Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **6**

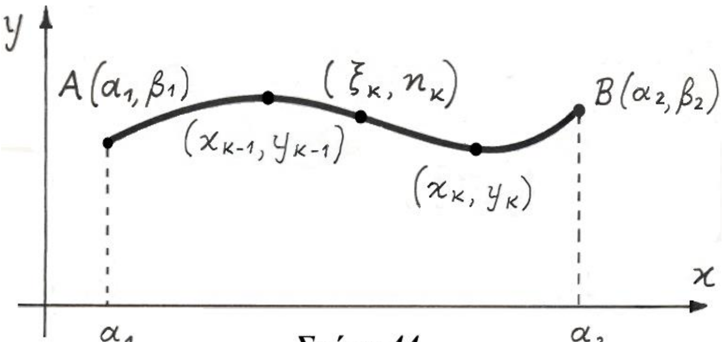
Επικαμπύλια και Επιεπιφάνεια ολοκληρώματα

Α. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αποτελούν επέκταση της έννοιας του απλού ολοκληρώματος στην περίπτωση κατά την οποία το πεδίο ολοκλήρωσης είναι το τμήμα μιας επίπεδης ή τρισδιάστατης καμπύλης. Έχουν πολλές εφαρμογές στη Φυσική, σπουδαιότερες των οποίων είναι αυτές που αναφέρονται στο έργο και στο δυναμικό ενός πεδίου δυνάμεων.

6.1 Ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Έστω *c* μια καμπύλη στο επίπεδο xOy με εξίσωση $y = f(x)$ που συνδέει τα σημεία $A(\alpha_1, \beta_1)$ και $B(\alpha_2, \beta_2)$ (σχήμα 44). Έστω ακόμα δύο μονότιμες συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ που μπορούν να οριστούν για όλα τα σημεία της *c* (οι συναρτήσεις *P* και *Q* παριστάνουν στον R^3 ως γνωστό επιφάνειες).



Σχήμα 44

Υποδιαιρούμε τώρα την *c* σε ν τμήματα, εκλέγοντας ν – 1 σημεία πάνω σ' αυτή με συντεταγμένες:

$$(\alpha_1, \beta_1) \equiv (x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), \cdots, (x_\nu, y_\nu) \equiv (\alpha_2, \beta_2)$$

Θέτουμε $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και $\Delta y_k = y_k - y_{k-1} \quad k = 1, 2, \cdots, \nu$

και ορίζουμε τα σημεία (ξ_k, η_k) στη *c* έτσι ώστε να βρίσκονται μεταξύ των σημείων

$(x_{k-1}, y_{k-1}),\ (x_k, y_k)$.

Κατόπιν σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right].$$

Το όριο του αθροίσματος αυτού (αν υπάρχει) όταν ν → ∞, έτσι ώστε όλες οι ποσότητες Δx_k και Δy_k $k = 1, 2, \cdots, \nu$ να τείνουν στο μηδέν, λέγεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** των $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ ως προς *x* και *y* κατά μήκος της καμπύλης *c* και συμβολίζεται με

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \text{ή} \quad \int_{AB} Pdx + Qdy. \tag{1}$$

Όπως γίνεται φανερό, η τιμή του ολοκληρώματος αυτού εξαρτάται γενικά απ' τις συναρτήσεις *P* και *Q*, τη συγκεκριμένη καμπύλη *c* και από τα όρια Α και Β.

Εντελώς ανάλογα μπορεί να οριστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας καμπύλης *c* στον τρισδιάστατο χώρο ως

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\left[P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta z_k\right] = \\ &= \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz\end{aligned} \tag{2}$$

όπου *P, Q, R,* είναι συναρτήσεις των *x, y, z.*

Ένας άλλος τρόπος ορισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος μιας καμπύλης *c* στο επίπεδο xOy με εξίσωση $y = f(x)$, είναι ο παρακάτω (γενικός): Αν το Δs_k συμβολίζει το μήκος του τόξου της καμπύλης *c* μεταξύ των σημείων (x_{k-1}, y_{k-1}) και (x_k, y_k) τότε το

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=1}^{\nu} A(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k = \int_c A(x,y)\,ds \tag{3}$$

λέγεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $A(x, y)$ ως προς *s* κατά μήκος της καμπύλης *c*. Η επέκταση του ορισμού αυτού μπορεί να γίνει για καμπύλη *c* που αναφέρεται στο χώρο R^3 και με συνάρτηση $A(x, y, z)$ ή ακόμα να γενικευθεί σε χώρο περισσοτέρων διαστάσεων.

Στον R^3 και με συνάρτηση $A(x, y, z)$, ορίζεται ως:

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{k=1}^{\nu} A(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k = \int_c A(x,y,z)ds \tag{4}.$$

6.2 Υπολογισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος

Ο υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος εξαρτάται κυρίως, τόσο απ’ τη μορφή του ολοκληρώματος, όσο και απ’ τον τρόπο που δίνεται η καμπύλη c. Έτσι:

<u>1η περίπτωση</u>: Η c δίνεται με παραμετρικές εξισώσεις

i) Αν η καμπύλη c δίνεται στο επίπεδο με τις παραμετρικές της εξισώσεις

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (1) της 6.1 γίνεται

$$\int_{t_1}^{t_2} P\left(x(t),\ y(t)\right) x'(t)dt + Q\left(x(t),\ y(t)\right) y'(t)dt \tag{1}$$

γιατί $dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt$ ενώ t_1, t_2 εκφράζουν τις τιμές του t που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β.

ii) Παρόμοια εργαζόμαστε αν η καμπύλη c ορίζεται στο χώρο και δίνεται με τις παραμετρικές της εξισώσεις

$$x = x(t),\ \ y = y(t)\ \ z = z(t)\ .$$

Τότε οι συναρτήσεις $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ γίνονται:

$$P\big(x(t), y(t), z(t)\big),\ Q\big(x(t), y(t), z(t)\big),\ R\big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

και επομένως το ολοκλήρωμα (2) της 6.1 γίνεται:

$$\int_{t_1}^{t_2} P\left(t\right) x'(t)dt + Q\left(t\right) y'(t)dt + R\left(t\right) z'(t)dt \tag{2}$$

<u>2η περίπτωση</u>: Η c δίνεται με την εξίσωση $y = f(x)$ ή $x = \varphi(y)$.

i) Αν η καμπύλη c δίνεται στο επίπεδο ($z = 0$) με την εξίσωση $y = f(x)$, τότε το ολοκλήρωμα (1) της 6.1 υπολογίζεται αν αντικαταστήσουμε το y με $f(x)$ και το dy με $f'(x)dx$ οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(x, f(x))dx + Q(x, f(x)) f'(x)dx \tag{3}$$

όπου $\alpha_1,\ \alpha_2$ είναι οι τετμημένες των σημείων Α, Β.

ii) Αν τώρα η *c* δίνεται στο επίπεδο με την εξίσωση $x=\varphi(y)$, τότε το ολοκλήρωμα (1) της 6.1 παίρνει εντελώς ανάλογα τη μορφή

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} P\big(\varphi(y),y\big)\varphi'(y)\,dy+Q\big(\varphi(y),y\big)\,dy \qquad (4)$$

όπου τώρα β_1, β_2 είναι οι τεταγμένες των σημείων Α, Β.

iii) Στην περίπτωση που η καμπύλη *c* δίνεται στο χώρο ως τομή δύο επιφανειών

$$f(x,y,z)=0 \text{ και } g(x,y,z)=0, \qquad (5)$$

τότε μετασχηματίζουμε τις (5) σε παραμετρικές εξισώσεις της μορφής

$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$ ως εξής:

Αν $J=\left.\dfrac{D(f,g)}{D(y,z)}\right|_P \neq 0$ σε μια περιοχή του *P*, όπου $P(x,y,z)$ τυχαίο σημείο που επαληθεύει τις (5), τότε απ΄ το θεώρημα 2.5.2 πεπλεγμένων συναρτήσεων, οι εξισώσεις (5) μπορούν να λυθούν ως προς *y* και *z* συναρτήσει του *x*, και θεωρώντας το *x* ως παράμετρο παίρνουμε μια παράσταση της καμπύλης *c*, της μορφής:

$x=x,\ \ y=y(x),\ \ z=z(x)$, οπότε θέτοντας $x=t,\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$

έχουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της *c*, δηλαδή την **1η** περίπτωση **(ii).**

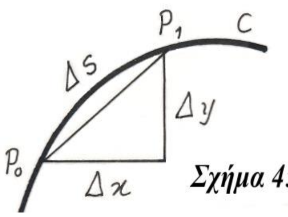
<u>3η περίπτωση</u>: Η *c* δίνεται με παράμετρο το τόξο *s*

i) Αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι της μορφής (3) της 6.1 όπου η καμπύλη *c* είναι επίπεδη της μορφής $y=f(x)$, τότε αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται:

$$\int_c A(x,y)\,ds=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} A\big(x,f(x)\big)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \qquad (6)$$

ενώ, αν η καμπύλη *c* δίνεται με τη μορφή $x=\varphi(y)$, τότε

$$\int_c A(x,y)ds=\int_{\beta_1}^{\beta_2} A\big(\varphi(y),y\big)\sqrt{1+\left[\varphi'(y)\right]^2}\,dy\,. \qquad (7)$$



Σχήμα 45

Πράγματι, αν Δs είναι ένα στοιχειώδες μήκος πάνω στη *c* στο xOy, τότε (σχήμα 45):

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

και διαιρώντας με Δx (ή Δy αντίστοιχα) έχουμε

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 \approx 1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \text{ ή } \left(\frac{\Delta s}{\Delta y}\right)^2 \approx 1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 .$$

Άρα

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1+y'^2} \text{ οπότε } ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \ (ds>0) \text{ ή}$$

$$\frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1+x'^2} \text{ οπότε } ds = \sqrt{1+x'^2}\,dy \ (ds>0).$$

ii) Αν η εξίσωση της καμπύλης $y=f(x)$ εκφράζεται με τις παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t),\ y=y(t)$, τότε θα είναι

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \text{ , όπου } \dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \ \dot{y}=\frac{dy}{dt} \text{ οπότε}$$

$$\int_c A(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} A\big(x(t),\, y(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \qquad (8)$$

όπου t_1, t_2 είναι οι τιμές που αντιστοιχούν στα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.

iii) Τέλος, αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι της μορφής (4) της 6.1, εκφράζοντας την *c* με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής

$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$ θα έχουμε

$$\int_c A(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} A\big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \qquad (9)$$

4η περίπτωση: Η *c* δίνεται με πολικές συντεταγμένες

Στη περίπτωση που η καμπύλη *c* εκφράζεται στο επίπεδο xOy με πολικές συντεταγμένες, δηλαδή είναι της μορφής

$\rho=\rho(\theta)$, όπου $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\int_{AB} A(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} A\big(\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\, \rho\eta\mu\theta\big)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta\,, \qquad (10)$$

όπου $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$ και $ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \ \left(\rho'=\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)$

6.3 Ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των συνηθισμένων ολοκληρωμάτων. Π.χ.

1. $\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AB} Pdx+\int_{AB} Qdy$.

2. $\int_{AB} \lambda\, Pdx+\mu\, Q\, dy=\lambda\int_{AB} Pdx+\mu\int_{AB} Qdy$.

3. $\int_{AB} Pdx+Qdy=-\int_{BA} Pdx+Qdy$,

ενώ αν δίνεται στη γενική του μορφή:

$$\int_{AB} A(x,y,z)ds=-\int_{BA} A(x,y,z)ds.$$

4. $\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AE} Pdx+Qdy+\int_{EB} Pdx+Qdy$,

όπου Ε ένα άλλο σημείο μεταξύ των Α, Β της *c*.

5. Όπως τονίστηκε στην αρχή, η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\int_{AB} Pdx+Qdy$ δεν εξαρτάται μόνο από τα άκρα Α και Β της καμπύλης, αλλά και από την ίδια την καμπύλη που συνδέει τα σημεία αυτά. Στη περίπτωση όμως, στην οποία η ολοκληρωτέα παράσταση $Pdx+Qdy$ είναι <u>*ολικό διαφορικό*</u> μιας συνάρτησης $f(x,y)$ δηλαδή $df=Pdx+Qdy$, (όπως τη γνωρίσαμε στην παράγραφο 2.5), τότε η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται <u>*μόνο από τα σημεία Α και Β*</u> και όχι από την καμπύλη *c* η οποία συνδέει τα σημεία αυτά.

Πράγματι, τότε είναι προφανώς $P=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Και αν οι εξισώσεις της καμπύλης είναι $x=x(t),\ \ y=y(t)$ και *α, β* είναι οι τιμές της *t* που αντιστοιχούν στα σημεία $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, τότε η συνάρτηση $f(x,y)$ γίνεται $f\big(x(t),\, y(t)\big)=F(t)$.
Είναι δε:

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt} \text{ και } Pdx+Qdy=F'(t)dt=dF.$$

Άρα

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{\alpha}^{\beta} dF=F(\beta)-F(\alpha)=f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)$$

για οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει τα $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.

6. Απ' τη σχέση (3) ή (4) της 6.1, αν $A(x,y)=1$ ή $A(x,y,z)=1$, τότε το $\int_c ds$ εκφράζει το μήκος της καμπύλης *c* στο επίπεδο ή στο χώρο αντίστοιχα. Ειδικά αν η καμπύλη είναι κλειστή, τότε το μήκος της L βρίσκεται απ’ τον τύπο: $L = \oint_c ds$

όπου το σύμβολο $\oint$ δηλώνει ολοκλήρωμα κατά μήκος κλειστής καμπύλης της οποίας η αρχή Α και το πέρας Β συμπίπτουν και η φορά διαγραφής είναι αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου.

Σχήμα 46

7. Στην περίπτωση που η ολοκληρωτέα παράσταση είναι *ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης*, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε μια *κλειστή καμπύλη ΑΒΑ είναι μηδέν*. Πράγματι, τότε θα είναι (σχήμα 46):

$\int_{\mathrm{A\Gamma B}} = \int_{\mathrm{A\Delta B}}$ (διότι ως ολικό διαφορικό, δεν εξαρτάται από την c)

ή $\int_{\mathrm{A\Gamma B}} = -\int_{\mathrm{B\Delta A}}$ ή $\int_{\mathrm{A\Gamma B}} + \int_{\mathrm{B\Delta A}} = 0$, δηλαδή $\oint_{\mathrm{A\Gamma B\Delta A}} = 0$.

Παρατηρήσεις

1. Οι παραπάνω ιδιότητες 1. – 5. ισχύουν και για επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ κατά μήκος μιας καμπύλης στο τρισδιάστατο χώρο.

2. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη γενική του μορφή:

$$\int_c A(x, y, z)ds$$

λέγεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της <u>αριθμητικής</u> συνάρτησης $A(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης c, ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα <u>1ου είδους</u>,

ενώ στην ειδική του μορφή:

$\int_c Pdx + Qdy$ (στο επίπεδο) ή $\int_c Pdx + Qdy + Rdz$ (στο χώρο)

λέγεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της <u>διανυσματικής</u> συνάρτησης

$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{x}_0 + Q(x, y)\vec{y}_0$ στο επίπεδο ή

$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{x}_0 + Q(x, y, z)\vec{y}_0 + R(x, y, z)\vec{z}_0$ στο χώρο

κατά μήκος της καμπύλης c, ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα <u>2ου είδους</u>.

3. Μεταξύ επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1ου και 2ου είδους υπάρχει συσχέτιση (μετατροπή) που θα αναφερθεί στην επόμενη παράγραφο 6.4.

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$I=\int_c (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

όπου c είναι η έλικα με παραμετρικές εξισώσεις $x=5\sigma\upsilon\nu\, t,\ y=5\eta\mu\, t,\ z=t$ (σχήμα 37), για $\alpha = 5$, $\beta = 1$, απ' το σημείο $t = 0$ μέχρι $t = 2\pi$.

Λύση

Είναι $dx=-5\eta\mu\, tdt,\ \ dy=5\sigma\upsilon\nu\, tdt,\ \ dz=dt$. Άρα

$$I=\int_0^{2\pi}\left[(5\eta\mu\, t+t)(-5\eta\mu\, tdt)+(t+5\eta\mu\, t)(5\sigma\upsilon\nu\, tdt)+(5\sigma\upsilon\nu\, t+5\eta\mu\, t)dt\right]=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-25\eta\mu^2 t-5t\eta\mu\, t+5t\sigma\upsilon\nu\, t+25\eta\mu\, t\sigma\upsilon\nu\, t+5\sigma\upsilon\nu\, t+5\eta\mu\, t\right)dt=$$

$$=-25\int_0^{2\pi}\eta\mu^2 tdt+5\int_0^{2\pi}td(\sigma\upsilon\nu\, t)+5\int_0^{2\pi}td(\eta\mu\, t)+$$

$$+25\int_0^{2\pi}\eta\mu\, td(\eta\mu\, t)+5\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\, tdt+5\int_0^{2\pi}\eta\mu\, tdt=$$

$$=\underbrace{-25\left[-\frac{\eta\mu\, t\sigma\upsilon\nu\, t}{2}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{\mathrm{A}}+\underbrace{5\left[t\sigma\upsilon\nu\, t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\, tdt\right]}_{\mathrm{B}}+$$

$$+\underbrace{5\left[t\eta\mu\, t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\eta\mu\, tdt\right]}_{\Gamma}+\underbrace{25\left[\frac{\eta\mu^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{\Delta}+\underbrace{5\eta\mu\, t\Big|_0^{2\pi}}_{\mathrm{E}}\underbrace{-5\sigma\upsilon\nu\, t\Big|_0^{2\pi}}_{\mathrm{Z}}$$

Είναι $\mathrm{A}=-25\pi,\ \ \mathrm{B}=10\pi,\ \ \Gamma=\Delta=\mathrm{E}=\mathrm{Z}=0$.

Άρα $I=-15\pi$.

2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathrm{AB}} 3x^2ydx+5xy^2dy$$

κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ από το σημείο A(1, 1) μέχρι το B(2, 8).

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τόξου AB της καμπύλης είναι

$x=t,\ \ y=t^3,\ \ t\in[1,2]$. Άρα $dx=dt,\ \ dy=3t^2dt$, οπότε

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + 5xy^2 dy = \int_1^2 (3t^2 t^3 + 5tt^6 \cdot 3t^2) dt =$$

$$= \int_1^2 (3t^5 + 15t^9) dt = \left[\frac{t^6}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{3}{2} t^{10}\right]_1^2 = 1566$$

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_c y^2 dx - x^2 dy$,

όπου c είναι ο κύκλος $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου είναι (ακτίνα α = 1)

$x - 1 = \sigma\upsilon\nu\, t \Rightarrow x = 1 + \sigma\upsilon\nu\, t$ και $y - 1 = \eta\mu\, t \Rightarrow y = 1 + \eta\mu\, t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Επίσης, $dx = -\eta\mu\, t dt,\ dy = \sigma\upsilon\nu\, t dt$. Επομένως το I γίνεται:

$$I = \int_c y^2 dx - x^2 dy = \int_0^{2\pi} (1 + \eta\mu\, t)^2 (-\eta\mu\, t dt) - (1 + \sigma\upsilon\nu\, t)^2 \sigma\upsilon\nu\, t dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\eta\mu\, t + 2\eta\mu^2 t + \eta\mu^3 t + \sigma\upsilon\nu\, t + 2\sigma\upsilon\nu^2 t + \sigma\upsilon\nu^3 t) dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\eta\mu^3 t + \sigma\upsilon\nu^3 t + \eta\mu\, t + \sigma\upsilon\nu\, t + 2) dt = -4\pi$$

(βλέπε παράγρ. 8.6 αναγωγικών τύπων στο παράρτημα, παρατήρηση 3).

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_{AB} (x - z) ds$ όπου το τόξο AB είναι το τόξο της έλικας $x = \sigma\upsilon\nu\, t,\ y = \eta\mu\, t,\ z = t$ και $A(1, 0, 0), B(0, 1, \pi/2)$.

Λύση

Τα άκρα A και B αντιστοιχούν στις τιμές $t_1 = 0,\ t_2 = \pi/2$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το τύπο (9) της 6.2 και έχουμε:

$$\int_{AB} (x - z) ds = \int_0^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu\, t - t) \sqrt{\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t + 1}\, dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu\, t - t) dt = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{AB} \frac{yz}{1 + x^2} ds$ στο τόξο AB της καμπύλης c: $y = 1 + x^2,\quad z = \frac{2}{3} x^3$ όπου $A(0, 1, 0)$ και $B(3, 10, 18)$.

Λύση

Θέτουμε $x = t$ οπότε η παραμετρική παράσταση της καμπύλης είναι:

$$x = x(t) = t,\ \ y = y(t) = 1 + t^2,\ \ z = z(t) = {}^2\!/_3\, t^3$$

όπου $0 \le t \le 3$ (προκύπτει απ' τις μεταβολές του x: $0 \le x \le 3$). Άρα

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{1 + (2t)^2 + (2t^2)^2}\,dt = \left(1 + 2t^2\right)dt\ .$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int_0^3 \frac{\left(1+t^2\right)\frac{2}{3}t^3}{1+t^2}\left(1+2t^2\right)dt = \frac{2}{3}\int_0^3 t^3\left(1+2t^2\right)dt = \frac{351}{2}\ .$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_c xyzds$ όπου c είναι το τόξο του κύκλου: (τομή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ με το κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$) για $x, y, z \ge 0$.

Λύση

Είναι $1 + z^2 = 4 \Leftrightarrow \mathrm{z} = \sqrt{3}\quad (z \ge 0)$. Θέτουμε $x = \sigma\upsilon\nu t,\ y = \eta\mu t,\ z = \sqrt{3}$.

Επομένως οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου c είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\, t,\ y = \eta\mu\, t,\ z = \sqrt{3}\ \text{ με }\ 0 \le t \le \pi/2$$

(επειδή $x, y, z \ge 0$ οπότε $\sigma\upsilon\nu t \ge 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \ 0 \le t \le \pi/2$). Επίσης είναι:

$$ds = \sqrt{\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t + 0}\,dt = dt\ .\ \text{Άρα}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu\, t\eta\mu t\sqrt{3}dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi/2}\ \eta\mu 2td(2t) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\sigma\upsilon\nu 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{AB}\left(x^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x\right)dy$:

α) κατά μήκος της ευθείας γραμμής που ενώνει τα σημεία (0, 1) και (1, 2).

β) κατά μήκος της ευθείας γραμμής απ' το (0, 1) ως το (1, 1) και το (1, 1) ως το (1, 2).

γ) κατά μήκος της παραβολής $y = x^2 + 1$ απ' το (0, 1) στο (1, 2) (σχήμα 47).

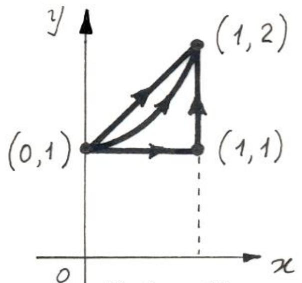
Λύση

α) Η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα σημεία (0, 1) και (1, 2) στο επίπεδο xOy είναι

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ ή } y=x+1 \text{ όπου } (x_1,y_1)=(0,1),\ (x_2,y_2)=(1,2)$$

Είναι $dy = dx$ άρα κατά μήκος της ευθείας $y=x+1$ είναι:

$$\int_{x=0}^{1}\left[x^2-(x+1)\right]dx+\left[(x+1)^2+x\right]dx=\int_0^1\left(2x^2+2x\right)dx=\left[\tfrac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{5}{3}$$



Σχήμα 47

β) Κατά μήκος της ευθείας από το (0, 1) ως το (1, 1), η εξίσωσή της είναι $y = 1$, οπότε $dy = 0$ και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I_1=\int_{x=0}^{1}\left(x^2-1\right)dx+(1+x)\cdot 0=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1=-\frac{2}{3}$$

Κατά μήκος τώρα της γραμμής απ' το (1, 1) ως το (1, 2) η εξίσωσή της είναι $x = 1$, οπότε $dx = 0$ και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I_2=\int_{y=1}^{2}\left(1^2-y\right)\cdot 0+(y^2+1)dy=\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_1^2=\frac{10}{3}.$$

Επομένως η τιμή του I απ' το (0, 1) στο (1, 1) και από κει στο (1, 2) είναι:

$$I_1+I_2=-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=\frac{8}{3}.$$

γ) Κατά μήκος της παραβολής $y=x^2+1$ θα είναι $dy=2xdx$, οπότε το ολοκλήρωμα I παίρνει τη μορφή:

$$I=\int_{x=0}^{1}\left[x^2-\left(x^2+1\right)\right]dx+\left[\left(x^2+1\right)^2+x\right]2xdx=$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left(2x^5+4x^3+2x^2+2x-1\right)dx=2.$$

8) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{AB} yds$ όπου AB είναι το τόξο της καμπύλης με εξίσωση $y=2\sqrt{x}$ και το x μεταβάλλεται από x = 3 μέχρι x = 24.

Λύση

Εφαρμόζοντας το τύπο (6) της 6.2 έχουμε $y' = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, άρα $y'^2 = \dfrac{1}{x}$ οπότε

$$I = \int_{AB} y ds = \int_3^{24} 2\sqrt{x}\sqrt{1+(1/x)}\, dx = 2\int_3^{24} \sqrt{x+1}dx = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_3^{24} = 156 .$$

9) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$

όπου c είναι το τόξο της καμπύλης $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\ y = \alpha\eta\mu t,\ z = \beta t$, με αρχή το σημείο Α($\alpha$, 0, 0) και πέρας το Β($\alpha$, 0, $2\pi\beta$).

Λύση

Το σημείο Α(α, 0, 0) αντιστοιχεί στην τιμή t = 0, και το Β(α, 0, $2\pi\beta$) στην t = 2π της παραμέτρου t. Επίσης $\dot{x} = -\alpha\eta\mu t,\ \dot{y} = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\ \dot{z} = \beta$. Άρα

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds = \int_0^{2\pi} (\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t + \alpha^2\eta\mu^2 t + \beta^2 t^2)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\alpha^2+\beta^2 t^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,dt = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha^2 t + \beta^2\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(2\pi\alpha^2 + \frac{8\pi^3\beta^2}{3}\right).$$

10) Να υπολογιστεί το μήκος της περιφέρειας κύκλου c χρησιμοποιώντας επικαμπύλιο ολοκλήρωμα όταν η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=1$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $x^2+y^2=1$ είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\, t,\ y = \eta\mu\, t \text{ όπου } 0 \le t \le 2\pi \text{ και } \dot{x} = -\eta\mu\, t,\ \dot{y} = \sigma\upsilon\nu\, t$$

Επομένως το μήκος της περιφέρειας θα δίνεται (παρατήρηση 6. της 6.3 και τύπος (8) της 6.2) απ’ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα :

$$L = \oint_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi .$$

6.4 Άλλες ιδιότητες επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων

6.4.1 Υπολογισμός έργου με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Έστω το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_c Pdx + Qdy + Rdz \qquad (1)$$

όπου *P*, *Q*, *R*, είναι συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται κατά μήκος μιας προσανατολισμένης καμπύλης *c*. Θα εκφράσουμε το ολοκλήρωμα (1) με τη βοήθεια διανυσματικών συναρτήσεων (όπως ορίστηκε το (1) στην προηγούμενη παράγραφο 6.3, παρατήρηση 2), όπου οι συναρτήσεις αυτές καθορίζουν διανυσματικά πεδία.

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{F}(x,y,z) = P\vec{x}_0 + Q\vec{y}_0 + R\vec{z}_0 \qquad (2)$$

ορισμένη στα σημεία της *c* έτσι ώστε τα $P,\ Q,\ R$ να είναι συντεταγμένες της $\vec{F}$ στο τρισορθογώνιο σύστημα Oxyz. Έστω ακόμα *s* το μήκος τόξου κατά μήκος της *c* με *s* = 0 και *s* = *l* στο πέρας αυτής.

Η διανυσματική μονάδα $\vec{\varepsilon}_0$ της εφαπτομένης της *c* κατά τη θετική φορά σ' ένα σημείο της είναι:

$$\vec{\varepsilon}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{x}_0 + \frac{dy}{ds}\vec{y}_0 + \frac{dz}{ds}\vec{z}_0 \qquad (3)$$

όπου $\frac{dx}{ds} = \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \sigma\upsilon\nu\beta$, $\frac{dz}{ds} = \sigma\upsilon\nu\gamma$ συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{\varepsilon}_0$.

Η (3) γράφεται διαφορετικά

$$d\vec{r} = \vec{\varepsilon}_0 ds = dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0 . \qquad (4)$$

Επομένως οι σχέσεις (2) και (4) δίνουν (εσωτερικό γινόμενο)

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}_0 ds = Pdx + Qdy + Rdz \qquad (5)$$

Η (5) γράφεται συναρτήσει των συνημίτονων κατεύθυνσης του $\vec{\varepsilon}_0$

$$\vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}_0 ds = (P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma)ds \qquad (6)$$

Απ' τις (5) και (6) προκύπτει:

$$I = \int_c Pdx + Qdy + Rdz = \int_c \left(P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma\right) ds \qquad (7)$$

Η σχέση (7) μετατρέπει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους (αριστερό μέλος) σε ένα ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους (δεξιό μέλος) ($3^{η}$ παρατήρηση, παράγρ. 6.3).

Λόγω των (4) και (5) το ολοκλήρωμα (1) γράφεται σε διανυσματική μορφή

$$\int_0^l \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}_0 ds = \int_0^l \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8}$$

Αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = P\vec{x}_0 + Q\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$ είναι ένα ***πεδίο δυνάμεων***, τότε το ολοκλήρωμα (8) παριστάνει το ***έργο*** που παράγεται κατά τη μετακίνηση ενός υλικού σημείου πάνω στη καμπύλη *c* απ' την επίδραση της δύναμης αυτής. Δηλαδή

$$W = \int_c \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}_0 ds = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{9}$$

Στη περίπτωση τώρα, που η *c* δίνεται στη παραμετρική της μορφή

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

δηλαδή εισάγεται ο χρόνος *t* ως παράμετρος, τότε προκύπτει:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_c \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}dr = \int_{t=\alpha}^{\beta}\left(P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z}\right)dt \tag{9α}$$

όπως προκύπτει απ' τον τύπο (2) της 6.2.

Τότε, ως γνωστό, το διάνυσμα της ταχύτητας του κινούμενου υλικού σημείου είναι πάντα εφαπτόμενο της τροχιάς σε κάθε σημείο, άρα

$$\vec{\upsilon} = \frac{ds}{dt}\vec{\varepsilon}_0 \tag{10}$$

Έτσι η (10) γράφεται $\vec{\varepsilon}_0 ds = \vec{\upsilon}dt \Leftrightarrow \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}_0 ds = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dt$ οπότε η (9) γίνεται

$$W = \int_{AB}\vec{F}\cdot\vec{\varepsilon}_0\, ds = \int_{t=\alpha}^{t=\beta}\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\, dt \tag{11}$$

όπου [α, β] είναι το διάστημα τιμών των *t*. Ο τύπος (11) είναι καταλληλότερος αν ο δρόμος του υλικού σημείου ορίζεται με τα *x, y, z* ως συναρτήσεις του *t*.

6.4.2 Υπολογισμός εμβαδού με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Με τη βοήθεια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε το εμβαδόν ω ενός τόπου Α που βρίσκεται στο επίπεδο xOy και καταλήγει στην κλειστή καμπύλη *c*.

Αποδεικνύεται ότι ($2^{η}$ παρατήρηση της παραγρ. 6.5)

$$\omega = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx \tag{12}$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το εμβαδόν που ορίζεται απ' την έλλειψη

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu\, t, \quad y = \beta\eta\mu\, t \ \text{ με } \ 0 \le t \le 2\pi .$$

Λύση

Ο τύπος (12) δίνει, αν λάβουμε υπόψη ότι:

$$dx = -\alpha\eta\mu\, t dt, \quad dy = \beta\eta\mu\, t dt$$

$$\omega = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} \left(\alpha\sigma\upsilon\nu\, t \beta\sigma\upsilon\nu\, t + \beta\eta\mu\, t \alpha\eta\mu\, t\right) dt = \frac{1}{2}\alpha\beta\int_0^{2\pi} dt = \pi\alpha\beta .$$

2) Αν $\vec{F} = \left(3x^2 - 6yz\right)\vec{x}_0 + \left(2y + 3xz\right)\vec{y}_0 + \left(1 - 4xyz^2\right)\vec{z}_0$

να υπολογιστεί το $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ απ' το σημείο $A(0, 0, 0)$ ως το $B(1, 1, 1)$ κατά μήκος:

i) της καμπύλης c: $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ και

ii) της ευθείας που ενώνει τα A και B.

Λύση

Είναι (τύπος (4) της 6.4, όπου $d\vec{r} = dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0$)

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_c \left[\left(3x^2 - 6yz\right)\vec{x}_0 + \left(2y + 3xz\right)\vec{y}_0 + \left(1 - 4xyz^2\right)\vec{z}_0\right]\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_c \left(3x^2 - 6yz\right)dx + \left(2y + 3xz\right)dy + \left(1 - 4xyz^2\right)dz ,$$

διότι: $(f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0)\cdot(dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0) = f_1dx + f_2dy + f_3dz$.

i) Αν $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, τότε τα σημεία $A(0,0,0)$ και $B(1,1,1)$ αντιστοιχούν στις τιμές $t = 0$ και $t = 1$ αντίστοιχα. Επίσης, $dx = dt,\ dy = 2tdt,\ dz = 3t^2dt$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα μετά τις πράξεις γίνεται:

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{1} \left(3t^2 - 6t^5\right)dt + \left(4t^3 + 6t^5\right)dt + \left(3t^2 - 12t^{11}\right)dt =$$

$$= \int_{t=0}^{1} \left(-12t^{11} + 4t^3 + 6t^2\right)dt = \left[-t^{12} + t^4 + 2t^3\right]_0^1 = 2$$

ii) Η ευθεία που συνδέει τα σημεία $A(0, 0, 0)$ και $B(1, 1, 1)$ περνάει απ' το σημείο $A(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα

$$\vec{\delta} = \overrightarrow{AB}\left(1-0,\ 1-0,\ 1-0\right) = (1,\ 1,\ 1) .$$

Επομένως η εξίσωσή της είναι (παράγραφος 2.9.2)

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}=t$$

ή λύνοντας τη συνεχή εξίσωση ως προς *x*, *y*, *z*, βρίσκουμε τις παραμετρικές εξισώσεις

$x=t,\ y=t,\ z=t$ και $dx=dt,\ dy=dt,\ dz=dt$. Άρα

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{t=0}^{1}\left(3t^2-6t^2\right)dt+\left(2t+3t^2\right)dt+\left(1-4t^4\right)dt=\frac{6}{5}.$$

3) Να υπολογιστεί το έργο *W* που παράγεται κατά τη κίνηση υλικού σημείου πάνω στο επίπεδο xOy με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x=64\sqrt{3}t,\ \ y=64t-16t^2$$

κάτω απ' την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, που το μέτρο της είναι ανάλογο με το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας, ενώ η διεύθυνσή της είναι αντίθετη με εκείνη της ταχύτητας, από $t=0$ μέχρι $t=4$.

Λύση

Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $\dot{x}=\frac{dx}{dt}=64\sqrt{3},\ \dot{y}=\frac{dy}{dt}=64-32t$.

Επομένως, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, οι συνιστώσες της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι ανάλογες και αντίθετες με τις συνιστώσες της ταχύτητας. Άρα

$$F_1=-64\sqrt{3}\lambda,\quad F_2=-(64-32t)\lambda \text{ (όπου } \lambda \text{ θετική σταθερά).}$$

Δηλαδή η καμπύλη *c* πάνω στην οποία κινείται το υλικό σημείο έχει:

- παραμετρικές εξισώσεις: $x=64\sqrt{3}t,\ \ y=64t-16t^2$,
- διάνυσμα της ταχύτητας: $\vec{\upsilon}=\dot{x}\vec{x}_0+\dot{y}\vec{y}_0=64\sqrt{3}\vec{x}_0+(64-32t)\vec{y}_0$
- διάνυσμα της δύναμης: $\vec{F}=-64\sqrt{3}\lambda\vec{x}_0-(64-32t)\lambda\vec{y}_0$. Επομένως:

$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=-\lambda\left[\left(64\sqrt{3}\right)^2+(64-32t)^2\right]$$

και το έργο *W* είναι (τύπος (11) της 6.4):

$$W=\int_0^4\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\,dt=-1024\lambda\int_0^4\left(16-4t+t^2\right)dt=-54613{,}3\lambda.$$

4) Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση υλικού σημείου κατά μήκος της καμπύλης c: $x = t^2 + 1,\ y = 2t^2,\ z = t^3$ κάτω απ' την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = 3xy\vec{x}_0 - 5z\vec{y}_0 + 10x\vec{z}_0$ απ' το σημείο $A(2, 2, 1)$ στο σημείο $B(5, 8, 8)$.

Λύση

Τα σημεία A και B της καμπύλης c αντιστοιχούν προφανώς στις τιμές

$t_A = 1$ και $t_B = 2$. (Θέτουμε στη $x = t^2 + 1$ $x_A = 2,\ x_B = 5$).

Έτσι έχουμε (τύπος (9α) της 6.3):

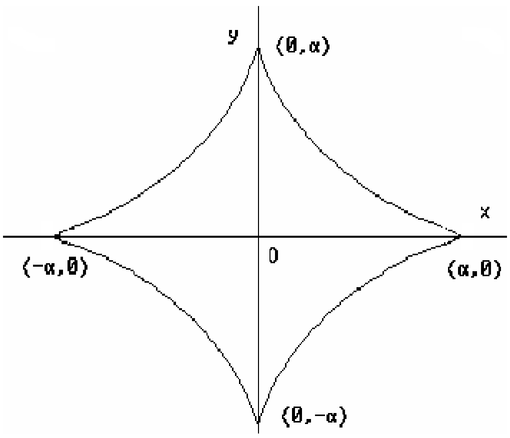
$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c 3xydx - 5zdy + 10xdz =$$

$$= \int_{t=1}^{2} \left(12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2\right) dt = \left[2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3\right]_1^2 = 303 .$$

5) Να υπολογιστεί με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την αστεροειδή καμπύλη

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu^3 t,\ y = \alpha\eta\mu^3 t,\ t \in [0,\ 2\pi].$$

Λύση



Θα εφαρμόσουμε τον τύπο

$$\omega = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx .$$

Είναι

$$dx = -3\alpha\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu\, t dt \text{ και}$$

$$dy = 3\alpha\,\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu\, t dt .$$

Επομένως

$$\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\alpha\sigma\upsilon\nu^3 t \cdot 3\alpha\,\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu\, t + \alpha\,\eta\mu^3 t \cdot 3\alpha\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu\, t) dt =$$

$$= \frac{3\alpha^2}{2}\int_0^{2\pi} \eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu^2 t dt = \frac{3\alpha^2}{8}\int_0^{2\pi} (2\eta\mu\, t\,\sigma\upsilon\nu\, t)^2 dt =$$

$$= \frac{3\alpha^2}{8}\int_0^{2\pi} (\eta\mu\, 2t)^2 dt = \frac{3\alpha^2}{16}\int_0^{2\pi} (\eta\mu\, 2t)^2 d(2t) =$$

$$= \frac{3\alpha^2}{16}\left[\frac{-\eta\mu 2t\sigma\upsilon\nu 2t + 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\alpha^2\pi}{8} .$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$$\vec{F}(x,y,z)=e^x\vec{x}_0+e^z\vec{y}_0+xyz\vec{z}_0$$

όταν μετατοπίζεται από το σημείο Α(1, 0, 0) στο σημείο Β(0, 1, 1):

α) κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ,

β) κατά μήκος της καμπύλης *c*: $y=z,\ 2x+y^2+z^2-2=0$

(*Απάντηση*: **α)** $1/12$, **β)** $2/15$)

2) Ομοίως, να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$$\vec{F}(x,y,z)=(3x^2-6yz)\vec{x}_0+(3xz+2y)\vec{y}_0+(1-4xyz^2)\vec{z}_0$$

όταν μετατοπίζεται από το σημείο Α(0, 0, 0) στο σημείο Β(1, 1, 1) κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. (*Απάντηση*: $6/5$)

3) Να υπολογιστεί με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^3,\ y=x^{1/2}$. (*Απάντηση*: $5/12$)

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{AB}} ydx-xdy$, όπου ΑΒ είναι το τόξο της καμπύλης $x=t-\eta\mu\, t$, $y=1-\sigma\upsilon\nu\, t$, $t\in[0,2\pi]$. (*Απάντηση*: 6π)

5) Να υπολογιστεί το $\int_{AB}(x+y)dx+(y-x)dy$ κατά μήκος:

i) της παραβολής $y^2=x$, **ii)** της καμπύλης $x=2t^2+t+1,\ \ y=t^2+1$

όπου $A(1,1)$ και $B(4,2)$. (*Απάντηση*: **i)** $34/3$ **ii)** $32/3$)

6) Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$$\vec{F}(x,y,z)=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+(x+y+z)\vec{z}_0$$

όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το σημείο Α(0, 0, 0) στο σημείο Β(1, 1, 1) κατά μήκος της καμπύλης *c*: $\vec{r}(t)=t\vec{x}_0+t^2\vec{y}_0+t^3\vec{z}_0$. (*Απάντηση*: $57/20$)

6.5 Θεώρημα του Green στο επίπεδο

Το θεώρημα ή τύπος του *Green* (Γκρην) *στο επίπεδο* συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης *c* και ένα διπλό ολοκλήρωμα στον *επίπεδο τόπο D* που ορίζει αυτή η κλειστή καμπύλη *c*.

Δίνουμε όμως πρώτα τον παρακάτω ορισμό:

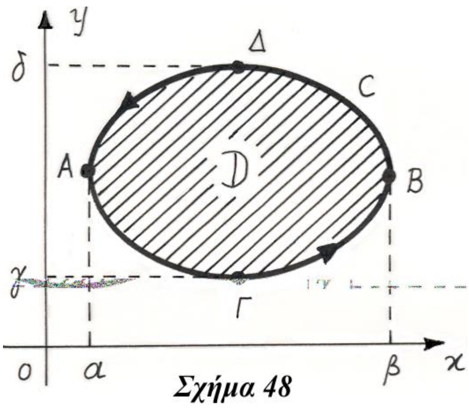
«Ένας επίπεδος τόπος D λέγεται *απλά συνεκτικός* όταν κάθε κλειστή καμπύλη που ανήκει στο τόπο D μπορεί συνεχώς να συρρικνωθεί ώστε να γίνει σημείο, χωρίς να εγκαταλείψει το τόπο D. Αν ο τόπος D δεν είναι απλά συνεκτικός, τότε λέγεται *πολλαπλά συνεκτικός*. Ένας τέτοιος τόπος είναι αυτός που έχει κενά (τρύπες)».

Το **θεώρημα του Green στο επίπεδο** διατυπώνεται ως εξής:

Έστω $P,\ Q,\ \dfrac{\partial P}{\partial y},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ συναρτήσεις των x, y συνεχείς στον απλά συνεκτικό τόπο D που περικλείεται από μια καμπύλη c έτσι ώστε κάθε παράλληλη προς τον Oy ή τον Ox να τέμνει την c σε δύο το πολύ σημεία (σχήμα 48). Τότε:

$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\ . \qquad (1)$$

Απόδειξη



Σχήμα 48

Υποθέτουμε ότι ο τόπος D περιβάλλεται στο κάτω μέρος απ' την καμπύλη ΑΓΒ = c_1 με εξίσωση $y = y_1(x)$ και στο πάνω μέρος απ' την καμπύλη ΑΔΒ = c_2 με εξίσωση $y = y_2(x)$ όπου $y_1(x) \le y_2(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και ότι $c_1 + c_2 = c$ δηλαδή οι καμπύλες c_1, c_2 αποτελούν τη κλειστή καμπύλη c.

Τότε, απ' τα διπλά ολοκληρώματα έχουμε:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{x=\alpha}^{\beta} \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_{x=\alpha}^{\beta} \left[P(x,\ y) \right]_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta P(x,\ y_2(x))\, dx - \int_\alpha^\beta P(x,\ y_1(x))\, dx =$$

$$= \int_{\text{ΑΔΒ}} P(x,y)dx - \int_{\text{ΑΓΒ}} P(x,y)dx =$$

$$= -\int_{\text{ΒΔΑ}} Pdx - \int_{\text{ΑΓΒ}} Pdx = -\int_{c_2} Pdx - \int_{c_1} Pdx = -\oint_c Pdx \qquad (2)$$

Εντελώς ανάλογα, υποθέτουμε τώρα ότι ο τόπος D περιβάλλεται από αριστερά απ' την καμπύλη ΔΑΓ $= c_1'$ με εξίσωση $x = x_1(y)$ και από δεξιά απ' την καμπύλη

ΓΒΔ = c_2' με εξίσωση $x = x_2(y)$ όπου $x_1(y) \le x_2(y)$ για κάθε $y \in [\gamma, \delta]$ και ότι c_1' + c_2' = c, δηλαδή οι καμπύλες c_1', c_2' αποτελούν τη κλειστή καμπύλη c. Τότε

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{y=\gamma}^{\delta} \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y=\gamma}^{\delta} \left[Q(x, y) \right]_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy =$$

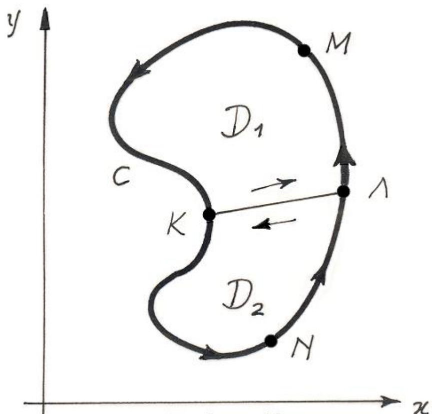
$$= \int_{\gamma}^{\delta} Q(x_2(y), y) dy - \int_{\gamma}^{\delta} Q(x_1(y), y) dy = \int_{\delta}^{\gamma} Q(x_1(y), y) dy +$$

$$+ \int_{\gamma}^{\delta} Q(x_2(y), y) dy = \int_{\Delta\mathrm{A}\Gamma} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma\mathrm{B}\Delta} Q(x, y) dy = \oint_c Qdy \qquad (3)$$

Αφαιρώντας τις (3) και (2) κατά μέλη προκύπτει η (1).

6.5.1 Ιδιότητες του τύπου του Green στο επίπεδο

1) Ο τύπος του Green ισχύει και στη περίπτωση όπου:



Σχήμα 49

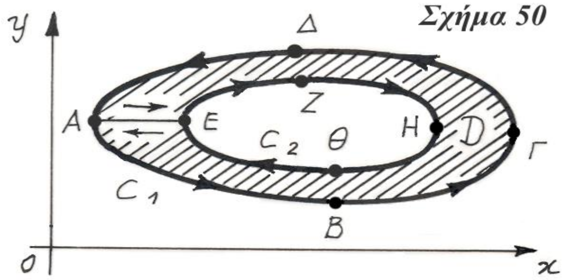
Α) Ευθείες παράλληλες προς κάποιον από τους άξονες συντεταγμένων Οx ή Οy ή και τους δύο, τέμνουν τη c σε περισσότερα από δύο σημεία. Π. χ. στη κλειστή καμπύλη του διπλανού σχήματος 49, ευθείες παράλληλες προς τον Οy συναντούν τη c σε περισσότερα από 2 σημεία. Φέρνοντας την ΚΛ χωρίζουμε τον D σε δύο τόπους D_1 και D_2 που είναι της αρχικής μορφής για τους οποίους εφαρμόζεται το θεώρημα του Green. Έτσι έχουμε για τους τόπους D_1, D_2:

$$\int_{\mathrm{K\Lambda MK}} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \ \int_{\mathrm{KN\Lambda K}} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \ .$$

Προσθέτοντας τα αριστερά μέλη των τελευταίων σχέσεων, παραλείποντας την ολοκληρωτέα παράσταση $Pdx + Qdy$ έχουμε:

$$\int_{\mathrm{K\Lambda MK}} + \int_{\mathrm{KN\Lambda K}} = \int_{\mathrm{K\Lambda}} + \int_{\mathrm{\Lambda MK}} + \int_{\mathrm{KN\Lambda}} + \int_{\mathrm{\Lambda K}} = \int_{\mathrm{\Lambda MK}} + \int_{\mathrm{KN\Lambda}} = \int_{\mathrm{\Lambda MKN\Lambda}} . \left(\text{όπου} \int_{\mathrm{K\Lambda}} = -\int_{\mathrm{\Lambda K}} \right)$$

Επίσης: $\iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_{D}$. Άρα $\int_{\mathrm{\Lambda MKN\Lambda}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$.



Σχήμα 50

Β) Ο τόπος D δεν είναι απλά συνεκτικός αλλά πολλαπλά συνεκτικός, όπως αυτός του σχήματος 50. Το σύνορο του D που αποτελείται απ' το εξωτερικό σύνορο ΑΒΓΔΑ = c_1 και το εσωτερικό σύνορο ΕΖΗΘΕ = c_2 όπου $c_1 + c_2 = c$, πρέπει να διαγραφεί κατά τη θετική φορά. Αυτή ορίζεται έτσι ώστε ένα άτομο που κινείται κατά τη φορά αυτή πρέπει να έχει πάντοτε το τόπο στα αριστερά του (ο ορισμός αυτός της θετικής φοράς αποτελεί επέκταση της θετικής φοράς που ορίστηκε στην ιδιότητα 6 της 6.3). Οι θετικές φορές είναι αυτές που σημειώνονται στο σχήμα. Φέρνουμε την ΑΕ. Τότε ο τόπος ΑΕΖΗΘΕΑΒΓΔΑ είναι απλά συνεκτικός και το θεώρημα του Green ισχύει. Έτσι:

$$\int_{\text{ΑΕΖΗΘΕΑΒΓΔΑ}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Όμως το αριστερό μέλος, παραλείποντας το $Pdx + Qdy$, ισούται με

$$\int_{\text{ΑΕ}} + \int_{\text{ΕΖΗΘΕ}} + \int_{\text{ΕΑ}} + \int_{\text{ΑΒΓΔΑ}} = \int_{\text{ΕΖΗΘΕ}} + \int_{\text{ΑΒΓΔΑ}} \qquad (\text{όπου} \int_{\text{ΑΕ}} = -\int_{\text{ΕΑ}}).$$

Έτσι, επειδή ΕΖΗΘΕ = c_2 και ΑΒΓΔΑ = c_1, ενώ $c = c_1 + c_2$ είναι το σύνορο του D που αποτελείται απ' τις c_1, c_2 οι οποίες διαγράφονται κατά τις θετικές φορές, είναι:

$$\int_{c_1} + \int_{c_2} = \int_c \quad \text{άρα} \quad \int_c Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

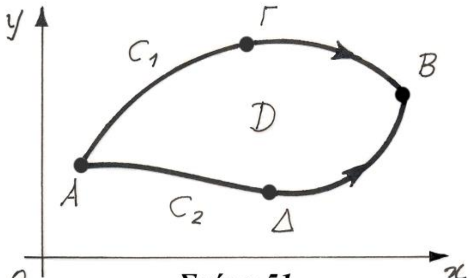
2) Αν στο τύπο (1) θέσουμε $P = -y$ και $Q = x$, τότε αυτός παίρνει τη μορφή:

$$\int_c -ydx + xdy = 2\iint_D dxdy \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx = \iint_D dxdy$$

που είναι το εμβαδόν του τόπου D (ιδιότητα (6) της παραγράφου 4.2)

3) Αν $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ τότε $\displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$, οπότε και

$\oint_c Pdx + Qdy = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη c που περιέχει το τόπο D.



Σχήμα 51

4) Επίσης, αν $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ για κάθε $(x, y) \in D$ τότε το $\int_A^B Pdx+Qdy$ είναι ***ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης με άκρα τα Α και Β*** στο τόπο *D*.

Πράγματι, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα 51, έχουμε:

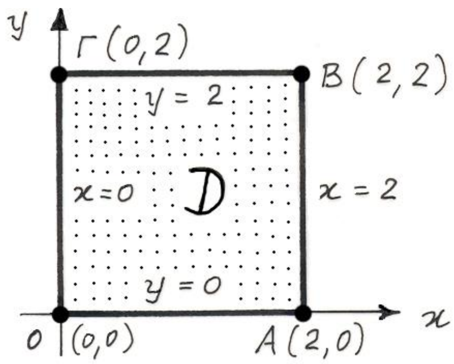
$$\int_{\text{ΑΓΒΔΑ}} Pdx+Qdy=0 \text{ ή } \int_{\text{ΑΓΒ}} + \int_{\text{ΒΔΑ}} =0 \Leftrightarrow \int_{\text{ΑΓΒ}} =-\int_{\text{ΒΔΑ}} =\int_{\text{ΑΔΒ}} \text{ άρα } \int_{c_1} =\int_{c_2}$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο οπό το δρόμο ολοκλήρωσης.

<u>Σημείωση</u>:

Η συνθήκη $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ταυτίζεται με τη συνθήκη που είδαμε στην ιδιότητα 5. της παρ. 6.3 (περίπτωση ολικού διαφορικού της $Pdx+Qdy=0$).

Παραδείγματα



Σχήμα 52

1) Να επαληθευτεί ο τύπος του Green για το ολοκλήρωμα:

$$I=\oint_c \left(x^2-xy^3\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$$

όπου *c* είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία Ο(0, 0), Α(2, 0), Β(2, 2), Γ(0, 2).

Λύση

Προφανώς οι συναρτήσεις του ολοκληρώματος *I*

$$P(x,y)=x^2-xy^3 \text{ και } Q(x,y)=y^2-2xy,$$

καθώς και ο τόπος *D*, πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Green (σχήμα 52).

Είναι: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2y,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2$. Άρα

$$I=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D (-2y+3xy^2)dxdy=$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{2}\left(-2y+3xy^2\right)dy\right)dx = \int_{x=0}^{2}\left(-4+8x\right)dx = 8. \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τώρα το: $I = \oint_c Pdx + Qdy = \int_{\text{ΟΑ}} + \int_{\text{ΑΒ}} + \int_{\text{ΒΓ}} + \int_{\text{ΓΟ}}$.

Η εξίσωση της ΟΑ είναι $y = 0$ άρα $dy = 0$ οπότε

$$\int_{\text{ΟΑ}}\left(x^2 - xy^3\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_{x=0}^{2} x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

Η εξίσωση της ΑΒ είναι $x = 2$ άρα $dx = 0$ έτσι

$$\int_{\text{ΑΒ}}\left(x^2 - xy^3\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_{y=0}^{2}\left(y^2 - 4y\right)dy = -\frac{16}{3}.$$

Η εξίσωση της ΒΓ είναι $y = 2$ άρα $dy = 0$ οπότε

$$\int_{\text{ΒΓ}}\left(x^2 - xy^3\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_{x=2}^{0}\left(x^2 - 8x\right)dx = \frac{40}{3}.$$

Τέλος, η εξίσωση της ΓΟ είναι $x = 0$ άρα $dx = 0$ έτσι

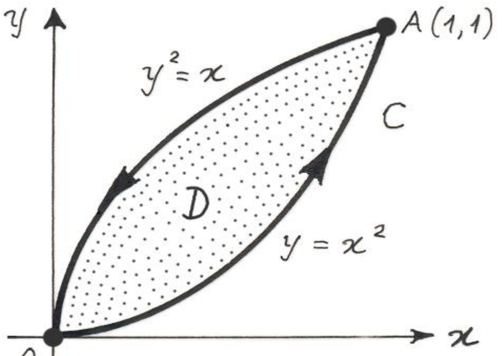
$$\int_{\text{ΓΟ}}\left(x^2 - xy^3\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_{y=2}^{0} y^2 dy = -\frac{8}{3}.$$

Άρα $I = \int_{\text{ΟΑ}} + \int_{\text{ΑΒ}} + \int_{\text{ΒΓ}} + \int_{\text{ΓΟ}} = \frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{40}{3} - \frac{8}{3} = 8$ (2)

Απ' τα αποτελέσματα των (1) και (2) επαληθεύεται ο τύπος του Green.

2) Να επαληθευτεί το θεώρημα του Green στο επίπεδο για το ολοκλήρωμα

$$\oint_c \left(2xy - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$$



Σχήμα 53

όπου c είναι η κλειστή καμπύλη που περικλείεται απ' τις εξισώσεις $y = x^2$, $y^2 = x$.

Λύση

Λύνουμε πρώτα το σύστημα των εξισώσεων $y = x^2$, $y^2 = x$ για να βρούμε τις τομές αυτών. Είναι: $\left((x^2)\right)^2 = x$ ή $x(x^3 - 1) = 0$ με πραγματικές ρίζες τις $x = 0$, $x = 1$, που δίνουν $y = 0$, $y = 1$. Έτσι οι καμπύλες τέμνονται στα Ο(0, 0) και Α(1, 1). Η θετική φορά διαγραφής της c φαίνεται στο σχήμα 53.

Κατά μήκος της c_1 : $y = x^2$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται με

$$I_1 = \int_{x=0}^{1} \left(2x^3 - x^2\right) dx + \left(x + x^4\right) 2xdx = \int_0^1 \left(2x^5 + 2x^3 + 2x^2\right) dx = \frac{7}{6}.$$

Κατά μήκος της c_2 : $x = y^2$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται με

$$I_2 = \int_{y=1}^{0} \left(2y^3 - y^4\right) 2ydy + \left(y^2 + y^2\right) dy = \int_1^0 \left(-2y^5 + 4y^4 + 2y^2\right) dy = -\frac{17}{15}.$$

Επομένως $\int_{c_1} Pdx + Qdy + \int_{c_2} Pdx + Qdy = \oint_c Pdx + Qdy = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$. (1)

Επίσης $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$. Επομένως το διπλό ολοκλήρωμα θα είναι

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1 - 2x) dxdy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\, dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(y - 2xy\right) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3\right) dx = \frac{1}{30} \qquad (2)$$

Απ' τα αποτελέσματα των (1) και (2) επαληθεύεται το θεώρημα Green.

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\oint_c \left(x^2 y\sigma\upsilon\nu\, x + 2xy\eta\mu\, x - y^2 e^x\right) dx + \left(x^2 \eta\mu\, x - 2ye^x\right) dy$$

όπου c η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Λύση

Είναι: $P = x^2 y\sigma\upsilon\nu x + 2xy\eta\mu x - y^2 e^x$, $Q = x^2 \eta\mu x - 2ye^x$. Ακόμα

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x - 2ye^x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x - 2ye^x.$$

Άρα $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Επομένως $\oint_c Pdx + Qdy = 0$ κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης, άρα και της c.

4. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_A^B \left(x^2 - y^2\right) dx + \left(3 - 2xy\right) dy$$

με $A(0, 0)$, $B(2, 2)$. Ο δρόμος της c δεν καθορίζεται.

Λύση

Είναι $P = x^2 - y^2$ και $Q = 3 - 2xy$, οπότε, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y = \dfrac{\partial Q}{dx}$.

Έτσι, ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία που γνωρίσαμε στην ολοκλήρωση ολικών διαφορικών στην παράγραφο 2.5, για τον υπολογισμό της $f(x, y)$. Αυτή θα είναι τέτοια ώστε η παράσταση $Pdx + Qdy$ να είναι ολικό διαφορικό της, δηλαδή:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Pdx + Qdy \text{ όπου}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = x^2 - y^2 \quad (1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q = 3 - 2xy \quad (2).$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + g(y) \qquad (3)$$

όπου $g(y)$ είναι αυθαίρετη διαφορίσιμη συνάρτηση του y.

Παραγωγίζοντας την (3) ως προς y παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + g'(y) = 3 - 2xy \text{ λόγω της (2). Άρα}$$

$$g'(y) = 3, \text{ οπότε } g(y) = 3y + c \quad (c \text{ σταθερή}).$$

Έτσι η (3) γράφεται: $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} - xy^2 + 3y + c$.

Επειδή το αρχικό ολοκλήρωμα ως ολικό διαφορικό είναι ανεξάρτητο της καμπύλης c και εξαρτάται μόνο απ' τα άκρα Α και Β, ως γνωστό (ιδιότητα 5 της 6.3) θα είναι

$$\int_A^B Pdx + Qdy = f(x, y)\Big|_A^B = f(2{,}2) - f(0{,}0) = \left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2\right) - 0 = \frac{2}{3}.$$

Αυτός είναι ο λόγος που δεν αναφέρεται στο αρχικό ολοκλήρωμα ο δρόμος της c.

5. Να επαληθευτεί το θεώρημα του Green όταν $P(x, y) = 2y,\ Q(x, y) = 3x$ και ο τόπος D είναι $x^2 + y^2 \le 1$ (ο κύκλος με το εσωτερικό του ακτίνας 1).

Λύση

Είναι $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3 - 2 = 1$. Άρα

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D dxdy = \text{εμβ. κύκλου ακτίνας } 1 = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $c : x^2 + y^2 = 1$ είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta,\ \ y = \eta\mu\theta \ \text{ με } \ 0 \le \theta \le 2\pi \ \text{ και } \ dx = -\eta\mu\theta\, d\theta,\ \ dy = \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta .$$

Άρα: $\oint_c Pdx + Qdy = \int_{\theta=0}^{2\pi} 2\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta)\, d\theta + 3\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-5\eta\mu^2\theta + 3\right) d\theta = -5\left[-\frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[3\theta\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Επομένως ισχύει το θεώρημα του Green στο επίπεδο.

6.6 Εφαρμογές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στη Μηχανική

Θεωρούμε μια υλική καμπύλη c, π. χ. ένα σύρμα στο τρισδιάστατο χώρο, με συνεχή συνάρτηση κατανομής της γραμμικής πυκνότητας $\delta = \delta(x, y, z)$. Τότε:

1. Η συνολική μάζα m που φέρεται σε ένα τόξο της καμπύλης c, δίνεται από το τύπο (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)

$$m = \int_c \delta(x, y, z) ds \qquad (1)$$

Για $\delta(x, y, z) = \alpha$ σταθερό είναι $m = \alpha \int_c ds = \alpha L$ (2)

δηλαδή εξαρτάται από το μήκος της καμπύλης c.

2. Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους Κ.Β. του τόξου AB της c είναι

$$x_G = \frac{1}{m}\int_c x\delta(x, y, z)ds,\ \ y_G = \frac{1}{m}\int_c y\delta(x, y, z)ds,\ \ z_G = \frac{1}{m}\int_c z\delta(x, y, z)ds, \quad (3)$$

Για ομογενή καμπύλη c με σταθερή πυκνότητα $\delta = \alpha$ είναι

$$x_G = \int_c xds \Big/ \int_c ds,\quad y_G = \int_c yds \Big/ \int_c ds,\quad z_G = \int_c zds \Big/ \int_c ds \qquad (4)$$

3. Η ροπή αδράνειας του τόξου AB είναι ($c = AB$):

$i)$ ως προς τον Ox: $I_x = \int_c \left(y^2 + z^2\right) \delta(x,y,z)ds$

$ii)$ ως προς τον Oy: $I_y = \int_c \left(x^2 + z^2\right) \delta(x,y,z)ds$ (5)

$iii)$ ως προς τον Oz: $I_z = \int_c \left(x^2 + y^2\right) \delta(x,y,z)ds$

Για επίπεδη υλική καμπύλη έχουμε τους τύπους (i) και (ii) με $z = 0$.

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το κέντρο βάρους της κυκλοειδούς καμπύλης με παραμετρικές ε-ξισώσεις: $x = \alpha(t - \eta\mu t),\ y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\, t)\quad 0 \le t \le 2\pi$ αν είναι ομογενής.

Λύση

Επειδή η κυκλοειδής είναι κλειστή καμπύλη θα είναι

$$x_G = \oint_c xds \Big/ \oint_c ds, \quad y_G = \oint_c yds \Big/ \oint_c ds\ . \tag{1}$$

Είναι $\dot{x} = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\, t), \quad \dot{y} = \alpha\eta\mu t$. Άρα

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\alpha^2(1 - \sigma\upsilon\nu\, t)^2 + \alpha^2\eta\mu^2 t} = \alpha\sqrt{2 - 2\sigma\upsilon\nu\, t} =$$
$$= \alpha\sqrt{2(1 - \sigma\upsilon\nu\, t)} = \alpha\sqrt{2 \cdot 2\eta\mu^2\,(t/2)} = 2\alpha\eta\mu(t/2)$$

Επομένως οι σχέσεις (1) γίνονται:

$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi} \alpha\left(t - \eta\mu t\right) \cdot 2\alpha\eta\mu\ {}^{t}\!/_{2}\, dt}{\int_0^{2\pi} 2\alpha\eta\mu\ {}^{t}\!/_{2}\, dt} = \frac{J_x}{J},$$

$$y_G = \frac{\int_0^{2\pi} \alpha\left(1 - \sigma\upsilon\nu t\right) \cdot 2\alpha\eta\mu\ {}^{t}\!/_{2}\, dt}{\int_0^{2\pi} 2\alpha\eta\mu\ {}^{t}\!/_{2}\, dt} = \frac{J_y}{J}$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα J και μετά το J_x. Είναι:

$$J = \int_0^{2\pi} 2\alpha\eta\mu\frac{t}{2}dt = 2\alpha \cdot 2\int_0^{2\pi} \eta\mu\frac{t}{2}\, d\!\left(\frac{t}{2}\right) = 4\alpha\left[-\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8\alpha\ .$$

$$J_x = \int_0^{2\pi} \alpha(t - \eta\mu\, t) \cdot 2\alpha\eta\mu\frac{t}{2}\, dt =$$
$$= 2\alpha^2\int_0^{2\pi} t\,\eta\mu\frac{t}{2}\, dt + 2\alpha^2\int_0^{2\pi} -\eta\mu\, t\,\eta\mu\frac{t}{2}\, dt = 2\alpha^2(A_1 + A_2)$$

όπου $A_1 = \int_0^{2\pi} t\eta\mu \frac{t}{2} dt$ και $A_2 = \int_0^{2\pi} -\eta\mu t\eta\mu \frac{t}{2} dt$. Είναι:

$$A_1 = 2\int_0^{2\pi} t\eta\mu \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -2\int_0^{2\pi} td\left(\sigma\upsilon\nu \frac{t}{2}\right) = -2\left(\left[t\sigma\upsilon\nu \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu \frac{t}{2} dt\right) =$$

$$= -2\left(2\pi(-1) - 2\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 4\pi + 4\left[\eta\mu \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$A_2 = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(t - \frac{t}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(t + \frac{t}{2}\right)\right]dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sigma\upsilon\nu \frac{t}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{3t}{2}\right)dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu \frac{3t}{2} d\left(\frac{3t}{2}\right) = -\left[\eta\mu \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\left[\eta\mu \frac{3t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= (\eta\mu\pi - \eta\mu 0) + 1/3\,(\eta\mu 3\pi - \eta\mu 0) = 0$$

Συνεπώς $J_x = 2\alpha^2 (A_1 + A_2) = 2\alpha^2 (4\pi + 0) = 8\pi\alpha^2$.

Έτσι, τελικά προκύπτει $x_G = J_x / J = 8\pi\alpha^2 / 8\alpha = \pi\alpha$.

Υπολογίζουμε τέλος το J_y. Είναι

$$J_y = \int_0^{2\pi} \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu t)2\alpha\,\eta\mu \frac{t}{2} dt = 2\alpha^2 \int_0^{2\pi} 2\eta\mu^2 \frac{t}{2}\eta\mu \frac{t}{2} dt$$

$$= 4\alpha^2 \int_0^{2\pi} \eta\mu^3 \frac{t}{2} dt = 8\alpha^2 \int_0^{2\pi} \eta\mu^3 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right).$$

Εφαρμόζοντας τον αναγωγικό τύπο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος: (βλέπε παράγραφο 8.6 αναγωγικών τύπων (παράρτημα))

$$A_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx = -\frac{\eta\mu^{\nu-1} x\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu - 1}{\nu} A_{\nu-2} \text{ έχουμε}$$

$$8\alpha^2 \int_0^{2\pi} \eta\mu^3 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 8\alpha^2 \left(\left[-\frac{\eta\mu^2 \, t/2 \, \sigma\upsilon\nu \, t/2}{3}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \eta\mu \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$= 8\alpha^2 \left(-\frac{0}{3} + \frac{2}{3}\left[-\sigma\upsilon\nu \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\right) = 8\alpha^2 \cdot \frac{2}{3}\big(-(-1 - 1)\big) = \frac{32\alpha^2}{3}.$$

Και τελικά $y_G = \frac{J_y}{J} = \frac{32\alpha^2/3}{8\alpha} = \frac{4}{3}\alpha$.

Ώστε το κέντρο βάρους θα έχει συντεταγμένες $\left(\pi\alpha\,,\ \dfrac{4\alpha}{3}\right)$.

2) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του τόξου AB της καμπύλης $y = x^3$ απ' το σημείο $A(0, 0)$ μέχρι το $B(1, 1)$ ως προς την ευθεία $y = x$ όταν η πυκνότητα του τόξου είναι $\delta(x, y) = \dfrac{2x}{y\sqrt{1+9x^4}}$.

Λύση

Αν καλέσουμε d την απόσταση του σημείου $M(x, y)$ της καμπύλης απ' τη διχοτόμο $y = x$ τότε θα είναι: $d^2 = \left(\dfrac{|-1\cdot x + 1\cdot y + 0|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2 = \dfrac{(x-y)^2}{2}$. Επομένως η ροπή αδράνειας θα είναι ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμο των αξόνων Ox, Oy):

$$I_{y=x} = \int_{AB} d^2\delta(x, y)ds = \int_{AB} \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-y)^2\cdot 2x}{y\sqrt{1+9x^4}}ds$$. Είναι

$ds = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$ και $y'(x) = 3x^2$ οπότε $ds = \sqrt{1+9x^4}\,dx$.

Επομένως το ολοκλήρωμα I γίνεται:

$$I = \int_0^1 \frac{\left(x-x^3\right)^2 x}{x^3\sqrt{1+9x^4}}\cdot\sqrt{1+9x^4}\,dx = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^2 dx = \left[x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

3) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Κ. Β. της έλικας

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\quad y = \alpha\eta\mu t\quad z = \beta t,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

η οποία έχει σταθερή πυκνότητα.

Λύση

Είναι $x_G = \int_c xds \Big/ \int_c ds,\quad y_G = \int_c yds \Big/ \int_c ds,\quad z_G = \int_c zds \Big/ \int_c ds$ (1)

Επίσης, $\dot{x} = -\alpha\eta\mu t,\quad \dot{y} = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\quad \dot{z} = \beta$. Άρα

$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \sqrt{\alpha^2\eta\mu^2 t + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t + \beta^2}\,dt = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,dt$ και

$$\int_c ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, dt = 2\pi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \lambda .$$

Επομένως οι τύποι (1) γίνονται:

$$x_G = \int_0^{2\pi} \alpha\,\sigma\upsilon\nu\, t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,dt \Big/ \lambda$$

$$y_G = \int_0^{2\pi} \alpha\,\eta\mu\, t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,dt \Big/ \lambda ,\quad z_G = \int_0^{2\pi} \beta\, t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,dt \Big/ \lambda .$$

Είναι:

$$x_G = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu\, tdt \Big/ \lambda \Rightarrow x_G = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\left[\eta\mu\, t\right]_0^{2\pi} \Big/ \lambda = 0$$

$$y_G = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\int_0^{2\pi} \eta\mu\, tdt \Big/ \lambda \Rightarrow y_G = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\left[-\sigma\upsilon\nu\, t\right]_0^{2\pi} \Big/ \lambda = 0$$

$$z_G = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\int_0^{2\pi} tdt \Big/ \lambda \Rightarrow z_G = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\left[t^2/2\right]_0^{2\pi} \Big/ \lambda = \beta\pi .$$

Άρα οι συντεταγμένες του Κ. Β. της έλικας είναι: (0, 0, $\beta\pi$).

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα:

α) $\int_{AB} \frac{xdx + ydy}{x^2 y^2}$, όπου ΑΒ είναι το τόξο της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x = \sqrt{t},\ y = \sqrt{t+1},\ t \in [1, 4]$ και $\mathrm{A}(1, \sqrt{2}),\ \mathrm{B}(2, \sqrt{5})$ (*Απάντηση*: $\ln(8/5)$),

β) $\int_{AB} x^2 ydx + xy^2 dy$, όπου ΑΒ είναι το τόξο της παραβολής $y^2 = 4x$, από το σημείο $\mathrm{A}(1, 2)$ μέχρι το $\mathrm{B}(4, 4)$ (*Απάντηση*: $4276/35$),

γ) $\int_{AB} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, όπου ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία Α(1, 1, 1) και Β(4, 4, 4). (*Απάντηση*: $3\sqrt{3}$)

2) Να υπολογιστούν με χρήση του θεωρήματος Green τα ολοκληρώματα:

α) $I_1 = \oint_c (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$ όπου

c είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$, (*Απάντηση*: 16π)

β) $I_2 = \oint_c y^2 dx - x^2 dy$, όπου

i) c είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ και

ii) c είναι ο κύκλος $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. (*Απάντηση*: i) 0, ii) – 4π)

3) Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{AB} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2 y - 3xy^2)dy$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ενώνει τα σημεία Α(1, 2), Β(3, 4) και στη συνέχεια να βρεθεί η τιμή του. (*Απάντηση*: 236)

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c (x^2 y\sigma\upsilon\nu\, x + 2xy\eta\mu\, x - y^2 e^x)\, dx + (x^2 \eta\mu\, x - 2ye^x)\, dy$$

όπου c είναι η κλειστή αστεροειδής καμπύλη $x^{2/3} + y^{2/3} = \alpha^{2/3}$. (*Απάντηση*: 0)

5) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \oint_c \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$,

όπου c είναι ο κύκλος $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. (*Απάντηση*: 0)

6) Να υπολογιστούν τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα:

α) $\int_c yds$,

όπου c είναι το τόξο της παραβολής $y^2 = x$ που αποκόπτεται από την παραβολή $x^2 = y$ και έχει αρχή το σημείο Ο(0, 0). (*Απάντηση*: $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}$)

β) $\int_c \dfrac{ds}{x-y}$,

όπου c είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ της ευθείας $y = \dfrac{x}{2} - 2$,

με Α(0, –2) και Β(4, 0). (*Απάντηση*: $\sqrt{5}\ln 2$)

γ) $\int_c (x^2 + y^2)\, ds$,

όπου c ο κύκλος $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\ y = \alpha\eta\mu\, t,\ t \in [0, 2\pi],\ \alpha > 0$. (*Απάντηση*: $2\pi\alpha^3$)

7) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c \dfrac{ds}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$,

όπου c είναι η σπείρα $\rho = 1/\theta$ όπου $\sqrt{3} \le \theta \le 2\sqrt{2}$. (*Απάντηση*: $19/3$)

(*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το τύπο (10) της 6.2).

8) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c (x+y)\,ds$, όπου c η περίμετρος του τριγώνου ABO με κορυφές τα σημεία A(1, 0), B(0, 1), O(0, 0).

(*Υπόδειξη*: Να υπολογιστεί κατά μήκος καθεμιάς των πλευρών AB, BO, OA, αφού υπολογιστούν οι εξισώσεις αυτών.) (*Απάντηση*: $\sqrt{2}$)

9) Να επαληθευτεί ο τύπος του Green όπου $P = 4x - 2y,\ Q = 2x + 4y$ και D είναι η έλλειψη $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta,\ y = \eta\mu\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

10) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Κ. Β. του παραβολικού τόξου

$$x^2 = 1 - z,\ y = 0,\ 0 \le z \le 1$$

που έχει πυκνότητα $\delta = \sqrt{1+4x^2}$. (*Υπόδειξη*: Θέστε $x = t$).

11) Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται απ' τη δύναμη

$$\vec{F} = 3x^2\vec{x}_0 + (2xz - y)\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$$

η οποία μετακινεί το σημείο εφαρμογής κατά μήκος:

i) της καμπύλης $x = 2t^2,\ y = t,\ z = 4t^2 - t$ με $0 \le t \le 2$,

ii) της ευθείας απ' το σημείο A(0, 0, 0) μέχρι το B(3, 2, 1).

iii) της καμπύλης με εξισώσεις $x^2 = 2y,\ 3x^2 = 8z$ με $0 \le x \le 2$.

12) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_c xy\,ds$, όπου c είναι το τμήμα της έλλειψης $x^2/9 + y^2/4 = 1$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

13) Επίσης το ολοκλήρωμα $\int_c xy^2\,ds$, όπου c είναι το κυκλικό τόξο με παραμετρικές εξισώσεις $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\ y = \alpha\eta\mu t$ με $0 \le t \le \pi/2$.

14) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_c \left(x^2 + y^2 - z\right) ds$, όπου c είναι το τόξο της κυκλικής έλικας με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu t,\ y = \alpha\eta\mu t,\ z = \beta t,\ 0 \le t \le \pi.$$

15) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_c (2x + y)\,ds$, όπου c είναι ο κύκλος

$x^2 + y^2 = 25$, απ' το σημείο Α(3,4) ως το Β(4,3) κατά μήκος του συντομότερου δρόμου του κύκλου.

16) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{(1,1)}^{(3,5)} 2xy\ dx + \left(x^2 - y^2\right) dy$.

17) Το σημείο εφαρμογής $P(x, y, z)$ της δύναμης $\vec{F}(\vec{r}) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, όπου

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 \text{ και } r = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

μετατοπίζεται, από το σημείο Α(2, 2, 2) στο σημείο Β(1, 1, 1), κατά μήκος του ευθύγράμμου τμήματος ΑΒ. Να βρεθεί το παραγόμενο έργο. (*Απάντηση*: $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$)

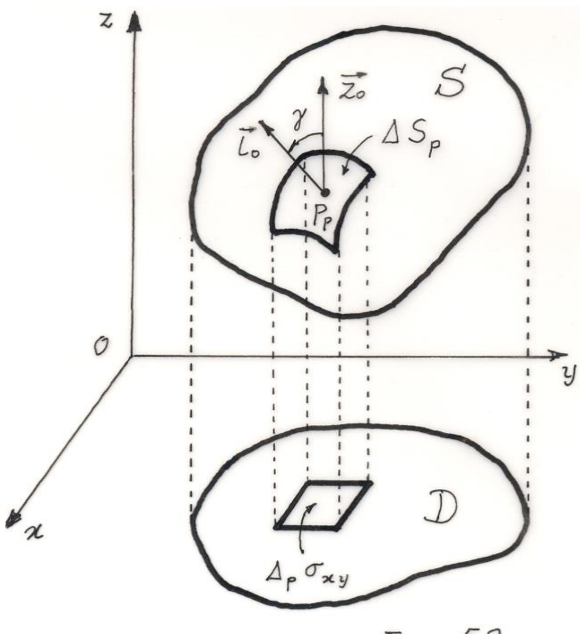
(*Υπόδειξη*: Στο έργο $W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{AB} \dfrac{xdx + ydy + zdz}{r^3}$ να αντικατασταθούν οι παραμετρικές εξισώσεις του ΑΒ που θα βρεθούν, από τις σχέσεις:

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$, όπου $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, όπως στο παράδειγμα 2 (ii) της παραγρ. 6.4.2).

Β. ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα αποτελούν φυσική γενίκευση των διπλών ολοκληρωμάτων και βρίσκουν εφαρμογές σε πολλά προβλήματα της Φυσικής. Στα ολοκληρώματα αυτά θεωρούμε συναρτήσεις που ορίζονται πάνω σε μια επιφάνεια, όπως π. χ. πυκνότητα κατανομής ηλεκτρικού φορτίου πάνω στην επιφάνεια ενός αγωγού, ταχύτητα σωματιδίων ενός ρευστού που περνάει από μια επιφάνεια κ.τ.λ.

6.7 Εμβαδό επιφάνειας



Σχ. 52

Έστω S μια επιφάνεια με εξίσωση $z = f(x, y)$ όπου η f είναι μονότιμη και συνεχής για κάθε $(x, y) \in \mathrm{D} \subset R^2$. Διαιρούμε το τόπο D σε ν μικρότερους τόπους που έχουν ορθογώνια εμβαδά $\Delta_\rho \sigma_{xy} = \Delta x_\rho \Delta y_\rho$, $\rho = 1, 2, \cdots, \nu$ και κατασκευάζουμε μια κατακόρυφη στήλη σε καθένα απ' τους στοιχειώδεις αυτούς τόπους που τέμνει την S κατά μια στοιχειώδη επιφάνεια ΔS_ρ με αντίστοιχο εμβαδό $\Delta_\rho \sigma$. Δηλαδή το $\Delta_\rho \sigma$ προβάλλεται κατά το $\Delta_\rho \sigma_{xy}$ πάνω στο επίπεδο Oxy (σχήμα 52).

Η κάθετη τώρα στην επιφάνεια S στο σημείο $P_\rho(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho) \in \Delta S_\rho$ έχει τη κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{l}_0$ (τύπος (11) παρ. 5.11), όπου

$$\vec{l}_0\left(-\frac{p}{\lambda},\ -\frac{q}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ \text{(υπενθυμίζεται ότι } p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\text{)}$$

Το συνημίτονο της γωνίας του καθέτου αυτού διανύσματος $\vec{l}_0$ με το $\vec{z}_0(0, 0, 1)$ μπορεί να υπολογιστεί από το εσωτερικό γινόμενο:

$\vec{l}_0 \cdot \vec{z}_0 = \left|\vec{l}_0\right| \cdot \left|\vec{z}_0\right| \sigma\upsilon\nu\gamma = 1 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma$. Αλλά

$$\vec{l}_0 \cdot \vec{z}_0 = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot 0 - \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} .$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ (1)

Επομένως $\Delta_\rho \sigma_{xy} = \Delta_\rho \sigma \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$ και σχηματίζοντας τα απειροστά εμβαδά

$d\sigma_{xy} = d\sigma \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$ ή $dxdy = d\sigma \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$, προκύπτει (1α)

$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy$. (2)

Ολοκληρώνοντας τη (2) βρίσκουμε το εμβαδό της επιφάνειας *S* που ορίζεται απ' το τόπο *D* (προβολή της *S* πάνω στο επίπεδο xOy). Έτσι έχουμε:

εμβ. $S = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy$ (3)

Ο τύπος (2) είναι ισοδύναμος με το τύπο (19) της παρ. 5.11:

$\Delta S = \sqrt{EG-F^2}\, dudv$,

που δίνει το εμβαδικό στοιχείο μιας επιφάνειας, όπως φαίνεται και απ' τη σχέση (9)

$l = \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+p^2+q^2}$ της ίδιας παραγράφου.

Ενώ ο τύπος (3) είναι ισοδύναμος με τον επόμενο τύπο (20) της παρ. 5.11:

$S = \iint\limits_T \sqrt{EG-F^2}\, dudv$,

που δίνει το εμβαδό της επιφάνειας *S* με καμπυλόγραμμες συντεταγμένες *u* και *v*.

Πράγματι, αν τα *x* και *y* είναι συναρτήσεις των *u* και *v*, δηλαδή

$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$ με $(u, v) \in \mathrm{T}$ και $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ (4)

τότε η $z = f(x,y)$ γίνεται ως γνωστό συνάρτηση των *u* και *v* της μορφής

$z = z(u,v)$ (4α)

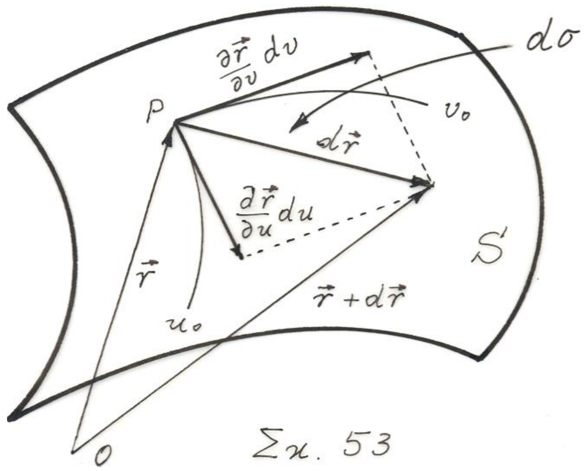
Οι εξισώσεις (4) και (4α) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας *S* με διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{x}_0 + y(u,v)\vec{y}_0 + z(u,v)\vec{z}_0$$

Τότε, ως γνωστό, (τύπος (14) της παρ.5.11) είναι

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv$$

όπου $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv$ είναι οι συνιστώσες του $d\vec{r}$ που είναι παράλληλες προς τις εφαπτόμενες των u_0 και v_0 σ' ένα σημείο *P* της επιφάνειας *S*, το $P(u_0, v_0)$.



Σχ. 53

Επομένως, το εμβαδό $d\sigma$ του παραλληλογράμμου που ορίζεται απ' τις συνιστώσες $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv$ του $d\vec{r}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 53 θα είναι: $d\sigma = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| dudv$ διότι, όπως είναι γνωστό, το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων εκφράζει το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται απ' αυτά.

Οπότε απ' τον τύπο (6) της παραγράφου 5.11 $l = \sqrt{EG - F^2}$ προκύπτει

$$d\sigma = \left|\vec{l}\right| dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (5)$$

και ολοκληρώνοντας στο τόπο Τ την (5) έχουμε

$$\varepsilon\mu\beta.\ S = \iint_T \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (6)$$

όπου τα *E, F, G* είναι τα θεμελιώδη ποσά 1^{ης} τάξης της επιφάνειας *S* και Τ είναι ο τόπος που ορίζεται απ' τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες *u, v* στο uv – επίπεδο.

$$\text{Άρα εμβ.}\ S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \iint_T \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (7)$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το εμβαδό τμήματος που αποκόπτει ο κύλινδρος

$x^2+y^2-y=0$ απ' το πάνω μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1 \quad (z \geq 0)$.

Λύση

Η προβολή του τμήματος του κυλίνδρου στο επίπεδο xOy είναι ο κύκλος

$x^2+y^2-y=0$ (σχήμα 54).

Απ' την εξίσωση σφαίρας προκύπτει

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (z \geq 0)$$

οπότε

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

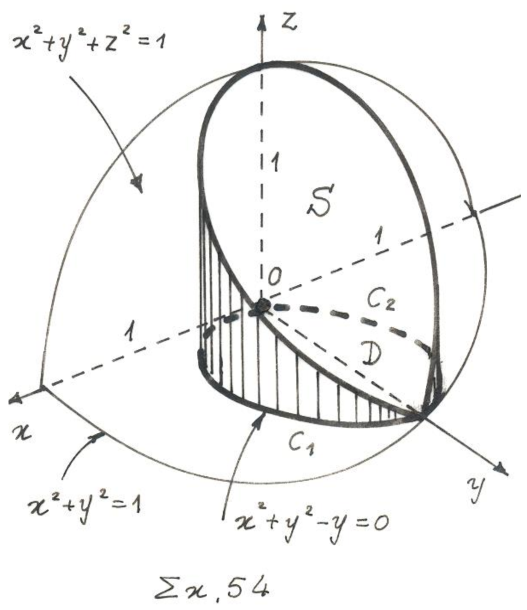
και επομένως,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Άρα

$$S=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ όπου } D:\ x^2+y^2-y=0.$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες: $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta$, οπότε η εξίσωση του κύκλου $x^2+y^2-y=0$ παίρνει τη μορφή (συνάρτηση των $(\rho,\ \theta)$):



Σχ. 54

$$(\rho\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(\rho\eta\mu\theta)^2-\rho\eta\mu\theta=0$$

ή μετά τις πράξεις:

$$\rho^2-\rho\eta\mu\theta=0 \text{ ή } \rho=\eta\mu\theta$$

$$\text{ενώ } \sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-\rho^2}.$$

Για το μέρος του κύκλου που περιβάλλεται απ' την ημιπεριφέρεια c_1 και τον άξονα Oy, και είναι λόγω συμμετρίας το μισό του τόπου D, τα όρια μεταβολής είναι:

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq \eta\mu\theta.$$

Επίσης είναι $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\rho$.

Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας *S* είναι

$$S=2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\eta\mu\theta}\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}=2(-1/2)\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\eta\mu\theta}\left(1-\rho^2\right)^{-1/2}d\left(1-\rho^2\right)d\theta=$$

$$=-\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\frac{\left(1-\rho^2\right)^{1/2}}{1/2}\right]_0^{\eta\mu\theta}d\theta=-2\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}-1\right)d\theta=$$

$$=-2\left[\eta\mu\theta-\theta\right]_0^{\pi/2}=\pi-2.$$

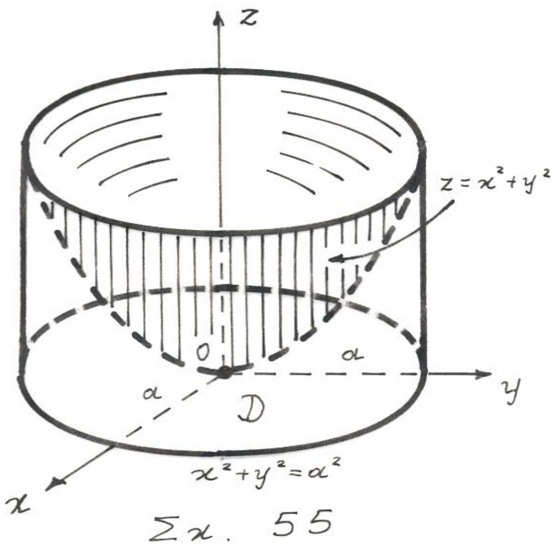
2) Να υπολογιστεί το εμβαδό του τμήματος του παραβολοειδούς

$z=x^2+y^2$, που αποκόπτεται απ’ τον κύλινδρο $x^2+y^2=\alpha^2$.

Λύση

Ο τόπος *D*, όπως φαίνεται στο σχήμα 55 είναι ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$. Είναι

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \ q=\frac{\partial z}{\partial y}=2y,\ \ \sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$ Άρα



Σχ. 55

$$S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. Τα όρια μεταβολής είναι:

$0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le\alpha$ (ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ γίνεται $\rho=\alpha$). Άρα

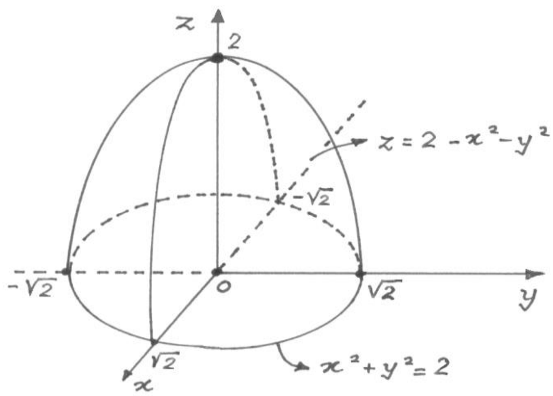
$$S=\iint_D \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{1}{8}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\alpha}\left(1+4\rho^2\right)^{1/2} d\left(1+4\rho^2\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{8}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\alpha} d\theta=\frac{\pi}{6}\left[\left(1+4\alpha^2\right)^{3/2}-1\right].$$

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος του παραβολοειδούς $z=2-(x^2+y^2)$ που βρίσκεται προς τα θετικά z.

Λύση

Το παραβολοειδές $z=2-(x^2+y^2)$ έχει κορυφή το σημείο (0, 0, 2) και η τομή του με το επίπεδο z = 0 (xOy) (απαλοιφή του z) είναι ο κύκλος $x^2+y^2=2$. Το εμβαδόν του τμήματος S του παραβολοειδούς που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο xOy δίνεται από τον τύπο (3) της παραγράφου 6.7, ή 6.8, δηλαδή:



$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda o\varepsilon\iota\delta o\acute{\upsilon}\varsigma}=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy\,,$$

όπου $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x,\ q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ και D είναι η ορθή προβολή του τμήματος S του παραβολοειδούς στο επίπεδο xOy, δηλαδή

$D=\left\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\le 2\right\}$. Άρα

$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda o\varepsilon\iota\delta o\acute{\upsilon}\varsigma}=\iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy$$

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες και

$$D=\left\{(\rho,\theta)\ /\ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

προκύπτει

$$E=\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\left[\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho\right]=2\pi\frac{1}{8}\left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{6}(9^{3/2}-1)=\frac{\pi}{6}(3^3-1)=\frac{13\pi}{3}.$$

3) Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας (σαμπρέλας) με εξισώσεις:

$$x = (\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi)\, \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$y = (\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\, \varphi)\, \eta\mu\theta$$

$$z = \beta\, \eta\mu\varphi,\ 0 \le \varphi, \theta \le 2\pi, 0 < \beta < \alpha \in R.$$

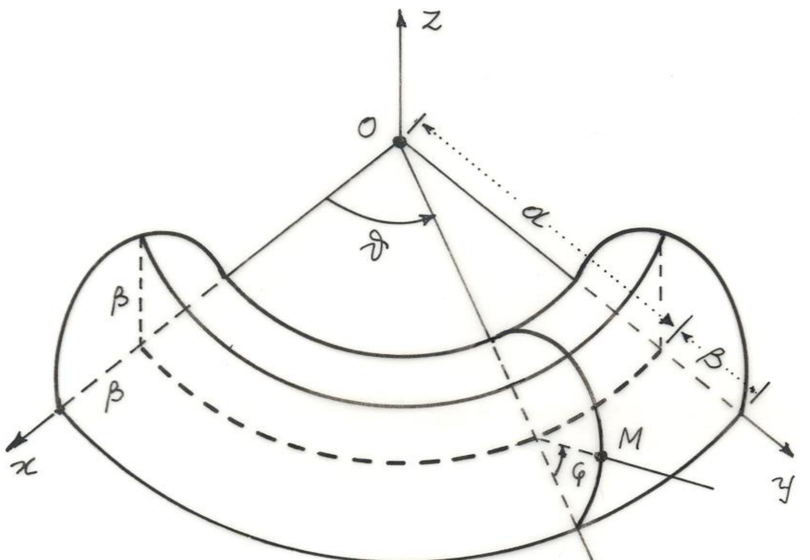
Λύση

Η μορφή της σαμπρέλας δίνεται στο σχήμα 56. Το τμήμα της επιφάνειας που βρίσκεται στο θετικό μέρος του χώρου, ($x, y, z > 0$) αντιστοιχεί στις τιμές

$$0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

Το εμβαδό του τμήματος αυτού είναι το $1/8$ ολόκληρης της επιφάνειας. Αν θέσουμε $u = \theta,\ v = \varphi$ τότε απ’ τον τύπο (6) του εμβαδού της παραγρ. 6.7 έχουμε:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv, \quad D = \{(u, v) : 0 \le u \le \pi/2,\ 0 \le v \le \pi\}$$



Σχ. 56

Απ’ τους τύπους (5α, 5β, 5γ) της 5.11 έχουμε:

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 =$$
$$= \left[-(\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi)\eta\mu\theta\right]^2 + \left[(\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi)\sigma\upsilon\nu\theta\right]^2 + 0^2 = (\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi)^2$$

$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v' = x_\theta' x_\varphi' + y_\theta' y_\varphi' + z_\theta' z_\varphi' =$$
$$= -(\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi)\, \eta\mu\theta \cdot (\alpha - \beta\, \eta\mu\varphi)\, \sigma\upsilon\nu\theta +$$
$$+(\alpha + \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi)\, \sigma\upsilon\nu\theta \cdot (\alpha - \beta\, \eta\mu\varphi)\, \eta\mu\theta + 0 \cdot \beta\, \sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = (-\beta\eta\mu\varphi)^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta +$$
$$+(-\beta\eta\mu\varphi)^2 \eta\mu^2\theta + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \beta^2\eta\mu^2\varphi + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \beta^2$$

Άρα $\sqrt{EG-F^2}=\beta(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\varphi)$.

Επειδή $F=0$ προκύπτει ότι οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $\theta,\ \varphi$ είναι ορθογώνιες. Επομένως το ολικό εμβαδό της επιφάνειας είναι

$$S=8\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\pi}\beta(\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\varphi)d\varphi\, d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\beta\alpha\varphi+\beta^2\eta\mu\varphi\right]_0^{\pi}d\theta=$$

$$=8\int_0^{\pi/2}\beta\alpha\pi\, d\theta=8\alpha\beta\pi\left[\theta\right]_0^{\pi/2}=4\alpha\beta\pi^2.$$

6.8 Ορισμός επιεπιφάνειου ολοκληρώματος

Το *επιεπιφάνειο* ολοκλήρωμα ορίζεται ως εξής:

Α) Έστω μια επιφάνεια *S* όπως έχει μελετηθεί στη προηγούμενη παράγραφο και

$$f=A(x,y,z)$$

μια ***σημειακή*** συνάρτηση μονότιμη και συνεχής που ορίζεται σε κάθε σημείο της επιφάνειας *S*. Διαιρούμε την *S* σε ένα αριθμό στοιχειωδών επιφανειών ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_ν όπως έγινε στη παράγραφο 6.7, με αντίστοιχα εμβαδά $\Delta\sigma_\rho$ όπου $\rho = 1, 2, \dots, \nu$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}A(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)\Delta\sigma_\rho \quad \text{όπου το σημείο } P_\rho(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)\in\Delta S_\rho .$$

Αν το όριο του αθροίσματος αυτού υπάρχει όταν $\nu\to\infty$, έτσι ώστε κάθε εμβαδό $\Delta\sigma_\rho$ να τείνει στο μηδέν, τότε το όριο αυτό λέγεται *επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα της σημειακής συνάρτησης A(x, y, z)* πάνω στην επιφάνεια *S* και συμβολίζεται

$$\iint_S A(x,y,z)d\sigma=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\rho=1}^{\nu}A(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho)\Delta\sigma_\rho \qquad (1)$$

Η έννοια του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων, όπως και της εκλογής της παραμετρικής έκφρασης της επιφάνειας. Το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί ως ένα συνηθισμένο διπλό ολοκλήρωμα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των εξισώσεων της επιφάνειας.

Αν η επιφάνεια *S* δίνεται με τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x=x(u,v),\ \ y=y(u,v),\ \ z=z(u,v)\ \text{ με }\ (u,v)\in \mathrm{T},$$

τότε το στοιχείο $d\sigma$ δίνεται όπως είδαμε (τύπος (5) της 6.7)

$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$ οπότε η (1) γράφεται

$$\iint_S A(x,y,z)d\sigma = \iint_T B(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad (2)$$

όπου $B(u,v) = A(x,y,z) = A\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$ και *E, G, F* είναι τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης, ενώ Τ είναι ο τόπος που μεταβάλλονται τα *u* και *v* στο επίπεδο uOv.

Στην περίπτωση που η *S* ορίζεται με την εξίσωση $z = f(x,y)$, τότε το $d\sigma$ εκφράζεται με τη (2) της 6.7 οπότε η (1) γράφεται

$$\iint_S A(x,y,z)d\sigma = \iint_D A(x,y,\,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \qquad (2\alpha)$$

όπου $p = \dfrac{\partial z}{\partial x},\; q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ και <u>*D* είναι ο τόπος ορισμού</u> της $z = f(x,y)$.

Επομένως η $A\big(x,y,f(x,y)\big)$ είναι συνάρτηση μόνο των *x, y* και το $2^ο$ μέλος της (2α) είναι ένα συνηθισμένο διπλό ολοκλήρωμα στο τόπο *D*.
Το παραπάνω επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα που υπολογίζουμε μέσω της (2α) λέγεται και <u>*επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα 1^{ου} είδους.*</u>

Να τονιστεί τέλος, ότι αν $A(x,y,z) = 1$, τότε το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα

της A = 1, πάνω στην επιφάνεια *S* που προκύπτει απ' τη (2α) δηλαδή το

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \qquad (3)$$

δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας *S* όπως είδαμε πριν (τύπος (3) της παρ. 6.7).

Β) Επανερχόμαστε τώρα στη στοιχειώδη επιφάνεια ΔS_ρ και θεωρούμε τη κάθετη στο σημείο $P_\rho(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho) \in \Delta S_\rho$ με κατεύθυνση αυτή του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{l}_0$ ($|\vec{l}_0|$=1) με συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\alpha,\ \sigma\upsilon\nu\beta,\ \sigma\upsilon\nu\gamma)$ όπου

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad (3\alpha)$$

είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\vec{l}_0$ δηλαδή

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{l}_0, \vec{x}_0}), \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{l}_0, \vec{y}_0}), \sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{l}_0, \vec{z}_0}).$$

Θεωρούμε ακόμα τη ***διανυσματική*** συνάρτηση

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{x}_0 + Q(x,y,z)\vec{y}_0 + R(x,y,z)\vec{z}_0 \qquad (4)$$

που είναι ορισμένη και συνεχής πάνω στην *S*.

Σχηματίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{F}\cdot\vec{l}_0 = P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma \qquad (5)$$

που είναι μια συνεχής συνάρτηση των *x, y, z* πάνω στην *S*.

Ονομάζουμε *επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα 2ου είδους της διανυσματικής συνάρτησης* $\vec{F}(P, Q, R)$ πάνω στην επιφάνεια *S* και το συμβολίζουμε με

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα 1ου είδους της πραγματικής συνάρτησης $\vec{F}\cdot\vec{l}_0$ πάνω στην *S*, δηλαδή

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma)d\sigma = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma$$

(6)

6.8.1 Ιδιότητες επιεπιφάνειου ολοκληρώματος

1. Το γινόμενο $\vec{F}\cdot\vec{l}_0$ παριστάνει τη προβολή της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}$ πάνω στη διεύθυνση του $\vec{l}_0$, ($\vec{F}\cdot\vec{l}_0 = |\vec{F}|\cdot|\vec{l}_0|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{F}, \vec{l}_0}) = F\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{F}, \vec{l}_0}) = \text{πρ}\vec{F}_{\vec{l}_0}$)

2. Το $d\sigma$ είναι το απειροστό εμβαδό της επιφάνειας *S* και οι εκφράσεις

$$d\sigma\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma = dxdy, \quad d\sigma\cdot\sigma\upsilon\nu\beta = dxdz, \quad d\sigma\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = dydz$$

είναι τα εμβαδά των προβολών της στοιχειώδους επιφάνειας $d\sigma$ πάνω στα επίπεδα xOy, xOz, yOz αντίστοιχα, όπως φαίνεται απ' τη σχέση (1α) της 6.7.

3. Ο υπολογισμός του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος 2ου είδους ανάγεται στον υπολογισμό του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος 1ου είδους, δηλαδή των

$$\iint_S P\sigma\upsilon\nu\alpha\, d\sigma, \quad \iint_S Q\sigma\upsilon\nu\beta\, d\sigma, \quad \iint_S R\sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma,$$ με

$$\iint_S P\sigma\upsilon\nu\alpha\, d\sigma = \pm\iint_{D_{yz}} P\big(g(y,z),y,z\big)\,dydz\,, \tag{7α}$$

$$\iint_S Q\sigma\upsilon\nu\beta\, d\sigma = \pm\iint_{D_{xz}} Q\big(x,h(x,z),z\big)\,dzdx\,, \tag{7β}$$

$$\iint_S R\sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma = \pm\iint_{D_{xy}=D} R\big(x,y,f(x,y)\big)\,dxdy, \tag{7γ}$$

όπου D_{yz}, D_{xz}, και $D_{xy} = D$ είναι οι προβολές της επιφάνειας S στα επίπεδα yOz, xOz και xOy αντίστοιχα ενώ η επιφάνεια S έχει εξίσωση (λυμένη ως προς x, y, z)

$$x = g(y,z), \quad y = h(x,z), \quad z = f(x,y),$$

για τους τύπους (7α), (7β) και (7γ) αντίστοιχα. Το πρόσημο (+) λαμβάνεται όταν η κάθετη $\vec{l}_0$ στην επιφάνεια σχηματίζει οξεία γωνία με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$ στους (7α,β,γ), (αντίστοιχα (–) όταν σχηματίζει αμβλεία γωνία).

Όμως, μπορούμε να αποφύγουμε να πάρουμε της προβολές της S σε κάθε επίπεδο συντεταγμένων για να υπολογίσουμε τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα (7α), (7β) και (7γ). Αυτό γίνεται αν το ολοκλήρωμα

$$\iint_S (P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma)d\sigma$$

το εκφράσουμε διαφορετικά, συνδυάζοντας τους τύπους (3) και (3α). Έτσι έχουμε

$$\iint_S (P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint_{D=D_{xy}} \frac{P\cdot(-p) + Q\cdot(-q) + R\cdot 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_D \big(-Pp - Qq + R\big)dxdy \tag{8}$$

όπου η επιφάνεια S έχει εξίσωση $z = f(x,y)$ και προβάλλεται στο τόπο D του επιπέδου xOy, ενώ οι συναρτήσεις P, Q, R λόγω της $z = f(x,y)$ εκφράζονται μόνο συναρτήσει των x και y, και $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Δηλαδή το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ένα συνηθισμένο διπλό ολοκλήρωμα.

4. Οι ιδιότητες του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος ($1^{ου}$ ή $2^{ου}$ είδους) είναι ανάλογες με τις ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος.

5. Ενώ το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους είναι ανεξάρτητο απ' τον προσανατολισμό της επιφάνειας, το αντίθετο συμβαίνει με το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους. Αν αλλάζει προσανατολισμό η επιφάνεια *S* (δηλαδή αν αλλάζει η φορά του $\vec{l}_0$), τότε αλλάζει πρόσημο και το ολοκλήρωμα. (Η φορά του $\vec{l}_0$ καθορίζεται στη παράγραφο 6.9.2.1. ιδιότητα 1.).

6. Στο τύπο (6) το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma$ λέγεται και **ροή** του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ δια της επιφάνειας *S* και ισούται με

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma = \iiint_V div\vec{F} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \,. \qquad (9)$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint_S \left(y^2 + z^2 \right) d\sigma$ όπου *S* είναι το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ που κόβεται απ' το κώνο $z^2 = x^2 + y^2$ όπου z > 0.

Λύση

Η επιφάνεια *S* προβάλλεται στο επίπεδο xOy κατά το τόπο

$$D : x^2 + y^2 \leq 1/2 .$$

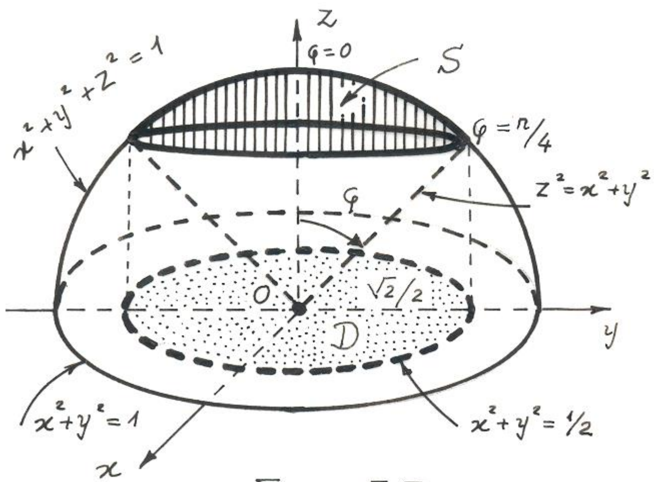
Ο τόπος αυτός *D* (όπως και κάθε τόπος) υπολογίζεται ως εξής: Αν θέσουμε στην εξίσωση της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ όπου z^2 το ίσο του $x^2 + y^2$ απ' την εξίσωση του κώνου, βρίσκουμε (απαλείφουμε το z):

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 1 \text{ ή } x^2 + y^2 = 1/2 \qquad (1)$$

που είναι το σύνορο της *S* και ταυτόχρονα του τόπου *D* (σχήμα 57).

Χρησιμοποιούμε τώρα σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta\,,\ y = \eta\mu\varphi\eta\mu\theta,\ z = \sigma\upsilon\nu\varphi,\ (\rho = 1) \qquad (2)$$



Σχ. 57

για να υπολογίσουμε τα όρια μεταβολής των $(u=\theta,\ v=\varphi)$ του νέου τόπου Τ των $\theta,\ \varphi$.

Η (1) γράφεται λόγω των σχέσεων (2):

$$\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta=1/2$$

ή $\eta\mu^2\varphi=1/2$

απ' όπου προκύπτει $0\le\varphi\le\pi/4$ και $0\le\theta\le 2\pi$.

Εφαρμόζοντας τώρα το τύπο (2) της 6.8 έχουμε:

$$\iint_S\left(y^2+z^2\right)d\sigma=\iint_T\left(\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi\,d\theta \text{ , όπου} \qquad (3)$$

$$E=x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2=\sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta+\eta\mu^2\varphi=1$$

$$G=x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2=\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta+\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\theta=\eta\mu^2\varphi$$

$$F=x_\varphi'x_\theta'+y_\varphi'y_\theta'+z_\varphi'z_\theta'=-\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta=0$$

Άρα $\sqrt{EG-F^2}=\eta\mu\varphi$ και η σχέση (3) γίνεται

$$\iint_S\left(y^2+z^2\right)d\sigma=\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\eta\mu\varphi\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\left(\eta\mu^2\varphi\left[-\frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right)\eta\mu\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\left(\pi\eta\mu^2\varphi+2\pi\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\eta\mu\varphi\,d\varphi=\pi\int_0^{\pi/4}\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)\eta\mu\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\pi\int_0^{\pi/4}\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)d(\sigma\upsilon\nu\varphi)=-\pi\left[\sigma\upsilon\nu\varphi+\frac{\sigma\upsilon\nu^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/4}=$$

$$=-\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^3}{3}-(1+1/3)\right)=-\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{12}\left(16-7\sqrt{2}\right).$$

2) Να υπολογιστεί το $I = \iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma$ όπου $\vec{F} = 18z\vec{x}_0 - 12\vec{y}_0 + 3y\vec{z}_0$ και S είναι η επιφάνεια $2x+3y+6z=12$ με $x,\, y,\, z \ge 0$ (σχήμα 58)

Λύση

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με 2 τρόπους: πρώτα χρησιμοποιώντας τον τύπο (8) της 6.8.1 και μετά χρησιμοποιώντας τους (7α), (7β), (7γ) της 6.8.1.

<u>1ος τρόπος</u>

Η εξίσωση της επιφάνειας (επιπέδου) είναι $z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$. (1)

και άρα $p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$. Οι συντεταγμένες του $\vec{F}(x,y,z)$ είναι

$$P(x,y,z) = 18z,\ \ Q(x,y,z) = -12,\ \ R(x,y,z) = 3y$$

οπότε η παράσταση του τύπου (8): $-Pp - Qq + R$ γίνεται:

$$-18z(-1/3) - (-12)\cdot(-1/2) + 3y = 6z - 6 + 3y\,.$$

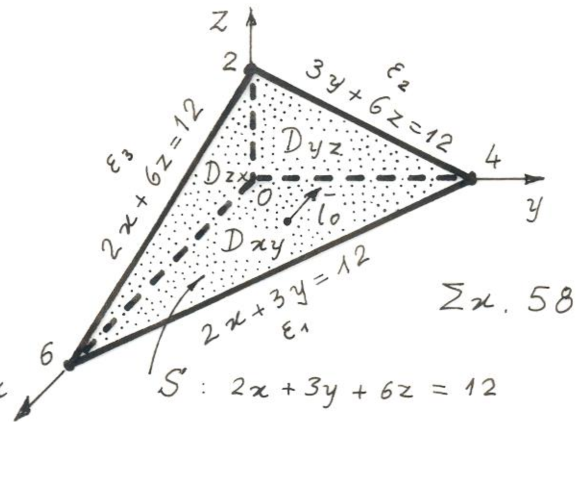
Αντικαθιστούμε στη τελευταία σχέση το z με το ίσο του απ' την (1) και έχουμε

$$-Pp - Qq + R = 6\left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) - 6 + 3y = 6 - 2x$$

Επομένως απ' τους τύπους (8) και (6) προκύπτει (σχήμα 58):

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (6-2x)\,dxdy = \int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} (6-2x)\,dxdy = \int_0^6 (6-2x)\frac{12-2x}{3}dx =$$

$$= \int_0^6 \left(24 - 12x + \frac{4}{3}x^2\right)dx = \left[24x - 6x^2 + \frac{4}{9}x^3\right]_0^6 = 24.$$



Σχ. 58

(Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ όπως φαίνονται στο σχήμα 58, προκύπτουν απ' την εξίσωση του επιπέδου $2x+3y+6z=12$ για $z, x, y = 0$ αντίστοιχα).

2ος τρόπος

Απ' τη σχέση (6) της τελευταίας παραγράφου 6.8 έχουμε:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma = \iint_S \left(P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma\right)d\sigma = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Όμως, το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{l}_0$ ως κάθετο στην επιφάνεια S, σχηματίζει, όπως φαίνεται στο σχήμα 58, οξείες γωνίες με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$. Επομένως, (ιδιότ. 3 της 6.8.1) προσθέτουμε τις σχέσεις (7α), (7β), (7γ) (με πρόσημο +):

$$\iint_S \left(P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma\right)d\sigma = \iint_{D_{yz}} P(y,z)dydz + \iint_{D_{zx}} Q(z,x)dzdx + \iint_{D_{xy}} R(x,y)dxdy$$

.

Υπολογίζουμε χωριστά τα επί μέρους ολοκληρώματα στους τόπους D_{yz}, D_{zx}, D_{xy}

<u>προσέχοντας κάθε φορά τα όρια μεταβολής στους εκάστοτε τόπους</u>. Έτσι,

$$\iint_{D_{yz}} P(y,z)dydz = \iint_{D_{yz}} 18zdydz = 18\int_{y=0}^{4}\int_{z=0}^{\frac{12-3y}{6}} zdzdy = 9\int_{y=0}^{4}\left(\frac{12-3y}{6}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{y=0}^{4}\left(9y^2-72y+144\right)dy = \frac{1}{4}\left[3y^3-36y^2+144y\right]_0^4 = 48$$

$$\iint_{D_{zx}} Q(z,x)dzdx = \iint_{D_{zx}} (-12)dzdx = -12\int_{x=0}^{6}\int_{z=0}^{\frac{12-2x}{6}} dzdx =$$

$$= -12\int_{x=0}^{6}\left(2-\frac{1}{3}x\right)dx = -12\left[2x-\frac{x^2}{6}\right]_0^6 = -72$$

$$\iint_{D_{xy}} R(x,y)dxdy = \iint_{D_{xy}} 3ydxdy = 3\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} ydydx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{x=0}^{6}\left(\frac{12-2x}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{6}\int_{x=0}^{6}\left(12-2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_{x=0}^{6}\left(4x^2-48x+144\right)dx = \frac{1}{6}\left[\frac{4}{3}x^3-24x^2+144x\right]_0^6 = 48$$

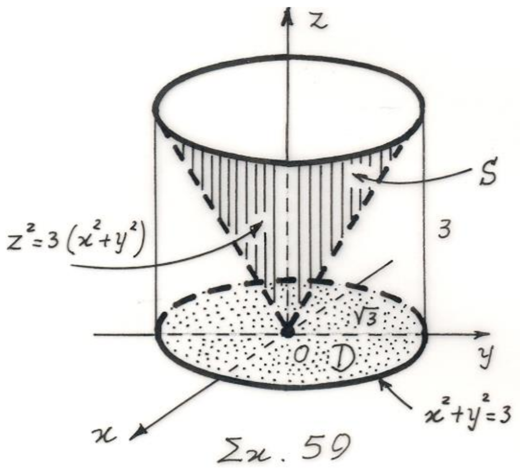
Επομένως $I = I_1 + I_2 + I_3 = 48 - 72 + 48 = 24$.

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)d\sigma$, όπου S είναι η επιφάνεια του κώνου $z^2=3(x^2+y^2)$ που περιορίζεται απ' τα επίπεδα $z=0$ και $z=3$.

Λύση

Η τομή του κώνου $z^2=3(x^2+y^2)$ με το επίπεδο $z=3$ (που είναι παράλληλο προς το xOy σε απόσταση 3 μον.) δίνει τη καμπύλη

$$3^2=3(x^2+y^2) \text{ ή } x^2+y^2=3$$



Σχ. 59

που είναι ταυτόχρονα και το σύνορο του τόπου D που προέρχεται απ' τη προβολή της επιφάνειας του κώνου στο επίπεδο xOy (σχήμα 59). Η επιφάνεια του κώνου (λυμένη ως προς z, $z>0$) είναι

$$z=z(x,y)=\sqrt{3(x^2+y^2)}\,.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε το τύπο (3) της 6.8,

$$I=\iint\limits_S (x^2+y^2)d\sigma=\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \quad \text{όπου:} \qquad (1)$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{3x^2}{x^2+y^2}+\frac{3y^2}{x^2+y^2}}=2$$

Επομένως η (1) γίνεται $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot 2dxdy$.

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta$, με

$$(\rho,\theta)\in \mathrm{T}=\left\{(\rho,\theta):0\le\rho\le\sqrt{3},\ 0\le\theta\le 2\pi\right\} \text{ και } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho\,.$$

Είναι

$$I=2\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=2\iint\limits_T \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{3}}\rho^3d\rho\,d\theta$$

$$=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}}d\theta=2\cdot\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=9\pi$$

4) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα

$$\iint_S xdydz + ydzdx - 2zdxdy,$$

όπου S είναι η επιφάνεια σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ που βρίσκεται στο πάνω μέρος του επιπέδου xOy ($z \geq 0$).

Λύση

Απ' τον τύπο (6) της παραγράφου 6.8 το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$\iint_S xdydz + ydzdx - 2zdxdy = \iint_S \left(x\sigma\upsilon\nu\alpha + y\sigma\upsilon\nu\beta - 2z\sigma\upsilon\nu\gamma \right) d\sigma \qquad (1)$$

όπου $\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\gamma,$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος $\vec{l}_0$, που υποθέτουμε ότι η θετική του φορά διευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας, με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz. Είναι δε

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{z}{\rho}$$

τα οποία, ως γνωστό, έτσι ορίζονται, ή ακόμα, που προκύπτουν μετά από πράξεις απ' τους γνωστούς τύπους 3α της παρ. 6.8:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

όπου $z = f(x,y) = \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}$ $\quad (z > 0)$ και

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}.$$

Έτσι η (1) γίνεται $I = \dfrac{1}{\rho} \iint_S \left(x^2 + y^2 - 2z^2 \right) d\sigma \qquad (2)$

Για τον υπολογισμό του (2) εφαρμόζουμε (όπως και στο παράδειγμα 1) τον τύπο (2) της 6.8,

$$\iint_S A(x,y,z) d\sigma = \iint_T B(u,v) \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi, \quad y = \rho\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi, \quad z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$$

όπου οι συντεταγμένες θ και φ για το πάνω ημισφαίριο έχουν τις μεταβολές:

$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2$.

Όπως και στο παράδειγμα 1. βρίσκουμε

$$E = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = \rho^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta\, \sigma\upsilon\nu^2\varphi + \rho^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi\, \eta\mu^2\theta + \rho^2\eta\mu^2\varphi = \rho^2$$

$$G = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = \rho^2\eta\mu^2\varphi\, \eta\mu^2\theta + \rho^2\eta\mu^2\varphi\, \sigma\upsilon\nu^2\theta = \rho^2\eta\mu^2\varphi$$

$$F = x_\varphi' x_\theta' + y_\varphi' y_\theta' + z_\varphi' z_\theta' = -\rho\, \sigma\upsilon\nu\varphi\, \eta\mu\varphi\, \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\theta + \rho \sigma\upsilon\nu\varphi\, \eta\mu\varphi\, \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\theta = 0$$

Άρα

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\rho^2 \cdot \rho^2 \eta\mu^2\varphi - 0^2} = \rho^2 \eta\mu\varphi .$$

Επομένως η (2) γράφεται

$$I = \frac{1}{\rho}\iint_D \rho^2 \left(\eta\mu^2\varphi\, \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\varphi\, \eta\mu^2\theta - 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right) \rho^2 \eta\mu\varphi \, d\varphi\, d\theta \qquad (3)$$

όπου ο νέος τόπος D είναι $\left\{ (\theta, \varphi) \ / \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \varphi \le \pi/2 \right\}$. Είναι

$$I = \rho^3 \iint_D \left(\eta\mu^2\varphi - 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right) \eta\mu\varphi\, d\varphi\, d\theta = \rho^3 \iint_D \left(1 - 3\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right) \eta\mu\varphi\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \rho^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(3\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1\right) d(\sigma\upsilon\nu\varphi) d\theta =$$

$$= \rho^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \Big[\sigma\upsilon\nu^3\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi\Big]_0^{\pi/2} d\theta = \rho^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} 0 \cdot d\theta = 0$$

6.9 Θεώρημα Gauß – Ostrogradsky (ή Green στο χώρο) και Θεώρημα Stokes

Πρόκειται για δύο βασικά θεωρήματα που βρίσκουν πολλές εφαρμογές στη Φυσική και αναφέρονται, το πρώτο ως θεώρημα των *Gauß – Ostrogradsky*, ή θεώρημα της απόκλισης, ή θεώρημα του *Green* στο χώρο και το άλλο ως θεώρημα του *Stokes*.

Στο πρώτο θεώρημα **Gauß – Ostrogradsky** αποδεικνύεται ότι το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια *S* είναι ίσο με τριπλό ολοκλήρωμα που έχει ως τόπο τον όγκο *V* που περιβάλλεται απ' την *S*.

Στο δεύτερο του **Stokes** αποδεικνύεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης *c* του χώρου που περατώνεται στην επιφάνεια *S* είναι ίσο με επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα που έχει ως τόπο την επιφάνεια *S*.

6.9.1 Θεώρημα Gauß – Ostrogradsky, ή Θεώρημα Green στο χώρο, ή Θεώρημα Απόκλισης

Έστω D ένας τρισδιάστατος τόπος που περατώνεται στη κλειστή επιφάνεια S και $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{x}_0 + Q(x,y,z)\vec{y}_0 + R(x,y,z)\vec{z}_0$ μια διανυσματική συνάρτηση η οποία έχει συνεχείς τις παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ και ορίζεται στο τόπο D. Τότε:

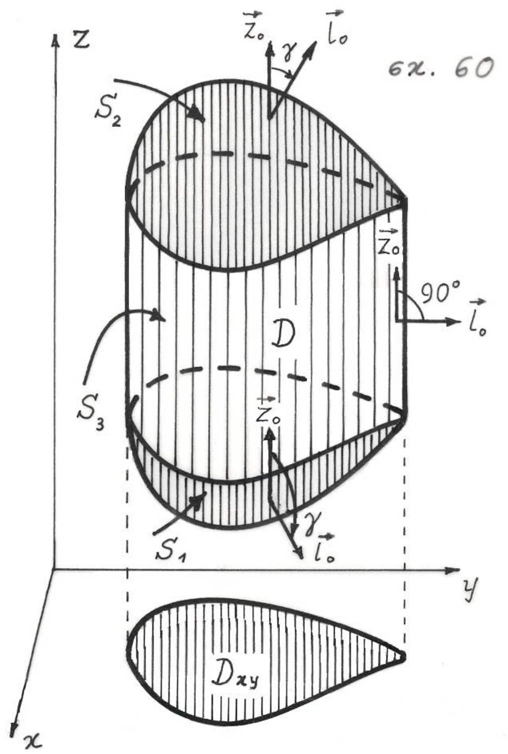
$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \qquad (1)$$

Απόδειξη

Έστω D_{xy} η προβολή του D πάνω στο xOy. Για ευκολία, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η επιφάνεια S αποτελείται απ’ τις εξής επιφάνειες:

i) την S_1 με εξίσωση $z = f_1(x,y), \quad (x,y) \in D_{xy}$

ii) την S_2 με εξίσωση $z = f_2(x,y), \ (x,y) \in D_{xy}$ με $f_1(x,y) \le f_2(x,y) \ \forall (x,y) \in D_{xy}$



iii) την S_3 που είναι κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη προς τον άξονα Oz (σχήμα 60). Τότε

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[R\big(x,y,f_2(x,y)\big) - R\big(x,y,f_1(x,y)\big) \right] dxdy$$

Έστω γ η γωνία που σχηματίζουν η θετική κατεύθυνση του άξονα Oz με το $\vec{l}_0$ (κάθετο εξωτερικά της S_2), με $\sigma\upsilon\nu\,\gamma = \vec{l}_0 \cdot \vec{z}_0$. Τότε η γωνία γ είναι οξεία στην S_2 και αμβλεία στην S_1, ενώ είναι $\pi/2$ στην S_3 όπως φαίνεται στο σχήμα 60. Έτσι (τύπος 7γ της 6.8) προκύπτει:

$$\iint_{S_2} R\big(x,y,f_2(x,y)\big)\, \sigma\upsilon\nu\gamma \, d\sigma =$$

$$= \iint_{D_{xy}} R\big(x, y, f_2(x,y)\big)\, dxdy \quad (\hat{\gamma} < 90°) \tag{2}$$

$$\iint_{S_1} R\big(x, y, f_1(x,y)\big)\, \sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma = -\iint_{D_{xy}} R\big(x, y, f_1(x,y)\big)\, dxdy \quad (\hat{\gamma} > 90°) \tag{3}$$

$$\iint_{S_3} R\big(x, y, z\big)\, \sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma = 0 \quad (\hat{\gamma} = 90°) \tag{4}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2), (3), (4) έχουμε

$$\oiint_S R(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma =$$

$$= \iint_{D_{xy}} R\big(x, y, f_2(x,y)\big)dxdy - \iint_{D_{xy}} R\big(x, y, f_1(x,y)\big)dxdy = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z} dV\,. \tag{5}$$

Παρόμοια βρίσκουμε

$$\oiint_S Q(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\beta\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dV\,, \tag{6}$$

$$\oiint_S P(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\alpha\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x} dV\,. \tag{7}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (5), (6), (7) βρίσκουμε

$$\oiint_S \big(P\sigma\upsilon\nu\alpha + Q\sigma\upsilon\nu\beta + R\sigma\upsilon\nu\gamma\big)d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

δηλαδή η αποδεικτέα σχέση (1) λόγω της (6) παράγραφος 6.8.

6.9.1.1 Ιδιότητες του Θεωρήματος Απόκλισης

1. Επειδή $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ ο τύπος (1) γράφεται διανυσματικά

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma = \iiint_D div\vec{F} dV \tag{8}$$

Έτσι δικαιολογείται και η ονομασία του, ως «*θεώρημα απόκλισης*».

2. Αν στο τύπο (1) θέσουμε $P = x,\ Q = y,\ R = z$ παίρνουμε

$$\oiint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_D 3dxdydz \quad \text{ή}$$

$$\iiint_D dV = \iiint_D dxdydz = \frac{1}{3}\oiint_S xdydz + ydxdz + zdxdy \qquad (9)$$

Ο τύπος (9) εκφράζει τον όγκο ενός τρισδιάστατου τόπου *D* που περιβάλλεται απ' τη κλειστή επιφάνεια *S* με τη βοήθεια ενός επιεπιφάνειου ολοκληρώματος πάνω στην *S*.

3. Αν υποθέσουμε ότι $\vec{F}$ είναι η κλίση κάποιας σημειακής συνάρτησης Φ τότε

$$\vec{F} = \nabla \cdot \Phi \text{ όπου } P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ και}$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi$$ δηλαδή η Λαπλασιανή της Φ. Έτσι,

$$\vec{F} \cdot \vec{l}_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\sigma\upsilon\nu\gamma \qquad (10)$$

δηλ. τη παράγωγο της Φ κατά διεύθυνση (τύπος (6) της παρ. 5.5). Έτσι

$$\vec{F} \cdot \vec{l}_0 = \frac{d\Phi}{d\vec{l}_0}$$ οπότε ο τύπος (8) γράφεται

$$\oiint_S \frac{d\Phi}{d\vec{l}_0} d\sigma = \iiint_D \nabla^2 \Phi \, dV \qquad (11)$$

6.9.2 Θεώρημα του Stokes

Έστω *S* μια ανοιχτή επιφάνεια δύο όψεων με εξίσωση $z = f(x, y)$ που καταλήγει σε μια απλή κλειστή καμπύλη *c*. Θεωρούμε τη μια όψη της *S* θετική όταν, παρατηρητής περπατώντας πάνω στο σύνορο της *S* με το κεφάλι προς τη κατεύθυνση της θετικής κάθετης, έχει την επιφάνεια προς τα αριστερά του. Αν *P, Q, R* είναι συναρτήσεις των *x, y, z* μονότιμες και συνεχείς, με μερικές παραγώγους 1^{ης} τάξης συνεχείς σ' ένα τόπο που περιέχει την *S*, τότε ισχύει ο τύπος ή το **θεώρημα Stokes:**

$$I = \oint_c Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\sigma\upsilon\nu\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\sigma\upsilon\nu\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\sigma\upsilon\nu\,\gamma \right\} d\sigma \qquad (1)$$

Απόδειξη

Θα υπολογίσουμε πρώτα τον όρο $I_1 = \oint_c P dx$.

Έστω ότι η κλειστή καμπύλη c προβάλλεται στο xOy κατά τη κλειστή καμπύλη c_1 που περικλείει το τόπο D_1 και ότι η φορά διαγραφής της c_1 είναι η ορθή φορά. Έστω ακόμη ότι το $\vec{l}_0(\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\gamma)$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον Oz δηλαδή συνγ > 0. Θέτουμε $P(x,y,z) = P\big(x,y,f(x,y)\big) = M(x,y)$ οπότε

$I_1 = \oint_c P dx = \oint_c M(x,y) dx$. Επομένως (τύπος (2) της παρ. 6.5)

$$\oint_c P dx = -\iint_{D_1} \frac{\partial M}{\partial y} dxdy \text{, όπου} \tag{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot q \,. \tag{3}$$

Επειδή,

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

προκύπτει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{p} = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{q} = \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{-1} \ \text{ άρα } \ q = -\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\gamma}$$

οπότε η (3) γράφεται

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\gamma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\sigma\upsilon\nu\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\gamma\right) \tag{4}$$

Επομένως η (2) λόγω της (4) γράφεται

$$I_1 = \oint_c P dx = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\sigma\upsilon\nu\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\gamma\right)\frac{dxdy}{\sigma\upsilon\nu\gamma} \tag{5}$$

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\gamma > 0$, είναι $dxdy = \sigma\upsilon\nu\gamma \, d\sigma$ (τύπος (1α) της παρ. 6.7). Άρα

$$I_1 = \oint_c P dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\sigma\upsilon\nu\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\gamma\right) d\sigma \,. \tag{6}$$

(Να σημειωθεί ότι με αντικατάσταση του $dxdy = \sigma\upsilon\nu\gamma \, d\sigma$ στην (5), η προβολή D_1 της S στο xOy αντικαθίσταται με την S, εφόσον αναφερόμαστε στο $d\sigma$).

Παρόμοια βρίσκουμε τους επόμενους τύπους με κυκλική μετάθεση των γραμμάτων

x, y, z και α, β, γ:

$$I_2 = \oint_c Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \sigma\upsilon\nu\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \sigma\upsilon\nu\alpha \right) d\sigma \tag{7}$$

$$I_3 = \oint_c Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \sigma\upsilon\nu\beta \right) d\sigma \tag{8}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (6), (7) και (8) προκύπτει ο τύπος (1).

6.9.2.1 Ιδιότητες Θεωρήματος Stokes

1. Αν $\sigma\upsilon\nu\gamma < 0$, τότε η c θα διαγράφεται κατά την αρνητική φορά ως προς το τόπο D_1, οπότε έχουμε αλλαγή του σημείου κατά την εφαρμογή του θεωρήματος του Green. Έχουμε όμως και δεύτερη αλλαγή όταν επανερχόμαστε στο επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μέσω του τύπου $dxdy = \sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma$, οπότε οι δύο αυτές αλλαγές αλληλοαναιρούνται.

2. Το θεώρημα του Stokes εφαρμόζεται και στη περίπτωση που το σύνορο της επιφάνειας S αποτελείται από διάφορες χωριζόμενες καμπύλες. Στη περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα $\oint_c Pdx + Qdy + Rdz$ το παίρνουμε κατά μήκος προσανατολισμένων καμπύλων που αποτελούν το σύνορο της S.

3. Αν $\vec{F} = P\vec{x}_0 + Q\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$, τότε ως γνωστό,

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_c Pdx + Qdy + Rdz$$

(τύπος (9α) της παρ. 6.4), οι δε συναρτήσεις

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \quad \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

θεωρούνται (καταχρηστικά βέβαια) ότι είναι συνιστώσες του διανύσματος

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

οπότε ο (1) γράφεται διανυσματικά

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{l}_0 \cdot rot\vec{F} d\sigma \tag{9}$$

Η φυσική ερμηνεία του τύπου (9) είναι ότι η κυκλοφορία του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ κατά μήκος της καμπύλης c ισούται με τη ροή του διανυσματικού πεδίου $rot\vec{F}$ (δηλαδή της στροφής του $\vec{F}$) δια μέσου της επιφάνειας S που καταλήγει στη c (ιδιότητα 6 της παρ. 6.8.1).

4. Αν η επιφάνεια S είναι παράλληλη προς το xOy, (δηλαδή $z = c$), τότε $dz = 0$ και ο τύπος του Stokes γίνεται

$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

δηλαδή ο τύπος του Green στο επίπεδο (παράγραφος 6.5)

5. Οι ιδιότητες 3η και 4η της παραγράφου 6.5.1, επεκτείνονται και στη περίπτωση του θεωρήματος του Stokes. Έτσι, αν

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ ή } rot\vec{F} = \vec{0} \text{ όπου } \vec{F}(P,Q,R)\text{, τότε:}$$

i) $\oint_c Pdx + Qdy + Rdz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη του τόπου,

ii) το $\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$ είναι ανεξάρτητο απ' τη καμπύλη ολοκλήρωσης που ενώνει τα A και B του τόπου και βρίσκεται εξ ολοκλήρου σ' αυτόν,

iii) η παράσταση $Pdx + Qdy + Rdz$ είναι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $U(x, y, z)$ που ορίζεται στο τόπο αυτό. (βλέπε παράγραφο 2.5 ολοκλήρωση ολικών διαφορικών)

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί με τη βοήθεια του θεωρήματος των Gauß – Ostrogradsky το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $I = \iint_S xdydz + ydzdx - 2zdxdy$ όπου S είναι το ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ με $z \geq 0$ (παράδειγμα 4. της παραγράφου 6.8)

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το τύπο των Gauß – Ostrogradsky

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \text{ . Είναι}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=-2, \text{ Άρα } \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial x}=0 \text{ οπότε}$$

$$I=\iiint\limits_V 0\cdot dxdydz=\iiint\limits_V 0\cdot dV=0 \text{ όπου } V \text{ το ημισφαίριο ακτίνας } \rho.$$

2) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$ όπου S είναι η επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$.

Λύση

Με εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης (Gauß – Ostrogradsky) έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2.$$

Επομένως:

$$I=\iiint\limits_V\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dxdydz=3\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

όπου V η σφαίρα $x^2+y^2+z^2\le\alpha^2$.

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες $\rho,\ \theta,\ \varphi$ με όρια μεταβολής

$0\le\rho\le\alpha,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$, βρίσκουμε:

$$I=3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{\alpha}\rho^2\cdot\rho^2\eta\mu\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\frac{3\alpha^5}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\eta\mu\varphi\, d\varphi\, d\theta=$$

$$=\frac{3\alpha^5}{5}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\sigma\upsilon\nu\varphi\right]_0^{\pi}d\theta=\frac{12\pi\alpha^5}{5}.$$

3) Δίνεται ο χώρος V που περιορίζεται απ’ το κύλινδρο $x^2+y^2=1$ και τα επίπεδα $z=0$ και $z=2-x$ (σχήμα 61), καθώς και η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{F}=\left(x^2+ye^z\right)\vec{x}_0+\left(y^2+ze^x\right)\vec{y}_0+\left(z^2+xe^y\right)\vec{z}_0.$$

Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint\limits_S\vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma$ με εφαρμογή του θεωρήματος Green στο χώρο, όπου S είναι η επιφάνεια που περικλείει το χώρο V.

Λύση

Είναι $P=x^2+ye^z,\quad Q=y^2+ze^x,\quad R=z^2+xe^y$ άρα

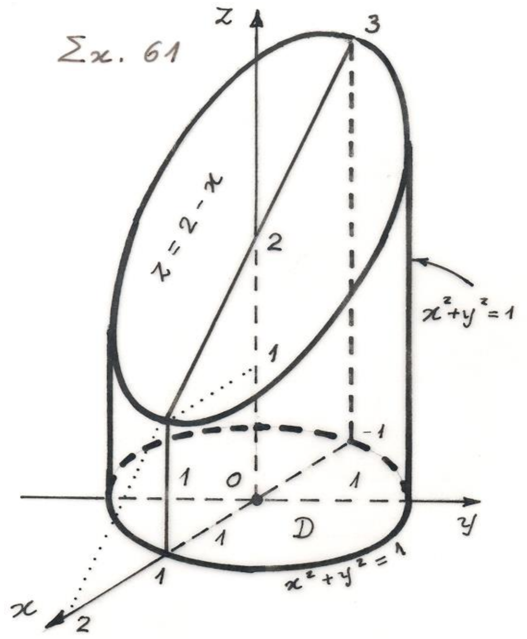
$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=2z \text{ και } \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)\,.$$

Έτσι, απ’ το θεώρημα της απόκλισης (τύπος (8), ιδιότητα 1. της 6.9.1.1) έχουμε:

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma = 2\iiint_V (x+y+z)dV = 2\iint_D dxdy\int_{z=0}^{2-x}(x+y+z)dz=$$

$$=\iint_D \left[2(x+y)z+z^2\right]_0^{2-x} dxdy = \iint_D\left[2(x+y)(2-x)+(2-x)^2\right] dxdy=$$

$$=\iint_D\left(-x^2-2xy+4y+4\right) dxdy$$



Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta$, με

$\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho$ και όρια μεταβολής $0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1$. Έτσι έχουμε

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\left(-\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta-2\rho^2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta+4\rho\eta\mu\theta+4\right)\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\frac{\rho^4}{4}\sigma\upsilon\nu^2\theta-\frac{2\rho^4}{4}\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta+\frac{4\rho^3}{3}\eta\mu\theta+\frac{4\rho^2}{2}\right]_0^1 d\theta=$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\theta-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta+\frac{4}{3}\eta\mu\theta+2\right)d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{8}\left[-\sigma\upsilon\nu 2\theta\right]_0^{2\pi}+\frac{4}{3}\left[-\sigma\upsilon\nu\theta\right]_0^{2\pi}+2\left[\theta\right]_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{4}{3}\cdot 0+4\pi=\frac{15\pi}{4}.$$

4) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma$, όπου $\vec{F}(x,y,z)=2xz\vec{x}_0+yz\vec{y}_0-4z^2\vec{z}_0$ και S είναι η επιφάνεια κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=2$.

Λύση

Από το θεώρημα της απόκλισης (τύπος (8) της παρ. 6.9.1.1)

$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{l}_0 d\sigma=\iiint_D div\vec{F}dV$ έχουμε

$$I=\iiint_D div\vec{F}dV=\iiint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(2xz)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(-4z^2)\right]dxdydz=$$

$$=\iiint_D(2z+z-8z)dxdydz=-5\iiint_D zdxdydz$$

όπου $D=\{\,(x,y,z)\,/\,0\le \mathrm{x}\le 2,\ 0\le \mathrm{y}\le 2,\ 0\le \mathrm{z}\le 2\,\}$. Άρα

$$I=-5\left[\int_0^2 dx\right]\left[\int_0^2 dy\right]\left[\int_0^2 zdz\right]=-5\cdot 2\cdot 2\cdot 2=-40$$

5) Να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes για τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}=3y\vec{x}_0-xz\vec{y}_0+yz^2\vec{z}_0$, όπου S είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $2z=x^2+y^2$ που κόβεται από το οριζόντιο επίπεδο $z=2$.

Λύση

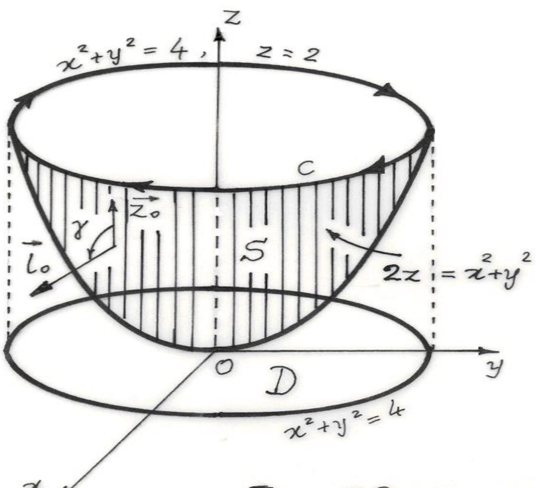
Είναι $P=3y,\quad Q=-xz,\quad R=yz^2$. Αν c είναι η καμπύλη του συνόρου της επιφάνειας του παραβολοειδούς, θα επαληθεύσουμε το θεώρημα του Stokes,

$$\oint_c Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\sigma\upsilon\nu\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\sigma\upsilon\nu\gamma\right]d\sigma.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αριστερό μέλος)

$$I=\oint_c Pdx+Qdy+Rdz=\oint_c 3ydx-xzdy+yz^2dz \qquad (1)$$



Σχ. 62.

όπου *c* είναι η περιφέρεια κύκλου στο χώρο με εξισώσεις

$$x^2+y^2=4, \qquad z=2,$$

η οποία προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση του παραβολοειδούς $2z=x^2+y^2$ όπου *z* το 2 (εξίσωση του επιπέδου *z* = 2) (σχήμα 62), με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, εφόσον παίρνουμε ως θετικό το εξωτερικό μέρος της επιφάνειας *S*.

Οι παραμετρικές εξισώσεις της *c* είναι

$$x=2\sigma\upsilon\nu t, \qquad y=2\eta\mu t, \qquad z=2 \qquad \text{όπου} \qquad 0\le t\le 2\pi .$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα γράφεται (αρνητική φορά)

$$I=-\int_{t=0}^{2\pi}\left(3\cdot 2\eta\mu t\, d(2\sigma\upsilon\nu t)-2\sigma\upsilon\nu t\cdot 2\cdot d(2\eta\mu t)+2\eta\mu t\cdot 2^2 d(2)\right)=$$

$$=-\int_{t=0}^{2\pi}\left(-12\eta\mu^2 t-8\sigma\upsilon\nu^2 t\right)dt=\int_{t=0}^{2\pi}\left(4\eta\mu^2 t+8\right)dt=20\pi. \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το 2° μέλος του θεωρήματος Stokes. Επειδή η γωνία *γ* που σχηματίζει ο άξονας $\vec{z}_0$ με το $\vec{l}_0$ σε οποιοδήποτε σημείο της *S* είναι > 90° θα είναι $\sigma\upsilon\nu\gamma<0$. Επειδή δε τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{l}_0$ είναι (για γωνία *γ* οξεία)

$$\vec{l}_0(\sigma\upsilon\nu\alpha,\sigma\upsilon\nu\beta,\sigma\upsilon\nu\gamma)=\left(\frac{-p}{\lambda},\ \frac{-q}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{όπου } \lambda=\sqrt{1+p^2+q^2}$$

τώρα αυτά θα είναι (για γωνία γ αμβλεία)

$$\vec{l}_0(\sigma\upsilon\nu\alpha,\, \sigma\upsilon\nu\beta,\, \sigma\upsilon\nu\gamma) = \left(\frac{p}{\lambda},\quad \frac{q}{\lambda},\quad \frac{-1}{\lambda}\right), \text{όπου } p = \frac{\partial z}{\partial x} = x,\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = y$$

και $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ η εξίσωση της S λυμένη ως προς z. Άρα

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\ \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\ \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Εξ' άλλου είναι

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = z^2 + x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -z - 3\,.$$

Έτσι, μετά τις αντικαταστάσεις το 2ο μέλος γίνεται

$$I' = \iint_S \frac{(z^2+x)x + (z+3)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, d\sigma = \iint_D \left(z^2x + x^2 + z + 3\right) dxdy$$

όπου $d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$ και $D:\ x^2 + y^2 \le 4$.

Για $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ παίρνουμε τελικά:

$$I' = \iint_D \left(\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 x + x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 3\right) dxdy\,.$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες: $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \ y = \rho\eta\mu\theta$ με

$0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ J = \dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$. Έτσι

$$I' = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\rho^2\right)^2\cdot\rho\sigma\upsilon\nu\theta + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \frac{1}{2}\rho^2 + 3\right)\rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2}\left(\frac{\rho^6}{4}\sigma\upsilon\nu\theta + \rho^3\sigma\upsilon\nu^2\theta + \frac{1}{2}\rho^3 + 3\rho\right)dxdy =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{\rho^7}{7\cdot 4}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\rho^4}{4}\sigma\upsilon\nu^2\theta + \frac{\rho^4}{8} + \frac{3\rho^2}{2}\right]_0^2 d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{32}{7}\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2 + 6\right)d\theta =$$

$$= \frac{32}{7}\left[\eta\mu\theta\right]_0^{2\pi} + 4\left[\frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{2} + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} + 8\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{32}{7}\cdot 0 + 4\pi + 16\pi = 20\pi\,.$$

Η τελευταία σχέση και η (2) δίνουν $I = I'$, δηλ. επαληθεύεται το θεώρημα Stokes.

6) Να επαληθευθεί ο τύπος του Stokes για το διανυσματικό πεδίο:

$\vec{F} = (2x - y)\vec{x}_0 - yz^2\vec{y}_0 - y^2 z\vec{z}_0$ και για την επιφάνεια S που είναι το πάνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ που περατώνεται στο επίπεδο xOy, δηλαδή η c έχει εξισώσεις $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ z = 0$.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (9) της 6.9.2.1

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{l}_0 \cdot rot\vec{F}\ d\sigma .$$

Υπολογίζουμε το 1ο μέλος:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_c (2x - y)dx - yz^2 dy - y^2 z dz$$

και επειδή $z = 0$ οπότε $dz = 0$, προκύπτει:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_c (2x - y)dx .$$

Χρησιμοποιούμε παραμετρικές εξισώσεις για τη καμπύλη $c:\ x^2 + y^2 = 1$, τις

$x = \sigma\upsilon\nu\, t,\ \ y = \eta\mu\, t$ με $0 \le t \le 2\pi$, και $dx = -\eta\mu\, t dt$, οπότε

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu\, t - \eta\mu\, t\right)\left(-\eta\mu\, t\right) dt = \int_{t=0}^{2\pi} \left(\eta\mu^2 t - \eta\mu 2t\right) dt =$$

$$= \left[-(\eta\mu\, t\sigma\upsilon\nu\, t)/2 + 1/2\, t\right]_0^{2\pi} - 1/2\left[-\sigma\upsilon\nu 2t\right]_0^{2\pi} = \pi .$$

Υπολογίζουμε τώρα το 2ο μέλος:

Είναι

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2yz + 2yz = 0,\ \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 0 = 0,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-1) = 1$$

. Άρα $rot\vec{F} = 0\vec{x}_0 + 0\vec{y}_0 + \vec{z}_0$ και $\vec{l}_0 \cdot rot\vec{F} = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu\beta \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu\gamma$.

Επομένως $\iint_S \sigma\upsilon\nu\gamma\ d\sigma = \iint_{D_{xy}} dxdy$ όπου $D_{xy}:\ x^2 + y^2 \le 1$.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\iint_{D_{xy}} dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\rho^2/2\right]_0^1 d\theta = 1/2\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \pi .$$

7) Να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes για τη διανυσματική συνάρτηση

$\vec{F} = (x+y)\vec{x}_0 + (2x-z)\vec{y}_0 + (y+z)\vec{z}_0$ και για την επιφάνεια S πάνω απ' το τρίγωνο ΑΒΓ που δημιουργείται απ' το επίπεδο $3x+2y+z=6$ και τις τομές του με τα επίπεδα των συντεταγμένων $x = 0$ (yOz), $y = 0$ (xOz), $z = 0$ (xOy).

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα κατά μήκος της καμπύλης c το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I_1 = \oint_c (x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz \quad (\text{όπου ΑΒΓΑ} = c)$$

όπως δείχνει το σχήμα 63.

α) Κατά μήκος της ΑΒ:

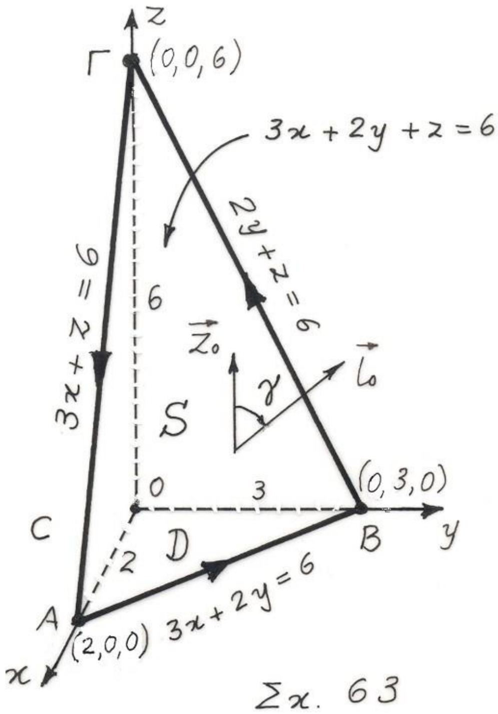
Η εξίσωση της ΑΒ προκύπτει ως τομή της εξίσωσης του επιπέδου $3x+2y+z=6$ και του $z = 0$, (xOy) δηλαδή θέτοντας $z = 0$ (άρα και $dz = 0$):

ΑΒ : $3x+2y=6$ και δίνει $y=(6-3x)/2$ καθώς και $dy=-3/2\,dx$. Άρα

$$I_{\text{AB}} = \int_{\text{AB}} (x+y)\,dx + (2x-z)\,dy =$$

$$= \int_{x=2}^{0} \left(x + (6-3x)/2\right) dx + (2x-0)(-3/2)\,dx =$$

$$= \int_{x=2}^{0} \frac{-7x+6}{2}\,dx = \left[-\frac{7}{4}x^2 + 3x\right]_2^0 = 1.$$



Σχ. 63

β) Κατά μήκος της ΒΓ:

Ομοίως, η εξίσωση της ΒΓ προκύπτει απ' την εξίσωση του επιπέδου $3x+2y+z=6$ για $x = 0$ ($dx = 0$). Είναι ΒΓ: $2y+z=6$ και δίνει $z=6-2y$ ενώ $dz=-2dy$. Άρα

$$I_{\text{ΒΓ}} = \int_{\text{ΒΓ}} (2x-z)\,dy + (y+z)\,dz =$$

$$= \int_{y=3}^{0} (2y-6)\,dy + (6-y)(-2)\,dy =$$

$$= \int_{y=3}^{0} (4y-18)\,dy = \left[2y^2 - 18y\right]_3^0 = 36$$

.

γ) Κατά μήκος της ΓΑ:

Παρόμοια βρίσκουμε την εξίσωση της ΓΑ (y = 0, άρα και dy = 0):

ΓΑ: $3x + z = 6$ άρα $z = 6 - 3x$ και $dz = -3dx$, οπότε

$$I_{\Gamma A} = \int_{\Gamma A} (x+y)\,dx + (y+z)\,dz = \int_{x=0}^{2} xdx + (6-3x)(-3)\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{2} (10x - 18)\,dx = \left[5x^2 - 18x\right]_0^2 = -16 .$$

Επομένως $\oint_c (x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz = 1 + 36 - 16 = 21$.

Θα υπολογίσουμε τώρα το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα

$$I_2 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \sigma\upsilon\nu\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \sigma\upsilon\nu\alpha\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \sigma\upsilon\nu\gamma \right\} d\sigma \qquad (1)$$

Οι συναρτήσεις P, Q, R είναι $P = x + y,\ \ Q = 2x - z,\ \ R = y + z$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - (-1) = 2,\ \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 0 = 0,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1 .$$

Επίσης, η εξίσωση του επιπέδου (λυμένη ως προς z) είναι $z = 6 - 3x - 2y$. Άρα

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -3,\ \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -2,\ \ \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{14}$$

Ακόμα, το $\vec{l}_0$ σχηματίζει με το $\vec{z}_0$ σε οποιοδήποτε σημείο της S οξεία γωνία γ, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\gamma > 0$. Άρα

$$\vec{l}_0(\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\gamma) = \vec{l}_0(-p/\lambda, -q/\lambda, 1/\lambda) = \vec{l}_0\left(3/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}\right).$$

Επομένως η παράσταση μέσα στην αγκύλη της (1) ισούται με

$$2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

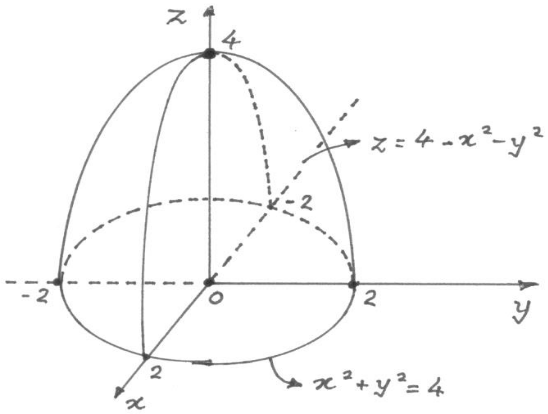
$$I_2 = \iint_S \frac{7}{\sqrt{14}} d\sigma = \iint_D \frac{7}{\sqrt{14}} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy = 7 \iint_D dxdy$$

όπου D είναι η προβολή της S στο xOy, δηλαδή το τρίγωνο OAB. Κατά συνέπεια, όπως φαίνεται απ' το σχήμα 63 είναι

$$I_2 = 7 \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\frac{6-3x}{2}} dy = 7 \int_{x=0}^{2} \frac{6-3x}{2} dx = 7\left[3x - \frac{3}{4}x^2\right]_0^2 = 21.$$

7) Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ που διαρρέει την επιφάνεια S του παραβολοειδούς: $z = 4 - x^2 - y^2$ το οποίο βρίσκεται προς τα θετικά z.

Λύση



Η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ διαμέσου του τμήματος επιφάνειας S δίνεται, ως γνωστό, από το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα (τύπος (6) της παρ. 6.8 και 6^{η} ιδιότητα της 6.8.1)

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma ,$$

όπου (τύπος (11) της παρ. 5.11)

$$\vec{l}_0 = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$$

είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στην επιφάνεια S.

Αν θέσουμε την εξίσωση του παραβολοειδούς σε πεπλεγμένη μορφή:

$$w(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 4 = 0 ,$$

τότε η εξίσωση της επιφάνειας S γίνεται $w(x,y,z) = 0$ και το κάθετο διάνυσμα πάνω στην επιφάνεια S είναι (τύπος (11α) βασικής παρατήρησης της παρ. 5.11)

$$\vec{l} = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{z}_0 = \nabla w = 2x\vec{x}_0 + 2y\vec{y}_0 + \vec{z}_0 \text{ , με}$$

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{2x\vec{x}_0 + 2y\vec{y}_0 + \vec{z}_0}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \text{. Επομένως,}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{l}_0 = \frac{2y^2 + z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \text{ και άρα}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma = \iint_D \frac{2y^2 + 4 - x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \cdot \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_D (4 + y^2 - x^2) dxdy$$

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει

$$\Phi = \iint_D 4 + \rho^2\eta\mu^2\theta - \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \iint_D 4\rho\, d\rho\, d\theta +$$

$$+\iint_D \rho^2(\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = 4\left[\int_0^2 \rho\, d\rho\right]\cdot\left[\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right] -$$

$$-\iint_D \rho^3\sigma\upsilon\nu 2\theta d\rho\, d\theta = 16\pi - \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu 2\theta d\theta\right]\left[\int_0^2 \rho^3 d\rho\right] =$$

$$= 16\pi - \left[\frac{\eta\mu 2\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\cdot\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 16\pi - 0\cdot 4 = 16\pi.$$

8) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c x^2y^3dx + dy + zdz\,,$$

όπου c είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0$ με τη χρήση του θεωρήματος του Stokes, αν S είναι το ημισφαίριο $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ που περνάει από τον κύκλο c.

Λύση

Ως γνωστό, είναι (τύπος (1) της παρ. 6.9.2)

$$I = \oint_c Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\sigma\upsilon\nu\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\sigma\upsilon\nu\,\gamma\right\} d\sigma$$

όπου $P = x^2y^3,\ Q = 1,\ R = z$ και

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Επομένως, $I = -3\iint_S x^2y^2\sigma\upsilon\nu\gamma d\sigma$.

Αλλά είναι (τύπος (1) της παρ. 6.7) $\sigma\upsilon\nu\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$,

καθώς και (τύπος (2) της παρ. 6.7) $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy$. Άρα

$$I = -3\iint_S x^2y^2\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}d\sigma = -3\iint_D x^2y^2dxdy$$

όπου D είναι η ορθή προβολή της επιφάνειας S πάνω στο επίπεδο xOy, δηλαδή η περιοχή D είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \le R^2$.

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει ότι:

$$I=-3\left[\int_0^{2\pi}\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]\cdot\left[\int_0^R\rho^2\rho^2\rho d\rho\right]=-3\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d(2\theta)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^R=-3\frac{1}{8}\left[\int_0^{2\pi}\eta\mu^2(2\theta)d(2\theta)\right]\cdot\frac{R^6}{6}=-\frac{3}{8}\left[\frac{-\eta\mu 2\theta\sigma\upsilon\nu 2\theta+2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}\cdot\frac{R^6}{6}=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

9) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα

$$\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

όπου S είναι η επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Λύση

Είναι (τύπος (6) της παρ. 6.8 και τύπος (9) της παρ.6.8.1)

$$I=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V div\vec{F}dV=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

όπου $P=x^3,\ \ Q=y^3,\ \ R=z^3$ και $\dfrac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\ \ \dfrac{\partial Q}{\partial y}=3y^2,\ \ \dfrac{\partial R}{\partial z}=3z^2$.

Επομένως,

$$I=3\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz\,.$$

Με μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$D=\left\{\,(\rho,\theta,\varphi)\,/\,0\le\rho\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\,\right\}$, άρα

$$I=3\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=3\iiint_D\rho^2\rho^2\eta\mu\varphi\,d\rho\,d\theta d\varphi=$$

$$=3\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\left[\int_0^{\pi}\eta\mu\varphi d\varphi\right]\left[\int_0^R\rho^4d\rho\right]=3\cdot 2\pi\left[-\sigma\upsilon\nu\varphi\right]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R=\frac{12\pi R^5}{5}.$$

10) Έστω S μια κλειστή επιφάνεια, $\vec{r}=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0$, $\vec{l}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια S και D η στερεά περιοχή που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια. Αν η αρχή Ο δεν ανήκει στην D να δειχθεί ότι

$$\iint_S\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}_0}{r}d\sigma=2\iiint_D\frac{1}{r}\,dxdydz$$

Λύση

Είναι (τύπος (8) της παρ. 4.9.1.1) $\oiint_S\vec{F}\cdot\vec{l}_0d\sigma=\iiint_D div\vec{F}dV$. Άρα

$$\iint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{l}_0}{r} d\sigma = \iiint_D div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) dV \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)\right] dxdydz =$$

$$= \iiint_D \left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right) dxdydz = 2\iiint_D \frac{1}{r} dxdydz$$

(διότι $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1\cdot r - xr'}{r^2} = \frac{r - x\frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ομοίως κυκλικά και για τα άλλα).

6.10 Εφαρμογές επιεπιφάνειου ολοκληρώματος στη Γεωμετρία, Φυσική και Μηχανική

1) Όγκος στερεού

Όπως είδαμε, (τύπος (9) της 2ης ιδιότητας, παρ. 6.9.1.1)

$$\iiint_D dV = \frac{1}{3}\oiint_S xdydz + ydxdz + zdxdy \tag{1}$$

για $P = x,\ Q = y,\ R = z$.

Επίσης, απ' τους τύπους (5, 6, 7) της 6.9.1 έχουμε:

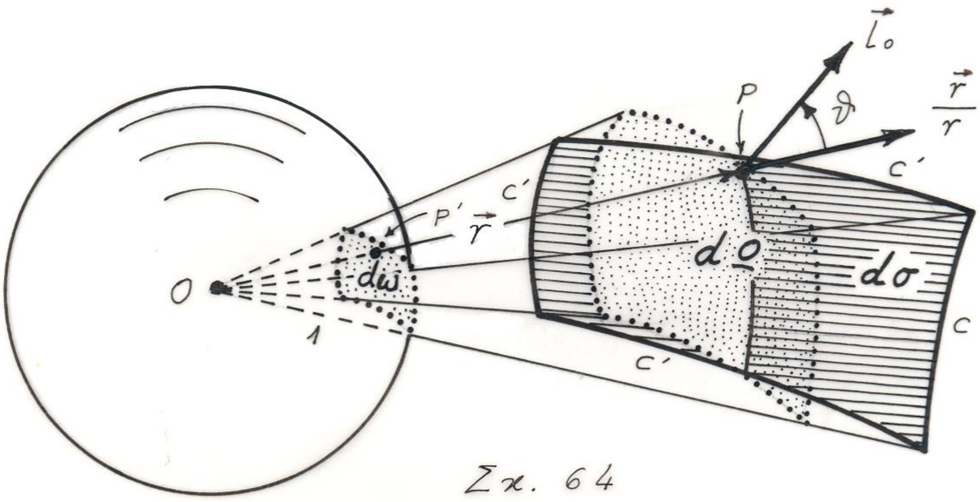
$$\iiint_D dV = \oiint_S z\sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma = \oiint_S y\sigma\upsilon\nu\beta\, d\sigma = \oiint_S x\sigma\upsilon\nu\alpha\, d\sigma . \tag{2}$$

Επομένως ο όγκος ενός στερεού που περιορίζεται από μια κλειστή επιφάνεια *S* δίνεται απ' τον τύπο (1) ή τους τύπους (2).

2) Ορισμός στερεάς γωνίας επιφάνειας

Θεωρούμε μια επιφάνεια *S* που περατώνεται στη καμπύλη *c* και ένα σταθερό σημείο Ο που δεν βρίσκεται στην *S*. Υποθέτουμε ακόμα ότι κάθε ευθεία που περνάει απ' το Ο συναντάει την *S* σε ένα το πολύ σημείο. Θεωρούμε επίσης τη σφαίρα με κέντρο Ο και ακτίνα 1 και τη κωνική επιφάνεια που γράφεται με οδηγό καμπύλη την *c* και κορυφή το σημείο Ο. Η κωνική αυτή επιφάνεια κόβει απ' την επιφάνεια της σφαίρας ένα τμήμα *S΄* που έχει εμβαδό *ω*. Το εμβαδό αυτό *ω* ονομάζεται **στερεά γωνία** της επιφάνειας *S* ως προς το Ο (σχήμα 64).

Θεωρούμε τώρα ένα σημείο Ρ της επιφάνειας *S* με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και μέτρο *r*, και ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας το οποίο περιβάλλεται με μια κλειστή καμπύλη *c΄* και έχει εμβαδό $d\sigma$ (σχήμα 64). Η κωνική επιφάνεια με οδηγό καμπύλη την c' και κέντρο το O κόβει από μεν την επιφάνεια της σφαίρας (O, 1) ένα τμήμα με στοιχειώδες εμβαδό $d\omega$ από δε την επιφάνεια της σφαίρας (O, r) ένα τμήμα με στοιχειώδες εμβαδό $d\Omega$. Αλλά, όπως ξέρουμε απ' τη Στοιχειώδη Γεωμετρία, είναι



Σχ. 64

$$\frac{d\omega}{1^2} = \frac{d\Omega}{r^2} \quad \text{ή} \quad d\omega = \frac{d\Omega}{r^2}. \qquad (1)$$

Επίσης, αν $\vec{l}_0$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στη $d\sigma$ και $\hat{\theta}$ η γωνία των $\vec{r}$ και $\vec{l}_0$ (σχήμα 64), τότε

$$d\,\Omega = \pm\, \sigma\upsilon\nu\theta\, d\sigma, \quad \text{όπου} \qquad (2)$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \vec{l}_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (3)$$

(το πρόσημο (+) ισχύει για οξεία γωνία θ και το (–) για αμβλεία). Επομένως η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται

$$d\omega = \pm \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma \quad \text{ή} \quad \omega = \pm \iint_S \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma \qquad (4)$$

3) Γενικοί ορισμοί της κλίσης, απόκλισης και στροφής (με χρήση επιεπιφάνειου ολοκληρώματος)

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z)$ και ένα βαθμωτό πεδίο $\Phi(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = \Phi\vec{G}$, όπου $\vec{G}$ σταθερό διάνυσμα. Τα πεδία αυτά ορίζονται σ' ένα τόπο $V \subset R^3$ ο οποίος περιβάλλεται από μια κλειστή επιφάνεια S. Θεωρούμε ένα σημείο $P \in V$ και ένα στοιχειώδη τόπο ΔV γύρω από το P που περιβάλλεται από μια στοιχειώδη επιφάνεια ΔS.

Τότε απ’ το θεώρημα των Gauß – Ostrogradsky προκύπτουν οι παρακάτω (γενικευμένοι) ορισμοί:

i) **Κλίση** του Φ: $\nabla\Phi = grad\Phi = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta V} \oiint\limits_{\Delta S} \Phi \cdot \vec{l}_0 d\sigma$

ii) **Απόκλιση** του $\vec{F}$: $\nabla\vec{F} = div\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta V} \oiint\limits_{\Delta S} \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma$

iii) **Στροφή** του $\vec{F}$: $\nabla \wedge \vec{F} = rot\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta V} \oiint\limits_{\Delta S} \vec{F} \wedge \vec{l}_0 d\sigma$.

Οι παραπάνω τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ορισμοί των *grad, div* και *rot* υπό τον όρο ότι τα όρια στα δεξιά μέλη υπάρχουν.

Παρατηρήσεις

i) Ο ορισμός της απόκλισης από φυσική άποψη (παρατήρ. 6 της παραγράφου 6.8) παριστάνει τη *ροή* στη μονάδα του όγκου του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ δια μέσου της επιφάνειας Δ*S*.

ii) Αν $div\vec{F} > 0$ σε μια μικρή περιοχή του σημείου *P*, τότε η συνολική ροή απ’ το *P* είναι θετική (εκροή) και το *P* ονομάζεται *πηγή*. Αν όμως $div\vec{F} < 0$, η συνολική ροή απ’ το *P* είναι αρνητική (εισροή) και το *P* ονομάζεται *ρουφήχτρα*.

iii) Αν για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι $div\vec{F} = 0$ παντού όπου ορίζεται, τότε το πεδίο $\vec{F}$, όπως γνωρίσαμε, ονομάζεται *σωληνοειδές*. Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε το πεδίο $\vec{F}$ ως σωληνοειδές αν υπάρχει κάποιο άλλο διανυσματικό πεδίο $\vec{G}$ τέτοιο ώστε $\vec{F} = rot\vec{G}$. Πράγματι, τότε είναι $div\vec{F} = 0$ γιατί όπως ξέρουμε $div(rot\vec{F}) = 0$ (παράδειγμα 4 της παραγράφου 5.7).

4) Νευτώνειο πεδίο στο χώρο

Το διανυσματικό πεδίο $F(\vec{r}) = -k\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ όπου $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου του και $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ το μέτρο του $\vec{r}$ λέγεται **Νευτώνειο πεδίο** και έχει συντεταγμένες (f_1, f_2, f_3) όπου

$$f_1 = \frac{-kx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, \quad f_2 = \frac{-ky}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, \quad f_3 = \frac{-kz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

που ορίζεται στο τόπο $V = R^3 - \{(0,0,0)\}$.

Για το διανυσματικό αυτό πεδίο αποδεικνύονται τα παρακάτω:

i) $div\vec{F} = 0,$ ***ii)*** $rot\vec{F} = \vec{0},$ ***iii)*** $\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$.

Απόδειξη

i) Ως γνωστό, $div\vec{F} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$. (1)

Είναι

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} + kx\cdot 3/2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = \frac{3kx^2 - kr^2}{r^5}.$$

Παρόμοια βρίσκουμε κυκλικά

$\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{3ky^2 - kr^2}{r^5}$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial z} = \dfrac{3kz^2 - kr^2}{r^5}$. Τότε η (1) γίνεται

$$div\vec{F} = \frac{3k\left(x^2+y^2+z^2\right) - 3kr^2}{r^5} = \frac{3kr^2 - 3kr^2}{r^5} = 0.$$

ii) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $rot\,\vec{F}$ είναι

$$rot\vec{F} = \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right), \text{ διότι } rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Είναι $\dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{kz\,3/2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cdot 2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} - \dfrac{3ky\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = 0$.

Ομοίως και οι άλλες συντεταγμένες του $rot\,\vec{F}$ είναι μηδέν. Άρα $rot\,\vec{F} = \vec{0}$.

iii) Εφόσον λοιπόν $rot\,\vec{F} = \vec{0}$, τότε (ιδιότητα 5(iii) της παραγρ. 6.9.2.1) υπάρχει συνάρτηση $U(x, y, z)$ που λέγεται *δυναμική* συνάρτηση, απ' την οποία προέρχεται το πεδίο αυτό και είναι

$$U = U(x,y,z) = U(r) = -\frac{k}{r} = -\frac{k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}.$$

Έτσι, οι συντεταγμένες της δύναμης έλξης (X, Y, Z) που ασκείται σε υλικό σημείο μάζας m από μια υλική επιφάνεια S με κατανομή πυκνότητας $\delta(x,y,z)$, δίνονται απ' τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα:

$$X = -km\iint_S \delta(x,y,z)\frac{x}{r^3}d\sigma,\ Y = -km\iint_S \delta(x,y,z)\frac{y}{r^3}d\sigma,\ Z = -km\iint_S \delta(x,y,z)\frac{z}{r^3}d\sigma$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5) Εφαρμογές στη Μηχανική

Με τη βοήθεια των επιεπιφάνειων ολοκληρωμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα, τις συντεταγμένες και τη ροπή αδράνειας μάζας που είναι κατανεμημένη σε μια επιφάνεια. Έτσι, έχουμε για επιφανειακή πυκνότητα $\delta = \delta(x,y,z)$:

1. Η συνολική μάζα m δίνεται απ' το τύπο

$$m = \iint_S \delta(x,y,z)d\sigma \tag{1}$$

2. Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της υλικής επιφάνειας είναι

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\delta(x,y,z)d\sigma,\ y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\delta(x,y,z)d\sigma,\ z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\delta(x,y,z)d\sigma, \tag{2}$$

Ειδικά για ομογενή επιφάνεια με $\delta(x, y, z) = c$ είναι

$$x_G = \iint_S xd\sigma \Big/ \iint_S d\sigma,\quad y_G = \iint_S yd\sigma \Big/ \iint_S d\sigma,\quad z_G = \iint_S zd\sigma \Big/ \iint_S d\sigma \tag{3}$$

3. Η ροπή αδράνειας της επιφάνειας S είναι:

i) ως προς τον Ox: $I_x = \iint_S \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)d\sigma$ (4α)

ii) ως προς τον Oy: $I_y = \iint_S \left(x^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)d\sigma$ (4β)

iii) ως προς τον Oz: $I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)d\sigma$ (4γ)

iv) ως προς το επίπεδο xOy: $I_{xy} = \iint_S z^2\delta(x,y,z)d\sigma$ (5α)

v) ως προς το επίπεδο yOz: $I_{yz} = \iint_S x^2\delta(x,y,z)d\sigma$ (5β)

$vi)$ ως προς το επίπεδο zOx: $I_{zx} = \iint\limits_S y^2 \delta(x,y,z) d\sigma$ (5γ)

Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha)\ I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad \beta)\ I_y = I_{yz} + I_{yx}, \quad \gamma)\ I_z = I_{zx} + I_{zy}.$

Παραδείγματα

1) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{x}_0 + x^2\vec{y}_0 + 3xz^2\vec{z}_0$.

i) Να δειχτεί ότι υπάρχει συνάρτηση $U = U(x,y,z)$ τέτοια ώστε $\nabla U = \vec{F}$ και να υπολογιστεί.

ii) Να βρεθεί το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση υλικού σημείου στο πεδίο αυτό απ' το σημείο A(1, –2, 1) στο σημείο B(3, 1, 4)

Λύση

i) Οι συναρτήσεις $P = 2xy + z^3$, $Q = x^2$, $R = 3xz^2$ είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε κάθε κλειστό και περατωμένο τόπο. Είναι:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(3xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial x^2}{\partial z} \right)\vec{x}_0 +$$

$$+\left(\frac{\partial(2xy+z^3)}{\partial z} - \frac{\partial(3xz^2)}{\partial x} \right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^3)}{\partial y} \right)\vec{z}_0 = \vec{0}$$

Επομένως (ιδιότητα 5(iii) της παραγρ. 6.9.2.1) υπάρχει συνάρτηση $U = U(x,y,z)$ – η δυναμική συνάρτηση –, τέτοια ώστε

$$\vec{F} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{z}_0, \text{ όπου}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + z^3 \quad (1), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \quad (2), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 3xz^2 \quad (3).$$

Ολοκληρώνοντας την (1) παίρνουμε

$$U(x,y,z) = \int \left(2xy + z^3\right) dx + h(y,z) = x^2 y + xz^3 + h(y,z) \qquad (4)$$

Παραγωγίζουμε τώρα την (4) ως προς y και έχουμε

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = (\text{λόγω της 2}) = x^2.$$

Άρα $\dfrac{\partial h(y,z)}{\partial y} = 0$

δηλαδή η $h = h(y,z)$ είναι τελικά συνάρτηση μόνο του z και γράφουμε $h = h(z)$ οπότε η (4) γίνεται τελικά

$$U = x^2 y + xz^3 + h(z) \qquad (5)$$

Παραγωγίζουμε την (5) τώρα ως προς z και έχουμε

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3xz^2 + \frac{dh(z)}{dz} = (\text{λόγω της } 3) = 3xz^2 .$$

Άρα $\dfrac{dh(z)}{dz} = 0$

δηλαδή η $h = h(z)$ είναι τελικά σταθερή και γράφουμε $h(z) = c$.

Επομένως $U(x, y, z) = x^2 y + xz^3 + c$

ii) Το έργο θα είναι (κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης που συνδέει τα σημεία Α(1, –2, 1) και Β(3, 1, 4) (τύπος 9α της παραγράφου 6.4.1)

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c Pdx + Qdy + Rdz = U(x, y, z)\Big|_A^B = U(B) - U(A) = 202 .$$

(Αντίστοιχο με το παράδειγμα 4. της παραγράφου 6.5 που αναφέρεται στο επίπεδο).

2) Δίνεται η κλειστή επιφάνεια *S* και έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της *P* ως προς ένα σημείο Ο. Να δειχτεί ότι η στερεά γωνία της επιφάνειας *S* ως προς το σημείο Ο είναι:

ω = 0 αν το Ο είναι έξω από την *S*

ω = 4π αν το Ο είναι στο εσωτερικό της *S*.

Λύση

Ως γνωστό (τύπος 4 της παρ. 6.10) η στερεά γωνία ω της επιφάνειας *S* ως προς Ο (που βρίσκεται έξω από την *S*) είναι

$$\omega = \iint_S \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma$$

Επειδή έχουμε κλειστή επιφάνεια, αν εφαρμόσουμε το τύπο (8) των ιδιοτήτων του θεωρήματος της απόκλισης (παρ. 6.9.1.1) για $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ έχουμε

$$\oiint_S \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma = \iiint_D div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dV$$

όπου *D* είναι ο τρισδιάστατος τόπος που περιβάλλεται απ’ την *S*.

Είναι όμως, (βλέπε Νευτώνειο πεδίο – 4η εφαρμογή της 6.10)

$$div\vec{F} = div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

παντού στον D (με $\vec{r} \neq \vec{0}$), εφόσον το Ο είναι έξω απ' την S και όχι πάνω σ' αυτή. (Τότε θα μπορούσε να είναι $\vec{r} = \vec{0}$ για το P). Άρα ω = 0.

Αν τώρα το σημείο Ο βρίσκεται στο εσωτερικό της S, θεωρούμε την επιφάνεια S_1 της σφαίρας που έχει κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα α. Αν D_1 είναι ο τόπος μεταξύ των δύο επιφανειών S και S_1 και εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης για τον τόπο D_1, έχουμε

$$\oiint\limits_{S+S_1} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma = \oiint\limits_{S} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma + \oiint\limits_{S_1} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma = \iiint\limits_{D_1} div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dV = 0$$

γιατί πάλι $div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ επειδή $\vec{r} \neq \vec{0}$ στον D_1, εφόσον το Ο βρίσκεται στο εσωτερικό της S και όχι πάνω σ' αυτή. Άρα

$$\oiint\limits_{S} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma = -\oiint\limits_{S_1} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma .$$

Όμως, για την επιφάνεια S_1 της σφαίρας έχουμε $r = \alpha$, ενώ η γωνία θ που σχηματίζει το $\vec{l}_0$ με το $\vec{r}$ είναι αμβλεία, εφόσον το $\vec{l}_0$ κατευθύνεται προς το Ο επειδή ο τόπος D_1 είναι μεταξύ της σφαίρας S_1 και της S. Άρα

$\vec{l}_0 = -\frac{\vec{r}}{\alpha}$, οπότε $\frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{\alpha^4} = -\frac{\alpha^2}{\alpha^4} = -\frac{1}{\alpha^2}$. Ώστε

$$\omega = \oiint\limits_{S} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma = -\oiint\limits_{S_1} \frac{\vec{l}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} d\sigma = \oiint\limits_{S_1} \frac{1}{\alpha^2} d\sigma = \frac{1}{\alpha^2} \oiint\limits_{S_1} d\sigma = \frac{1}{\alpha^2} \cdot 4\pi\alpha^2 = 4\pi .$$

(Το $\oiint\limits_{S_1} d\sigma$ εκφράζει προφανώς το εμβαδό της σφαίρας: $4\pi\alpha^2$).

3) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ομογενούς σφαιρικού κελύφους ως προς τον άξονα z αν η ακτίνα του είναι α και η πυκνότητά του είναι λ.

Λύση

Ως γνωστό, (παραγρ. 6.10, 5η Εφαρμογή στη Μηχανική, τύπος 4), η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z του σφαιρικού κελύφους δίνεται απ' τη σχέση

$$I_z = \iint\limits_{S} \left(x^2 + y^2\right) \lambda \cdot d\sigma \qquad (1)$$

όπου *S* είναι η επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους ακτίνας *α*.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (1) εργαζόμαστε όπως και στο παράδ. 1. της παρ. 6.8. Δηλαδή χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ) με

$$\rho = \alpha \text{ σταθερό}, \quad x = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi, \quad y = \alpha\eta\mu\theta\eta\mu\varphi, \quad z = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$$

και όρια μεταβολής αυτών: $u = \theta, \quad v = \varphi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

δηλαδή ο νέος τόπος T είναι:

$$\mathrm{T} = \left\{(\theta, \rho): \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \rho = \alpha\right\}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το τύπο (2) της παραγρ. 6.8,

$$\iint_S A(x, y, z) d\sigma = \iint_T B(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

το ολοκλήρωμα (1) γράφεται

$$I_z = \lambda \iint_S \left(x^2 + y^2\right) d\sigma =$$

$$= \lambda \iint_T \left(\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu^2\varphi + \alpha^2\eta\mu^2\theta\,\eta\mu^2\varphi\right)\sqrt{EG - F^2}\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \iint_T \alpha^2\eta\mu^2\varphi\sqrt{EG - F^2}\,d\varphi\,d\theta.$$ Επίσης,

$$E = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \alpha^2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \alpha^2\eta\mu\varphi = \alpha^2$$

$$G = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = \alpha^2\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\varphi + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^2\varphi = \alpha^2\eta\mu^2\varphi \qquad (2)$$

$$F = x_\varphi' x_\theta' + y_\varphi' y_\theta' + z_\varphi' z_\theta' = -\alpha^2\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + \alpha^2\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta + 0 = 0$$

άρα $\sqrt{EG - F^2} = \alpha^2\eta\mu\varphi$ και το ολοκλήρωμα (1) γίνεται

$$\lambda \iint_S \left(x^2 + y^2\right) d\sigma = \lambda \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi} \alpha^4\eta\mu^3\varphi\,d\varphi d\theta = \lambda\alpha^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \eta\mu^3\varphi\,d\varphi d\theta =$$

$$= \lambda\alpha^4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\left[-\frac{\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi}{3} + \frac{2}{3}\left(-\sigma\upsilon\nu\varphi\right) \right]_0^{\pi} \right) d\theta = \lambda\alpha^4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{4}{3}\,d\theta =$$

$$= \frac{8\lambda\pi\alpha^4}{3} = \underbrace{4\pi\alpha^2\lambda}_{m} \cdot \frac{2}{3}\alpha^2 = \frac{2}{3}m\alpha^2$$

όπου *m* η μάζα του σφαιρικού κελύφους.

4) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς το επίπεδο xOy υλικής επιφάνειας S με $\delta(x,y,z)=1$ που περιορίζεται απ' τη κυλινδρική επιφάνεια $x^2+y^2=4$ και από τα επίπεδα $z=0$ και $z=x+3$.

Λύση

Ο τύπος που δίνει τη ροπή αδράνειας ως προς το επίπεδο xOy της υλικής αυτής επιφάνειας είναι (τύπος 5(*iv*) παρ. 6.10):

$$I_{xy}=\iint_S z^2 d\sigma \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του (1) χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες

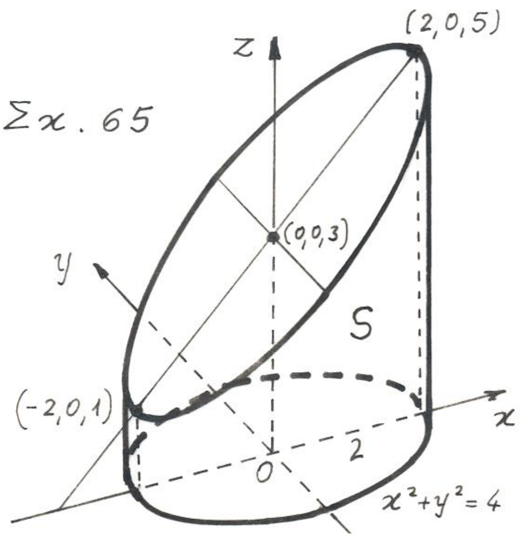
$$x=2\sigma\upsilon\nu\theta, \quad y=2\eta\mu\theta, \quad z=z, \quad (\rho=2 \text{ σταθερό})$$

με όρια μεταβολής $0\le\theta\le 2\pi, \quad 0\le z\le x+3$ ή $0\le z\le 2\sigma\upsilon\nu\theta+3$ (σχήμα 65).

Είναι

$$x'_\theta=-2\eta\mu\,\theta, \quad y'_\theta=2\sigma\upsilon\nu\,\theta, \quad z'_\theta=0, \quad x'_z=0 \quad y'_z=0, \quad z'_z=1, \text{ οπότε}$$

$$E=x'^2_\theta+y'^2_\theta+z'^2_\theta=4\eta\mu^2\theta+4\sigma\upsilon\nu^2\theta=4, \quad G=x'^2_z+y'^2_z+z'^2_z=1$$



$$F=x'_\theta x'_z+y'_\theta y'_z+z'_\theta z'_z=-2\eta\mu\theta\cdot 0+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 0+0\cdot 1=0$$

Επομένως $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{4}=2$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα (1) γράφεται

$$I_{xy}=\iint_S z^2 d\sigma=\iint_T z^2\cdot\sqrt{EG-F^2}\,dzd\theta=\iint_T z^2\cdot 2dzd\theta=$$

$$=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{2\sigma\upsilon\nu\theta+3} z^2 dzd\theta=\frac{2}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[z^3\right]_0^{2\sigma\upsilon\nu\theta+3}d\theta=\frac{2}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(2\sigma\upsilon\nu\theta+3\right)^3 d\theta=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(8\sigma\upsilon\nu^3\theta+36\sigma\upsilon\nu^2\theta+54\sigma\upsilon\nu\theta+27\right)d\theta=^{1}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 8\left[\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu\theta}{3}+\frac{2}{3}\eta\mu\theta\right]_0^{2\pi}+\frac{2}{3}\cdot 36\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{2}+\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot 54\left[\eta\mu\theta\right]_0^{2\pi}+\frac{2}{3}\cdot 27\left[\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{16}{3}\cdot 0+24\cdot\pi+36\cdot 0+18\cdot 2\pi=60\pi\ .$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το εμβαδό του τμήματος της επιφάνειας σφαίρας

$x^2+y^2+z^2=25$ με $z\geq 0$

που βρίσκεται μέσα στο παραβολοειδές $z=19-x^2-y^2$.

2) Να υπολογιστεί το εμβαδό του τμήματος της κωνικής επιφάνειας $z=\sqrt{x^2+y^2}$ που αποκόβεται απ’ το κύλινδρο $(x-1)^2+y^2=1$.

3) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint_S A d\sigma$ όπου S είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z=2-x^2-y^2$ πάνω από το επίπεδο xOy και

$i)\ A=1,\quad ii)\ A=x^2+y^2,\quad iii)\ A=3z$.

(*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό όλων των ολοκληρωμάτων των (*i*), (*ii*), (*iii*)). (*Απάντηση*: *i*) $\frac{13\pi}{3}$, *ii*) $\frac{149\pi}{30}$, *iii*) $\frac{111\pi}{10}$)

4) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint_S\left(x^2+y^2\right)d\sigma$ όπου S είναι η επιφάνεια κώνου $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$ που περιορίζεται απ’ τα επίπεδα $z=0$, $z=3$.

(*Απάντηση*: 9π)

5) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint_S x^2yz d\sigma$ όπου S είναι το τετράεδρο που ορίζεται από τα επίπεδα $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(*Απάντηση*: $\frac{11\sqrt{3}}{360}$)

[1] Βλέπε παράρτημα (8^{ο} κεφάλαιο) – Απλά Ολοκληρώματα, παρ. 8.6 Αναγωγικοί τύποι

6) Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας του κώνου $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ που κόβεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. (*Απάντηση*: 6*π*)

7) Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας του παραβολοειδούς $2z = x^2 + y^2$ που βρίσκεται έξω από το κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (*Απάντηση*: $\frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)$)

8) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ όπου *S* είναι η επιφάνεια του τόπου που περικλείεται απ' το κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και τα επίπεδα $z = 0,\ z = 3$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης. (*Απ*. 81π).

9) Να υπολογιστούν τα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα

i) $I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, όπου *S* είναι η εξωτερική επιφάνεια του τριγώνου ΑΒΓ με Α(1, 0, 0), Β(0, 1, 0), Γ(0, 0, 1) και

ii) $I = \iint_S dydz + dzdx + dxdy$, όπου *S* είναι το τμήμα της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ που αποκόπτεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

(*Απάντηση*: **i)** $\frac{1}{2}$, **ii)** *π*)

10) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα

$$\iint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy,$$

όπου *S* είναι η εξωτερική επιφάνεια της πυραμίδας $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

11) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\oint\!\!\int_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma$ πάνω στη κλειστή επιφάνεια που αποτελείται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0,\ z = 5$, όπου $\vec{F} = 2xy\vec{x}_0 - y^2\vec{y}_0 + (z + xy)\vec{z}_0$.

12) Να επαληθευτεί το θεώρημα των Gauß – Ostrogradsky για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2x - z)\vec{x}_0 + x^2 y\vec{y}_0 - xz^2\vec{z}_0$ και τη κλειστή επιφάνεια του κύβου με πλευρές τα επίπεδα $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$.

13) Να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes για τη διανυσματική συνάρτηση

$\vec{F} = 2y\vec{x}_0 + 3x\vec{y}_0 - z^2\vec{z}_0$, όπου *S* είναι το πάνω μισό της επιφάνειας της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ με το επίπεδο $z = 0$. (Απάντηση: 9π)

14) Να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes για τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{x}_0 - 2xz\vec{y}_0 + yz^2\vec{z}_0$ όπου *S* ορίζεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$, το επίπεδο $z = 1$ και τον κύκλο c: $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$. (*Απάντηση*: 3π)

15) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma$, όπου

$\vec{F} = (x - z)\vec{x}_0 + (x^3 + yz)\vec{y}_0 - 3xy^2\vec{z}_0$, και *S* η επιφάνεια του κώνου

$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ πάνω από το επίπεδο xOy. (*Απάντηση:* 12π).

16) Έστω *S* μια κλειστή επιφάνεια, $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$, $\vec{l}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια *S* και *D* η στερεά περιοχή που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια. Αν η αρχή O δεν ανήκει στην *D* να δειχθεί ότι

$$\iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{l}_0}{r^2} d\sigma = \iiint_D \frac{1}{r^2} dxdydz$$

17) Να υπολογιστεί με δύο τρόπους το $I = \oint_c e^x dx + 2ydy - dz$, όπου *c* είναι η κλειστή καμπύλη $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$. **α)** κατ' ευθείαν, **β)** με το θεώρ. Stokes.

18) Να υπολογιστεί με χρήση του θεωρήματος του Stokes το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_c xdx + xydy + z^2dz$, όπου *c* είναι ο κύκλος κατά τον οποίο τέμνονται το παραβολοειδές $x^2 + y^2 = 4 - z$ και το επίπεδο $z = 2$. (*Απάντηση*: 0)

19) Να δειχτεί ότι υπάρχει συνάρτηση $U(x,y,z)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla U$ και να υπολογιστεί, όπου $\vec{F} = (2xy + 3)\vec{x}_0 + (x^2 - 4z)\vec{y}_0 - 4y\vec{z}_0$ το διανυσματικό πεδίο. Να υπολογιστεί επίσης το ολοκλήρωμα $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου *c* οποιοσδήποτε δρόμος από το A(3, –1, 2) ως το B(2, 1, –1). (*Απάντηση*: $U = x^2y - 4yz + 3x + c,\ \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6$)

20) Να βρεθεί η σημειακή συνάρτηση $U(x,y,z)$ για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (2xz^3 + 6y)\vec{x}_0 + (6x - 2yz)\vec{y}_0 + (3x^2z^2 - y^2)\vec{z}_0$$

τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla U$. Ακόμα να υπολογιστεί το $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου c καμπύλη που ενώνει τα σημεία Α(1, –1, 1) και Β(2, 1, –1).

21) Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους (Κ. Β) ομογενούς πυραμίδας με πυκνότητα λ σταθερή που περιβάλλεται απ' τα επίπεδα:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

22) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ομογενούς με μήκη ακμών *α, β, γ* ως προς τους άξονες Ox, Oy, Oz.

23) Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους ομογενούς τμήματος της επιφάνειας $3z = 2\left(x\sqrt{x} + y\sqrt{y}\right)$ που περικλείεται απ' τα επίπεδα

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

24) Να υπολογιστεί το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma$, όπου

$$\vec{F} = (x+1)\vec{x}_0 - (2y+1)\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$$

και S το τρίγωνο με κορυφές Α(1, 0, 0), Β(0, 1, 0), Γ(0, 0, 1),

ενώ το $\vec{l}_0$ έχει τη φορά απομάκρυνσης απ' την αρχή των αξόνων. (*Απάντηση*: 0)

25) Να υπολογιστεί το $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma$, όπου $\vec{F} = y^2\vec{x}_0 + z\vec{y}_0 - x\vec{z}_0$ και S είναι το τμήμα της επιφάνειας του κυλίνδρου $y^2 = 1 - x$ που περιβάλλεται μεταξύ των επιπέδων $z = 0,\ z = x,\ x \geq 0$ με $\vec{l}_0 \cdot \vec{x}_0 > 0$. (*Απάντηση*: $4/15$).

26) Να επαληθευτεί το θεώρημα της απόκλισης για τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{F} = 4x\vec{x}_0 - 3y^2\vec{y}_0 - z^2\vec{z}_0$$

και τόπο D που ορίζεται απ' τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 3$.

Επίσης για τις διανυσματικές συναρτήσεις:

i) $\vec{F} = yx\vec{x}_0 + y^2\vec{y}_0 - \dfrac{z^2}{2}\vec{z}_0$ με $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

ii) $\vec{F} = 3x\vec{x}_0 - 2y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ με $x^2 + y^2 = 4, \quad y = 0, \quad x + y + z = 3$.

27) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes:

i) για τη συνάρτηση $\vec{F} = 2xy\vec{x}_0 - yz^2\vec{y}_0 - y^2z\vec{z}_0$ όπου S είναι το πάνω μέρος της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$ και

ii) για τη συνάρτηση $\vec{F} = y\vec{x}_0 + z\vec{y}_0 + x\vec{z}_0$ όπου S είναι το τμήμα της επιφάνειας του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ μεταξύ των επιπέδων $z = 0$ και $z = x + 2$ προσανατολισμένο από μέσα προς τα έξω.

28) Αν S είναι κλειστή επιφάνεια δείξτε ότι $\iint\limits_S rot\vec{F} \cdot \vec{l}_0 d\sigma = 0$.