Το άθροισμα και το γινόμενο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

iv) Αν $g(x)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, που ορίζεται για κάθε x τότε η $p(x)=\frac{g(x)+g(-x)}{2}$ είναι άρτια, ενώ η $q(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}$ είναι περιττή, όπου $g(x)=p(x)+q(x)$.

v) Εκφράστε τις παρακάτω συναρτήσεις ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης:

α) $y=e^{x}$, β) $y=1/(1-x)$, γ) $y=x/(1-x)$, δ) $y=(1+x)/(1-x)$.

8) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, όπου $0<x<\pi$ σε σειρά Fourier ημιτόνων. Πώς ορίζεται στα $x=0$, $x=\pi$, έτσι ώστε να συγκλίνει για $0\le x\le\pi$;

(*Απάντηση*: $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\eta\mu(2\nu x)}{4\nu^2-1}$, $f(0)=f(\pi)=0$).

9) Να βρεθούν οι σειρές Fourier των παρακάτω συναρτήσεων, αφού ελεγχθεί ποιες απ' αυτές είναι άρτιες ή περιττές:

$$i)\ f(x)=\begin{cases}8, & 0<x<2\\ -8, & 2<x<4\end{cases}\quad \text{και}\quad f(x+4)=f(x)\ \text{ για }\ x\in R-(0,\ 4),$$

$$ii)\ f(x)=4x,\quad 0<x<10\quad \text{και}\quad f(x+10)=f(x)\ \text{ για }\ x\in R-(0,\ 10),$$

$$iii)\ f(x)=\begin{cases}-x, & -4\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le 4\end{cases}\quad \text{και}\quad f(x+8)=f(x)\ \text{ για }\ x\in R-[-4,\ 4],$$

$$iv)\ f(x)=\begin{cases}0, & -3<x<0\\ 2x, & 0\le x<3\end{cases}\quad \text{και}\quad f(x+6)=f(x)\ \text{ για }\ x\in R-(-3,3).$$

(*Απάντηση*: $i)\ f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu(\nu\pi))}{\nu}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}$, $ii)\ f(x)=20-\frac{40}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{5}$,

$$iii)\ f(x)=2-\frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu(\nu\pi))}{\nu^2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{4},$$

$$iv)\ f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{6(\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)-1)}{\nu^2\pi^2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{3}-\frac{6\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)}{\nu\pi}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{3}\right\}).$$

10) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<4\\ 8-x, & 4<x<8\end{cases}$

α) σε σειρά ημιτόνων,

β) σε σειρά συνημιτόνων, αφού επεκταθεί κατάλληλα.

(*Απάντηση*: **α)** $f(x)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\eta\mu\frac{\nu\pi}{2}\eta\mu\frac{\nu\pi x}{2}$,

β) $f(x)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{2\sigma\upsilon\nu(\nu\pi/2)-\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)-1}{\nu^2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi x}{8}$)

11) Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu\alpha x$

όπου $\alpha\in Z$ και $-\pi\le x\le\pi$. (*Απάντηση*:

$$f(x)=\frac{\eta\mu(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}\sigma\upsilon\nu 3x+\cdots\right))$$

12) Να βρεθεί η σειρά Fourier της

$$f(x)=\begin{cases} x(\pi-x) & -\pi<x<0 \\ (\pi-x)^2 & 0<x<\pi \end{cases}$$, και να δειχτεί ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(*Απάντηση*: $f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\left[\left(3+(-1)^{\nu}\right)\sigma\upsilon\nu(\nu x)+\nu\pi\eta\mu(\nu x)\right]$).

13) Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x)=x(\pi-x)$ στο διάστημα $0\le x\le\pi$,

α) σε σειρά συνημιτόνων,

β) σε σειρά ημιτόνων, με κατάλληλη επέκταση.

(*Απάντηση*: **α)** $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{2^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu 6x}{3^2}+\cdots\right)$

β) $f(x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\eta\mu x}{1^3}+\frac{\eta\mu 3x}{3^3}+\frac{\eta\mu 5x}{5^3}+\cdots\right)$).

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, δείξτε ότι

$$i)\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad ii)\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{12},\quad iii)\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

Ακόμα, διαφορίζοντας τη σειρά ημιτόνων **(β)**, δείξτε ότι:

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

14. Αφού αναπτύξετε την $f(x)=x^2$ στο $-\pi<x<\pi$ σε σειρά Fourier, δείξτε ότι με ολοκλήρωση όρο προς όρο προκύπτει

$$x(\pi-x)(\pi+x)=12\left(\frac{\eta\mu x}{1^3}-\frac{\eta\mu 2x}{2^3}+\frac{\eta\mu 3x}{3^3}-\frac{\eta\mu 4x}{4^3}+\cdots\right)$$

(*Απάντηση*: $f(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1^2}-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3^2}-\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{4^2}+\cdots\right)$).

15. Δείξτε ότι σε μια σειρά Fourier με μιγαδική μορφή, οι συντελεστές μιας περιττής συνάρτησης είναι καθαροί φανταστικοί, ενώ οι συντελεστές μιας άρτιας συνάρτησης είναι καθαροί πραγματικοί.