Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **5**

Στοιχεία Διανυσματικής ανάλυσης, θεωρία καμπυλών και επιφανειών

Α. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

5.1 Γενικά – Ορισμοί

Αν σε κάθε τιμή μιας μεταβλητής *t* που παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα αριθμών [α, β] αντιστοιχίσουμε ένα διάνυσμα $\vec{r}$, τότε το $\vec{r}$ είναι συνάρτηση του *t*, και γράφουμε $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Σ' ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων Οxyz το οποίο δεν εξαρτάται απ' το *t* μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0, \quad \alpha \le t \le \beta$$

όπου *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) είναι συναρτήσεις του *t* και $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ οι διανυσματικές μονάδες των αξόνων Οx, Οy, Οz αντίστοιχα. Στις εφαρμογές, η μεταβλητή *t* ή παράμετρος *t*, παριστάνει συνήθως χρόνο και η τιμή $\vec{r} = \vec{r}(t)$ το διάνυσμα θέσεως ενός κινουμένου σημείου ως προς μια αρχή Ο.

Γενικότερα, αν σε κάθε σημείο Μ(*x*, *y*, *z*) του χώρου R^3 αντιστοιχίσουμε τις συναρτήσεις $r_1(x,y,z), r_2(x,y,z)$ και $r_3(x,y,z)$, έτσι ώστε οι τιμές των r_1, r_2, r_3 στο σημείο Μ(*x*, *y*, *z*) να αποτελούν τις συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{r}$, τότε ορίζεται η **διανυσματική σημειακή συνάρτηση,** ή πιο απλά **διανυσματική συνάρτηση**

$$\vec{r}(x,y,z) = r_1(x,y,z)\vec{x}_0 + r_2(x,y,z)\vec{y}_0 + r_3(x,y,z)\vec{z}_0$$

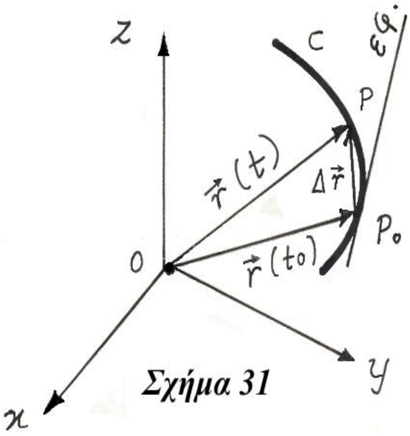
Λέμε ακόμα ότι η $\vec{r}$ ορίζει ένα **διανυσματικό πεδίο.** Παραδείγματα διανυσματικών πεδίων αποτελούν η ταχύτητα ροής των μορίων ενός ρευστού, η δύναμη στη μονάδα ηλεκτροστατικού φορτίου κλπ. Η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r} = \vec{r}(t)$ είναι συνεχής στο $t = t_0$, αν οι συναρτήσεις *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) είναι συνεχείς στο $t = t_0$.

Γεωμετρικά μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση παριστάνει για κάθε t το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ από την αρχή O που αντιστοιχεί στο t. Έτσι ορίζεται μια καμπύλη c στο χώρο R^3 από τα πέρατα των εκάστοτε διανυσματικών ακτινών $\vec{r}(t)$.

Οι εξισώσεις $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ που είναι συντεταγμένες του $\vec{r}(t)$ είναι οι **παραμετρικές εξισώσεις** της καμπύλης c.

5.2 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

Έστω P_0 σταθερό σημείο σε μια καμπύλη c και $\vec{r} = \vec{r}(t_0)$ το διάνυσμα θέσεώς του (σχήμα 31). Θεωρούμε το σημείο P που αντιστοιχεί στην τιμή $t = t_0 + \Delta t$ με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0 + \Delta t)$. Τότε είναι $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$. Το



Σχήμα 31

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

αν υπάρχει, λέγεται *παράγωγος* της $\vec{r}(t)$ ως προς t στο $t = t_0$ και συμβολίζεται με $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Λέμε ακόμα ότι η $\vec{r}(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = t_0$. Αντί του συμβόλου $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ γράφουμε επίσης $\dot{\vec{r}}(t)$, ή απλά $\dot{\vec{r}}$. Δηλαδή η τελεία στο $\vec{r}$ σημαίνει συνήθως παραγώγιση ως προς το χρόνο t. Όταν $\Delta t \to 0$, τότε το P, κινούμενο στη καμπύλη c τείνει προς το P_0 και επομένως το διάνυσμα

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}$$

έχει τη κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης c στο σημείο P_0.

Ένα σημείο P_0 μιας καμπύλης με διανυσματική εξίσωση $\vec{r}(t)$ λέγεται **ομαλό** αν $\left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{P_0} \neq \vec{0}$. Αν κάθε σημείο της καμπύλης c είναι ομαλό, αυτή λέγεται **λεία**.

Αν το t είναι συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους π.χ. του s (διαστήματος), δηλαδή $t = t(s)$ τότε ισχύουν τα ίδια για τη διαφόριση συνθέτων συναρτήσεων, δηλαδή

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Αν η $\vec{r}(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = t_0$, τότε

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 .$$

Οι **ιδιότητες** των παραγώγων όπως και των μερικών παραγώγων των διανυσματικών συναρτήσεων ορίζονται όπως ακριβώς και για τις αριθμητικές συναρτήσεις, όπου όμως πρέπει να δίνεται προσοχή στη σειρά των πράξεων.

Έτσι, αν $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ είναι δύο διαφορίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις του t και $f = f(t)$ μια συνηθισμένη αριθμητική συνάρτηση, τότε:

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2$

(παράγωγος αθροίσματος διανυσματικών συναρτήσεων)

2. $\dfrac{d}{dt}(f \cdot \vec{r}) = \dfrac{df}{dt}\vec{r} + f\,\dot{\vec{r}}$

(παράγωγος γινομένου αριθμητικής επί διανυσματική συνάρτηση)

3. $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \dot{\vec{r}}_1\,\vec{r}_2 + \vec{r}_1\,\dot{\vec{r}}_2$

(παράγωγος εσωτερικού γινομένου δύο διανυσματικών συναρτήσεων)

4. $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \dot{\vec{r}}_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_2$

(παράγωγος εξωτερικού γινομένου δύο διανυσματικών συναρτήσεων. Εδώ ενδιαφέρει η σειρά των συναρτήσεων).

5. Αν $[\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3]$ είναι το μικτό γινόμενο των τριών διανυσματικών συναρτήσεων $\vec{r}_1(t),\ \vec{r}_2(t),\ \vec{r}_3(t)$, επειδή

$$[\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3] = \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3)$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά τους κανόνες παραγώγισης εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
[\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3]^\bullet &= (\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3))^\bullet = \dot{\vec{r}}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3) + \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3)^\bullet = \\
&= \dot{\vec{r}}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3) + \vec{r}_1 \cdot (\dot{\vec{r}}_2 \wedge \vec{r}_3) + \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \dot{\vec{r}}_3) = [\dot{\vec{r}}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3] + [\vec{r}_1\ \dot{\vec{r}}_2\ \vec{r}_3] + [\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \dot{\vec{r}}_3]
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι, αν $\vec{r}_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{r}_2(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\vec{r}_3(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ είναι τρία διανύσματα, τότε το μικτό γινόμενο αυτών δίνεται, ως γνωστό, απ' τον τύπο

$$[\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3]=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

Οι παράγωγοι **ανώτερης τάξης** ορίζονται όπως και για τις συνηθισμένες συναρτήσεις δηλαδή

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \quad ή \quad \ddot{\vec{r}}=\left(\dot{\vec{r}}\right)^{\bullet}$$

Αν $\vec{r}(x,y,z)=r_1(x,y,z)\vec{x}_0+r_2(x,y,z)\vec{y}_0+r_3(x,y,z)\vec{z}_0$, ορίζονται ανάλογα και οι μερικές παράγωγοι της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(x,y,z)$ ως προς *x, y, z*.

Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω τύποι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}&=\frac{\partial r_1}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial r_2}{\partial x}\vec{y}_0+\frac{\partial r_3}{\partial x}\vec{z}_0\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}&=\frac{\partial r_1}{\partial y}\vec{x}_0+\frac{\partial r_2}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial r_3}{\partial y}\vec{z}_0\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}&=\frac{\partial r_1}{\partial z}\vec{x}_0+\frac{\partial r_2}{\partial z}\vec{y}_0+\frac{\partial r_3}{\partial z}\vec{z}_0\end{aligned}\qquad(1)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης με σταθερό μέτρο (αντίστοιχα με σταθερή διεύθυνση) δεν είναι μηδέν γιατί αλλάζει η διεύθυνση (αντίστοιχα μεταβάλλεται το μέτρο) της διανυσματικής συνάρτησης. Σταθερό είναι το διάνυσμα εκείνο, που και το μέτρο του και η διεύθυνσή του παραμένουν σταθερά όταν το *t* μεταβάλλεται. Τότε είναι $\dot{\vec{r}}=\vec{0}$.

Παραδείγματα

1) Αν $\vec{r}(t)=\left(t^3+2t\right)\vec{x}_0+\left(-3e^{-2t}\right)\vec{y}_0+2ημ5t\,\vec{z}_0$ να βρεθούν τα

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}},\quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\dot{r},\quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}},\quad \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|=\ddot{r}\ \text{ στο }\ t=0.$$

Τι παριστάνουν τα παραπάνω ποσά, όταν το *t* εκφράζει το χρόνο;

Λύση

Παραγωγίζοντας τη διανυσματική συνάρτηση ως προς *t* βρίσκουμε:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{x}_0 + \dot{y}\,\vec{y}_0 + \dot{z}\,\vec{z}_0 =$$

$$= (t^3 + 2t)'\vec{x}_0 + (-3e^{-2t})'\vec{y}_0 + (2\eta\mu 5t)'\vec{z}_0 =$$

$$= (3t^2 + 2)\vec{x}_0 + 6e^{-2t}\vec{y}_0 + 10\sigma\upsilon\nu 5t\,\vec{z}_0$$

και για $t = 0$ προκύπτει το διάνυσμα:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = \dot{\vec{r}}(0) = 2\vec{x}_0 + 6\vec{y}_0 + 10\vec{z}_0$$

ενώ το μέτρο του τελευταίου διανύσματος είναι

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = \dot{r}(0) = \sqrt{2^2 + 6^2 + 10^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

Υπολογίζουμε τώρα τη δεύτερη παράγωγο της διανυσματικής συνάρτησης ως προς *t*:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{x}_0 + \ddot{y}\,\vec{y}_0 + \ddot{z}\,\vec{z}_0 =$$

$$= (3t^2 + 2)'\vec{x}_0 + (6e^{-2t})'\vec{y}_0 + (10\sigma\upsilon\nu 5t)'\vec{z}_0 =$$

$$= 6t\vec{x}_0 - 12e^{-2t}\vec{y}_0 - 50\eta\mu 5t\vec{z}_0$$

και για $t = 0$ προκύπτει το διάνυσμα:

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = \ddot{\vec{r}}(0) = 0\vec{x}_0 - 12\vec{y}_0 + 0\vec{z}_0 = -12\vec{y}_0$$

ενώ το μέτρο του τελευταίου διανύσματος είναι

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = \ddot{r}(0) = \sqrt{0^2 + (-12)^2 + 0^2} = 12$$

Όταν το *t* παριστάνει χρόνο, τότε το $\vec{r}(t)$ εκφράζει τη τροχιά του κινητού κατά μήκος της καμπύλης *c* στον τρισδιάστατο χώρο, τα $\dot{\vec{r}}(0), \dot{r}(0)$ εκφράζουν το διάνυσμα της ταχύτητας και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, ενώ τα $\ddot{\vec{r}}(0), \ddot{r}(0)$ εκφράζουν το διάνυσμα της επιτάχυνσης και το μέτρο της για $t = 0$.

2) Αν $f(x,y,z) = x^2yz$ και $\vec{r}(x,y,z) = 3x^2y\,\vec{x}_0 + yz^2\vec{y}_0 - xz\,\vec{z}_0$ να βρεθεί η $\dfrac{\partial^2(f\,\vec{r})}{\partial y \partial z}$ στο σημείο $P_0(1,-2,-1)$.

Λύση

Είναι (γινόμενο συνάρτησης επί διανυσματική συνάρτηση)

$$f \cdot \vec{r} = x^2 yz\left(3x^2 y\,\vec{x}_0 + yz^2\vec{y}_0 - xz\,\vec{z}_0\right) =$$
$$= 3x^4 y^2 z\vec{x}_0 + x^2 y^2 z^3 \vec{y}_0 - x^3 yz^2 \vec{z}_0$$

οπότε η μερική παράγωγος αυτής ως προς *z* θα είναι

$$\frac{\partial (f\,\vec{r})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^4 y^2 z\vec{x}_0 + x^2 y^2 z^3 \vec{y}_0 - x^3 yz^2 \vec{z}_0\right) =$$
$$= 3x^4 y^2 \vec{x}_0 + 3x^2 y^2 z^2 \vec{y}_0 - 2x^3 yz\,\vec{z}_0$$

Επίσης η μερική παράγωγος της τελευταίας ως προς *y* θα είναι

$$\frac{\partial^2 (f\,\vec{r})}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^4 y^2 \vec{x}_0 + 3x^2 y^2 z^2 \vec{y}_0 - 2x^3 yz\,\vec{z}_0\right) =$$
$$= 6x^4 y\vec{x}_0 + 6x^2 yz^2 \vec{y}_0 - 2x^3 z\,\vec{z}_0$$

Άρα στο σημείο $P_0(1,-2,-1)$ είναι $\left.\dfrac{\partial (f\,\vec{r})}{\partial z \partial y}\right|_{P_0} = -12\vec{x}_0 - 12\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0$.

3) Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ που ορίζεται από την τομή των δύο επιφανειών $2x^2 + y - z = 0$ και $2x - y - z = 0$.

Λύση

Θέτοντας $x = t$ οι παραπάνω επιφάνειες γίνονται $y - z = -2t^2$ και $y + z = 2t$.
Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων αυτών ως προς y, z παίρνουμε

$$y = t - t^2 \text{ και } z = t + t^2.$$

Επομένως η καμπύλη αυτή έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = t,\; y = t - t^2,\; z = t + t^2$$

και διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(t) = t\vec{x}_0 + (t - t^2)\vec{y}_0 + (t + t^2)\vec{z}_0.$$

4) Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = t\vec{x}_0 + t^2\vec{y}_0 + t^3\vec{z}_0$ στο $t = 1$.

Λύση

Βρίσκουμε την παράγωγο της διανυσματικής συνάρτησης στο $t = 1$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(t\vec{x}_0 + t^2\vec{y}_0 + t^3\vec{z}_0\right) = \vec{x}_0 + 2t\vec{y}_0 + 3t^2\vec{z}_0$$

και για $t = 1$ προκύπτει το συγκεκριμένο διάνυσμα

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=1} = \dot{\vec{r}}(1) = \vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + 3\vec{z}_0$$

και επειδή $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\dot{\vec{r}}_0$, όπου $\dot{r} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ προκύπτει ότι

$$\dot{\vec{r}}_0 = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{r}} = \frac{\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + 3\vec{z}_0}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{x}_0 + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{y}_0 + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{z}_0 .$$

(Όπως τονίστηκε στη παράγραφο 5.2 το $\dot{\vec{r}} = \vec{x}_0 + 2t\vec{y}_0 + 3t^2\vec{z}_0$ έχει την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο P_0).

5) Αν $\vec{r}_1(t) = t\vec{x}_0 + t^2\vec{y}_0 + 2t\vec{z}_0$, $\vec{r}_2(t) = (1+t^2)\vec{x}_0 + (2-t)\vec{y}_0 + 3\vec{z}_0$, και $f(t) = t^2$, να βρεθούν οι παράγωγοι: $i)\ (f\,\vec{r}_1)^\bullet$, $ii)\ (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^\bullet$, $iii)\ (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)^\bullet$

Λύση

i) Είναι $(f\,\vec{r}_1)^\bullet = \dfrac{d}{dt}(f\,\vec{r}_1) = \dfrac{df}{dt}\vec{r}_1 + f\,\dot{\vec{r}}_1$ (1)

Υπολογίζουμε χωριστά τις παραγώγους $\dfrac{df}{dt}$ και $\dot{\vec{r}}_1$. Είναι

$\dfrac{df}{dt} = 2t$, $\dot{\vec{r}}_1 = \vec{x}_0 + 2t\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0$. Επομένως η (1) γίνεται

$$(f\,\vec{r}_1)^\bullet = 2t\left(t\vec{x}_0 + t^2\vec{y}_0 + 2t\,\vec{z}_0\right) + t^2\left(\vec{x}_0 + 2t\vec{y}_0 + 2\,\vec{z}_0\right) = 3t^2\vec{x}_0 + 4t^3\vec{y}_0 + 6t^2\vec{z}_0 .$$

ii) Είναι

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^\bullet = \dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2 \qquad (2)$$

Η $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^\bullet$ μπορεί να υπολογιστεί βασικά με δύο τρόπους: είτε να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ και μετά την παράγωγο, είτε να χρησιμοποιήσουμε τη (2).

Είναι $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = t\cdot(1+t^2) + t^2(2-t) + 2t\cdot 3 = 2t^2 + 7t$ οπότε

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^\bullet = \frac{d}{dt}(2t^2 + 7t) = 4t + 7 .$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη (2).

iii) Παρόμοια έχουμε

$$\left(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_2 \qquad (3)$$

Και η $\left(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right)^{\bullet}$ μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους όπως και η $\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\right)^{\bullet}$. Είναι:

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ t & t^2 & 2t \\ 1+t^2 & 2-t & 3 \end{vmatrix} = \left(5t^2 - 4t\right)\vec{x}_0 + \left(2t^3 - t\right)\vec{y}_0 + \left(-t^4 - 2t^2 + 2t\right)\vec{z}_0 .$$

Άρα $\left(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right)^{\bullet} = \left(10t - 4\right)\vec{x}_0 + \left(6t^2 - 1\right)\vec{y}_0 + \left(-4t^3 - 4t + 2\right)\vec{z}_0$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη (3). Όμως εδώ πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις $\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2$ και μετά τα εξωτερικά γινόμενα $\dot{\vec{r}}_1 \wedge \vec{r}_2$, $\vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_2$, πράγμα που είναι πιο κουραστικό.

6) Για τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = \sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0 + \eta\mu\, t\vec{y}_0 + t\vec{z}_0$, όπου $t \in [0, 2\pi]$ να δειχθεί ότι είναι: **i)** $\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right| = \sqrt{2}$, **ii)** $\left[\dot{\vec{r}}\ \ \ddot{\vec{r}}\ \ \dddot{\vec{r}}\right] = 1$.

Λύση

i) Είναι $\dot{\vec{r}} = -\eta\mu t\vec{x}_0 + \sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0 + \vec{z}_0$, $\ddot{\vec{r}} = -\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 - \eta\mu t\vec{y}_0$. Άρα

$$\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ -\eta\mu\, t & \sigma\upsilon\nu\, t & 1 \\ -\sigma\upsilon\nu t & -\eta\mu\, t & 0 \end{vmatrix} = \eta\mu\, t\vec{x}_0 - \sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0 + (\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t)\vec{z}_0 =$$

$$= \eta\mu\, t\vec{x}_0 - \sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0 + \vec{z}_0$$

Επομένως $\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\eta\mu^2 t + (-\sigma\upsilon\nu t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ii) Επειδή $\dddot{\vec{r}} = \eta\mu t\vec{x}_0 - \sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0$ έχουμε (τύπος (1) της 5.2.)

$$\left[\dot{\vec{r}}\ \ \ddot{\vec{r}}\ \ \dddot{\vec{r}}\right] = \begin{vmatrix} -\eta\mu t & \sigma\upsilon\nu t & 1 \\ -\sigma\upsilon\nu t & -\eta\mu t & 0 \\ \eta\mu t & -\sigma\upsilon\nu t & 0 \end{vmatrix} = \sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t = 1 .$$

Ασκήσεις

1) Αν $\vec{r}(t) = (2t^4 - 3t)\vec{x}_0 + 2\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0 - 5\eta\mu 3t\vec{z}_0$ μία διανυσματική συνάρτηση, να βρεθούν η πρώτη και δεύτερη παράγωγος αυτής, δηλαδή τα διανύσματα $\frac{d\vec{r}}{dt}$ και $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ή $\dot{\vec{r}}$ και $\ddot{\vec{r}}$, καθώς και τα μέτρα τους για $t = 0$.

(*Απάντηση*: $\frac{d\vec{r}}{dt} = (8t^3 - 3)\vec{x}_0 - 2\eta\mu t\,\vec{y}_0 - 15\sigma\upsilon\nu 3t\,\vec{z}_0$,

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 24t^2\vec{x}_0 - 2\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0 + 45\eta\mu 3t\vec{z}_0$, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = 3\sqrt{26}$, $\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = 2$)

2) Να δειχτεί ότι η διανυσματική συνάρτηση

$\vec{r}(x, y) = e^{-\lambda x}[\eta\mu(\lambda y)\vec{\alpha} + \sigma\upsilon\nu(\lambda y)\vec{\beta}]$, όπου $\lambda \in R$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ σταθερά διανύσματα, επαληθεύει τη σχέση $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial y^2} = \vec{0}$

5.3 Συνθήκες σταθερού μέτρου ή διεύθυνσης της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(t)$

Έστω $\vec{r} = \vec{r}(t)$ παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση στο διάστημα [α, β]. Αν για μια τιμή του t παραγωγίσουμε την $\vec{r}(t)$ και ονομάσουμε r το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος $\vec{r}$, τότε έχουμε ως γνωστό

$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$ (είναι $\vec{r}\cdot\vec{r} = r\cdot r\sigma\upsilon\nu 0° = r\cdot r = r^2$).

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε

$(\vec{r}\cdot\vec{r})^\bullet = (r^2)^\bullet$ ή $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 2r\dot{r}$ ή

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = r\dot{r} \qquad (1)$$

Αν τώρα η $\vec{r} = \vec{r}(t)$ έχει σταθερό μέτρο θα είναι $\dot{r} = 0$, οπότε απ' την (1) προκύπτει $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 0$, δηλαδή το $\vec{r}$ είναι κάθετο στο $\dot{\vec{r}}$ (όταν $\dot{\vec{r}} \neq 0$). Αλλά και αντίστροφα, αν τα $\vec{r}$ και $\dot{\vec{r}}$ είναι κάθετα, τότε $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 0$ οπότε λόγω της (1) θα είναι και $r\cdot\dot{r} = 0$ και επειδή $r \neq 0$ προκύπτει ότι $\dot{r} = 0$, δηλαδή το μέτρο του $\vec{r}$ είναι σταθερό.

Ώστε για να είναι το μέτρο διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r} = \vec{r}(t)$ σταθερό (ανεξάρτητο της τιμής t) πρέπει και αρκεί το $\vec{r}$ να είναι κάθετο στην παράγωγό του $\dot{\vec{r}}$.

Αν $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ είναι η διανυσματική μονάδα της $\vec{r} = \vec{r}(t)$, θα είναι

$$\vec{r} = r\vec{r}_0 \text{ οπότε } \dot{\vec{r}} = (r\vec{r}_0)^\bullet = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0 \qquad (2)$$

Το $\vec{r}_0$ έχει σταθερό μέτρο διότι $|\vec{r}_0| = 1$, άρα θα είναι κάθετο στην παράγωγό του $\dot{\vec{r}}_0$. Συνεπώς απ' τη (2) φαίνεται ότι το $\dot{\vec{r}}$ αναλύθηκε σε δύο κάθετες συνιστώσες τις $\vec{r}_0$ και $\dot{\vec{r}}_0$.

Αν τώρα το $\vec{r}$ έχει σταθερή κατεύθυνση, τότε και το $\vec{r}_0$ θα έχει προφανώς σταθερή κατεύθυνση, οπότε $\dot{\vec{r}}_0 = \vec{0}$ (σταθερό μέτρο, σταθερή κατεύθυνση). Άρα η (2) γράφεται $\dot{\vec{r}} = (r\vec{r}_0)^{\bullet} = \dot{r}\vec{r}_0$ δηλαδή το $\dot{\vec{r}}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{r}_0$, οπότε $(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}_0) = \vec{0}$ (ιδιότητα εξωτερικού γινομένου δύο συγγραμμικών διανυσμάτων).

Αλλά και αντίστροφα, αν τα διανύσματα $\dot{\vec{r}}$ και $\vec{r}_0$ είναι συγγραμμικά, απ' τη (2) προκύπτει ότι η συνιστώσα $r\dot{\vec{r}}_0$ του $\dot{\vec{r}}$ πρέπει να είναι μηδέν και επειδή $r \neq 0$ θα είναι $\dot{\vec{r}}_0 = \vec{0}$. Άρα το $\vec{r} = \vec{r}(t)$ έχει διεύθυνση ανεξάρτητη του t.

<u>Συμπερασματικά</u>, για να έχει η $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

1) σταθερό **μέτρο** ανεξάρτητο του t πρέπει:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \tag{3}$$

2) σταθερή **διεύθυνση** ανεξάρτητη του t πρέπει:

$$\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{0}. \tag{4}$$

Παραδείγματα

1) Να δειχθεί ότι η διανυσματική συνάρτηση

ι) $\vec{r}(t) = \eta\mu t \sigma\upsilon\nu t\,\vec{x}_0 + \sigma\upsilon\nu^2 t\,\vec{y}_0 + \eta\mu t\,\vec{z}_0$ έχει σταθερό μέτρο, $\forall t \in R$, ενώ η

ιι) $\vec{r}(t) = t^2\vec{x}_0 + \dfrac{2}{3}t^2\vec{y}_0 + \dfrac{3}{4}t^2\vec{z}_0$ έχει σταθερή διεύθυνση

Λύση

ι) Πρέπει να είναι (τύπος (3) της παραγράφου 5.3. για σταθερό μέτρο)

$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$. Είναι

$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$ όπου $\dot{x} = \sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t,\quad \dot{y} = -2\sigma\upsilon\nu t\,\eta\mu t,\quad \dot{z} = \sigma\upsilon\nu t$.

Ως γνωστό, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ισούται με το άθροισμα των γινομένων των ομωνύμων συντεταγμένων. Άρα

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \eta\mu t\sigma\upsilon\nu t(\sigma\upsilon\nu^2 t-\eta\mu^2 t)+\sigma\upsilon\nu^2 t(-2\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t)+\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t =$$

$$= \eta\mu t\sigma\upsilon\nu^3 t-\eta\mu^3 t\sigma\upsilon\nu t-2\eta\mu t\sigma\upsilon\nu^3 t+\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t =$$

$$= -\eta\mu t\sigma\upsilon\nu^3 t-\eta\mu^3 t\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t = \eta\mu t\sigma\upsilon\nu t(1-\sigma\upsilon\nu^2 t-\eta\mu^2 t)=0$$

ιι) Πρέπει να είναι (τύπος (4) της παραγράφου 5.3. για σταθερή διεύθυνση)

$\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}=\vec{0}$. Είναι

$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0+\dot{y}\vec{y}_0+\dot{z}\vec{z}_0$ όπου $\dot{x}=2t,\quad \dot{y}=\frac{4}{3}t,\quad \dot{z}=\frac{6}{4}t$.

Υπενθυμίζεται ότι αν $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ είναι δύο διανύσματα στο χώρο R^3, τότε το εξωτερικό γινόμενο αυτών $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}$ είναι

$$\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}.$$ Έτσι, εφαρμόζοντας τον τύπο έχουμε

$$\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ t^2 & \frac{2}{3}t^2 & \frac{3}{4}t^2\\ 2t & \frac{4}{3}t & \frac{6}{4}t\end{vmatrix}=\vec{0}$$

γιατί η δεύτερη και τρίτη γραμμή της ορίζουσας είναι ανάλογες.

2) Αν $\vec{r}(x,y,z)=x^2y\vec{x}_0-2y^2z\vec{y}_0+xy^2z^2\vec{z}_0$, να υπολογιστεί το μέτρο

$\left|\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2}\wedge\frac{\partial^2\vec{r}}{dy^2}\right|$ στο σημείο $P_0(2,1,-2)$.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial y^2}$.

Εφαρμόζοντας τους τύπους (1) της παραγράφου 5.2. έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 2xy\,\vec{x}_0 + y^2 z^2 \vec{z}_0, \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} = 2y\vec{x}_0$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = x^2\,\vec{x}_0 - 4yz\vec{y}_0 + 2xyz^2 \vec{z}_0, \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = -4z\vec{y}_0 + 2xz^2 \vec{z}_0$$

Στο σημείο $P_0(2, 1, -2)$ έχουμε τα συγκεκριμένα διανύσματα

$$\left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2\vec{x}_0, \quad \left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2}\right|_{P_0} = 8\vec{y}_0 + 16\vec{z}_0 .$$

Υπολογίζουμε τώρα το εξωτερικό γινόμενο των τελευταίων διανυσμάτων.

$$\left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial^2 \vec{r}}{dy^2}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 16 \end{vmatrix} = -32\vec{y}_0 + 16\vec{z}_0$$

επομένως το μέτρο του διανύσματος του εξωτερικού γινομένου είναι

$$\left|\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial^2 \vec{r}}{dy^2}\right|_{P_0} = \sqrt{(-32)^2 + 16^2} = 16\sqrt{5} .$$

5.4 Ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων

Αν μια διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0, \quad \alpha \le t \le \beta$$

είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα αυτής και ορίζεται ως εξής:

1) $$\int_\alpha^\beta \vec{r}(t)dt = \vec{x}_0 \int_\alpha^\beta x(t)dt + \vec{y}_0 \int_\alpha^\beta y(t)dt + \vec{z}_0 \int_\alpha^\beta z(t)dt . \qquad (1)$$

Αν $\vec{\alpha}$ είναι σταθερό διάνυσμα, τότε:

2) $$\int_\alpha^\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{r}(t)dt = \vec{\alpha} \cdot \int_\alpha^\beta \vec{r}(t)dt , \qquad (2)$$

3) $$\int_\alpha^\beta \vec{\alpha} \wedge \vec{r}(t)dt = \vec{\alpha} \wedge \int_\alpha^\beta \vec{r}(t)dt . \qquad (3)$$

Επίσης, αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ είναι παράγωγος μιας άλλης διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(t)$, δηλαδή αν $\vec{r}(t) = \dot{\vec{f}}(t)$ για $\alpha \le t \le \beta$, τότε

4) $\int \vec{r}(t)dt = \vec{f}(t) + \vec{\alpha}$ όπου $\vec{\alpha} = c_1\vec{x}_0 + c_2\vec{y}_0 + c_3\vec{z}_0$ και (4)

5) $\int_{\alpha}^{\beta} \vec{r}(t)dt = \vec{f}(\beta) - \vec{f}(\alpha)$. (5)

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$\int_0^1 \vec{r}(t)dt$, όπου $\vec{r}(t) = t\vec{x}_0 + \sqrt{t+1}\vec{y}_0 - e^t\vec{z}_0$.

Λύση

Είναι (τύπος (1) της 5.4)

$$\int_0^1 \vec{r}(t)dt = \vec{x}_0\int_0^1 tdt + \vec{y}_0\int_0^1 \sqrt{t+1}dt + \vec{z}_0\int_0^1 (-e^t)dt =$$

$$= \vec{x}_0\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \vec{y}_0\left[\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]_0^1 + \vec{z}_0\left[-e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}\vec{x}_0 + \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\vec{y}_0 + (1-e)\vec{z}_0.$$

2) Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$, αν

$\dot{\vec{r}}(t) = 2\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 - t\eta\mu(t^2)\vec{y}_0 + 2t\vec{z}_0$ και $\vec{r}(0) = \vec{x}_0 + 3\vec{z}_0$.

Λύση

Ολοκληρώνοντας την $\dot{\vec{r}}(t)$ έχουμε (τύπος (4) της 5.4.)

$$\vec{r}(t) = \int \dot{\vec{r}}(t)dt = \vec{x}_0\int 2\sigma\upsilon\nu tdt + \vec{y}_0\int(-t\eta\mu(t^2))dt + \vec{z}_0\int 2tdt =$$

$$= (2\eta\mu t + c_1)\vec{x}_0 + \left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(t^2) + c_2\right)\vec{y}_0 + \left(t^2 + c_3\right)\vec{z}_0.$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τις τιμές των αυθαιρέτων c_1, c_2, c_3 από τη συνθήκη που δίνεται (αρχική συνθήκη). Επειδή για $t = 0$ η τελευταία σχέση δίνει

$\vec{r}(0) = c_1\vec{x}_0 + \left(\frac{1}{2} + c_2\right)\vec{y}_0 + c_3\vec{z}_0$, έχουμε: ($\vec{r}(0) = \vec{x}_0 + 3\vec{z}_0$)

$c_1\vec{x}_0 + \left(\frac{1}{2} + c_2\right)\vec{y}_0 + c_3\vec{z}_0 = \vec{x}_0 + 3\vec{z}_0$, δηλαδή $c_1 = 1,\ c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = 3$. Άρα

$$\vec{r}(t) = (2\eta\mu t + 1)\vec{x}_0 + \left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(t^2) - \frac{1}{2}\right)\vec{y}_0 + \left(t^2 + 3)\right)\vec{z}_0 .$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int (\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 + t^3\vec{y}_0 - \sqrt{t}\vec{z}_0)dt$, **β)** $\int_0^{\pi} (e^t\vec{x}_0 + \eta\mu t\vec{y}_0 + t\vec{z}_0)dt$.

(*Απάντηση*: α) $\eta\mu t\vec{x}_0 + \frac{t^4}{4}\vec{y}_0 - \frac{2}{3}t^{3/2}\vec{z}_0 + \vec{\alpha}$, β) $(e^{\pi} - 1)\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + \frac{\pi^2}{2}\vec{z}_0$)

2) Να βρεθεί η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)]'$ όπου

$\vec{r}_1(t) = t^2\vec{x}_0 + e^t\vec{y}_0 + \frac{1}{t}\vec{z}_0$ και $\vec{r}_2(t) = \vec{x}_0 + t^3\vec{y}_0 + \ln t\vec{z}_0$.

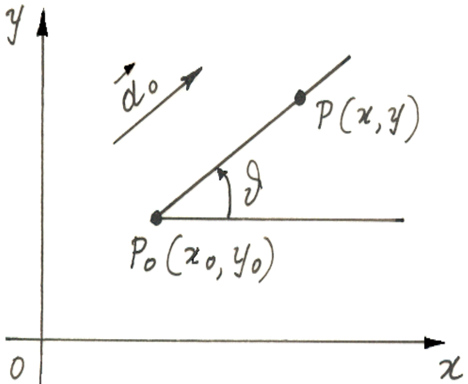
(*Απάντηση*: $[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)]' = 2t + t^3(3+t)e^t + \frac{1}{t^2}(1 - \ln t)$)

5.5 Παραγώγιση αριθμητικής συνάρτησης κατά μια διεύθυνση

Έστω $f(x, y)$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση, ορισμένη στον τόπο $\mathrm{T} \subset R^2$ και

$$\vec{\alpha}_0 = \sigma\upsilon\nu\theta\vec{x}_0 + \eta\mu\theta\vec{y}_0 \qquad (1)$$

διανυσματική μονάδα $\left(|\vec{\alpha}_0| = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta} = 1\right)$ που καθορίζει κάποια κατεύθυνση και σχηματίζει γωνία θ με τον Ox (σχήμα 32).



Σχήμα 32

Έστω $P_0(x_0, y_0)$ σημείο του τόπου Τ και $P(x, y)$ σημείο τέτοιο ώστε το $\overrightarrow{P_0P}$ να είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}_0$ δηλ. $\overrightarrow{P_0P} = h\vec{\alpha}_0$. Τότε θα είναι:

$$x = x_0 + h\sigma\upsilon\nu\theta, \quad y = y_0 + h\eta\mu\theta . \quad (1\alpha)$$

Ορίζουμε τη παράγωγο της $f(x, y)$ στο σημείο της $P_0(x_0, y_0)$ του $\mathrm{T} \subset R^2$ <u>*κατά τη διεύθυνση*</u> $\vec{\alpha}_0$, ως το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{h} \text{ όπου } h=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

(που προκύπτει από την (1α)) και τη συμβολίζουμε με

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{d\vec{\alpha}_0}\right|_{P_0} \text{ ή } \left. f'_{\vec{\alpha}_0}(x,y)\right|_{P_0}.$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{df(x,y)}{d\vec{\alpha}_0}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\eta\mu\theta \tag{2}$$

Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα (**ανάδελτα** της $f(x, y)$):

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0$$

τότε παρατηρούμε ότι η (2) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{df(x,y)}{d\vec{\alpha}_0}=\nabla f\cdot\vec{\alpha}_0 \tag{3}$$

Αν τώρα η $f(x, y, z)$ είναι ορισμένη και διαφορίσιμη στο τόπο $\mathrm{T}\subset R^3$, τότε η παράγωγος αυτής κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\alpha}_0$, όπου

$$\vec{\alpha}_0=\lambda\vec{x}_0+\mu\vec{y}_0+\nu\vec{z}_0 \tag{4}$$

και λ, μ, ν, είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{\alpha}_0$, αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\frac{df(x,y,z)}{d\vec{\alpha}_0}=\frac{\partial f}{\partial x}\lambda+\frac{\partial f}{\partial y}\mu+\frac{\partial f}{\partial z}\nu. \tag{5}$$

Υπενθυμίζεται ότι συνημίτονα κατεύθυνσης ενός διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ (ή του ίσου του $\overrightarrow{OM}$) στο χώρο R^3 ορίζονται τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το $\overrightarrow{OM}$ με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz. Έτσι, αν $\overrightarrow{OM}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ τότε είναι:

$$\lambda=\sigma\upsilon\nu(Ox,\overrightarrow{OM})=\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}},$$

$$\mu=\sigma\upsilon\nu(Oy,\overrightarrow{OM})=\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}},$$

$$\mu = \sigma\upsilon\nu(Oy, \overrightarrow{OM}) = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2}},$$

$$\nu = \sigma\upsilon\nu(Oz, \overrightarrow{OM}) = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2}}.$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε το διάνυσμα (**ανάδελτα** της $f(x, y, z)$):

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{df}{\partial z}\vec{z}_0$$

μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$\frac{df(x,y,z)}{d\vec{\alpha}_0} = \nabla f \cdot \vec{\alpha}_0 \qquad (6)$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x,y,z) = 2x^3y - 3y^2z$ στο σημείο $P_0(1, 2, -1)$ στη κατεύθυνση προς το σημείο $P(3, -1, 5)$. Σε ποια κατεύθυνση από το P_0 η παράγωγος κατά διεύθυνση είναι μέγιστη και πόσο είναι η μέγιστη τιμή της;

Λύση

Είναι $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{df}{\partial z}\vec{z}_0 = 6x^2y\vec{x}_0 + (2x^3 - 6yz)\vec{y}_0 - 3y^2\vec{z}_0$ και

$$\nabla f\big|_{P_0} = 12\vec{x}_0 + 14\vec{y}_0 - 12\vec{z}_0$$

Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \overrightarrow{P_0P} = (3-1, -1-2, 5-(-1)) = (2, -3, 6)$ έχει μέτρο $|\vec{\alpha}| = \sqrt{49} = 7$, οπότε, επειδή $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|\vec{\alpha}_0$, προκύπτει ότι

$$\vec{\alpha}_0 = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{2}{7}\vec{x}_0 - \frac{3}{7}\vec{y}_0 + \frac{6}{7}\vec{z}_0.$$

Επομένως από τον τύπο (6) προκύπτει:

$$\frac{df(x,y,z)}{d\vec{\alpha}_0} = \nabla f \cdot \vec{\alpha}_0 = (12\vec{x}_0 + 14\vec{y}_0 - 12\vec{z}_0)(2/7\,\vec{x}_0 - 3/7\,\vec{y}_0 + 6/7\,\vec{z}_0) = -90/7.$$

Η παράγωγος κατά διεύθυνση $\dfrac{df(x,y,z)}{d\vec{\alpha}_0}$ γίνεται μέγιστη στο σημείο P_0, όταν το ζη-τούμενο $\vec{\alpha}_0$ γίνει συγγραμμικό με το ∇f διότι τότε, ως γνωστό, η γωνία των $\vec{\alpha}_0$, ∇f θα είναι 0º οπότε, συν0º = 1 και άρα το εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{\alpha}_0 \cdot \nabla f = |\vec{\alpha}_0||\nabla f|\,\text{συν}0^\circ = |\vec{\alpha}_0||\nabla f|\cdot 1 = |\vec{\alpha}_0||\nabla f|$$

θα γίνεται μέγιστο. ($\vec{\alpha}_0$ είναι το νέο μοναδιαίο που ζητείται). Και επειδή

$\nabla f(P_0) = |\nabla f(P_0)|\vec{\alpha}_0$, θα είναι

$$\vec{\alpha}_0 = \left.\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right|_{P_0} = \frac{12\vec{x}_0 + 14\vec{y}_0 - 12\vec{z}_0}{\sqrt{12^2 + 14^2 + (-12)^2}} = \frac{12}{22}\vec{x}_0 + \frac{14}{22}\vec{y}_0 - \frac{12}{22}\vec{z}_0.$$ Άρα

$$\left.\frac{df(x,y,z)}{d\vec{\alpha}_0}\right|_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = \left(12\vec{x}_0 + 14\vec{y}_0 - 12\vec{z}_0\right)\cdot\left(12/22\,\vec{x}_0 + 14/22\,\vec{y}_0 - 12/22\,\vec{z}_0\right) = 22\,.$$

Σημείωση:

Αποδεικνύεται ότι η τιμή του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο P_0 είναι πάντα το μέτρο του διανύσματος $\nabla f(P_0)$, δηλαδή το $|\nabla f(P_0)|$ (στο παράδ. το 22).

2) Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - 4xy$ και $\vec{\alpha}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία $\theta = \pi/3$ με τον άξονα Οx. Να βρεθεί η $\dfrac{\partial f(-3,\,2)}{\partial \vec{\alpha}_0}$.

Λύση

Προφανώς είναι $\vec{\alpha}_0 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\vec{x}_0 + \eta\mu\dfrac{\pi}{3}\vec{y}_0 = \dfrac{1}{2}\vec{x}_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}_0$. Επίσης,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 = (2x - 4y)\vec{x}_0 - 4x\vec{y}_0 \text{ και } \nabla f(-3,\,2) = -14\vec{x}_0 + 12\vec{y}_0\,.$$

Άρα $\nabla f \cdot \vec{\alpha}_0\big|_{(-3,2)} = (-14\vec{x}_0 + 12\vec{y}_0)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\vec{x}_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}_0\right) = -7 + 6\sqrt{3}$.

3) Να δειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z)=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}$ στο τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$ κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{PO}$ είναι ίση με $-\frac{2f}{r}$, όπου O η αρχή των αξόνων και $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Λύση

Είναι $\overrightarrow{PO}=-x\vec{x}_0-y\vec{y}_0-z\vec{z}_0$ όπου $\left|\overrightarrow{PO}\right|=\sqrt{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}=r$ και άρα η διανυσματική μονάδα $\vec{\alpha}_0=\alpha_1\vec{x}_0+\alpha_2\vec{y}_0+\alpha_3\vec{z}_0$ του διανύσματος $\overrightarrow{PO}$ είναι

$$\vec{\alpha}_0=\frac{\overrightarrow{PO}}{\left|\overrightarrow{PO}\right|}=-\frac{x}{r}\vec{x}_0-\frac{y}{r}\vec{y}_0-\frac{z}{r}\vec{z}_0$$

Επίσης, $\frac{\partial f(P)}{\partial x}=\frac{2x}{\alpha^2}$, $\frac{\partial f(P)}{\partial y}=\frac{2y}{\beta^2}$, $\frac{\partial f(P)}{\partial z}=\frac{2z}{\gamma^2}$ και επομένως (τύπος (3))

$$\frac{df(P)}{d\vec{\alpha}_0}=\nabla f(P)\cdot\vec{\alpha}_0=-\frac{2x^2}{r\alpha^2}-\frac{2y^2}{r\beta^2}-\frac{2z^2}{r\gamma^2}=-\frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)=-\frac{2f}{r}$$

4) Να βρεθούν οι κατευθύνσεις κατά τις οποίες η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)=xy+x^2$ είναι μηδέν στο σημείο $P(5,\,2)$.

Λύση

Έστω $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα, κατά τη διεύθυνση του οποίου είναι

$$\nabla f\cdot\vec{\alpha}_0\big|_P=\frac{\partial f(P)}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial f(P)}{\partial y}\alpha_2=0 \text{ ή}$$

$\alpha_1(y+2x)\big|_{(5,2)}+\alpha_2 x\big|_{(5,2)}=12\alpha_1+5\alpha_2=0$, άρα $\alpha_1=-\frac{5}{12}\alpha_2$.

Όμως το $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$ είναι μοναδιαίο άρα $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$. Απ’ τις δύο τελευταίες προκύπτει $\alpha_2=\pm\frac{12}{13}$ και $\alpha_1=\mp\frac{5}{13}$. Επομένως οι ζητούμενες κατευθύνσεις είναι

$$\vec{\alpha}=\left(-\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)=\left(-\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right)=\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)=\left(\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right).$$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z) = xy^2 + \tau o\xi\varepsilon\varphi(yz)$ και το σημείο $P_0(-2,1,1)$. Να βρεθούν: **α)** η κατεύθυνση κατά την οποία έχουμε το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο P_0 και ποια είναι η τιμή του. **β)** η κατεύθυνση κατά την οποία έχουμε τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής στο P_0 και ποια είναι η τιμή του.

Λύση

α) Όπως είδαμε στο παράδειγμα 1, η ζητούμενη κατεύθυνση με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο P_0 είναι η $\vec{\alpha}_0 = \left.\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\right|_{P_0}$. Υπολογίζουμε πρώτα το $\nabla f\big|_{P_0}$.

Είναι

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = y^2\big|_{P_0} = 1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = \left.2xy + \frac{z}{1+y^2z^2}\right|_{P_0} = -\frac{7}{2},\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} = \left.\frac{y}{1+y^2z^2}\right|_{P_0} = \frac{1}{2}.$$

επομένως $\nabla f\big|_{P_0} = \vec{x}_0 - \dfrac{7}{2}\vec{y}_0 + \dfrac{1}{2}\vec{z}_0$, με $|\nabla f(P_0)| = \sqrt{1^2 + (-7/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{54}/2$.

Επομένως, η ζητούμενη κατεύθυνση (μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}_0$) με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής είναι $\vec{\alpha}_0 = \dfrac{\vec{x}_0 - \frac{7}{2}\vec{y}_0 + \frac{1}{2}\vec{z}_0}{\sqrt{54}/2}$, ενώ η τιμή του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της f στο P_0 είναι (σημείωση του παραδείγματος 1):

$$|\nabla f(P_0)| = \sqrt{1^2 + (-7/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{54}/2.$$

β) Για τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής η κατεύθυνση είναι:

$$-\vec{\alpha}_0 = \frac{2}{\sqrt{54}}\left(-\vec{x}_0 + \frac{7}{2}\vec{y}_0 - \frac{1}{2}\vec{z}_0\right), \text{ με τιμή: } -|\nabla f(P_0)| = -\sqrt{54}/2.$$

6) Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο $P(1, 2)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}_1 = \vec{x}_0/\sqrt{2} + \vec{y}_0/\sqrt{2}$ είναι $2\sqrt{2}$ και κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}_2 = -2\vec{x}_0$ είναι -3. Ποια είναι η παράγωγος της $f(x,y)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}_3 = -\vec{x}_0 - 2\vec{y}_0$ στο ίδιο σημείο;

Λύση

Το μέτρο του $\vec{u}_1$ είναι 1, άρα είναι μοναδιαίο, δηλ. $\vec{u}_1 = \vec{u}_{10}$ Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{u}_{10}} = \nabla f(P)\cdot \vec{u}_{10} = \left(f_x, f_y\right)\Big|_P \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{f_x}{\sqrt{2}} + \frac{f_y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ ,$$

δηλαδή $f_x + f_y = 4$. (1)

Επίσης το μοναδιαίο του διανύσματος $\vec{u}_2 = -2\vec{x}_0$ είναι $\vec{u}_{20} = \dfrac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = -\dfrac{2}{\sqrt{4}}\vec{x}_0 = -\vec{x}_0$.

$$\text{Άρα } \frac{\partial f(P)}{\partial \vec{u}_{20}} = \nabla f(P)\cdot \vec{u}_{20} = \left(f_x, f_y\right)\Big|_P \cdot (-1, 0) = -f_x = -3 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $f_x = 3,\ f_y = 1$.

Τέλος, το μοναδιαίο του $\vec{u}_3 = -\vec{x}_0 - 2\vec{y}_0$ είναι το $\vec{u}_{30} = \dfrac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|} = -\dfrac{\vec{x}_0}{\sqrt{5}} - \dfrac{2\vec{y}_0}{\sqrt{5}}$. Άρα

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \vec{u}_{30}} = \nabla f(P)\cdot \vec{u}_{30} = \left(f_x, f_y\right)\Big|_P \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (3, 1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}\ .$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ στο σημείο $P(1, 2)$ κατά την κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων. Κατά ποια κατεύθυνση θα έχουμε τον μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής και ποια είναι η τιμή του;

(*Απάντηση*: $\nabla f(P)\cdot\vec{\alpha}_0 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\vec{\alpha}_{0,\,\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\vec{x}_0}{\sqrt{5}} + \dfrac{2\vec{y}_0}{\sqrt{5}}$, $\left|\nabla f(P)\right|_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$)

2) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y) = 20 - x^2 - y^2$ στο σημείο $P(1, 2)$ κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha} = 3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0$. Κατά ποια κατεύθυνση η *f* ελαττώνεται πιο γρήγορα στο *P*; Ποιες είναι οι κατευθύνσεις κατά τις οποίες η παράγωγος είναι μηδέν:

(*Απάντηση*: $\vec{\alpha}_{0,\,\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi} = \dfrac{2\vec{x}_0}{\sqrt{20}} + \dfrac{4\vec{y}_0}{\sqrt{20}}$, $\vec{\alpha}_{0,\,\mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \rho\upsilon\theta\mu o\acute{\upsilon}} = \dfrac{4\vec{x}_0}{\sqrt{20}} - \dfrac{2\vec{y}_0}{\sqrt{20}}$ ή $-\dfrac{4\vec{x}_0}{\sqrt{20}} + \dfrac{2\vec{y}_0}{\sqrt{20}}$)

3) Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z) = e^y + xz$ στο σημείο $P(1, 1, 1)$ κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha} = (-1,\ 1,\ 1)$

(*Απάντηση*: $e/\sqrt{3}$)

4) Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2 x$. Να βρεθεί η παράγωγος της f στο σημείο $P(1,-4,3)$ κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{PP_1}$, όπου $P_1(2,-1,8)$. Ποια είναι η κατεύθυνση $\vec{\alpha}_0$ κατά την οποία έχουμε τη μέγιστη τιμή της παραγώγου της f στο σημείο P και ποια είναι η μέγιστη αυτή τιμή;

(*Απάντηση*: $\nabla f(P)\cdot\vec{\alpha}_0 = \dfrac{52\sqrt{35}}{35}$, μέγιστη τιμή: $|\nabla f(P)| = \sqrt{230}$)

5.6 Εφαπτομένη καμπύλης

Έστω η καμπύλη c στο χώρο R^3 που δίνεται με τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$$

όπου x, y, z οι συντεταγμένες του τυχαίου της σημείου P και

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0 \qquad (1)$$

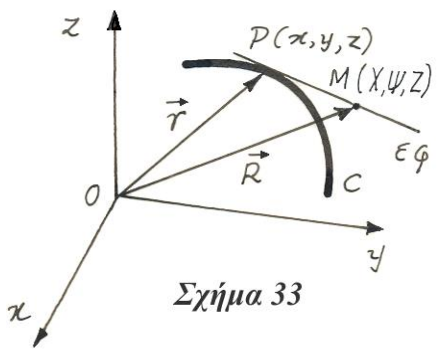
είναι η διανυσματική της εξίσωση.

Όπως είδαμε στη παράγρ. 5.2 η παράγωγος της (1) σ' ένα σημείο της P είναι:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 .$$

Αν οι τρεις παράγωγοι $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ είναι ταυτόχρονα μηδέν στο σημείο P, τότε το P λέγεται *ανώμαλο* σημείο, διαφορετικά λέγεται, όπως είδαμε στην 5.2., *ομαλό*. Για ένα ομαλό σημείο επομένως, το διάνυσμα $\dot{\vec{r}}$ είναι διάφορο του μηδενικού διανύσματος και ορίζει τη κατεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.

Έστω P ένα ομαλό σημείο της καμπύλης με διάνυσμα θέσης το $\vec{r}(x,y,z)$, όπου τα x, y, z είναι τιμές των $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ στο σημείο $P(x, y, z)$, και $M(X,Y,Z)$ ένα τυχαίο σημείο της εφαπτομένης της καμπύλης στο P, με διάνυσμα θέσης $\vec{R}(X,Y,Z)$, όπου τα X, Y, Z είναι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου M της εφαπτομένης (σχήμα 33). Επειδή το $\overrightarrow{PM}$ είναι συγγραμμικό με το $\dot{\vec{r}}$ θα είναι:



Σχήμα 33

$$\overrightarrow{PM} = \lambda\dot{\vec{r}} \ \text{ ή } \ \vec{R} - \vec{r} = \lambda\dot{\vec{r}}, \text{ οπότε}$$

$$\vec{R} = \vec{r} + \lambda\dot{\vec{r}} \qquad (2)$$

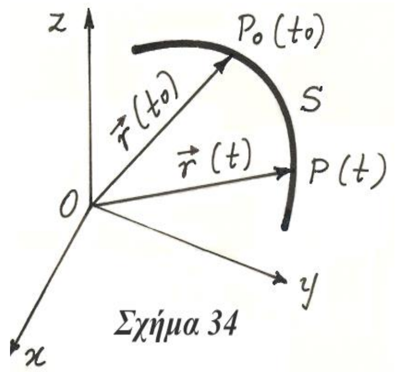
που είναι η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της **εφαπτομένης** της c στο σημείο της

$P(x, y, z)$. Αν πάρουμε τις προβολές της διανυσματικής εξίσωσης (2) πάνω στους άξονες Ox, Oy, Oz, θα έχουμε:

$$X = x + \lambda \dot{x},\ Y = y + \lambda \dot{y},\ Z = z + \lambda \dot{z} \qquad (3)$$

Οι (3) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης στο $P\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ και $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ οι παράγωγοι που αντιστοιχούν στην τιμή *t*. Απ' την (3) προκύπτει

$$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}} \text{ (έχει απαλειφθεί η παράμετρος } \lambda) \qquad (4)$$



Σχήμα 34

Για συγκεκριμένη τιμή του *t* την t_0 έχουμε τα $x_0,\ y_0,\ z_0$ που είναι οι τιμές των $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ για *t* = t_0 καθώς και τα $\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, $\dot{z}(t_0)$, οπότε έχουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης *c* στο σημείο της (x_0, y_0, z_0). Η (4) είναι ανάλογη με την εξίσωση της ευθείας στο χώρο (παρ. 2.9.2.).

Ως γνωστό, (τύπος (2), παράγρ. 8.9.2) το μήκος του τόξου PP_0 καμπύλης που μετριέται απ' το σημείο $P_0(t_0)$ μέχρι του $P(t)$ (σχήμα 34) είναι ίσο με:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, d\tau \qquad (5)$$

απ' όπου προκύπτει ότι το *s* είναι συνάρτηση του *t* δηλαδή *s* = *s*(*t*) με

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\dot{\vec{r}}\right| \qquad (6)$$

εφόσον $\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$.

Η εξίσωση *s* = *s*(*t*) μπορεί να λυθεί στα ομαλά σημεία της καμπύλης ως προς *t*, επειδή $\frac{ds}{dt} \neq 0$ όπως φαίνεται απ' την (6). Επομένως, λύνοντάς την ως προς *t* παίρνουμε $t = t(s)$ και αντικαθιστώντας τη τιμή αυτή του *t* στην (1) παίρνουμε

$$\vec{r} = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s)$$

δηλαδή έχουμε τη διανυσματική εξίσωση της καμπύλης με παράμετρο το τόξο αυτής *s* (που λέγεται και φυσική παράμετρος). Έτσι έχουμε

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{x}_0 + y(s)\vec{y}_0 + z(s)\vec{z}_0. \qquad (7)$$

Παραγωγίζοντας την (7) ως προς s έχουμε

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{x}_0 + \frac{dy}{ds}\vec{y}_0 + \frac{dz}{ds}\vec{z}_0 \text{ με}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{ds}\right)^2} = 1$$

επειδή τα dx, dy, dz είναι οι στοιχειώδεις προβολές του στοιχειώδους μήκους ds στους αντίστοιχους άξονες Ox, Oy, Oz.

Επομένως το διάνυσμα $\frac{d\vec{r}}{ds}$ που σε κάθε σημείο της καμπύλης δίνει την κατεύθυνση της εφαπτομένης, έχει μέτρο τη μονάδα δηλαδή

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1 \tag{7}$$

άρα θεωρείται ένα μοναδιαίο διάνυσμα που το συμβολίζουμε με, $\vec{\varepsilon}_0(s)$ ή $\vec{\varepsilon}_0$ ήτοι

$$\vec{\varepsilon}_0 = \vec{\varepsilon}_0(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}. \tag{8}$$

Αν θέλουμε τώρα να εκφράσουμε το $\vec{\varepsilon}_0$ συναρτήσει του t, χρησιμοποιούμε τον τύπο παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, το θεώρημα παραγώγισης αντίστροφων συναρτήσεων και τον τύπο (6) που βρήκαμε πριν, οπότε έχουμε

$$\vec{\varepsilon}_0 = \vec{\varepsilon}_0(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} \stackrel{(6)}{=} \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \tag{9}$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί: **α)**το μήκος του τόξου της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = e^t \text{συν}t\vec{x}_0 + e^t \text{ημ}t\vec{y}_0 + e^t\vec{z}_0 \text{ όπου } 0 \le t \le \pi \text{ και}$$

β) η εξίσωση της καμπύλης αυτής στη φυσική της παράσταση $\vec{r}(s)$ δηλαδή με παράμετρο το s, αν $t > 0$.

Λύση

α) Υπολογίζουμε πρώτα τις παραγώγους $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Είναι

$$\dot{x} = (e^t \sigma\upsilon\nu t)' = e^t\left(\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t\right),$$

$$\dot{y} = (e^t \eta\mu t)' = e^t\left(\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t\right),$$

$\dot{z} = (e^t)' = e^t$. Άρα

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{e^{2t}\left((\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t)^2 + (\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t)^2 + 1\right)} = \sqrt{3}e^t.$$

Επομένως το μήκος του τόξου της $\vec{r}(t)$ υπολογίζεται απ' την (5) στο $[0, \pi]$:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[\dot{x}(\tau)]^2 + [\dot{y}(\tau)]^2 + [\dot{z}(\tau)]^2}\, d\tau = \int_0^{\pi} \sqrt{3}e^{\tau} d\tau = \sqrt{3}e^{\tau}\Big|_0^{\pi} = \sqrt{3}\left(e^{\pi} - 1\right).$$

β) Επίσης, απ' την εξίσωση του τόξου της καμπύλης για $t > 0$ προκύπτει

$$s = \int_0^{t} \sqrt{[\dot{x}(\tau)]^2 + [\dot{y}(\tau)]^2 + [\dot{z}(\tau)]^2}\, d\tau = \sqrt{3}\left(e^t - 1\right),$$

οπότε λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς t έχουμε:

$$e^t - 1 = \frac{s}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow e^t = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \text{ με } s + \sqrt{3} > 0 \text{ ή } s > -\sqrt{3}$$

οπότε η αρχική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ παίρνει τη μορφή:

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\left[\sigma\upsilon\nu\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right)\vec{x}_0 + \eta\mu\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right)\vec{y}_0 + \vec{z}_0\right]$$

με $-\sqrt{3} < s \le S$ όπου $S = \sqrt{3}\left(e^{\pi} - 1\right)$ το μήκος της καμπύλης που βρήκαμε.

2) Να βρεθεί η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = a\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 + a\eta\mu t\vec{y}_0 + \beta t\vec{z}_0 \quad t \in [0, 2\pi], \; a, \beta \in R$$

με παράμετρο το τόξο αυτής s.

Λύση

Είναι $\dot{\vec{r}}(t) = -\alpha\eta\mu t\vec{x}_0 = \alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0 + \beta\,\vec{z}_0$ που είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ και επίσης

$\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}\ \ \forall t \in [0, 2\pi]$. Άρα είναι λεία (παράγραφος 5.2.).

Ο τύπος $s = \int_0^t \sqrt{[\dot{x}(\tau)]^2 + [\dot{y}(\tau)]^2 + [\dot{z}(\tau)]^2}\,d\tau$ δίνει

$$s = \int_0^t \sqrt{\alpha^2\eta\mu^2\tau + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\tau + \beta^2}\,d\tau = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_0^t d\tau = t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Άρα $t = \dfrac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, οπότε η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της καμπύλης με παράμετρο το s παίρνει τη μορφή

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\vec{x}_0 + \alpha\eta\mu\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\vec{y}_0 + \beta\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\vec{z}_0,$$

με $s \in [0, S]$, όπου S είναι το μήκος τόξου της καμπύλης, που είναι.

$$S = \int_0^{2\pi}\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,dt = 2\pi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ .$$

Άσκηση

1) Να βρεθεί η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = t\vec{x}_0 + \frac{2}{3}t^{3/2}\vec{y}_0 + t\sqrt{3}\vec{z}_0$$

με παράμετρο το τόξο της s, όταν το s μετριέται από το σημείο Ο(0).

($A\pi$: $\vec{r}(s) = \left[\left(\dfrac{3s+16}{2}\right)^{2/3} - 4\right]\vec{x}_0 + \dfrac{2}{3}\left[\left(\dfrac{3s+16}{2}\right)^{2/3} - 4\right]^{3/2}\vec{y}_0 + \sqrt{3}\left[\left(\dfrac{3s+16}{2}\right)^{2/3} - 4\right]\vec{z}_0$)

5.7 Διαφορικοί τελεστές

5.7.1 Βαθμωτά Πεδία

Αν σε κάθε σημείο $P(x, y, z)$ ενός τόπου $\mathrm{T} \subset R^3$ αντιστοιχίσουμε μια τιμή, ορίζεται μια συνάρτηση $f\,(x, y, z)$ που λέγεται *σημειακή ή βαθμωτή συνάρτηση* και δεν διαφέρει απ' τις συνηθισμένες συναρτήσεις. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι η θερμοκρασία σε κάθε σημείο ενός δωματίου, η πυκνότητα στα διάφορα σημεία ενός σώματος κ.τ.λ. Λέμε ακόμα, ότι η $f(x, y, z)$ ορίζει ένα *βαθμωτό πεδίο*.

Για να έχουμε μια πιο πλήρη περιγραφή ενός τέτοιου βαθμωτού πεδίου κάνουμε χρήση των *ισοβαρών* ή *ισοσταθμικών* επιφανειών που είναι το σύνολο των σημείων του τόπου T, όπου η f παίρνει σταθερή τιμή α, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση:

$$f(x, y, z) = \alpha$$

Αν η τιμή α της f είναι η θερμοκρασία στο σύνολο σημείων του τόπου T, τότε οι ισοσταθμικές αυτές επιφάνειες λέγονται *ισόθερμες*. Προφανώς οι ισοσταθμικές επιφάνειες που αντιστοιχούν σ' όλες τις δυνατές τιμές του α καλύπτουν όλο το χώρο που ορίζει το βαθμωτό πεδίο και ακόμα, οι επιφάνειες $f(x,y,z) = a_1$ και $f(x,y,z) = a_2$ δεν έχουν κοινά σημεία όταν $a_1 \neq a_2$.

Το σύνολο των σημείων $(x, y) \in R^2$ με εξίσωση

$$g(x, y) = \beta$$

παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων που λέγονται *ισοβαρείς* ή *ισοσταθμικές* γραμμές του πεδίου. Η παραπάνω εξίσωση είναι η προβολή της τομής της επιφάνειας $z = g(x, y)$ και του επιπέδου $z = \beta$ (που είναι παράλληλο προς το επίπεδο xOy και απέχει απόσταση β απ' αυτό). Οι ισοσταθμικές επιφάνειες εφαρμόζονται πολύ στη χαρτογραφία για την παράσταση του ανάγλυφου της γης.

Αν η $g(x, y) = \beta$ παριστάνει τη θερμοκρασία στο σύνολο του $T \subset R^2$, τότε οι ισοσταθμικές γραμμές λέγονται *ισόθερμες* γραμμές.

5.7.2 Κλίση (grad) σημειακής συνάρτησης

Έστω η σημειακή συνάρτηση $f(x,y,z)$ που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης στο τόπο $T \subset R^3$ που ορίζεται.

Καλούμε *κλίση (gradient)* της σημειακής αυτής συνάρτησης τη <u>διανυσματική</u> συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0$ και τη συμβολίζουμε με *grad f* ή ∇f. Έτσι

$$grad\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0 \qquad (1)$$

Έστω E μια επιφάνεια στην οποία η σημειακή συνάρτηση $f(x,y,z)$ παίρνει σταθερή τιμή $α$, και έστω c μια καμπύλη πάνω στην επιφάνεια αυτή που περνάει από ένα σημείο $P(x, y, z)$ και έχει εξίσωση:

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{x}_0 + y(s)\vec{y}_0 + z(s)\vec{z}_0 . \tag{2}$$

Κατά μήκος αυτής της καμπύλης c η f δεν μεταβάλλεται, αφού είναι σταθερή, άρα

$$\frac{df}{ds} = 0 . \tag{3}$$

Είναι όμως,

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds} , \tag{4}$$

καθώς και

$$\vec{\varepsilon}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{x}_0 + \frac{dy}{ds}\vec{y}_0 + \frac{dz}{ds}\vec{z}_0 . \tag{5}$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τις (1) και (5) και λαμβάνοντας υπόψη τις (3) και (4), έχουμε:

$$\nabla f\cdot\vec{\varepsilon}_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds} = \frac{df}{ds} = 0 . \tag{6}$$

Επομένως, το διάνυσμα ∇f είναι κάθετο στο $\vec{\varepsilon}_0$ δηλαδή η $grad\, f$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στη σταθερή επιφάνεια $f(x,y,z) = α$ στο σημείο $M(x,y,z)$ με φορά προς το μέρος του ημιχώρου που είναι $f(x,y,z) = α + ε$ $(ε > 0)$.

Το σύμβολο $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0$ σημαίνει μια πράξη πάνω στην f, όπως ακριβώς το σύμβολο $\frac{d}{dx}$ της γνωστής παραγώγου σημαίνει μια πράξη πάνω στην $f(x)$ και λέγεται *ανάδελτα* ή *τελεστής Hamilton*.

Ιδιότητες της κλίσης

Οι ιδιότητες της κλίσης ακολουθούν τις ιδιότητες των παραγώγων. Έτσι για δύο σημειακές συναρτήσεις f, g ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\nabla(\lambda f) = \lambda\nabla f,\ \lambda\in R$

- $\nabla\left(f+g\right)=\nabla f+\nabla g$
- $\nabla\left(f\cdot g\right)=f\nabla g+g\nabla f$
- $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

Επίσης, αν $f=f(u),\quad u=u(x,y,z)$ τότε

- $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$

Αν $f=f(x,y)$ τότε $grad\ f=\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0$, όπου $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{x}_0+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0$.

5.7.3 Απόκλιση (div) διανυσματικής συνάρτησης

Έστω $\vec{f}(x,y,z)=f_1(x,y,z)\vec{x}_0+f_2(x,y,z)\vec{y}_0+f_3(x,y,z)\vec{z}_0$ μια *διανυσματική* συνάρτηση που ορίζεται στον τόπο $\mathrm{T}\subset R^3$ και της οποίας υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f_1}{\partial x},\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y},\ \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$ και είναι συνεχείς στο τόπο T.

Καλούμε *απόκλιση (divergence)* της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(x,y,z)$ τη *σημειακή* συνάρτηση $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}+\dfrac{\partial f_3}{\partial z}$ και τη συμβολίζουμε με $div\,\vec{f}$ δηλαδή

$$div\,\vec{f}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}. \tag{1}$$

Ο αριθμός $div\,\vec{f}$, με τη βοήθεια του συμβολισμού του ανάδελτα ∇ μπορεί να θεωρηθεί (καταχρηστικά βέβαια) ως εσωτερικό γινόμενο του ∇ και της $\vec{f}$ δηλαδή:

$$div\,\vec{f}=\nabla\cdot\vec{f} \tag{2}$$

Ως γνωστό, αν $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \vec{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$. Άρα

$$\nabla\cdot\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0\right)\left(f_1\vec{x}_0+f_2\vec{y}_0+f_3\vec{z}_0\right)=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=div\,\vec{f}\ .$$

Προφανώς,, για τη διανυσματική συνάρτηση

$\vec{f}(x,y)=f_1(x,y)\vec{x}_0+f_2(x,y)\vec{y}_0$ έχουμε:

$$div\,\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Ιδιότητες της απόκλισης

Για τις διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{f}, \vec{g}$ και τη σημειακή συνάρτηση φ έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες της απόκλισης:

- $div\left(\lambda \vec{f}\right) = \lambda div\,\vec{f},\ \lambda \in R$ ή $\nabla \cdot (\lambda f) = \lambda \nabla \cdot \vec{f}$
- $div\left(\vec{f} + \vec{g}\right) = div\,\vec{f} + div\,\vec{g}$ ή $\nabla \cdot \left(\vec{f} + \vec{g}\right) = \nabla \cdot \vec{f} + \nabla \cdot \vec{g}$
- $div\left(\varphi \vec{f}\right) = \vec{f} \cdot grad\,\varphi + \varphi\, div\,\vec{f}$ ή $\nabla \cdot \left(\varphi \vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{f}$

(Πρέπει να τονιστεί ότι στο πρώτο μέλος της 3ης ιδιότητας, το $\varphi \vec{f}$ εκφράζει το γινόμενο σημειακής επί διανυσματική συνάρτηση που είναι τελικά διανυσματική συνάρτηση, άρα το $div(\varphi \vec{f})$ εκφράζει πραγματικό αριθμό. Στο δεύτερο μέλος της, ο πρώτος προσθετέος εκφράζει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων των $\vec{f}$ και $grad\,\varphi$ και ο δεύτερος προσθετέος εκφράζει το γινόμενο δύο πραγματικών (σημειακών) συναρτήσεων των φ και $div\,\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$).

- $div(grad\, f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

όπου βέβαια η f είναι σημειακή συνάρτηση. Η $\nabla^2 f$ λέγεται *Λαπλασιανή της* f όπως είδαμε στο παράδειγμα 6 της παρ. 2.8., και ο τελεστής

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

λέγεται *τελεστής Laplace.*

Υπάρχουν και άλλες ιδιότητες της απόκλισης, μερικές από τις οποίες αναφέρονται ως παραδείγματα ή ασκήσεις στο τέλος της παραγράφου.

5.7.4 Στροφή (rot) διανυσματικής συνάρτησης

Καλούμε *στροφή (rotation ή curl)* της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(x, y, z)$, την επίσης διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται απ’ τον τύπο:

$$rot\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{z}_0 \qquad (1)$$

όπου $\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{x}_0 + f_2(x,y,z)\vec{y}_0 + f_3(x,y,z)\vec{z}_0$.

Και εδώ το $rot\,\vec{f}$ μπορεί να θεωρηθεί (καταχρηστικά βέβαια) ως το εξωτερικό γινόμενο του τελεστή

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0 \text{ και της } \vec{f} = f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0$$

όπως προκύπτει απ' την (1) και τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, δηλαδή

$$rot\,\vec{f} = \nabla \wedge \vec{f} \qquad (2)$$

Ιδιότητες της στροφής

Αν $\vec{f}, \vec{g}$ δύο διανυσματικές συναρτήσεις και φ σημειακή συνάρτηση, τότε:

- $rot\left(\lambda \vec{f}\right) = \lambda\, rot\,\vec{f}$ ή $\nabla \wedge \left(\lambda \vec{f}\right) = \lambda\left(\nabla \wedge \vec{f}\right)$
- $rot\left(\vec{f} + \vec{g}\right) = rot\,\vec{f} + rot\,\vec{g}$ ή $\nabla \wedge \left(\vec{f} + \vec{g}\right) = \nabla \wedge \vec{f} + \nabla \wedge \vec{g}$
- $rot\left(\varphi \vec{f}\right) = (\nabla\varphi) \wedge \vec{f} + \varphi\left(\nabla \wedge \vec{f}\right)$

Αν $\vec{f} = f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0$ και οι f_1, f_2, f_3 έχουν μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης συνεχείς στο τόπο $T \subset R^3$ τότε

- $div\left(rot\,\vec{f}\right) = 0$ ή $\nabla \cdot \left(\nabla \wedge \vec{f}\right) = 0$

δηλαδή η απόκλιση της στροφής της $\vec{f}$ είναι πάντα μηδέν (βλέπε παράδειγμα 4).

Αν η σημειακή συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης συνεχείς στο τόπο $T \subset R^3$ τότε

- $rot\left(grad\, f\right) = \vec{0}$ ή $\nabla \wedge \left(\nabla f\right) = \vec{0}$

δηλαδή η στροφή της κλίσης της f είναι πάντα το $\vec{0}$ (παράδειγμα 9).

5.7.5 Άλλοι διαφορικοί τελεστές

Εκτός από τους τρεις αυτούς βασικούς τελεστές, μπορούμε να ορίσουμε και άλλους τελεστές που εμφανίζονται στη διανυσματική ανάλυση.

α) Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{f} = f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0 .$$

Ορίζουμε το παρακάτω «εσωτερικό γινόμενο»:

$$\vec{f}\cdot\nabla = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

που παριστάνει ένα τελεστή και προφανώς είναι διάφορο από το $\nabla\cdot\vec{f}$ που παριστάνει μια σημειακή συνάρτηση, όπως είδαμε στην απόκλιση. Δηλαδή τα $\vec{f}\cdot\nabla$ και $\nabla\cdot\vec{f}$ ούτε καν συσχετίζονται. Ο παραπάνω τελεστής $\vec{f}\cdot\nabla$ εφαρμοζόμενος στη σημειακή συνάρτηση φ(*x*, *y*, *z*) δίνει

$$\left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\varphi = f_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \vec{f}\cdot(\nabla\varphi)$$

β) Για την ίδια συνάρτηση $\vec{f}$ ορίζουμε το παρακάτω «εξωτερικό γινόμενο»:

$$\vec{f}\wedge\nabla = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} = \left(f_2\frac{\partial}{\partial z} - f_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{x}_0 + \left(f_3\frac{\partial}{\partial x} - f_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{y}_0 + \left(f_1\frac{\partial}{\partial y} - f_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{z}_0$$

που παριστάνει ένα διανυσματικό τελεστή και προφανώς είναι διάφορο απ' το $\nabla\wedge\vec{f}$ που παριστάνει ως γνωστό τη στροφή της $\vec{f}$ ($rot\,\vec{f} = \nabla\wedge\vec{f}$).

Ο παραπάνω τελεστής εφαρμοζόμενος στη σημειακή συνάρτηση φ δίνει:

$$\left(\vec{f}\wedge\nabla\right)\varphi = \left(f_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} - f_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\vec{x}_0 + \left(f_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - f_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\vec{y}_0 + \left(f_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} - f_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\vec{z}_0 = \vec{f}\wedge(\nabla\varphi)$$

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1) Αν $\vec{f}(x,y,z) = xz\vec{x}_0 - y^2\vec{y}_0 + 2x^2y\vec{z}_0$ και $\varphi(x,y,z) = x^2yz^3$ να βρεθούν τα:

$i)\ \nabla\varphi,\ ii)\ \nabla\cdot\vec{f},\ iii)\ \nabla\wedge\vec{f},\ iv)\ div\left(\varphi\vec{f}\right),\ v)\ rot\left(\varphi\vec{f}\right).$

Λύση

i) $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0 = 2xyz^3\vec{x}_0 + x^2z^3\vec{y}_0 + 3x^2yz^2\vec{z}_0$

ii) $\nabla\cdot\vec{f} = div\,\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = z - 2y + 0 = z - 2y$

iii) $\nabla\wedge\vec{f} = rot\,\vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{z}_0 =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-y^2\right)\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right)\right)\vec{y}_0 +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\vec{z}_0 = 2x^2\vec{x}_0 + (x - 4xy)\vec{y}_0$$

iv) $div\left(\varphi\vec{f}\right) = \vec{f}\cdot grad\,\varphi + \varphi\, div\,\vec{f}$ ($3^η$ ιδιότητα της απόκλισης) ή

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{f}\right) = \vec{f}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\left(\nabla\cdot\vec{f}\right).$$

Οι ποσότητες $\nabla\varphi$ και $\nabla\cdot\vec{f}$ υπολογίστηκαν στα ερωτήματα **i)** και **ii)** αντίστοιχα.

$$\vec{f}\cdot\nabla\varphi = (xy)\left(2xyz^3\right) + \left(-y^2\right)\left(x^2z^3\right) + \left(2x^2y\right)\left(3x^2yz^2\right) =$$
$$= 2x^2yz^4 - x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2,$$

$$\varphi\left(\nabla\cdot\vec{f}\right) = x^2yz^3\left(z - 2y\right) = x^2yz^4 - 2x^2y^2z^3.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{f}\right) = \vec{f}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\left(\nabla\cdot\vec{f}\right) = 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2$$

v) $\varphi\vec{f} = x^2yz^3\left(xz\vec{x}_0 - y^2\vec{y}_0 + 2x^2y\vec{z}_0\right) = x^3yz^4\vec{x}_0 - x^2y^3z^3\vec{y}_0 + 2x^4y^2z^3\vec{z}_0$. Άρα

$$rot\left(\varphi\vec{f}\right) = \nabla\wedge\left(\varphi\vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2\right)\vec{x}_0 + \left(4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3\right)\vec{y}_0 - \left(2xy^3z^3 + x^3z^4\right)\vec{z}_0.$$

2) Να βρεθεί η κλίση των συναρτήσεων

α) $f(x,y,z)=\ln r$ και **β)** $g(x,y,z)=r^n$, όπου $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Λύση

α) Είναι $f(x,y,z)=\ln r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$. Άρα

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)\right]\vec{x}_0+.$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)\right]\vec{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)\right]\vec{z}_0=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\vec{x}_0+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\vec{y}_0+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\vec{z}_0=$$

$$=\frac{x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\vec{r}}{r^2}.$$

β) Είναι $g(x,y,z)=r^n=(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$. Άρα

$$\nabla g=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\vec{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\vec{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\vec{z}_0=$$

$$=\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2x\vec{x}_0+\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2y\vec{y}_0+\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}2z\vec{z}_0=$$

$$=n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0)=n(r^2)^{\frac{n}{2}-1}\vec{r}=nr^{n-2}\vec{r}.$$

3) Αν $\varphi=\varphi(x,y,z)=2x^2y-xz^3$ να βρεθεί η Λαπλασιανή της φ δηλ. η $\nabla^2\varphi$.

Λύση

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0=\left(4xy-z^3\right)\vec{x}_0+2x^2\vec{y}_0-3xz^2\vec{z}_0 \text{ και}$$

$$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\left(\nabla\varphi\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(4xy-z^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-3xz^2\right)=4y-6xz .$$

4) Να δειχτεί ότι $div\left(rot\,\vec{f}\right)=0,$ ή $\nabla\cdot\left(\nabla\wedge\vec{f}\right)=0$

όπου $\vec{f}=f_1\vec{x}_0+f_2\vec{y}_0+f_3\vec{z}_0$ είναι διανυσματική συνάρτηση.

Λύση

Είναι $\nabla \wedge \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{z}_0$, καθώς και

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0 .$$

Άρα το εσωτερικό γινόμενο του ∇ και $\nabla \wedge \vec{f}$ είναι:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \wedge \vec{f}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0 .$$

5) Να δειχτεί ότι $\nabla \cdot \left(\varphi \vec{f}\right) = \left(\nabla \varphi\right) \cdot \vec{f} + \varphi\left(\nabla \cdot \vec{f}\right)$, όπου $\varphi = \varphi(x, y, z)$ είναι σημειακή και $\vec{f} = f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0$ διανυσματική συνάρτηση.

Λύση

Είναι $\varphi\vec{f} = \varphi f_1\vec{x}_0 + \varphi f_2\vec{y}_0 + \varphi f_3\vec{z}_0$ οπότε

$$\nabla \cdot \left(\varphi \vec{f}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0\right) \cdot \left(\varphi f_1\vec{x}_0 + \varphi f_2\vec{y}_0 + \varphi f_3\vec{z}_0\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi f_1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi f_2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi f_3\right) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} f_3 + \varphi\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{z}_0\right) \cdot \left(f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0\right) +$$

$$+\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0\right) \cdot \left(f_1\vec{x}_0 + f_2\vec{y}_0 + f_3\vec{z}_0\right) = \left(\nabla \varphi\right) \cdot \vec{f} + \varphi\left(\nabla \cdot \vec{f}\right)$$

6) Αν $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ με $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \left|\vec{r}\right|^2$ να δειχτεί ότι

α) $\nabla \wedge \left(r^2\vec{r}\right) = \vec{0}$, **β)** $div(r^3\vec{r}) = 6r^3$, **γ)** $rot\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \vec{0}$

Λύση

α) Η $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(x,y,z)$ ή $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ θεωρείται σημειακή συνάρτηση, ενώ η $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ θεωρείται διανυσματική. Απ' την 3η ιδιότητα της στροφής έχουμε

$\nabla \wedge \left(\varphi \vec{f}\right) = \nabla\varphi \wedge \vec{f} + \varphi\left(\nabla \wedge \vec{f}\right)$, ή $\nabla \wedge \left(r^2\vec{r}\right) = \left(\nabla r^2\right) \wedge \vec{r} + r^2\left(\nabla \wedge \vec{r}\right)$. Είναι

$\nabla r^2 = \nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0 = 2x\vec{x}_0 + 2y\vec{y}_0 + 2z\vec{z}_0$. Άρα

$\left(\nabla r^2\right) \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\cdot\vec{0} = \vec{0}$. Επίσης

$$\nabla \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{z}_0 = \vec{0}$$

β) Έστω $\vec{F} = r^3\vec{r} = r^3(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0)$, οπότε

$div\vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xr^3) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yr^3) + \dfrac{\partial}{\partial z}(zr^3)$. Αλλά

$$\frac{\partial}{\partial x}(xr^3) = r^3 + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{3/2} = r^3 + \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 2x =$$
$$= r^3 + 3(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot x^2 = r^3 + 3rx^2.$$

Παρόμοια, $\dfrac{\partial}{\partial y}(yr^3) = r^3 + 3ry^2$, $\dfrac{\partial}{\partial z}(zr^3) = r^3 + 3rz^2$. Άρα,

$$div\vec{F} = r^3 + 3rx^2 + r^3 + 3ry^2 + r^3 + 3rz^2 =$$
$$= 3r^3 + 3r(x^2+y^2+z^2) = 3r^3 + 3r\cdot r^2 = 6r^3.$$

γ) Είναι $\dfrac{\vec{r}}{r^2} = \dfrac{x}{r^2}\vec{x}_0 + \dfrac{y}{r^2}\vec{y}_0 + \dfrac{z}{r^2}\vec{z}_0$. Άρα

$$rot\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \nabla \wedge \frac{\vec{r}}{r^2} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x/r^2 & y/r^2 & z/r^2 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^2}\right)\right]\vec{x}_0 +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^2}\right)\right]\vec{y}_0+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)\right]\vec{z}_0.$$ Αλλά,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^2}\right)=z\frac{\partial}{\partial y}(r^{-2})-y\frac{\partial}{\partial z}(r^{-2})=$$

$$=z(-2)r^{-3}\frac{\partial r}{\partial y}-y(-2)r^{-3}\frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{2z}{r^3}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2y}{r^3}\cdot\frac{z}{r}=0$$

και ανάλογα $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^2}\right)=0$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)=0$.

Άρα $rot\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)=0\vec{x}_0+0\vec{y}_0+0\vec{z}_0=\vec{0}$.

7) Να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση $f(x,y,z)=\frac{1}{r}$ όπου r το μέτρο του διανύσματος θέσης τυχαίου σημείου (x,y,z) ισχύει: **α)** $\nabla f=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ και **β)** $\nabla^2 f=0$.

Λύση

α) Είναι $\vec{r}=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και

$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0$. Είναι όμως

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$. Άρα

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0=-\frac{x}{r^3}\vec{x}_0-\frac{y}{r^3}\vec{y}_0-\frac{z}{r^3}\vec{z}_0=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

β) Ως γνωστό, $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (Λαπλασιανή της $f(x,y,z)$). Είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-xr^{-3})=-r^{-3}-x\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3})=$$

$$-\frac{1}{r^3}+3xr^{-4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+3xr^{-4}\frac{x}{r}=\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$

Παρόμοια βρίσκουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$. Άρα

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}=$$

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} - 3\frac{1}{r^3} = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0$$

Σημείωση:

Αν μια συνάρτηση, όπως η παραπάνω $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, είναι τέτοια ώστε η Λαπλασιανή της, η $\nabla^2 f$ να είναι μηδέν, λέγεται ***αρμονική***.

8) Αν $\vec{f}(x,y,z) = 3xz^2\vec{x}_0 - yz\vec{y}_0 + (x+2z)\vec{z}_0$ να υπολογιστεί το διάνυσμα $rot\left(rot\,\vec{f}\right) = \nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{f}\right)$.

Λύση

Είναι

$$\nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3xz^2 & -yz & x+2z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x+2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz)\right]\vec{x}_0 +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(3xz^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}(x+2z)\right]\vec{y}_0 + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-yz) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3xz^2\right)\right]\vec{z}_0 = y\vec{x}_0 + (6xz-1)\,\vec{y}_0$$

οπότε το ζητούμενο διάνυσμα $\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{f}\right)$ θα είναι

$$\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{f}\right) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & 6xz-1 & 0 \end{vmatrix} = \left[0 - \frac{\partial}{\partial z}(6xz-1)\right]\vec{x}_0 + \left[\frac{\partial y}{\partial z} - 0\right]\vec{y}_0 +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(6xz-1) - \frac{\partial y}{\partial y}\right]\vec{z}_0 = -6x\vec{x}_0 + (6z-1)\vec{z}_0 .$$

9) Αν η συνάρτηση $f = f(x,y,z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης, να δειχθεί ότι $rot(grad\, f) = \vec{0}$.

Λύση

$$rot(grad\, f) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\vec{x}_0 +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\vec{y}_0+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]\vec{z}_0=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)\vec{x}_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\vec{y}_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\vec{z}_0.$$

Επειδή οι παράγωγοι 2ης τάξης είναι συνεχείς, έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}.$$

Άρα $rot(grad\, f)=\vec{0}$.

10) Να προσδιοριστεί η σταθερή a έτσι ώστε, το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(x+3y)\vec{x}_0+(y-2z)\vec{y}_0+(x+az)\vec{z}_0$ να είναι σωληνοειδές, δηλαδή να ισχύει η σχέση $div\vec{F}=0$.

Λύση

Είναι $div\vec{F}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x+3y)+\dfrac{\partial}{\partial y}(y-2z)+\dfrac{\partial}{\partial z}(x+az)=1+1+a=2+a$

και $div\vec{F}=0\Leftrightarrow 2+a=0\Leftrightarrow a=-2$.

11) Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή της σταθερής a για την οποία το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(axy-z^3)\vec{x}_0+(a-2)x^2\vec{y}_0+(1-a)xz^2\vec{z}_0$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή να ισχύει η σχέση $rot\vec{F}=\vec{0}$.

Λύση

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ axy-z^3 & (a-2)x^2 & (1-a)xz^2\end{vmatrix}=$$

$$=0\cdot\vec{x}_0-\left[(1-a)z^2+3z^2\right]\vec{y}_0+\left[2(a-2)x-ax\right]\vec{z}_0=z^2(a-4)\vec{y}_0+x(a-4)\vec{z}_0$$

Επομένως θα πρέπει $z^2(a-4)=0,\ x(a-4)=0,\ \forall x,y,z\Leftrightarrow a-4=0\Leftrightarrow a=4.$

12) Αν $f(x,y)=\ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ να εξεταστεί αν υπάρχει σημείο P του επιπέδου, τέτοιο ώστε να είναι $\nabla f\big|_P=\vec{x}_0-\dfrac{16}{9}\vec{y}_0$.

Λύση

Είναι $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y}} = \dfrac{y}{xy+1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-\dfrac{1}{y^2}}{x+\dfrac{1}{y}} = -\dfrac{1}{y(xy+1)}$.

Άρα $\dfrac{y}{xy+1}\vec{x}_0 - \dfrac{1}{y(xy+1)}\vec{y}_0 = \vec{x}_0 - \dfrac{16}{9}\vec{y}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{xy+1} = 1 \\ -\dfrac{1}{y(xy+1)} = -\dfrac{16}{9} \end{cases}$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $xy+1 = y$,

ενώ η δεύτερη, για $xy+1 = y$, δίνει $y = \pm\dfrac{3}{4}$.

Έτσι έχουμε με αντικατάσταση του y στην $xy+1 = y$, δύο πραγματικές λύσεις:

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ y_1 = \frac{3}{4} \text{ και } x_2 = \frac{7}{3},\ y_2 = -\frac{3}{4}.$$

Επομένως, ως λύση έχουμε δύο σημεία, τα $P_1\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$ και $P_2\left(\dfrac{7}{3},\ -\dfrac{3}{4}\right)$.

13) Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 = 10$ στο σημείο αυτής $P(2, 1, -1)$.

Λύση

Έχουμε τη σταθερή επιφάνεια $E:\ f(x,y,z) = a$ όπου

$$f(x,y,z) = x^2y - 2xz + 2y^2z^4 \text{ με } a = 10.$$

Το σημείο $P(2, 1, -1) \in E$ επειδή οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της επιφάνειας E. Επομένως, σύμφωνα με τη θεωρία της κλίσης, το ∇f θα είναι διάνυσμα κάθετο στη σταθερή αυτή επιφάνεια, στο σημείο της $P(2, 1, -1)$. Είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0 = (2xy - 2z)\vec{x}_0 + (x^2 + 4yz^4)\vec{y}_0 + (-2x + 8y^2z^3)\vec{z}_0.$$

Επομένως στο σημείο $P(2, 1, -1)$ είναι

$$\nabla f\big|_{(2,1,-1)} = 6\vec{x}_0 + 8\vec{y}_0 - 12\vec{z}_0 = \vec{r}.$$

Άρα, το μοναδιαίο διάνυσμα αυτού είναι το

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{6\vec{x}_0 + 8\vec{y}_0 - 12\vec{z}_0}{\sqrt{6^2 + 8^2 + (-12)^2}} = \frac{3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 6\vec{z}_0}{\sqrt{61}}.$$

Ασκήσεις

1) Αν $\vec{f}(t) = 5t^2\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 - t^3\vec{z}_0$ και $\vec{g}(t) = \eta\mu t\vec{x}_0 - \sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0 + t\vec{z}_0$, να βρεθούν οι παράγωγοι $(\vec{f}\cdot\vec{g})^{\bullet}$, $(\vec{f}\cdot\vec{f})^{\bullet}$, $(\vec{g}\cdot\vec{g})^{\bullet}$.

(*Απάντηση*: $(\vec{f}\cdot\vec{g})^{\bullet} = (5t^2-1)\sigma\upsilon\nu t + 11\eta\mu t - 4t^3$, $(\vec{f}\cdot\vec{f})^{\bullet} = 6t^5 + 100t^3 + 2t$,

$(\vec{g}\cdot\vec{g})^{\bullet} = 2t$)

2) Αν $\vec{f} = y^2\vec{x}_0 + 2xy\vec{y}_0 - xz^2\vec{z}_0$ και $\varphi = z^3 - x^2 y$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις $\vec{f}\cdot\nabla\varphi,\ \vec{f}\wedge\nabla\varphi$ στο σημείο M (–1, 1, 1).

(*Απ*: $\vec{f}\cdot\nabla\varphi = 7$, $\vec{f}\wedge\nabla\varphi = -5\vec{x}_0 - \vec{y}_0 + 3\vec{z}_0$)

3) Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο σημείο $M(3,-1,2)$ της επιφάνειας $f(x,y,z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$. (*Απάντηση*: $\dfrac{12\vec{x}_0 + 8\vec{y}_0 - 20\vec{z}_0}{\sqrt{608}}$)

4. Να δειχτούν οι παρακάτω ταυτότητες:

i) $div(grad\, f \wedge grad\, g) = 0$ (f, g σημειακές συναρτήσεις),

ii) $rot\left(rot\,\vec{f} + grad\,\varphi\right) = rot\left(rot\,\vec{f}\right)$,

iii) $\nabla^2\varphi = div\left(rot\,\vec{f} + grad\,\varphi\right)$,

iv) $div\left(\vec{f}\wedge\vec{g}\right) = \vec{g}\cdot rot\,\vec{f} - \vec{f}\cdot rot\,\vec{g}$.

5) Αν $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3}{3} + y^3\right)\vec{x}_0 + (x - a^2 y + z^4)\vec{y}_0 + \left(2x + 3y + \dfrac{z^3}{3}\right)\vec{z}_0$,

να βρεθεί η επιφάνεια S πάνω στην οποία είναι $div\vec{f} = 0$.

(*Απάντηση*: $x^2 + z^2 = a^2$)

6) Αν $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ με $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και τυχαίο σταθερό διάνυσμα $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{x}_0 + \alpha_2\vec{y}_0 + \alpha_3\vec{z}_0$, να δειχτούν οι παρακάτω ταυτότητες:

i) $grad(\vec{\alpha}\cdot\vec{r}) = \vec{\alpha}$, ii) $div\vec{r} = 3$, iii) $rot\,\vec{r} = \vec{0}$, iv) $div(\vec{\alpha}\wedge\vec{r}) = \vec{r}\cdot rot\,\vec{\alpha}$.

7) Να προσδιοριστούν τα *α*, *β*, *γ*, ώστε να είναι αστρόβιλο το διανυσματικό πεδίο που δημιουργεί η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{f}(x,y,z)=(x+2y+\alpha z)\vec{x}_0+(\beta x-3y-z)\vec{y}_0+(4x+\gamma y+2z)\vec{z}_0 .$$

(*Απάντηση*: $\alpha=4,\ \beta=2,\ \gamma=-1$)

8) Αν $\vec{f}(x,y,z)=xz\vec{x}_0-y^2\vec{y}_0+2x^2yz\vec{z}_0$ και $\varphi(x,y,z)=x^2yz^3$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις **α)** $\nabla\varphi$, **β)** $\nabla\cdot\vec{f}$, **γ)** $\nabla\wedge\vec{f}$, **δ)** $div(\varphi\vec{f})$, **ε)** $rot(\varphi\vec{f})$.

(*Απάντηση*: **α)** $2xyz^3\vec{x}_0+x^2z^3\vec{y}_0+3x^2yz^2\vec{z}_0$, **β)** $z-2y$, **γ)** $2x^2\vec{x}_0+(x-4xy)\vec{y}_0$,

δ) $3x^2yz^4-3x^2y^2z^3+6x^4y^2z^2$,

ε) $4x^4yz^3+3x^2y^3z^2)\vec{x}_0+(4x^3yz^3-8x^3y^2z^3)\vec{y}_0-(2xy^3z^3+x^3z^4)\vec{z}_0$)

9) Να υπολογιστεί η κλίση της συνάρτησης $f(x,y,z)=x\eta\mu(\pi y)+y\sigma\upsilon\nu(\pi y)$ στο σημείο $P_0(0,1,2)$. (*Απάντηση*: $\nabla f(P_0)=\vec{y}_0$)

10) Να υπολογιστεί η απόκλιση της συνάρτησης

$\vec{f}(x,y,z)=x^2z\vec{x}_0-2y^3z^2\vec{y}_0+xy^2z\vec{z}_0$ στο σημείο $P_0(1,-1,1)$.

(*Απάντηση*: $div\vec{f}\Big|_{(1,-1,1)}=-3$)

11) Να υπολογιστεί η στροφή της συνάρτησης

$\vec{f}(x,y,z)=xz^3\vec{x}_0-2x^2yz\vec{y}_0+2yz^4\vec{z}_0$ στο σημείο $P_0(2,-1,-2)$.

(*Απάντηση*: $rot\vec{f}\Big|_{(2,-1,-2)}=24\vec{x}_0+24\vec{y}_0-16\vec{z}_0$)

12) Αν $\vec{f}=\vec{a}\wedge\vec{r}$, όπου $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα και $\vec{r}=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0$ να δειχθεί ότι: **α)** $div\vec{f}=0$, **β)** $rot\vec{f}=2\vec{a}$.

13) Αν $\vec{f}(x,y,z)=x^2y\vec{x}_0-2xz\vec{y}_0+2yz\vec{z}_0$ να βρεθούν τα

α) $rot(rot\vec{f})$, **β)** $grad(div\vec{f})$. (*Απ*: **α)** $2(x+1)\vec{y}_0$, **β)** $2y\vec{x}_0+2(x+1)\vec{y}_0$

14) Να δειχτεί ότι τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι αστρόβιλα:

i) $\vec{f}(x,y,z)=2xyz\vec{x}_0+x^2z\vec{y}_0+x^2y\vec{z}_0$

ii) $\vec{f}(x,y,z)=(x-2y+4z)\vec{x}_0+(2x-3y-z)\vec{y}_0+(4x-y+2z)\vec{z}_0$.

Β. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Ι. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

5.8 Συνοδεύον τρίεδρο. Τύποι των Serret-Frenet

Έστω η διανυσματική εξίσωση μιας καμπύλης c στο χώρο:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 + z(t)\vec{z}_0$$

όπου $t \in [\alpha, \beta]$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ δέχονται συνεχείς παραγώγους όλων των τάξεων. Όπως είδαμε στη παράγραφο 5.6, αν το t θεωρηθεί συνάρτηση του μήκους s της καμπύλης, δηλαδή $t = t(s)$, τότε η παράγωγος $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ σ' ένα σημείο P της καμπύλης, είναι η διανυσματική μονάδα $\vec{\varepsilon}_0$ **της εφαπτομένης** της καμπύλης στο σημείο αυτό τύπος (8), δηλαδή

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\varepsilon}_0 .$$

Συνεπώς, επειδή η διανυσματική μονάδα $\vec{\varepsilon}_0$ έχει σταθερό μέτρο ίσο με 1 σε κάθε σημείο της c, θα έχει παράγωγο κάθετη στο $\vec{\varepsilon}_0$ (τύπος (3) παρ. 5.3.). Έτσι,

$$\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds} = k\vec{\eta}_0 \quad (k \geq 0) \tag{1}$$

όπου το διάνυσμα $\vec{\eta}_0$ λέγεται **πρώτη κάθετη** της c και είναι διανυσματική μονάδα κάθετη στο $\vec{\varepsilon}_0$.

Το $\boldsymbol{k}$ είναι η αλγεβρική τιμή του $\dfrac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds}$ και λέγεται **καμπυλότητα** της c και δείχνει πόσο απότομα μεταβάλλεται η καμπύλη σε διάφορα σημεία της. Δηλαδή η καμπυλότητα k της c στο σημείο της P, είναι η μεταβολή της κατεύθυνσης της εφαπτομένης της (η οποία εφαπτομένη εκφράζεται με το $\vec{\varepsilon}_0$) ανά μονάδα μεταβολής του μήκους τόξου.

Ο **κύκλος καμπυλότητας** είναι ο κύκλος ακτίνας $R = 1/k$ που εφάπτεται της καμπύλης στο P και βρίσκεται στο μέσα μέρος της καμπύλης.

Έτσι, σε κάθε σημείο P της καμπύλης, έχουμε δύο διανύσματα (διανυσματικές μονάδες) τα $\vec{\varepsilon}_0$ και $\vec{\eta}_0$ κάθετα μεταξύ τους. Με βάση τα διανύσματα αυτά, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο P, ορίζοντας ένα τρίτο διάνυσμα $\vec{b}_0$ κάθετο στα $\vec{\varepsilon}_0$ και $\vec{\eta}_0$ και τέτοιο ώστε $\vec{b}_0 = \vec{\varepsilon}_0 \wedge \vec{\eta}_0$ δηλαδή τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ να αποτελούν δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα (όπως και τα $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$).

Το διάνυσμα $\vec{b}_0$ λέγεται **δεύτερη κάθετη** της c και το τοπικό σύστημα συντεταγμένων της καμπύλης στο P που δημιουργείται απ' τα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ λέγεται **συνοδεύον τρίεδρο** της c στο P. Έτσι, τα διανύσματα που συνδέονται με τη καμπύλη c στο σημείο P, μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$.

Ακόμα, ορίζονται οι παραμετρικές εξισώσεις στο σημείο $P(t)$ της c:

- της εφαπτομένης: $\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{\varepsilon}_0$,
- της πρώτης καθέτου: $\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{\eta}_0$, (2)
- της δεύτερης καθέτου: $\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{b}_0$

Μέχρι τώρα βρήκαμε λοιπόν τα $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\varepsilon}_0$ και $\dfrac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds} = k\vec{\eta}_0$ όπου η φορά του $\vec{\varepsilon}_0$ εξαρτάται απ' τον προσανατολισμό της καμπύλης. Και το ερώτημα που προκύπτει είναι: Τι εκφράζουν οι παράγωγοι $\dfrac{d\vec{\eta}_0}{ds}$ και $\dfrac{d\vec{b}_0}{ds}$; Την απάντηση δίνουμε παρακάτω:

Επειδή το $\vec{b}_0$ έχει σταθερό μέτρο ίσο με 1, η παράγωγός του $\dfrac{d\vec{b}_0}{ds}$ θα είναι διάνυσμα κάθετο στο $\vec{b}_0$, δηλαδή θα βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{\varepsilon}_0$ και $\vec{\eta}_0$.

Παραγωγίζοντας ως προς s τη σχέση $\vec{b}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_0 = 0$ $\left(\vec{b}_0 \perp \vec{\varepsilon}_0\right)$ έχουμε:

$\dfrac{d\vec{b}_0}{ds} \cdot \vec{\varepsilon}_0 + \vec{b}_0 \cdot \dfrac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds} = 0$ ή λόγω της (1)

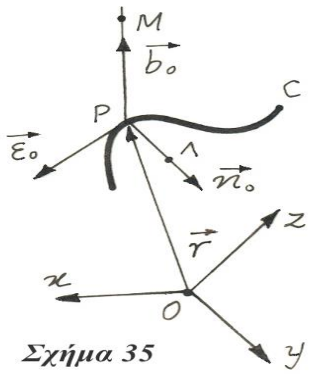
$$\frac{d\vec{b}_0}{ds}\cdot\vec{\varepsilon}_0+\vec{b}_0\cdot k\vec{\eta}_0=0 \text{. Αλλά } \vec{b}_0\cdot\vec{\eta}_0=0\ \left(\vec{b}_0\perp\vec{\eta}_0\right) \text{ οπότε}$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds}\cdot\vec{\varepsilon}_0=0$$

δηλαδή το $\frac{d\vec{b}_0}{ds}$ είναι κάθετο στο $\vec{\varepsilon}_0$, άρα θα είναι συγγραμμικό με το $\vec{\eta}_0$, επομένως

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds}=\sigma\vec{\eta}_0 \qquad (3)$$

όπου **σ** είναι η αλγεβρική τιμή του $\frac{d\vec{b}_0}{ds}$ και λέγεται **στρέψη** της *c* στο σημείο *P*.



Σχήμα 35

Το αντίστροφο της στρέψης $\rho=1/\sigma$ λέγεται *ακτίνα στρέψης*.

Αν $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου *P* της *c*, τότε το σημείο Λ που έχει διάνυσμα θέσης (σχήμα 35)

$$\vec{r}+R\vec{\eta}_0 \quad (R=1/k)$$

είναι το *κέντρο καμπυλότητας* της *c* στο *P*, ενώ το σημείο Μ που έχει διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}+\rho\vec{b}_0 \quad (\rho=1/\sigma)$$

είναι το *κέντρο στρέψης* της *c* στο *P*. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των κέντρων καμπυλότητας της *c* αποτελεί μια καμπύλη που λέγεται *εξελιγμένη* της *c*.

Τα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα όπως αναφέρθηκε, άρα

$$\vec{\eta}_0=\vec{b}_0\wedge\vec{\varepsilon}_0,$$ [1]

οπότε, παραγωγίζοντας ως προς s έχουμε:

[1] Όπως προκύπτει από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων: $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}$, το $\vec{c}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\vec{a},\vec{b}$ με φορά τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα, (περιστρεφόμενο το $\vec{a}$ προς το $\vec{b}$ κατά τη μικρότερη γωνία, να κοχλιώνεται προς το μέρος του $\vec{c}$) και έχει μέτρο: $|\vec{c}|=|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\eta\mu(\vec{a},\vec{b})$. Επομένως, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$, θα είναι κυκλικά: $\vec{\varepsilon}_0\wedge\vec{\eta}_0=\vec{b}_0$, $\vec{\eta}_0\wedge\vec{b}_0=\vec{\varepsilon}_0$, $\underline{\vec{b}_0\wedge\vec{\varepsilon}_0=\vec{\eta}_0}$.

$$\frac{d\vec{\eta}_0}{ds} = \frac{d\vec{b}_0}{ds} \wedge \vec{\varepsilon}_0 + \vec{b}_0 \wedge \frac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds} = \sigma\vec{\eta}_0 \wedge \vec{\varepsilon}_0 + \vec{b}_0 \wedge \left(k\vec{\eta}_0\right) = -k\vec{\varepsilon}_0 - \sigma\vec{b}_0$$

εφόσον $\vec{\eta}_0 \wedge \vec{\varepsilon}_0 = -\vec{b}_0$ και $\vec{b}_0 \wedge \vec{\eta}_0 = -\vec{\varepsilon}_0$ (βλέπε υποσημείωση 1).

Μετά από όλα τα παραπάνω, έχουμε συγκεντρωτικά τις παραγώγους των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ ως εξής (τύποι των Serret-Frenet):

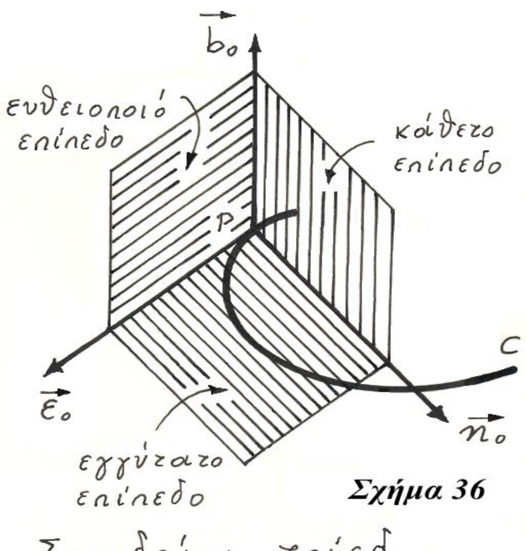
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds} &= \qquad k\vec{\eta}_0 \\ \frac{d\vec{\eta}_0}{ds} &= -k\vec{\varepsilon}_0 \qquad\qquad -\sigma\vec{b}_0 \\ \frac{d\vec{b}_0}{ds} &= \qquad \sigma\vec{\eta}_0 \end{aligned} \qquad \text{(Τύποι των } \textbf{\textit{Serret – Frenet}} \text{)} \qquad (4)$$

Στο συνοδεύον τρίεδρο $P\left(\vec{\varepsilon}_0, \vec{\eta}_0, \vec{b}_0\right)$, το επίπεδο που περιέχει την εφαπτομένη $\vec{\varepsilon}_0$ και την πρώτη κάθετη $\vec{\eta}_0$ λέγεται **εγγύτατο επίπεδο** (σχήμα 36). Αν $\vec{R}$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχαίου σημείου του επιπέδου αυτού και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του P στην καμπύλη c, τότε το $\vec{R}$ - $\vec{r}$ βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο, επομένως είναι κάθετο στο $\vec{b}_0$. Συνεπώς η διανυσματική του εξίσωση είναι:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right) \cdot \vec{b}_0 = 0 \qquad (5)$$

Το επίπεδο που ορίζεται ως το επίπεδο που περνάει απ' το P και είναι κάθετο στο $\vec{\varepsilon}_0$ λέγεται **κάθετο επίπεδο.** Η διανυσματική του εξίσωση βρίσκεται ότι είναι:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_0 = 0.$$



Σχήμα 36

Συνοδεύον τρίεδρο

Τέλος, το επίπεδο που ορίζεται ως το επίπεδο που περνάει απ' το P και είναι κάθετο στη πρώτη κάθετη $\vec{\eta}_0$ λέγεται **ευθειοποιό επίπεδο**, με διανυσματική εξίσωση:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right) \cdot \vec{\eta}_0 = 0 \qquad (7)$$

Τα τρία αυτά επίπεδα ορίζουν το **συνοδεύον τρίεδρο** της καμπύλης c σε ένα σημείο P αυτής (σχήμα 36).

Για να μεταφερθούμε τώρα απ' τις διανυσματικές εξισώσεις των επιπέδων αυτών στις αναλυτικές τους εξισώσεις, εκφράζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων καθεμιάς των εξισώσεων αυτών ως άθροισμα των γινομένων των ομωνύμων συντεταγμένων. Έτσι,

1) για το ***κάθετο επίπεδο*** θα σκεφτούμε ως εξής:

Αν $\vec{R}(X,\ Y,\ Z)$ είναι οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου του επιπέδου αυτού και $\vec{r}(x, y, z)$ οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου P της καμπύλης, (όπου τα x, y, z είναι συναρτήσεις του t δηλαδή $x = x(t)$), $y = y(t)$, $z = z(t)$, επειδή

$$\vec{\varepsilon}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \dot{\vec{r}}\frac{dt}{ds}$$

η διανυσματική εξίσωση του καθέτου επιπέδου $\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\vec{\varepsilon}_0 = 0$ παίρνει τη μορφή:

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\dot{\vec{r}}\frac{dt}{ds} = 0 \text{ ή } \left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\dot{\vec{r}} = 0.$$

(Το $\dfrac{dt}{ds}$ θεωρείται ο συντελεστής του $\dot{\vec{r}}$ επομένως παραλείπεται). Είναι

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right) = \left(X-x,\ Y-y,\ Z-z\right),\quad \dot{\vec{r}} = \left(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\right). \text{ Άρα}$$

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\dot{\vec{r}} = 0 \text{ ή}$$

$$\left(X-x\right)\dot{x} + \left(Y-y\right)\dot{y} + \left(Z-z\right)\dot{z} = 0 \qquad (8)$$

Η (8) είναι η εξίσωση του καθέτου επιπέδου στο σημείο $P(x, y, z)$ της c.

2) Για το ***εγγύτατο επίπεδο***

Κάνοντας ανάλογες σκέψεις με τις προηγούμενες και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\vec{b}_0 = \frac{1}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}) \text{ (τύπος (8) της επόμενης παραγράφου 5.9.)}$$

η διανυσματική εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου $\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\vec{b}_0 = 0$ γίνεται:

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\frac{1}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}) = 0 \text{ ή}$$

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}) = 0.$$

(Το $\dfrac{1}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}$ θεωρείται ο συντελεστής του $\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}$ επομένως παραλείπεται).

Η τελευταία σχέση εκφράζει το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων, άρα

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})=\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}=0 \tag{9}$$

Η (9) είναι η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου στο σημείο $P(x, y, z)$ της c.

3) Για το ***ευθειοποιό επίπεδο***

Στη διανυσματική εξίσωση του ευθειοποιού επιπέδου $\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\vec{\eta}_0=0$, το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\eta}_0$ γράφεται

$$\vec{\eta}_0=\vec{b}_0\wedge\vec{\varepsilon}_0=\left(\frac{1}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})\right)\wedge\frac{\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}=\lambda(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})\wedge\dot{\vec{r}} \text{ όπου } \lambda=\frac{1}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|\left|\dot{\vec{r}}\right|}$$

και η διανυσματική εξίσωση του ευθειοποιού επιπέδου $\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\vec{\eta}_0=0$ γίνεται:

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\left[\lambda(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})\wedge\dot{\vec{r}}\right]=0 \text{ ή}$$

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\left[(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})\wedge\dot{\vec{r}}\right]=0\,. \tag{10}$$

(Το λ θεωρείται συντελεστής του $(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})\wedge\dot{\vec{r}}$ και παραλείπεται).

Η τελευταία σχέση εκφράζει το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων των

$$(\vec{R}-\vec{r}),\quad (\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}),\quad \dot{\vec{r}}$$

που έχουν συντεταγμένες

$$(\vec{R}-\vec{r})=(X-x)\vec{x}_0+(Y-y)\vec{y}_0+(Z-z)\vec{z}_0,$$

$$\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}=(\ddot{z}\,\dot{y}-\ddot{y}\,\dot{z})\vec{x}_0+(\ddot{x}\,\dot{z}-\ddot{z}\,\dot{x})\vec{y}_0+(\ddot{y}\,\dot{x}-\ddot{x}\,\dot{y})\vec{z}_0,$$

$$\dot{r}=\dot{x}\vec{x}_0+\dot{y}\vec{y}_0+\dot{z}\vec{z}_0\,.$$

Επομένως η τελευταία σχέση (10) γίνεται

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\left[(\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}})\wedge\dot{\vec{r}}\right]=\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \ddot{z}\,\dot{y}-\ddot{y}\,\dot{z} & \ddot{x}\,\dot{z}-\ddot{z}\,\dot{x} & \ddot{y}\,\dot{x}-\ddot{x}\,\dot{y} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}=0 \tag{11}$$

Η (11) είναι η εξίσωση του ευθειοποιού επιπέδου στο σημείο $P(x, y, z)$ της c.

Παρατήρηση:

Στη πράξη, για να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις των τριών επιπέδων (καθέτου, εγγύτατου και ευθειοποιού) με καρτεσιανές συντεταγμένες, υπολογίζουμε πρώτα τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ και κατόπιν χρησιμοποιούμε τις διανυσματικές εξισώσεις $(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_0=0$, $(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{b}_0=0$, $(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{\eta}_0=0$ για να βρούμε τις εξισώσεις των αντιστοίχων επιπέδων, όπως φαίνεται στο παράδειγμα 8 της παρ. 5.9.

Παράδειγμα

Έστω η καμπύλη

$$\vec{r}(t)=\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0+\alpha\eta\mu t\vec{y}_0+\beta t\vec{z}_0 \tag{1}$$

όπου το τόξο s αυξάνεται με το t. Η (1) παριστάνει *έλικα* γύρω από ένα *κύλινδρο* ακτίνας α και βήματος β με άξονα τον z (σχήμα 37). Να εκφραστούν η καμπυλότητα k και η στρέψη σ της καμπύλης συναρτήσει των παραμέτρων α και β της καμπύλης.

Λύση

Είναι $\vec{\varepsilon}_0=\dfrac{d\vec{r}}{ds}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds}=\left(-\alpha\eta\mu t\vec{x}_0+\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0+\beta\vec{z}_0\right)\cdot\dfrac{dt}{ds}$ και

$$\vec{\varepsilon}_0\cdot\vec{\varepsilon}_0=1\Leftrightarrow\left(\alpha^2\eta\mu^2t+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2t+\beta^2\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=1,$$

δηλαδή $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2=1$

Άρα $\dfrac{dt}{ds}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

(υποδηλώνοντας ότι υπάρχει και η αντίθετη φορά του $\vec{\varepsilon}_0$, ανάλογα με τον προσανατολισμό της καμπύλης). Επομένως

$\vec{\varepsilon}_0=\dfrac{-\alpha\eta\mu t\vec{x}_0+\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0+\beta\vec{z}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Επίσης είναι:

$$k\vec{\eta}_0=\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds}=\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d}{dt}\left(\frac{-\alpha\eta\mu t\vec{x}_0+\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0+\beta\vec{z}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\cdot\frac{dt}{ds}=$$

$$=\frac{-\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0-\alpha\eta\mu t\vec{y}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\frac{-\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0-\alpha\eta\mu t\vec{y}_0}{\alpha^2+\beta^2}$$

Επομένως από τον ορισμό $\dfrac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds}=k\vec{\eta}_0$ προκύπτει (όπου $|\vec{\eta}_0|=1$)

$$k = \left|\frac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{-\alpha\sigma\upsilon\nu\, t}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{-\alpha\eta\mu\, t}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \text{ οπότε} \qquad (2)$$

$$\vec{\eta}_0 = \frac{-\alpha\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0 - \alpha\eta\mu\, t\vec{y}_0}{\alpha^2+\beta^2}\Big/ k = -(\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0 + \eta\mu\, t\vec{y}_0). \qquad (3)$$

Τώρα υπολογίζουμε το $\vec{b}_0$ από τον ορισμό του $\vec{b}_0 = \vec{\varepsilon}_0 \wedge \vec{\eta}_0$. Είναι

$$\vec{b}_0 = \vec{\varepsilon}_0 \wedge \vec{\eta}_0 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{-\alpha\eta\mu\, t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\, t}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ -\sigma\upsilon\nu\, t & -\eta\mu\, t & 0 \end{vmatrix} = .$$

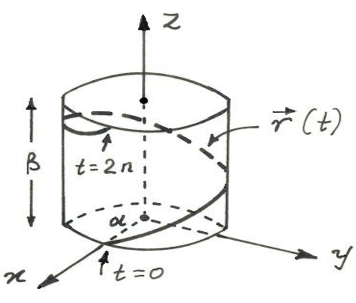
$$= \frac{\beta\eta\mu\, t\vec{x}_0 - \beta\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0 + \alpha\vec{z}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Είναι επίσης

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \frac{d\vec{b}_0}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \sigma\vec{\eta}_0 . \text{ Άρα}$$

$$\sigma\vec{\eta}_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta\eta\mu\, t\vec{x}_0 - \beta\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0 + \alpha\vec{z}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} =$$

$$= \frac{\beta\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0 + \beta\eta\mu\, t\vec{y}_0}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left[-(\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0 + \eta\mu\, t\vec{y}_0)\right]$$



Σχήμα 37

Επομένως, λόγω της (3) προκύπτει:

$$\sigma = \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι τόσο η καμπυλότητα k όσο και η στρέψη σ παραμένουν σταθερές σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης, είναι δηλαδή ανεξάρτητες του t, όπως φαίνεται και στο σχήμα 37.

5.9 Υπολογισμός της καμπυλότητας *k* και της στρέψης *σ*

α) Υπολογισμός της καμπυλότητας *k*

Έστω η καμπύλη *c* που ορίζεται απ' την εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Θα εκφράσουμε τη καμπυλότητα k συναρτήσει της $\vec{r} = \vec{r}(t)$ και των παραγώγων της ως προς t, σ' ένα σημείο της *c* το *P*.

Έστω ότι το t είναι συνάρτηση του μήκους s δηλαδή $t = t(s)$. Είναι

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\varepsilon}_0 \text{ και } \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\varepsilon}_0}{ds} = k\vec{\eta}_0 . \tag{1}$$

Επομένως

$$k\vec{b}_0 = k(\vec{\varepsilon}_0 \wedge \vec{\eta}_0) = \vec{\varepsilon}_0 \wedge (k\vec{\eta}_0) = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \tag{2}$$

Είναι όμως

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}, \\ &\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{ds^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Επομένως, το τελευταίο μέλος της (2) γράφεται

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \wedge \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{ds^2}\right] = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \tag{4}$$

(εφόσον τα $\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{ds^2}$ είναι συγγραμμικά, άρα το εξωτερικό τους γινόμενο θα είναι μηδέν). Επομένως

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = k\vec{b}_0 \tag{5}$$

Παίρνοντας τα μέτρα των διανυσμάτων της (5) έχουμε

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\right| = \left|k\vec{b}_0\right| \text{ ή } \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|^3 = |k| \cdot 1 = k \tag{6}$$

Είναι όμως (παράγρ. 5.6 τύπος (6)):

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \text{ οπότε } \frac{dt}{ds} = 1 \Big/ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

(θεώρημα παραγώγων αντίστροφων συναρτήσεων). Επομένως η (6) γίνεται

$$k = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3} = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3} \tag{7}$$

Με την τελευταία σχέση (7) εκφράσαμε τη καμπυλότητα k συναρτήσει της παραμέτρου t. Τώρα, αν αντικαταστήσουμε την τιμή του k που βρήκαμε πριν στη σχέση

(5), μπορούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\vec{b}_0$ συναρτήσει του t (όπως εκφράσαμε και το $\vec{\varepsilon}_0$ συναρτήσει του t – τύπος (9) της παρ. 5.6.). Έτσι, η (5) γίνεται

$$\vec{b}_0 = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}} \cdot \left(\dfrac{dt}{ds}\right)^3}{\dfrac{\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|} \tag{8}$$

διότι $\dfrac{dt}{ds} = 1\Big/\dfrac{ds}{dt}$ και $\dfrac{ds}{dt} = \left|\dot{\vec{r}}\right|$ (τύπος (6) της 5.6.).

Όπως προκύπτει από την (8) το $\vec{b}_0$ είναι ομόρροπο προς το διάνυσμα $\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}$.

Αν η καμπύλη c δίνεται με τις παραμετρικές της εξισώσεις

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, τότε

$$\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad \left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2}$$

οπότε ο τύπος (7) γίνεται:

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{3/2}} \tag{9}$$

Αν η καμπύλη c δίνεται στο επίπεδο xOy τότε

$z = 0$ οπότε $\dot{z} = \ddot{z} = 0$ και ο τύπος (8) γίνεται

$$k = \frac{\left|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}\right|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}} \tag{10}$$

Τέλος, αν η καμπύλη c δίνεται στο επίπεδο με την εξίσωση $y = f(x)$ και θέσουμε:

$x = t$ οπότε $\dot{x} = 1,\ \ddot{x} = 0$, τότε ο (9) γίνεται

$$k = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} \quad \text{όπου } y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{11}$$

β) Υπολογισμός της στρέψης σ

Παραγωγίζοντας ως προς s τη σχέση $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{\eta}_0$ (τύπος (1) της 5.9. α) έχουμε:

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \dot{k}\vec{\eta}_0 + k\frac{d\vec{\eta}_0}{ds} = \dot{k}\vec{\eta}_0 - k^2\vec{\varepsilon}_0 - k\sigma\vec{b}_0$$

όπου $\frac{d\vec{\eta}_0}{ds} = -k\vec{\varepsilon}_0 - \sigma\vec{b}_0$ (τύποι των Serret – Frenet). Ώστε

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\varepsilon}_0, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{\eta}_0, \quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = -k^2\vec{\varepsilon}_0 + \dot{k}\vec{\eta}_0 - k\sigma\vec{b}_0$$

δηλαδή τα διανύσματα $\frac{d\vec{r}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ εκφράζονται συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$, ως γραμμικοί συνδυασμοί αυτών.

Ως γνωστό, αν $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ είναι 3 διανύσματα στο χώρο, τότε το μικτό γινόμενό τους $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ (αριθμός), δίδεται απ' το τύπο:

$$[\vec{\alpha}, \ \vec{\beta}, \ \vec{\gamma}] = (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$ Επομένως

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & \dot{k} & -k\sigma \end{vmatrix} = -k^2\sigma$$, οπότε

$$\sigma = -\frac{\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right]}{k^2} \qquad (12)$$

Παραγωγίζουμε ως προς s τη σχέση

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}$$ (είναι ο τύπος (3) της 5.9. α):

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 2\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^3t}{ds^3} =$$

$$= \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^3t}{ds^3} \qquad (13)$$

Είναι όμως: $\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$, και

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3$$ (τύπος (4) της 5.9.)

Άρα η τελευταία και η (13) δίνουν το μικτό γινόμενο:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] =$$

$$= \left(\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\right) \cdot \left(\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^3t}{ds^3}\right)$$

Επειδή όμως τα $\dot{\vec{r}}$ και $\ddot{\vec{r}}$ είναι κάθετα στο $\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}$, θα είναι

$$\dot{\vec{r}} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right) = 0, \quad \ddot{\vec{r}} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right) = 0 .$$

Επομένως η τελευταία σχέση μετά τις πράξεις γίνεται

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\right) \cdot \dddot{\vec{r}} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = \left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 \tag{14}$$

Επίσης, αν η σχέση (7) υψωθεί στο τετράγωνο, προκύπτει :

$$k^2 = \left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 \tag{15}$$

οπότε η (12) λόγω των (3) και (4) γίνεται: (όπου $\frac{dt}{ds} = 1 \Big/ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, τύπος (6) της παρ. 5.6)

$$\sigma = -\frac{\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]}{\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|^2} \tag{16}$$

Αν η καμπύλη c είναι επίπεδη, τότε η κατεύθυνση $\vec{b}_0$ είναι σταθερή (ως κάθετη στα $\vec{\varepsilon}_0, \vec{\eta}_0$ δηλαδή στο επίπεδο της καμπύλης) οπότε $\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \vec{0}$ ή $\sigma\vec{\eta}_0 = \vec{0}$, άρα $\sigma = 0$.

Δηλαδή για επίπεδη καμπύλη: $\sigma = 0 \Leftrightarrow \left[\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right] = 0 .$ (17)

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί με τη βοήθεια των τύπων που βρέθηκαν, η καμπυλότητα k και η στρέψη σ της καμπύλης $\vec{r}(t) = \alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 + \alpha\eta\mu t\vec{y}_0 + \beta t\vec{z}_0$ του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους: $k = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}$ (1) και $\sigma = -\frac{\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]}{\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right|^2}$ (2)

που εκφράζουν την καμπυλότητα και στρέψη της καμπύλης συναρτήσει του t. Υπολογίζουμε τις παραγώγους της συνάρτησης $\vec{r}(t)$ ως προς t. Είναι:

$$\dot{\vec{r}} = -\alpha\eta\mu\, t\vec{x}_0 + \alpha\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0 + \beta\vec{z}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\alpha\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0 - \alpha\eta\mu\, t\vec{y}_0$$

$\dddot{\vec{r}} = \alpha\eta\mu\, t\vec{x}_0 - \alpha\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0$. Επίσης,

$$\left|\dot{\vec{r}}\right| = \sqrt{(-\alpha\eta\mu\, t)^2 + (\alpha\sigma\upsilon\nu\, t)^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{3}$$

$$\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ -\alpha\eta\mu\, t & \alpha\sigma\upsilon\nu\, t & \beta \\ -\alpha\sigma\upsilon\nu\, t & -\alpha\eta\mu\, t & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\eta\mu\, t\vec{x}_0 + \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0 + \alpha^2\vec{z}_0 .$$ Άρα

$$\left|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right| = \sqrt{(\alpha\beta\eta\mu\, t)^2 + (\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\, t)^2 + (\alpha^2)^2} = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{4}$$

$$\left[\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right] = \begin{vmatrix} -\alpha\eta\mu\, t & \alpha\sigma\upsilon\nu\, t & \beta \\ -\alpha\sigma\upsilon\nu\, t & -\alpha\eta\mu\, t & 0 \\ \alpha\eta\mu\, t & -\alpha\sigma\upsilon\nu\, t & 0 \end{vmatrix} = \beta\left(\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t + \alpha^2\eta\mu^2 t\right) = \alpha^2\beta \tag{5}$$

Επομένως η (1) λόγω των (3) και (4) γίνεται

$$k = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^3} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

ενώ η (2) λόγω των (4) και (5) γίνεται

$$\sigma = -\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)} = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} .$$

2) Να βρεθεί η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου στο σημείο $t_0 = \pi/2$ και το μήκος του τόξου της προηγούμενης καμπύλης (έλικας) από $t = 0$ μέχρι $t = \pi/2$.

Λύση

Η διανυσματική εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου είναι:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right)\cdot \vec{b}_0 = 0 \tag{1}$$

όπου $\vec{R}(X, Y, Z)$ είναι το διάνυσμα θέσης τυχαίου σημείου του εγγύτατου επιπέδου και $\vec{r}\left(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0)\right)$ το διάνυσμα θέσης του συγκεκριμένου σημείου $t_0 = \pi/2$ στο οποίο αντιστοιχεί το εγγύτατο επίπεδο, όπου

$x(t_0) = \alpha\sigma\upsilon\nu\, t_0, \quad y(t_0) = \alpha\eta\mu\, t_0, \quad z(t_0) = \beta\, t_0$. Επίσης

$$\vec{R} - \vec{r} = \left(X - \alpha\sigma\upsilon\nu\, t_0, \quad Y - \alpha\eta\mu\, t_0, \quad Z - \beta\, t_0\right).$$

Ακόμα

$$\vec{b}_0 = \vec{\varepsilon}_0 \wedge \vec{\eta}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{1}{k} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \frac{1}{k}$$

οπότε η (1) γράφεται

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right)\cdot\left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right) = 0 \qquad (2)$$

(ο παράγοντας $\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \frac{1}{k}$ είναι συντελεστής του $\left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right)$ και μπορεί να παραλειφθεί, εφόσον το εσωτερικό γινόμενο των $\left(\vec{R} - \vec{r}\right)$ και $\left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right)$ είναι μηδέν). Επομένως, η εξίσωση (2) του εγγύτατου επιπέδου γράφεται αναλυτικά ως μικτό γινόμενο των $\vec{R} - \vec{r},\ \dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}}$. Είναι

$$\vec{r} = \alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 + \alpha\eta\mu t\vec{y}_0 + \beta t\vec{z}_0 \text{ και } \vec{r}\Big|_{t_0=\pi/2} = \alpha\,\vec{y}_0 + \beta\,\pi/2\,\vec{z}_0$$

$$\dot{\vec{r}} = -\alpha\eta\mu t\vec{x}_0 + \alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{y}_0 + \beta\vec{z}_0 \text{ και } \dot{\vec{r}}\Big|_{t_0=\pi/2} = -\alpha\vec{x}_0 + \beta\vec{z}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\alpha\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0 - \alpha\eta\mu t\vec{y}_0 \text{ και } \ddot{\vec{r}}\Big|_{t_0=\pi/2} = -\alpha\vec{y}_0\,.$$

Επομένως

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right)\cdot\left(\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\right)\Big|_{t=\pi/2} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X-0 & Y-\alpha & Z-\beta\pi/2 \\ -\alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(\beta X + \alpha\left(Z - \beta\pi/2\right)\right) = 0 \Leftrightarrow 2\beta X + 2\alpha Z = \alpha\beta\pi$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί επίπεδο παράλληλο προς τον Oy το οποίο τέμνει το xOz κατά την ευθεία $2\beta X + 2\alpha Z = \alpha\beta\pi$.

Το μήκος της έλικας από $t = 0$ μέχρι $t_0 = \pi/2$ είναι:

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\alpha^2\eta\mu^2 t + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t + \beta^2}\ dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ dt = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

3) Να βρεθεί η καμπυλότητα της καμπύλης $\vec{r}(t) = \sigma\upsilon\nu^3 t\vec{x}_0 + \eta\mu^3 t\vec{y}_0$ στο σημείο της που ορίζεται για $t = \pi/4$.

Λύση

Προφανώς (επειδή λείπει η κατηγμένη z) η καμπύλη c είναι επίπεδη. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (10) της 5.9.

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}.$$

Είναι

$$x = \sigma\upsilon\nu^3 t\,,\ \dot{x} = -3\sigma\upsilon\nu^2 t\,\eta\mu\, t\,,\ \ddot{x} = 6\sigma\upsilon\nu\, t\,\eta\mu^2 t - 3\sigma\upsilon\nu^3 t$$

$$y = \eta\mu^3 t\,,\ \dot{y} = 3\eta\mu^2 t\,\sigma\upsilon\nu\, t\,,\ \ddot{y} = 6\eta\mu\, t\,\sigma\upsilon\nu^2 t - 3\eta\mu^3 t\,, \text{ και}$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4},\ \ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4},\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ και } \ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Επομένως, στο σημείο $t = \pi/4$ είναι

$$k = \frac{\left|-\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2\right|}{\left[\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{2}{3}.$$

4) Να βρεθεί η καμπυλότητα της έλλειψης c: $x^2/4 + y^2 = 2$, στο σημείο αυτής $P(2,\ 1)$.

Λύση

Εδώ, εφόσον πρόκειται για επίπεδη καμπύλη, θα εφαρμόσουμε τον τύπο (11) της 5.9.

$$k = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Υπολογίζουμε λοιπόν τις παραγώγους της έλλειψης.

Έχουμε για την 1η παράγωγο:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y}. \text{ Άρα } y'\big|_{P(2,\ 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Αντίστοιχα για τη 2η παράγωγο:

$$\frac{x}{2} + 2yy' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2y'y' + 2yy'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1 + 4y'^2}{4y}. \text{ Άρα } y''\big|_{P(2,\ 1)} = -\frac{1}{2}$$

Επομένως, η ζητούμενη καμπυλότητα στο σημείο $P(2,\ 1)$ αυτής είναι

$$k=\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{4}{5\sqrt{5}}\,.$$

5) Να βρεθεί σημείο $P(x,y)$ της έλλειψης $x^2/\alpha^2+y^2/\beta^2=1$ με $x,y\geq 0$ τέτοιο ώστε η ακτίνα καμπυλότητας στο *P* να είναι $\rho=1/k=\sqrt{\alpha\beta}$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης με παράμετρο *t* είναι

$x=\alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y=\beta\eta\mu t$ όπου $t\in[0,\ 2\pi]$. Είναι

$\dot{x}=-\alpha\eta\mu t,\quad \dot{y}=\beta\sigma\upsilon\nu t,\quad \ddot{x}=-\alpha\sigma\upsilon\nu t,\quad \ddot{y}=-\beta\eta\mu t$ και

$$\rho=\frac{1}{k}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\,\ddot{y}-\ddot{x}\,\dot{y}|}=\frac{(\alpha^2\eta\mu^2t+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2t)^{3/2}}{\left|\alpha\beta\eta\mu^2t+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2t\right|}=\frac{(\alpha^2\eta\mu^2t+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2t)^{3/2}}{\alpha\beta}.$$

Άρα

$$\sqrt{\alpha\beta}=\frac{(\alpha^2\eta\mu^2t+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2t)^{3/2}}{\alpha\beta}\Leftrightarrow(\alpha^2\eta\mu^2t+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2t)^{3/2}=(\alpha\beta)^{3/2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2\eta\mu^2t+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2t=\alpha\beta\Leftrightarrow\eta\mu^2t(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta-\beta^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu^2t=\frac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\eta\mu\,t=\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

με δεκτή την $\eta\mu\,t=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ επειδή $x,y\geq 0$, $\sigma\upsilon\nu\,t=\sqrt{1-\eta\mu^2t}=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

επομένως υπάρχει μόνο το σημείο

$$P(x,y)=P(\alpha\sigma\upsilon\nu t,\ \beta\eta\mu\,t)=P\left(\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+\beta}},\frac{\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}}\right).$$

6) Να δειχθεί ότι η καμπύλη *c* που ορίζεται απ' τις εξισώσεις

$$x(t)=1+3t+2t^2,\quad y(t)=2-2t+5t^2,\quad z(t)=1-t^2$$

είναι επίπεδη και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου της.

Λύση

Ως γνωστό (τύπος (17) της παρ. 5.9.) για να είναι η *c* επίπεδη πρέπει

$\sigma=0$, ή $\left[\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right]=0$. Πράγματι:

$$\left[\dot{\vec r},\ \ddot{\vec r},\ \dddot{\vec r}\right]=\begin{vmatrix}\dot x & \dot y & \dot z\\ \ddot x & \ddot y & \ddot z\\ \dddot x & \dddot y & \dddot z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+4t & -2+10t & -2t\\ 4 & 10 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

άρα η c είναι επίπεδη.

Για να υπολογίσουμε την εξίσωση του επιπέδου της, θα βρούμε τρία μη συνευθειακά σημεία της, δίνοντας στο t τρεις αυθαίρετες τιμές. Έτσι;

Για $t=-1$ είναι $x=0 \quad y=9 \quad z=0$

$t=0$ είναι $x=1 \quad y=2 \quad z=1$

$t=1$ είναι $x=6 \quad y=5 \quad z=0$

δηλαδή έχουμε τα σημεία $\mathrm{A}(0,\ 9,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 2,\ 1)$, $\Gamma(6,\ 5,\ 0)$ που ανήκουν στη c.

Η εξίσωση του επιπέδου της c είναι (βλ. εξίσωση επιπέδου της παρ. 2.9.1.)

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ 0 & 9 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x+3y+19z-27=0\,.$$

7) Να δειχθεί ότι η καμπύλη

$$\vec r(t)=\frac{1}{2}(2-\eta\mu 2t)\vec x_0+(\eta\mu^2 t+2)\vec y_0+\sigma\upsilon\nu\, t\vec z_0$$

βρίσκεται πάνω στη σφαίρα $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1$ και να υπολογιστεί η καμπυλότητα της c στο σημείο της P_0 για την τιμή της παραμέτρου $t=\pi/2$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις της c είναι

$$x=1-\frac{1}{2}\eta\mu 2t,\quad y=\eta\mu^2 t+2,\quad z=\sigma\upsilon\nu\, t\,,$$

απ' τις οποίες προκύπτει

$$x-1=-\frac{1}{2}\eta\mu 2t,\quad y-2=\eta\mu^2 t,\quad z=\sigma\upsilon\nu\, t \ \text{ και}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\left(1-\frac{1}{2}\eta\mu 2t\right)^2+(\eta\mu^2 t)^2+\sigma\upsilon\nu^2 t=$$

$$=\frac{1}{4}4\eta\mu^2 t\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^4 t+\sigma\upsilon\nu^2 t=\eta\mu^2 t(\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t)+\sigma\upsilon\nu^2 t=1$$

για κάθε σημείο $P(x,y,z)$ της καμπύλης c. Επομένως, κάθε σημείο της βρίσκεται πάνω στη σφαίρα $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1$.

Επίσης, $\quad \dot{x}=-\sigma\upsilon\nu 2t,\ \dot{y}=\eta\mu 2t,\ \dot{z}=-\eta\mu\, t$,

$\ddot{x}=2\eta\mu 2t,\ \ddot{y}=2\sigma\upsilon\nu 2t,\ \ddot{z}=-\sigma\upsilon\nu\, t$. Άρα

$$\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ -\sigma\upsilon\nu 2t & \eta\mu 2t & -\eta\mu\, t\\ 2\eta\mu 2t & 2\sigma\upsilon\nu 2t & -\sigma\upsilon\nu\, t\end{vmatrix}=$$

$$=(-\eta\mu 2t\sigma\upsilon\nu\, t+2\sigma\upsilon\nu 2t\eta\mu\, t)\vec{x}_0-(\sigma\upsilon\nu 2t\sigma\upsilon\nu\, t+2\eta\mu 2t\eta\mu\, t)\vec{y}_0-2\vec{z}_0,$$

$$\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|=\sqrt{(-\eta\mu 2t\sigma\upsilon\nu\, t+2\sigma\upsilon\nu 2t\eta\mu\, t)^2+(\sigma\upsilon\nu 2t\sigma\upsilon\nu\, t+2\eta\mu 2t\eta\mu\, t)^2+2^2}=$$

$$=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t+4\eta\mu^2 t+4}=\sqrt{5+3\eta\mu^2 t}.$$

Ακόμα, $\quad \left|\dot{\vec{r}}\right|^3=\left(\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 2t+\eta\mu^2 2t+\eta\mu^2 t}\right)^3=(1+\eta\mu^2 t)^{3/2}$. Συνεπώς

$$k=\frac{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}=\frac{\sqrt{5+3\eta\mu^2 t}}{(1+\eta\mu^2 t)^{3/2}}.$$

Στο σημείο P_0 για $t=\pi/2$ έχουμε $k=\dfrac{\sqrt{5+3\cdot 1}}{(1+1)^{3/2}}=\dfrac{\sqrt{8}}{2^{3/2}}=1$

8) Δίνεται η καμπύλη $\vec{r}(t)=\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0+\eta\mu\, t\vec{y}_0+t\vec{z}_0$. Να βρεθούν:

α) τα $\vec{\varepsilon}_0,\ \vec{\eta}_0,\ \vec{b}_0$,

β) οι εξισώσεις της εφαπτομένης, της 1ης και 2ης καθέτου σε τυχαίο της σημείο $P(t)$,

γ) οι εξισώσεις των επιπέδων του συνοδεύοντος τριέδρου στο σημείο $P_1(\pi/2)$.

Λύση

α) Είναι $\dot{\vec{r}}=-\eta\mu\, t\vec{x}_0+\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0+\vec{z}_0$

Ως γνωστό (τύποι (8) και (9) της 5.6.)) είναι

$$\vec{\varepsilon}_0=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}=\frac{-\eta\mu\, t\vec{x}_0+\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0+\vec{z}_0}{\sqrt{\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t+1}}=\frac{-\eta\mu\, t\vec{x}_0+\sigma\upsilon\nu\, t\vec{y}_0+\vec{z}_0}{\sqrt{2}}.$$

Επίσης, (τύπος (8) της 5.9.) $\vec{b}_0=\dfrac{\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}$ και επειδή

$$\ddot{\vec{r}}=-\sigma\upsilon\nu\, t\vec{x}_0-\eta\mu\, t\vec{y}_0+0\vec{z}_0,$$

$$\dot{\vec r}\wedge\ddot{\vec r}=\begin{vmatrix}\vec x_0 & \vec y_0 & \vec z_0\\ -\eta\mu\, t & \sigma\upsilon\nu\, t & 1\\ -\sigma\upsilon\nu\, t & -\eta\mu\, t & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\eta\mu\, t\vec x_0-\sigma\upsilon\nu\, t\vec y_0+(\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t)\vec z_0=\eta\mu\, t\vec x_0-\sigma\upsilon\nu\, t\vec y_0+\vec z_0$$

και $\left|\dot{\vec r}\wedge\ddot{\vec r}\right|=\sqrt{\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t+1}=\sqrt{2}$, θα είναι

$\vec b_0=\dfrac{\dot{\vec r}\wedge\ddot{\vec r}}{\left|\dot{\vec r}\wedge\ddot{\vec r}\right|}=\dfrac{\eta\mu\, t\vec x_0-\sigma\upsilon\nu\, t\vec y_0+\vec z_0}{\sqrt{2}}$. Τέλος, έχουμε

$$\vec\eta_0=\vec b_0\wedge\vec\varepsilon_0=\begin{vmatrix}\vec x_0 & \vec y_0 & \vec z_0\\ \eta\mu\, t/\sqrt{2} & -\sigma\upsilon\nu\, t/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -\eta\mu\, t/\sqrt{2} & \sigma\upsilon\nu\, t/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{vmatrix}=-\sigma\upsilon\nu\, t\vec x_0-\eta\mu\, t\vec y_0$$

β) Οι εξισώσεις της εφαπτομένης, της πρώτης και της δεύτερης καθέτου στο τυχαίο σημείο $P(t)$ της καμπύλης *c* είναι (τύποι (2) της παραγρ. 5.8.):

i) της εφαπτομένης $\vec R=\vec r+\lambda\vec\varepsilon_0$, δηλαδή της

$$\vec R=\sigma\upsilon\nu\, t\vec x_0+\eta\mu\, t\vec y_0+t\vec z_0+\lambda\frac{-\eta\mu\, t\vec x_0+\sigma\upsilon\nu\, t\vec y_0+\vec z_0}{\sqrt{2}}$$

ii) της 2ης καθέτου $\vec R=\vec r+\lambda\vec\eta_0$, δηλαδή της

$$\vec R=\sigma\upsilon\nu\, t\vec x_0+\eta\mu\, t\vec y_0+t\vec z_0+\lambda(-\sigma\upsilon\nu\, t\vec x_0-\eta\mu\, t\vec y_0)$$

iii) της 3ης καθέτου $\vec R=\vec r+\lambda\vec b_0$, δηλαδή της

$$\vec R=\sigma\upsilon\nu\, t\vec x_0+\eta\mu\, t\vec y_0+t\vec z_0+\lambda\frac{\eta\mu\, t\vec x_0-\sigma\upsilon\nu\, t\vec y_0+\vec z_0}{\sqrt{2}}$$

γ) Η εξίσωση του <u>εγγύτατου</u> επιπέδου είναι (τύπος (5) της 5.8.)
$\left(\vec R-\vec r\right)\cdot\vec b_0=0$, όπου $\vec R(X,Y,Z)$ είναι το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του εγγύτατου επιπέδου και $\vec r=\vec r(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου *P* της *c*.

Είναι $\vec R-\vec r=(X-\sigma\upsilon\nu\, t)\vec x_0+(Y-\eta\mu\, t)\vec y_0+(Z-t)\vec z_0$

και επομένως η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου είναι η

$\left(\vec R-\vec r\right)\cdot\vec b_0=(X-\sigma\upsilon\nu\, t)\eta\mu\, t+(Y-\eta\mu\, t)(-\sigma\upsilon\nu\, t)+(Z-t)\cdot 1=0$.

Για $t=\pi/2$, η εξίσωση αυτή γίνεται $X+Z=\pi/2$.

Ανάλογα, η εξίσωση του <u>καθέτου</u> επιπέδου είναι (τύπος (6) της 5.8.)

$\left(\vec R-\vec r\right)\cdot\vec\varepsilon_0=0$, η οποία για $t=\pi/2$, γίνεται $-X+Z=\pi/2$.

Τέλος, η εξίσωση του <u>ευθειοποιούντος</u> επιπέδου είναι (τύπος (7) της 5.8.)

$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\vec{\eta}_0=0$, η οποία για $t=\pi/2$, γίνεται $Y=1$.

9) Δίνεται η καμπύλη *c*: $\vec{r}(t)=(e^t\eta\mu\, t)\vec{x}_0+(e^t\sigma\upsilon\nu\, t)t\vec{y}_0+e^t\vec{z}_0$. Να δειχθεί ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ του συνοδεύοντος τριέδρου της καμπύλης στο τυχαίο σημείο της, σχηματίζουν σταθερή γωνία με τον άξονα Oz.

Λύση

Είναι $\dot{\vec{r}}(t)=e^t(\eta\mu\, t+\sigma\upsilon\nu\, t)\vec{x}_0+e^t(\sigma\upsilon\nu\, t-\eta\mu\, t)\vec{y}_0+e^t\vec{z}_0$,

$$\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|=e^t\sqrt{(\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t)^2+(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)^2+1}=e^t\sqrt{3},$$

$$\ddot{\vec{r}}(t)=2e^t\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0-2e^t\eta\mu t\vec{y}_0+e^t\vec{z}_0,$$

$$\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ e^t(\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t) & e^t(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t) & e^t\\ 2e^t\sigma\upsilon\nu t & -2e^t\eta\mu t & e^t\end{vmatrix}=$$

$$=e^{2t}(\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t)\vec{x}_0+e^{2t}(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)\vec{y}_0-2e^{2t}\vec{z}_0,$$

$$\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|=e^{2t}\sqrt{(\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t)^2+(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)^2+4}=e^{2t}\sqrt{6},$$

επομένως,

$$\vec{\varepsilon}_0=\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t)\vec{x}_0+(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)\vec{y}_0+\vec{z}_0\right],$$

$$\vec{b}_0=\frac{\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[(\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t)\vec{x}_0+(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)\vec{y}_0-2\vec{z}_0\right],$$

και

$$\vec{\eta}_0=\vec{b}_0\wedge\vec{\varepsilon}_0=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t}{\sqrt{6}} & \dfrac{\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t}{\sqrt{6}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma\upsilon\nu t-\eta\mu t)\vec{x}_0-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t)\vec{y}_0.$$

Άρα, $\sigma\upsilon\nu(\vec{\varepsilon}_0\hat{,}\vec{z}_0)=\dfrac{\vec{\varepsilon}_0\cdot\vec{z}_0}{|\vec{\varepsilon}_0||\vec{z}_0|}=\dfrac{1/\sqrt{3}\cdot 1}{1\cdot 1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\Rightarrow(\vec{\varepsilon}_0\hat{,}\vec{z}_0)\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$,

$$\sigma\upsilon\nu(\vec{b}_0,\hat{\ }\vec{z}_0)=\frac{\vec{b}_0\cdot\vec{z}_0}{|\vec{b}_0||\vec{z}_0|}=-\frac{2}{\sqrt{6}}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\Rightarrow(\vec{b}_0,\hat{\ }\vec{z}_0)\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta},$$

και $\vec{\eta}_0\cdot\vec{z}_0=0=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\Rightarrow(\vec{\eta}_0\hat{\cdot}\vec{z}_0)=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$.

10) Δίνεται η καμπύλη *c* $\vec{r}(t)=t\vec{x}_0+t^2\vec{y}_0+t^3\vec{z}_0$. Να βρεθούν **i)** τα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ και **ii)** οι χωρίς παράμετρο εξισώσεις της εφαπτομένης, της πρώτης και δεύτερης καθέτου στο σημείο της *c* που αντιστοιχεί στην τιμή $t_0=1$ της παραμέτρου *t*.

Λύση

i) Είναι $\dot{\vec{r}}(t)=\vec{x}_0+2t\vec{y}_0+3t^2\vec{z}_0$ και $\ddot{\vec{r}}(t)=2\vec{y}_0+6t\vec{z}_0$. Άρα, στο σημείο της καμπύλης *c* που αντιστοιχεί στην τιμή $t_0=1$ της παραμέτρου *t* είναι

$$\dot{\vec{r}}(t)=\vec{x}_0+2\vec{y}_0+3\vec{z}_0 \text{ και } \ddot{\vec{r}}(t)=2\vec{y}_0+6\vec{z}_0$$

Επομένως, στο σημείο αυτό έχουμε

$$\vec{\varepsilon}_0=\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}=\frac{\vec{x}_0+2\vec{y}_0+3\vec{z}_0}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{\vec{x}_0+2\vec{y}_0+3\vec{z}_0}{\sqrt{14}}.$$ Επίσης,

$$\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=6\vec{x}_0-6\vec{y}_0+2\vec{z}_0,\ |\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}|=\sqrt{6^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{76}.$$ Άρα

$$\vec{b}_0=\frac{\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}|}=\frac{6\vec{x}_0-6\vec{y}_0+2\vec{z}_0}{\sqrt{76}}=\frac{3\vec{x}_0-3\vec{y}_0+\vec{z}_0}{\sqrt{19}} \text{ και}$$

$$\vec{\eta}_0=\vec{b}_0\wedge\vec{\varepsilon}_0=\frac{3\vec{x}_0-3\vec{y}_0+\vec{z}_0}{\sqrt{19}}\wedge\frac{\vec{x}_0+2\vec{y}_0+3\vec{z}_0}{\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{19\cdot14}}\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{266}}(-11\vec{x}_0-8\vec{y}_0+9\vec{z}_0)$$

ii) Για $t_0=1$ είναι $\vec{r}(1)=\vec{x}_0+\vec{y}_0+\vec{z}_0$, άρα η ζητούμενη εφαπτομένη της *c* περνάει απ' το σημείο (1, 1, 1) και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\dot{\vec{r}}=\vec{x}_0+2\vec{y}_0+3\vec{z}_0$ (που είναι συγγραμμικό με το $\vec{\varepsilon}_0$). Έτσι, (τύπος (4) της παρ. 5.6.) η εφαπτομένη της *c* έχει εξισώσεις

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Ανάλογα, οι εξισώσεις της 1ης και 2ης καθέτου είναι αντίστοιχα, οι:

$$\frac{x-1}{-11}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{9} \text{ και } \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$$

οι οποίες είναι παράλληλες προς τα διανύσματα

$$(-11\vec{x}_0-8\vec{y}_0+9\vec{z}_0) \text{ και } (3\vec{x}_0-3\vec{y}_0+\vec{z}_0)$$

τα οποία είναι συγγραμμικά με τα $\vec{\eta}_0$ και $\vec{b}_0$ αντίστοιχα.

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν: η εφαπτομένη, η 1η και 2η κάθετη, η καμπυλότητα και η στρέψη των παρακάτω καμπύλων:

1) $x=t, \quad y=t^2, \quad z=\frac{2}{3}t^3$

2) $x=t-\frac{t^3}{3}, \quad y=t^2, \quad z=t+\frac{t^3}{3}$

3) $x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3$

4) $x=\frac{2t+1}{t-1}, \quad y=\frac{t^2}{t-1}, \quad z=t+2$

5) $x=e^t, \quad y=e^{-t}, \quad z=\sqrt{2}t$

6) $x=e^t\sigma\upsilon\nu t, \quad y=e^t\eta\mu t, \quad z=e^t$

7) $x=t-\eta\mu t, \quad y=1-\sigma\upsilon\nu t, \quad z=4\eta\mu \, t/2$

8) $x=\ln(\sigma\upsilon\nu t), \quad y=\ln(\eta\mu t), \quad z=\sqrt{2}t$

2) Να βρεθεί το εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης:

$$\vec{r}(t)=(\alpha\sigma\upsilon\nu t+\beta\eta\mu t)\vec{x}_0+(\alpha\eta\mu t+\beta\sigma\upsilon\nu t)\vec{y}_0+\gamma\eta\mu 2t\vec{z}_0 .$$

3) Να βρεθεί η καμπυλότητα και στρέψη των καμπύλων:

1) $\vec{r}(t)=(3t-t^3)\vec{x}_0+3t^2\vec{y}_0+(3t+t^3)\vec{z}_0$

2) $\vec{r}(t)=(t^2+1)\vec{x}_0+(4t-3)\vec{y}_0+(2t^2-6t)\vec{z}_0$.

4) Να δειχτεί ότι το κάθετο επίπεδο σε τυχαίο σημείο της καμπύλης:

$$\vec{r}(t)=2\alpha\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t\vec{x}_0+2\alpha\sigma\upsilon\nu^2 t\vec{y}_0+2\alpha\eta\mu t\vec{z}_0$$

περνάει απ' την αρχή των συντεταγμένων.

5) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης, της 1ης και 2ης κάθετης της

$$\vec{r}(t) = t\vec{x}_0 + \eta\mu\, t\vec{y}_0 + \sigma\upsilon\nu\, t\vec{z}_0$$

στο σημείο $t = \pi/4$.

6) Να βρεθεί η εξίσωση του εγγύτατου και του ευθειοποιού επιπέδου της

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 1)\vec{x}_0 + t(1+t)\vec{y}_0 + (4t^3 - 3t + 1)\vec{z}_0$$

στο σημείο $t = 1$. (*Απάντηση*: Εγγύτατο επίπεδο: $54X - 18Y - 12Z + 60 = 0$, Ευθειοποιό επίπεδο: $-126X - 522Y + 216Z + 612 = 0$)

7) Να βρεθούν τα $\vec{\varepsilon}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{b}_0$ της καμπύλης

$$\vec{r}(t) = 4\alpha\sigma\upsilon\nu^3 t\vec{x}_0 + 4\alpha\eta\mu^3 t\vec{y}_0 + 3\beta\sigma\upsilon\nu 2t\vec{z}_0 .$$

8) Δίνεται η καμπύλη με διανυσματική εξίσωση (ως προς s):

$$\vec{r}(s) = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\vec{x}_0 + \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)^{-1}\vec{y}_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right)\vec{z}_0 .$$

Να δειχτεί ότι: $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.

9) Να βρεθεί η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης $x = 3z^2$, $y = 6z^3$. (*Υπόδειξη*: Βάλτε όπου $z = t$)

10) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας των παρακάτω καμπύλων:

1) $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^4 t, \quad y = \alpha\eta\mu^4 t$

2) $y = e^{-x^2}$.

(*Απάντηση*: **1)** $2\alpha\left(\eta\mu^4 t + \sigma\upsilon\nu^4 t\right)^{3/2}$, **2)** $1/2$)

11) Να δειχθεί ότι, για να έχει η καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(s)$ σταθερή καμπυλότητα k, πρέπει και αρκεί να είναι

$$\left[\vec{b}_0,\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = c .$$

12) Αν k και σ είναι η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης $\vec{r} = \vec{r}(s)$, να δειχθεί ότι

$$\left[\ \ddot{\vec{r}},\ \ \dddot{\vec{r}},\ \ \ddddot{\vec{r}}\ \right] = -k^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{k}\right).$$

II. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

5.10 Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v) \tag{1}$$

όπου *u, v* είναι παράμετροι που παίρνουν τιμές σ' ένα τόπο Τ $\subset R^2$. Για *v* σταθερό (ή για *u* σταθερό) οι εξισώσεις (1) παριστάνουν μια καμπύλη *c* στο χώρο R^3. Για κάθε *v* συγκεκριμένο και *u* μεταβαλλόμενο, υπάρχει μια τέτοια καμπύλη και αντίστροφα για κάθε *u* συγκεκριμένο και *v* μεταβαλλόμενο, υπάρχει επίσης μια καμπύλη. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι (1) ορίζουν ένα σύνολο καμπύλων στο χώρο, οι οποίες σχηματίζουν μια επιφάνεια *S*. Θεωρούμε εκείνες τις επιφάνειες που ορίζονται απ' τις (1) για τις οποίες τα *x, y, z* δέχονται συνεχείς παραγώγους 1^{ης} τάξης.

Οι εξισώσεις (1) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας *S* και γράφονται σε διανυσματική μορφή:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{x}_0 + y(u,v)\vec{y}_0 + z(u,v)\vec{z}_0 \tag{2}$$

όπου το άκρο του διανύσματος $\vec{r}$ παράγει την επιφάνεια *S*.

Τα σημεία της επιφάνειας που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο ζευγών *u* και *v* τα οποία πληρούν μια σχέση:

$$v = \varphi(u) \tag{3}$$

βρίσκονται σε μια καμπύλη της επιφάνειας της οποίας καμπύλης η διανυσματική εξίσωση είναι:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u, \varphi(u)\right) \tag{4}$$

και προκύπτει απ' τη (2) αν αντικατασταθεί το *v* με το ίσο του $\varphi(u)$. Επομένως η (3) παριστάνει μια καμπύλη στην επιφάνεια *S*, όπως ακριβώς και η εξίσωση $y = \varphi(x)$ παριστάνει μια καμπύλη στο επίπεδο xOy.

Επίσης οι εξισώσεις

$$u = u(t), \quad v = v(t) \tag{5}$$

όπου *t* παριστάνει νέα παράμετρο εκφράζουν μια καμπύλη *c* στην επιφάνεια *S* που η διανυσματική της εξίσωση είναι

$$\vec{r} = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big) \tag{6}$$

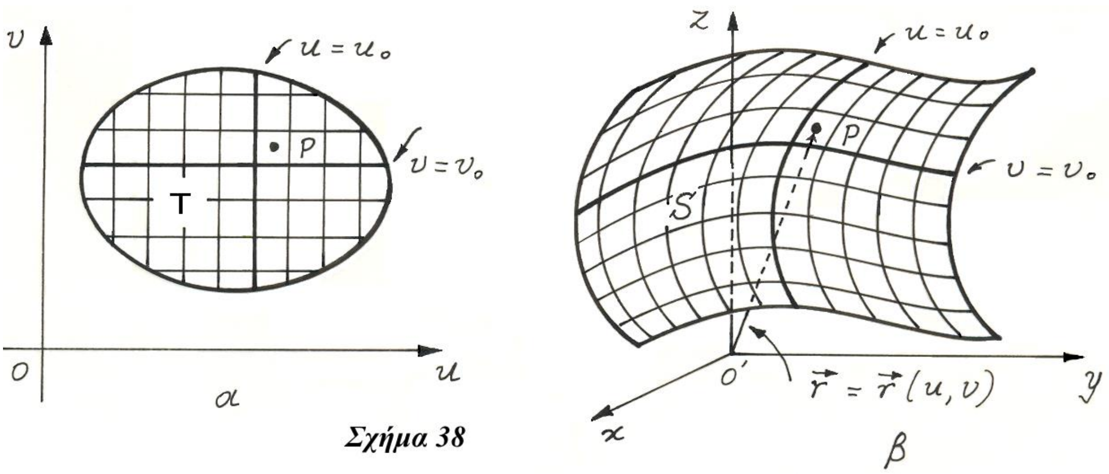
και προκύπτει απ' τη (2) με αντικατάσταση των *u* και *v* με τα ίσα τους $u(t)$ και $v(t)$. Η εξίσωση (6) είναι η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης *c* πάνω στην επιφάνεια *S*.

Παρατήρηση:

Η εξίσωση $z = f(x, y)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση παραμετρικής εξίσωσης μιας επιφάνειας αν θεωρήσουμε τα *x* και *y* ως παραμέτρους, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y) = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + f(x, y)\vec{z}_0 \, .$$

Έστω η επιφάνεια *S* με διανυσματική εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$



Σχήμα 38

όπου τα $(u, v) \in \mathrm{T} \subset R^2$ (σχήμα 38 α). Παρατηρούμε ότι η εικόνα της συντεταγμένης γραμμής $v = v_0$ του τόπου Τ θα είναι η καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ πάνω στην επιφάνεια *S* κατά μήκος της οποίας (καμπύλης) το *u* είναι παράμετρος. Δηλαδή το διάνυσμα $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ γράφει πάνω στην επιφάνεια *S* μια καμπύλη που την ονομάζουμε *u* – καμπύλη. Παρόμοια, η εικόνα της συντεταγμένης γραμμής $u = u_0$ του Τ θα είναι η καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ πάνω στην *S* δηλαδή το διάνυσμα $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ γράφει πάνω στην *S* την *v* – καμπύλη αντίστοιχα.

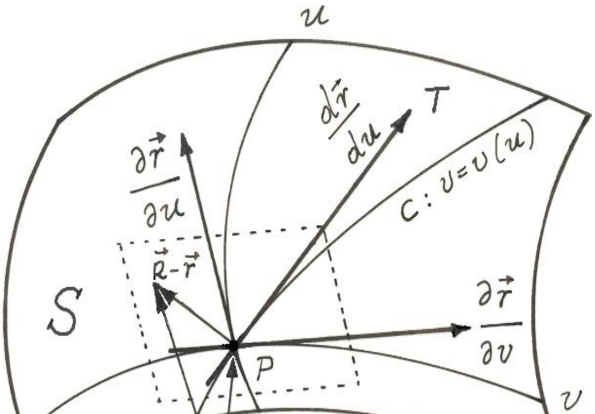
Όταν οι παράμετροι *u*, *v* μεταβάλλονται συνεχώς στον τόπο T, τότε η επιφάνεια *S* καλύπτεται από ένα δίκτυο *u* - και *v* - καμπύλων που τις ονομάζουμε *παραμετρικές γραμμές*, έτσι ώστε από κάθε σημείο της επιφάνειας *S* να περνάει ένα ζευγάρι καμπύλων *u* και *v*. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις καμπύλες για να καθορίσουμε τη θέση κάθε σημείου της *S*. Γι' αυτό το λόγο οι καμπύλες αυτές ονομάζονται συντεταγμένες γραμμές ή **καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.** Το σημείο $P_0(u_0, v_0)$ ορίζεται ως τομή των καμπύλων $u = u_0$ και $v = v_0$ ακριβώς όπως το σημείο $P_0(x_0, y_0)$ του επιπέδου xOy ορίζεται ως τομή των ευθειών $x = x_0$ και $y = y_0$ (σχήμα 38 β).

5.11 Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας. Θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης

Έστω η επιφάνεια *S* που ορίζεται απ' τη εξίσωση

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$$

και σημείο *P*(*u*, *v*) αυτής, καθώς και η καμπύλη *c* πάνω στην επιφάνεια *S* που περνάει απ' το σημείο *P* και έχει εξίσωση $v = v(u)$. Η διανυσματική εξίσωση της καμπύλης *c* θα είναι $\vec{r} = \vec{r}(u, v(u))$.



Σχήμα 39

Η εφαπτομένη της καμπύλης *c* στο σημείο *P* θα είναι ως γνωστό (σχήμα 39) παράλληλη προς το διάνυσμα

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} \qquad (1)$$

Απ' την (1) φαίνεται ότι το διάνυσμα $\frac{d\vec{r}}{du}$ αναλύθηκε σε δύο διανύσματα, τα $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}$ και είναι συνεπίπεδο μ' αυτά, οποιαδήποτε κι αν είναι η εξίσωση της $v = v(u)$. Επομένως, αν πάρουμε όλες τις καμπύλες της *S* που περνούν απ' το *P*, οι εφαπτόμενες αυτών στο *P* θα βρίσκονται σε ένα επίπεδο που περνάει απ' το *P* και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\dfrac{\partial \vec r}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \vec r}{\partial v}$ τα οποία αντιστοιχούν στις τιμές των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων *u* και *v* του σημείου *P*. Το επίπεδο αυτό είναι το **εφαπτόμενο επίπεδο** της *S* στο *P*. Αν $\vec r$ είναι η διανυσματική ακτίνα του *P* και $\vec R$ η διανυσματική ακτίνα τυχαίου σημείου του εφαπτόμενου επιπέδου της *S*, τότε η διανυσματική του εξίσωση θα είναι:

$$\vec R - \vec r = \lambda \frac{\partial \vec r}{\partial u} + \mu \frac{\partial \vec r}{\partial v} \quad \text{ή} \tag{2}$$

$$\left[\vec R - \vec r, \frac{\partial \vec r}{\partial u}, \frac{\partial \vec r}{\partial v} \right]_P = 0 \tag{3}$$

(διότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα διανύσματα $\vec R - \vec r$, $\dfrac{\partial \vec r}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \vec r}{\partial v}$, να είναι συνεπίπεδα, είναι, το μικτό γινόμενό τους να είναι μηδέν).

Η (3) ισχύει βεβαίως αν $\left.\dfrac{\partial \vec r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec r}{\partial v}\right|_P \neq \vec 0$, οπότε το σημείο *P* λέγεται *ομαλό*. Διαφορετικά, αν $\left.\dfrac{\partial \vec r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \vec r}{\partial v}\right|_P = \vec 0$ το *P* λέγεται *ανώμαλο*.

Προφανώς το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο *P* που αποτελείται από τα διανύσματα $\dfrac{\partial \vec r}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \vec r}{\partial v}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα

$$\vec l = \frac{\partial \vec r}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec r}{\partial v} \ \text{(ορισμός εξωτερικού γινομένου).}$$

Αν *l* είναι το μέτρο του $\vec l$ δηλαδή $l = \left|\vec l\right|$, τότε $l^2 = \vec l \cdot \vec l$ ή

$$l^2 = \left(\frac{\partial \vec r}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec r}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial \vec r}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial \vec r}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec r}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec r}{\partial v}\right)^2 \tag{4}$$

Πράγματι. Για $\vec\alpha,\ \vec\beta$ τυχαία διανύσματα είναι

$$\left(\vec\alpha \wedge \vec\beta\right) \cdot \left(\vec\alpha \wedge \vec\beta\right) = \left(\vec\alpha \wedge \vec\beta\right)^2 = \left|\vec\alpha \wedge \vec\beta\right|^2 = \left|\vec\alpha\right|^2 \left|\vec\beta\right|^2 \eta\mu^2\varphi \quad \left(\varphi = \left(\widehat{\vec\alpha, \vec\beta}\right)\right).$$

Επίσης

$$\left(\vec\alpha \cdot \vec\beta\right) \cdot \left(\vec\alpha \cdot \vec\beta\right) = \left(\vec\alpha \cdot \vec\beta\right)^2 = \left|\vec\alpha \cdot \vec\beta\right|^2 = \left|\vec\alpha\right|^2 \left|\vec\beta\right|^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi$$

Προσθέτουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη:

$$\left(\vec\alpha \wedge \vec\beta\right)^2 + \left(\vec\alpha \cdot \vec\beta\right)^2 = \left|\vec\alpha\right|^2 \left|\vec\beta\right|^2 = \vec\alpha^2\, \vec\beta^2 \Leftrightarrow \left(\vec\alpha \wedge \vec\beta\right)^2 = \vec\alpha^2\, \vec\beta^2 - \left(\vec\alpha \cdot \vec\beta\right)^2.$$

Θέτουμε:

$$E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2 \qquad (5\alpha)$$

$$G=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2 \qquad (5\beta)$$

$$F=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \qquad (5\gamma)$$
$$=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'$$

οπότε η (4) γράφεται $l^2=EG-F^2$ άρα $l=\sqrt{EG-F^2}$ (6)

Τα ποσά ***E, G, F* λέγονται θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης** της *S*.

Αν τώρα, η επιφάνεια *S* δίνεται από την εξίσωση $z=f(x,y)$, τότε απ' την εξίσωση αυτή παίρνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας *S* ως εξής:

$x=u,\quad y=v,\quad z=f(u,v)$ οπότε

$$\frac{\partial x}{\partial u}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial u}=p,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=q \qquad (7)$$

οπότε τα θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης γίνονται λόγω των (7)

$$E=1+p^2,\quad G=1+q^2,\quad F=pq \qquad (8)$$

και το μέτρο του *l* γίνεται

$$l=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2}=\sqrt{1+p^2+q^2} \qquad (9)$$

ενώ το ίδιο διάνυσμα $\vec{l}$ είναι το:

$$\vec{l}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ 1 & 0 & p\\ 0 & 1 & q\end{vmatrix}=-p\vec{x}_0-q\vec{y}_0+\vec{z}_0 \qquad (10)$$

Επομένως, αν $\vec{l}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του $\vec{l}$, τότε $\vec{l}_0=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}\,|}$ οπότε οι συντεταγμένες του $\vec{l}_0$ θα είναι:

$$\vec{l}_0 = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \tag{11}$$

Βασική παρατήρηση:

Αν η εξίσωση $z = f(x,y)$ της επιφάνειας S γραφεί σε πεπλεγμένη μορφή ως

$$w(x,y,z) = z - f(x,y) = 0,$$

τότε θα ισχύει προφανώς

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} = -q, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 1,$$

οπότε το διάνυσμα $\vec{l}$ γράφεται με βάση τον τύπο (10) και ως

$$\vec{l} = \frac{\partial w}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{z}_0 = \nabla w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \ \frac{\partial w}{\partial y}, \ \frac{\partial w}{\partial z} \right). \tag{11α}$$

Προφανώς τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ έχουν τις κατευθύνσεις των εφαπτόμενων των παραμετρικών γραμμών u και v αντίστοιχα, επομένως οι παραμετρικές γραμμές αποτελούν ένα **ορθογώνιο δίκτυο** στην επιφάνεια S αν και μόνο αν

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = F = 0 \tag{12}$$

για όλα τα σημεία της επιφάνειας S, διότι τότε τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{v}}$ θα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Με αφορμή το τύπο (12) μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία δύο καμπύλων μιας επιφάνειας που περνούν από ένα ομαλό σημείο αυτής συναρτήσει των *E, F, G.* Πράγματι, θεωρούμε δύο καμπύλες της επιφάνειας που ορίζονται απ' τις εξισώσεις:

$$c_1 : \ u = u_1(t), \quad v = v_1(t) \quad \text{και} \quad c_2 : \ u = u_2(\tau), \quad v = v_2(\tau)$$

τέτοιες ώστε $u_1(0) = u_2(0)$ και $v_1(0) = v_2(0)$. Τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο $t = \tau = 0$ ορίζονται ως

$$\vec{r}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du_1}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv_1}{dt} = \vec{r}_u \kappa_1 + \vec{r}_v \lambda_1$$

$$\vec{r}_\tau = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du_2}{d\tau} + \vec{r}_v \frac{dv_2}{d\tau} = \vec{r}_u \kappa_2 + \vec{r}_v \lambda_2 \quad \text{όπου}$$

$$\kappa_1 = \frac{du_1}{dt}, \quad \lambda_1 = \frac{dv_1}{dt}, \quad \kappa_2 = \frac{du_2}{d\tau}, \quad \lambda_2 = \frac{dv_2}{d\tau}$$

επομένως η γωνία των $\vec{r}_t$, $\vec{r}_\tau$ θα είναι (εσωτερικό γινόμενο)

$$\vec{r}_t \cdot \vec{r}_\tau = |\vec{r}_t||\vec{r}_\tau| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\vec{r}_t \cdot \vec{r}_\tau}{|\vec{r}_t||\vec{r}_\tau|} = \frac{\vec{r}_t \cdot \vec{r}_\tau}{\sqrt{\vec{r}_t^{\,2}}\sqrt{\vec{r}_\tau^{\,2}}}$$

ή αντικαθιστώντας τα $\vec{r}_t$, $\vec{r}_\tau$ και λόγω των *E, G, F*:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{E\kappa_1\kappa_2 + F(\kappa_1\lambda_2 + \kappa_2\lambda_1) + G\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{E\kappa_1^2 + 2F\kappa_1\lambda_1 + G\lambda_1^2} \cdot \sqrt{E\kappa_2^2 + 2F\kappa_2\lambda_2 + G\lambda_2^2}}$$

επομένως, για να τέμνονται κάθετα οι δύο παραμετρικές γραμμές c_1, c_2 της επιφάνειας αρκεί το $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$, δηλαδή:

$$E\kappa_1\kappa_2 + F(\kappa_1\lambda_2 + \kappa_2\lambda_1) + G\lambda_1\lambda_2 = 0 \qquad (12\,\alpha)$$

Στην περίπτωση που παίρνουμε τις συντεταγμένες γραμμές της επιφάνειας

$$u = u_0 = \text{σταθ.}, \quad v = v_0 = \text{σταθ.},$$

τότε τα εφαπτομενικά διανύσματα στο σημείο τομής δύο συντεταγμένων γραμμών θα είναι $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ οπότε η γωνία τους θα είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v}{|\vec{r}_u||\vec{r}_v|} = \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}}\sqrt{\vec{r}_v^{\,2}}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}\,. \qquad (12\,\beta)$$

Θεωρούμε τώρα την επιφάνεια *S* με εξίσωση

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{x}_0 + y(u,v)\vec{y}_0 + z(u,v)\vec{z}_0\,.$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση της επιφάνειας παίρνουμε

$$d\vec{r} = dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0 \qquad (13)$$

Τα διαφορικά των *dx, dy, dz* είναι (τα *x, y, z*, είναι συναρτήσεις των *u, v*)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\,. \text{ Άρα}$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)\vec{z}_0 =$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{x}_0 + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{y}_0 + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{z}_0\right)du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\vec{x}_0 + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{y}_0 + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{z}_0\right)dv = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv \tag{14}$$

Εξ' άλλου είναι:

$$\begin{aligned} d\vec{r}\cdot d\vec{r} &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dudv + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 dv^2 = \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned} \tag{15}$$

καθώς επίσης

$$\begin{aligned} d\vec{r}\cdot d\vec{r} &= (dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0)\cdot(dx\vec{x}_0 + dy\vec{y}_0 + dz\vec{z}_0) = \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

όπου ds είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας S με διανύσματα θέσης $\vec{r}$ και $\vec{r} + d\vec{r}$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (15) και (16) δίνουν

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{17}$$

Η ομογενής παράσταση ως προς du, dv της (17) λέγεται **1η θεμελιώδης τετραγωνική μορφή** ή **γραμμικό στοιχείο** της επιφάνειας S και είναι πάντα θετική.

Πράγματι, η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου είναι:

$$\Delta = 4F^2 - 4EG = 4\left((\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2 - \vec{r}_u^{\,2}\cdot\vec{r}_v^{\,2}\right) = -4(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v)^2 < 0$$

(τύπος (4)), επειδή $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \neq \vec{0}$ εφόσον το θεωρούμενο σημείο της επιφάνειας έχει υποτεθεί ομαλό. Επομένως το τριώνυμο (17) ως προς du είναι πάντα ομόσημο του E δηλαδή θετικό, επειδή $E = \left(\frac{d\vec{r}}{du}\right)^2 > 0$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το **μήκος** του τόξου της καμπύλης

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \vec{r}\big(u(t),\ v(t)\big) = \vec{r}(t)$$

από το σημείο $M_0(t_0)$ μέχρι το $M(t)$. Ο τύπος (17) δίνει:

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt \qquad (18)$$

Τέλος, αν συμβολίσουμε με Δ*S* το στοιχειώδες εμβαδόν που ορίζεται απ' τις παραμετρικές γραμμές *u, du* και *v, dv* τότε το εμβαδόν αυτό που λέγεται **εμβαδικό στοιχείο** είναι:

$$\Delta S = \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (19)$$

Έτσι προκύπτει ότι, το εμβαδόν του χωρίου *S* πάνω στην επιφάνεια $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ είναι το διπλό ολοκλήρωμα

$$S = \iint_T \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (20)$$

όπου T είναι ο τόπος που μεταβάλλονται τα *u* και *v*.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

1) Να γραφεί η εξίσωση (3) του εφαπτόμενου επιπέδου $\left[\vec{R} - \vec{r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right] = 0$ σε αναλυτική μορφή. Να γραφεί επίσης με αναλυτική μορφή στη περίπτωση που η *S* εκφράζεται με εξίσωση της μορφής:

i) $z = f(x, y)$ και **ii)** με πεπλεγμένη μορφή $f(x, y, z) = 0$.

Λύση

Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων του μικτού γινομένου είναι:

$$\vec{R} - \vec{r} = (X - x, \quad Y - y, \quad Z - z)$$

όπου *X, Y, Z* είναι οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου *M* του εφαπτόμενου επιπέδου και *x, y, z* οι συντεταγμένες του σημείου *P* της επιφάνειας,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (x'_u, \quad y'_u, \quad z'_u)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (x'_v, \quad y'_v, \quad z'_v)$$

Να σημειωθεί ότι τα $x, y, z, x'_u, y'_u, z'_u, x'_v, y'_v, z'_v$ είναι γενικά όλα συναρτήσεις των *u* και *v* και για το συγκεκριμένο σημείο $P(u_0, v_0)$ έχουν συγκεκριμένες τιμές.

Έτσι, το μικτό γινόμενο εκφράζεται με μορφή ορίζουσας

$$\left.\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right|_P = 0\,. \tag{1}$$

i) Αν η επιφάνεια S εκφράζεται με μια εξίσωση της μορφής $z = f(x, y)$, τότε λόγω των (7) της παραγράφου 5.11 η παραπάνω ορίζουσα γράφεται:

$$\left.\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix}\right|_P = 0 \;\; \text{ή}$$

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \tag{2}$$

ii) Τέλος, αν η S έχει εξίσωση $f(x, y, z) = 0$ τότε

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}\bigg/\frac{\partial f}{\partial z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}\bigg/\frac{\partial f}{\partial z} \text{ (παρ. 2.7.2, τύπος 2)}$$

και η προηγούμενη ορίζουσα γίνεται μετά το ανάπτυγμά της

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0 \tag{3}$$

2) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας των επιφανειών:

i) $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u\vec{x}_0 + v\vec{y}_0 + (u^2 - v^2)\vec{z}_0$ στο $P_0(u_0, v_0) = (1, 1)$

ii) $z = f(x, y) = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right)$ στο $P_0(x_0, y_0, z_0) = (2, -4, 5)$

Λύση

i) Είναι $x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 - v^2$

και στο σημείο $P_0(u_0, v_0) = (1, 1)$: $x = 1, \; y = 1, \; z = 0$.

Επίσης $x'_u = 1, \quad y'_u = 0, \quad z'_u = 2u$ και στο σημείο (1, 1): $z'_u = 2$

$x'_v = 0, \quad y'_v = 1, \quad z'_v = -2v$ και στο σημείο (1, 1): $z'_v = -2$.

Άρα η ορίζουσα (1) του προηγουμένου παραδείγματος γίνεται

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ή } -2X+2Y+Z=0 \qquad (1)$$

Η (1) δίνει την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της (i) στο σημείο $P_0(1, 1)$. Το κάθετο διάνυσμα $\vec{l}$ στην επιφάνεια (i) στο σημείο $P_0(1, 1)$ δίνεται απ' τον τύπο (10) της προηγούμενης παραγράφου

$$\vec{l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + \vec{z}_0$$

Επομένως, η εξίσωση ευθείας που περνάει απ' το σημείο $P(x, y, z) = (1, 1, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{l} = (-2, 2, 1)$, δηλαδή κάθετη στην επιφάνεια S είναι της μορφής: (παράγραφος 2.8. εξίσωση ευθείας)

$$\frac{X-1}{-2} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-0}{1} \text{ ή } 2Z = Y-1 = 1-X.$$

ii) Εδώ έχουμε

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}y \text{ και στο } P(2, -4, 5): \quad p = 1, \quad q = -2.$$

Επομένως η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της (ii) στο σημείο $P(2, -4, 5)$ είναι (τύπος 2 του προηγούμενου παραδείγματος 1):

$$Z - 5 = 1(X-2) + (-2)(Y-(-4)) \quad \text{ή} \quad -X + 2Y + Z + 5 = 0.$$

Η δε εξίσωση ευθείας που περνάει απ' το $P(2, -4, 5)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{l} = -p\vec{x}_0 - q\vec{y}_0 + \vec{z}_0 = -\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + \vec{z}_0$ άρα κάθετη στην επιφάνεια, είναι

$$\frac{X-2}{-1} = \frac{Y+4}{2} = \frac{Z-5}{1} \text{ ή } (Y+4 = 2Z-10) \text{ και } (Y+4 = 4-2X)$$

που ορίζεται στο χώρο όπως είναι γνωστό, ως τομή δύο επιπέδων.

3) Δίνεται η επιφάνεια που ορίζεται απ' την εξίσωση

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi) = \alpha\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi\,\vec{x}_0 + \alpha\eta\mu\theta\eta\mu\varphi\,\vec{y}_0 + \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\,\vec{z}_0 \qquad (1)$$

όπου α σταθερό. Να βρεθούν τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης και να δειχτεί ότι οι παραμετρικές γραμμές θ και φ αποτελούν ορθογώνιο δίκτυο γραμμών.

Λύση

Είναι

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi\ \vec{x}_0 + \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi\ \vec{y}_0 + \alpha\eta\mu\theta\ \vec{z}_0$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\alpha\eta\mu\theta\eta\mu\varphi\ \vec{x}_0 + \alpha\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi\ \vec{y}_0$$

Άρα τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης είναι

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)^2 = \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^2\varphi + \alpha^2\eta\mu^2\theta = \alpha^2$$

$$F = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right) = -\alpha^2\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi + \alpha^2\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\varphi + \alpha\eta\mu\theta\cdot 0 = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right)^2 = \alpha^2\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\varphi + \alpha^2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \alpha^2\eta\mu^2\theta$$

Προφανώς, επειδή $F = 0$ οι παραμετρικές γραμμές θ και φ αποτελούν ορθογώνιο δίκτυο γραμμών. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η παραπάνω επιφάνεια (1) αποτελεί την επιφάνεια σφαίρας, διότι, όπως προκύπτει απ' τη διανυσματική εξίσωση της επιφάνειας, είναι

$$x^2 = \alpha^2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi, \quad y^2 = \alpha^2\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\varphi, \quad z^2 = \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

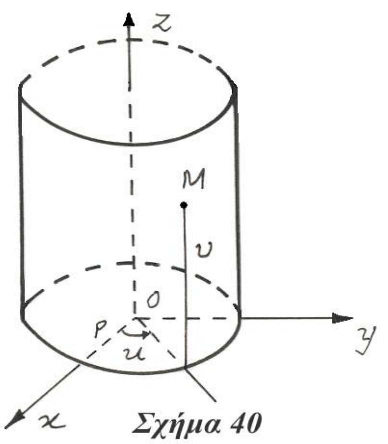
και $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ (επιφάνεια σφαίρας ακτίνας α).

Το εμβαδικό στοιχείο της επιφάνειας της σφαίρας είναι:

$$\Delta S = \sqrt{EG - F^2}\,d\theta\,d\varphi = \sqrt{\alpha^4\eta\mu^2\theta - 0^2}\,d\theta\,d\varphi = \alpha^2\eta\mu\theta d\theta\,d\varphi\,.$$

4) Να βρεθεί η $1^{η}$ θεμελιώδης τετραγωνική μορφή της επιφάνειας ενός κυκλικού κυλίνδρου, καθώς και το εμβαδικό στοιχείο αυτής.

Λύση



Σχήμα 40

Έστω $M(x,y,z)$ οι συντεταγμένες ενός σημείου του κυκλικού κυλίνδρου. Η διανυσματική του εξίσωση θα είναι: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0$

όπου $x=x(u,v)=\rho\sigma\upsilon\nu u,\ y=y(u,v)=\rho\eta\mu u,$

$z=z(u,v)=v$ και ρ η σταθερή ακτίνα της κυκλικής βάσης $x^2+y^2=\rho^2$, (σχήμα 40).

Δηλαδή: $\vec{r}=\rho\sigma\upsilon\nu u\vec{x}_0+\rho\eta\mu u\vec{y}_0+v\vec{z}_0$.

Είναι επίσης

$$\vec{r}_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=-\rho\eta\mu u\vec{x}_0+\rho\sigma\upsilon\nu u\vec{y}_0,\quad \vec{r}_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{z}_0,$$

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=\rho^2\eta\mu^2u+\rho^2\sigma\upsilon\nu^2u=\rho^2$$
$$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=-\rho\eta\mu u\cdot 0+\rho\sigma\upsilon\nu u\cdot 0+0\cdot 1=0$$
$$G=\vec{r}_v^{\,2}=1$$

Επομένως, τύπος (17) της 5.11, η πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή είναι:

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=\rho^2du^2+dv^2.$$

Επειδή $F=0$ για κάθε u, v το δίκτυο των παραμετρικών γραμμών είναι ορθογώνιο.

Το εμβαδικό στοιχείο της επιφάνειας S είναι:

$$\Delta S=\sqrt{EG-F^2}dudv=\sqrt{\rho^2\cdot 1-0^2}dudv=\rho dudv.$$

5) Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια S είναι το επίπεδο xOy του συστήματος συντεταγμένων Oxyz. Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα πολικών συντεταγμένων, το εμβαδικό στοιχείο της επιφάνειας και να δειχτεί ότι οι πολικές συντεταγμένες αποτελούν ορθογώνιο δίκτυο συντεταγμένων.

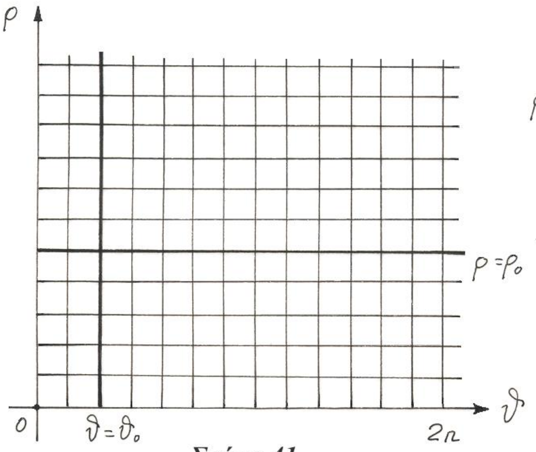
Λύση

Στο επίπεδο xOy η σχέση (2) της παρ. 5.10 γράφεται:

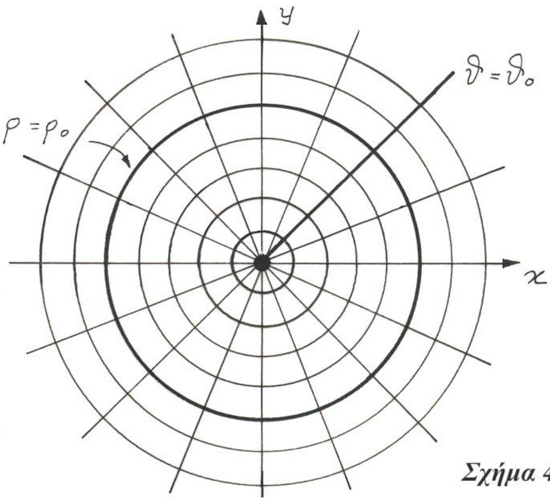
$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{x}_0+y(u,v)\vec{y}_0$$

όπου $(u,v)\in T\subset R^2$. Στο σύστημα πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο, αν θέσουμε

$u=\rho\ \ \kappa\alpha\iota\ \ v=\theta$, θα έχουμε:



Σχήμα 41



Σχήμα 42

$$x = x(\rho, \theta) = \rho\sigma\upsilon\nu\theta, \quad y = y(\rho, \theta) = \rho\eta\mu\theta \text{ οπότε}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(\rho, \theta) = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta\vec{x}_0 + \rho\,\eta\mu\theta\vec{y}_0 \text{, όπου}$$

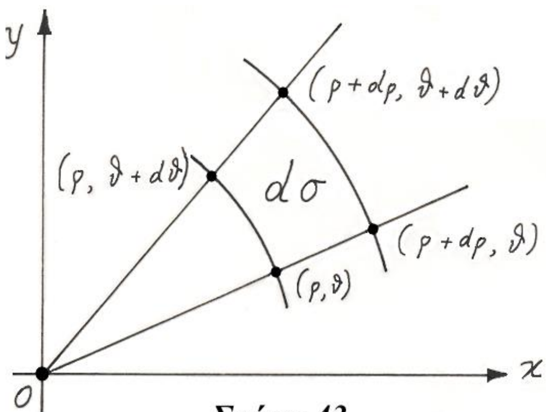
$$T = \left\{ \left(\rho, \theta\right) \big/ \; 0 < \rho < \infty, \;\; 0 < \theta \le 2\pi \right\} \text{ (σχήμα 41 και 42).}$$

Είναι

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right)^2 = \rho^2\eta\mu^2\theta + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = \rho^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) = -\rho\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \rho\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 0$$



Σχήμα 43

δηλαδή τα ρ και θ αποτελούν ορθογώνιο δίκτυο. Επίσης (σχήμα 43)

$$\Delta S = d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\rho\, d\theta =$$
$$= \sqrt{1 \cdot \rho^2 + 0^2}\, d\rho\, d\theta = \rho\, d\rho\, d\theta.$$

6) Να βρεθεί: **i)** παράσταση της μορφής $\Phi(x, y, z) = 0$ (αναλυτική εξίσωση) για το ελλειψοειδές:

$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \alpha\sigma\upsilon\nu\, u\sigma\upsilon\nu\, v\vec{x}_0 + \beta\eta\mu\, u\sigma\upsilon\nu\, v\vec{y}_0 + \gamma\eta\mu\, v\vec{z}_0$, και

ii) παράσταση της μορφής $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ (διανυσματική εξίσωση) για την επιφάνεια σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Ποιες είναι οι παραμετρικές γραμμές σε κάθε περίπτωση;

Λύση

i) Η εξίσωση του ελλειψοειδούς μετασχηματίζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x &= x(u,v) = \alpha\sigma\upsilon\nu\, u\sigma\upsilon\nu\, v \Leftrightarrow x^2/\alpha^2 = \sigma\upsilon\nu^2 u\sigma\upsilon\nu^2 v \\
y &= y(u,v) = \beta\eta\mu\, u\sigma\upsilon\nu\, v \Leftrightarrow y^2/\beta^2 = \eta\mu^2 u\sigma\upsilon\nu^2 v \\
z &= z(u,v) = \gamma\eta\mu\, v \Leftrightarrow z^2/\gamma^2 = \eta\mu^2 v
\end{aligned}
$$

Απ’ τις τρεις τελευταίες εξισώσεις θα απαλείψουμε τα u και v για να προκύψει εξίσωση της μορφής $\Phi\,(x, y, z)$ (απαλείφουσα των εξισώσεων αυτών).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις εξισώσεις προκύπτει

$$
\begin{aligned}
&x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 + z^2/\gamma^2 = \sigma\upsilon\nu^2 u\sigma\upsilon\nu^2 v + \eta\mu^2 u\sigma\upsilon\nu^2 v + \eta\mu^2 v = \\
&= \sigma\upsilon\nu^2 v(\sigma\upsilon\nu^2 u + \eta\mu^2 u) + \eta\mu^2 v = 1
\end{aligned}
$$

Προφανώς $u = \theta \;\; \kappa\alpha\iota \;\; v = \pi/2 - \varphi$ όπου θ και φ είναι οι δύο από τις τρεις σφαιρικές συντεταγμένες $\rho,\ \theta,\ \varphi$.

ii) Στη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες ρ, θ, ϕ.

Είναι

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\varphi \Rightarrow x^2 = \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu^2\varphi$$

$$y = \rho\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi \Rightarrow y^2 = \rho^2\eta\mu^2\theta\,\eta\mu^2\varphi$$

$$z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow z^2 = \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$$

Αντικαθιστώντας τα x^2, y^2, z^2 απ’ τις τρεις τελευταίες εξισώσεις στην εξίσωση της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ έχουμε

$$\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^2\varphi + \rho^2\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\varphi + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 9 \text{ ή } \rho^2 = 9 \text{ άρα } \rho = 3\ (\rho > 0).$$

Επομένως η εξίσωση της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ στη μορφή $\vec{r}(u,v)$ είναι:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = 3\sigma\upsilon\nu\, u\eta\mu\, v\vec{x}_0 + 3\eta\mu\, u\eta\mu\, v\vec{y}_0 + 3\sigma\upsilon\nu\, v\vec{z}_0$$

όπου $u = \theta,\ v = \varphi$ εκφράζουν τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας $\vec{r}(u,v)=u\vec{x}_0+v\vec{y}_0+f(u,v)\vec{z}_0$ είναι ομαλά. (η συνάρτηση $f(u,v)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς u και v).

2) Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z=x^3-y^2+\alpha$ στο σημείο $P(-1,1,\alpha)$ καθώς και οι συντεταγμένες του καθέτου διανύσματος στο σημείο αυτό.

3) Να προσδιοριστούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων επιπέδων των παρακάτω επιφανειών στα αντίστοιχα σημεία τους:

i) $x^2/\alpha^2+y^2/\beta^2+z^2/\gamma^2$ στο σημείο $P(x_1,y_1,z_1)$

ii) $x^2+y^2=z^2$ στο σημείο $P(x_1,y_1,z_1)$

iii) $xy^2+z^3=12$ στο σημείο $P(1,2,3)$

iv) $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=u\,\sigma\upsilon\nu\, v\vec{x}_0+u\,\eta\mu v\vec{y}_0+\alpha v\vec{z}_0$ στο σημείο $P(u_1,v_1)$

v) $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{x}_0+y(u,v)\vec{y}_0+z(u,v)\vec{z}_0$ στο σημείο $P(2,2,2)$

όπου $x(u,v)=u+v,\ y(u,v)=u^2+v^2,\ z(u,v)=u^3+v^3$.

4) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας της επιφάνειας $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(u+v)\vec{x}_0+(u-v)\vec{y}_0+uv\vec{z}_0$ στο σημείο (u = 1, v = 1).

5) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας των παρακάτω επιφανειών:

i) $z = xy$ στο σημείο (2, 3, 6)

ii) $4z=x^2-y^2$ στο σημείο (3, 1, 2)

iii) $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$ στο σημείο (1, 2, -1).

6) Να βρεθούν οι κανονικές εξισώσεις $\left(\Phi(x,y,z)=0\right)$ των επιφανειών που δίνονται με τις παραμετρικές τους εξισώσεις $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x\vec{x}_0+y\vec{y}_0+z\vec{z}_0$:

i) ελλειπτικό παραβολοειδές: $x=\alpha\, u\,\sigma\upsilon\nu\, v,\ y=\beta\, u\,\eta\mu\, v,\ z=u^2$,

ii) σαμπρέλα (torrus): $\begin{aligned} x &= (\alpha + \beta\,\sigma\upsilon\nu\, u)\sigma\upsilon\nu\, v, \\ y &= (\alpha + \beta\,\sigma\upsilon\nu\, u)\eta\mu\, v, \\ z &= \beta\,\eta\mu\, u \end{aligned}$

με $0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi,\ 0 < \beta < \alpha,\ \alpha, \beta \in R$

iii) $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^4 u\sigma\upsilon\nu^4 v,\ y = \alpha\sigma\upsilon\nu^4 u\eta\mu^4 v,\ z = \alpha\eta\mu^4 u$,

iv) $x = \alpha\sigma\upsilon\nu^3 u\sigma\upsilon\nu^3 v,\ y = \alpha\sigma\upsilon\nu^3 u\eta\mu^3 v,\ z = \alpha\eta\mu^4 u$,

v) $x = \alpha\dfrac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \beta\dfrac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \gamma\dfrac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$

7) Να βρεθούν παραστάσεις της μορφής $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ για τις επιφάνειες:

i) κώνος: $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, **ii)** παραβολοειδές: $z = x^2 + y^2$

8) Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου της καμπύλης

$$\rho = \rho(t) = e^{t(\sigma\varphi\beta)/\sqrt{2}}, \quad \theta = \theta(t) = t$$

όπου $0 \le t \le \pi$ και β σταθερό, πάνω στο κώνο

$$\vec{r} = \vec{r}(\rho, \theta) = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\,\vec{x}_0 + \rho\eta\mu\theta\,\vec{y}_0 + \rho\vec{z}_0 .$$

9) Δίνεται η επιφάνεια

$$\vec{r} = (u^2 + v)\vec{x}_0 + (u + v)\vec{y}_0 + 2uv\vec{z}_0$$

και οι παραμετρικές γραμμές σ' αυτή με εξισώσεις :

$$c_1: \ u = t,\ v = t^2, \qquad c_2: \ u = 1 - \tau^2,\ v = 1 + \tau$$

Να βρεθεί η γωνία αυτών στο σημείο τομής τους με τιμές $t = 0, \quad \tau = -1$.

10) Να βρεθεί η τομή της επιφάνειας $x^2 - y^2 + 2z^2 + 1 = 0$ και της ευθείας που περνάει απ' τα σημεία $A(-1, 2, 3)$ και $B(2, -1, 4)$.