Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **4**

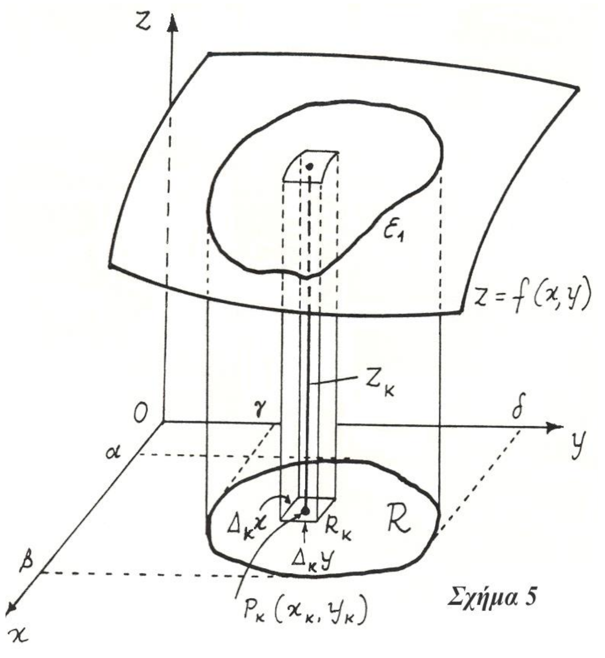
Διπλά, τριπλά και γενικευμένα ολοκληρώματα

Α. ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1 Ορισμοί

Θεωρούμε μια φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $z = f(x, y)$ σε μια κλειστή και φραγμένη περιοχή R του επιπέδου xOy. Διαιρούμε την περιοχή αυτή R σε ν υποπεριοχές τις R_1, R_2, …, R_ν αντίστοιχων εμβαδών $\Delta_1 A$, $\Delta_2 A$, …, $\Delta_\nu A$. Σε κάθε υποπεριοχή R_k διαλέγουμε ένα σημείο $P_k(x_k, y_k)$ (σχήμα 5) και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(x_k, y_k)\Delta_k \mathrm{A} = f(x_1, y_1)\Delta_1 \mathrm{A} + f(x_2, y_2)\Delta_2 \mathrm{A} + \cdots + f(x_\nu, y_\nu)\Delta_\nu \mathrm{A}\,.$$



Σχήμα 5

Το γινόμενο $f(x_i, y_i)\Delta_i \mathrm{A}$ μας δίνει τον όγκο του πρίσματος που έχει βάση την υποπεριοχή $\Delta_i A$ και ύψος $z_i = f(x_i, y_i)$. Το άθροισμα των όγκων όλων αυτών των πρισμάτων διαφέρει τόσο λιγότερο από τον όγκο του στερεού V που περικλείεται από την επιφάνεια ε_1 την περιοχή R και την κυλινδρική επιφάνεια, όσο το ν είναι μεγαλύτερο και τα R_1, R_2, …, R_ν είναι μικρότερα. Όταν το $\nu \to \infty$ τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu} f(x_k, y_k)\Delta_k \mathrm{A} = V$$

Το όριο αυτό V λέγεται **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $z = f(x, y)$ στην περιοχή R και παριστάνεται με το σύμβολο

$$\iint_R f(x,y)d\mathrm{A} = V$$

Η κλειστή περιοχή R του επιπέδου xOy είναι τέτοια ώστε οι παράλληλες προς τον άξονα των x ή των y να την κόβουν σε δύο το πολύ σημεία. Οι υποπεριοχές R_k έγιναν με τον χωρισμό του διαστήματος $\alpha \le x \le \beta$ σε μ υποδιαστήματα τα $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, …, $\Delta_\mu x$ και του διαστήματος $\gamma \le y \le \delta$ σε λ υποδιαστήματα τα $\Delta_1 y$, $\Delta_2 y$, …, $\Delta_\lambda y$. Επομένως, η υποπεριοχή R_k θα έχει εμβαδόν $\Delta_k A = \Delta_k x \Delta_k y$. Όταν το εμβαδόν αυτό γίνει πάρα πολύ μικρό ($\nu \to \infty$), τότε γράφεται ως $dA = dxdy$. Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$\iint_R f(x,y)dxdy = V\ .$$

4.2 Ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος

Οι ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος είναι περίπου ανάλογες με εκείνες του ορισμένου ολοκληρώματος μιας μεταβλητής. Έτσι:

1. Αν c είναι σταθερή και η συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη στην κλειστή περιοχή R, τότε

$$\iint_R cf(x,y)dxdy = c\iint_R f(x,y)dxdy$$

2. Αν οι συναρτήσεις $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμες στην κλειστή περιοχή R, τότε και η συνάρτηση $f(x, y) + g(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη στην R και

$$\iint_R \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy + \iint_R g(x,y)dxdy$$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει επαγωγικά και για άθροισμα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

3. Αν οι συναρτήσεις $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμες στην κλειστή περιοχή R και ισχύει $f(x,y) \le g(x,y)$ για κάθε $(x, y) \in R$, τότε

$$\iint_R f(x,y)dxdy \le \iint_R g(x,y)dxdy \text{ για κάθε } (x, y) \in R$$

4. Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη στην κλειστή περιοχή R και υπάρχουν δύο αριθμοί m, M τέτοιοι ώστε $m \le f(x, y) \le M$ για κάθε $(x, y) \in R$, τότε, αν A είναι το εμβαδόν της κλειστής περιοχής R θα έχουμε

$$mA \le \iint_R f(x, y)dxdy \le MA$$

Η ιδιότητα αυτή είναι ανάλογη με την ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

«Αν m είναι η μικρότερη και M η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης $y = f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε,

$$m(\beta - \alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta - \alpha) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ »,}$$

απ' την οποία προκύπτει το θεώρημα της μέσης τιμής:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha)f(x_0) \text{ όπου } x_0 \in [\alpha, \beta].$$

5. Αν η κλειστή περιοχή R χωριστεί σε δύο υποπεριοχές R_1, R_2 οι οποίες δεν έχουν κοινά σημεία εκτός της γραμμής που τις διαχωρίζει και η $f(x, y)$ είναι συνεχής στην περιοχή R, τότε

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_{R_1} f(x, y)dxdy = \iint_{R_2} f(x, y)dxdy$$

6. Αν $f(x, y) = 1$, τότε $\lim_{\nu \to \infty} \sum_{k=1}^{\nu} f(x_k, y_k)\Delta_k x \Delta_k y = A$, όπου A είναι το εμβαδόν της περιοχής R δηλαδή

$$\iint_R 1 \cdot dxdy = A$$

και εκφράζει προφανώς τον όγκο κυλίνδρου βάσης A και ύψους 1. ($f(x, y) = 1$)

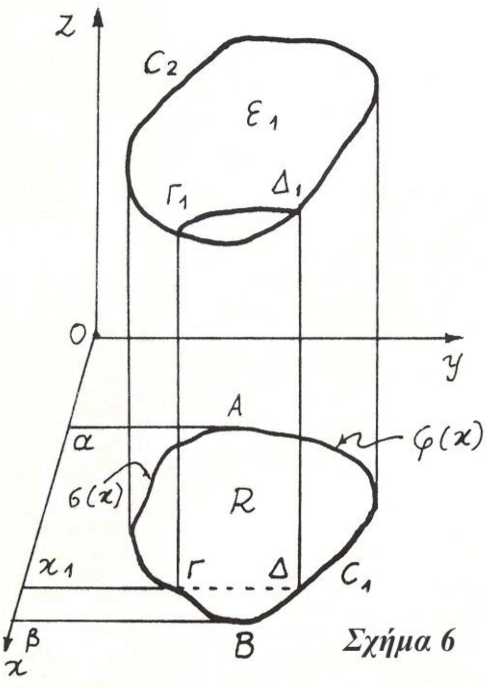
7. Αν η κλειστή περιοχή R χωριστεί σε δύο υποπεριοχές R_1, R_2 που δεν έχουν κοινά σημεία εκτός της γραμμής που τις διαχωρίζει και η $f(x, y)$ είναι συνεχής στην R, και τέτοια ώστε $f(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in R_1$ *και* $f(x, y) < 0$ για κάθε $(x, y) \in R_2$ τότε θα είναι

$$\iint_R f(x, y)dxdy = V_1 - V_2$$

όπου V_1 είναι ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται στην R_1 και V_2 είναι ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται στην R_2, πάνω και κάτω από το επίπεδο xOy.

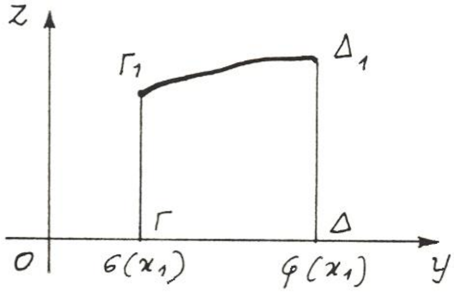
4.3 Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος

Ο υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος δεν είναι εύκολος. Όπως θα δούμε παρακάτω, ανάγεται στον υπολογισμό δύο διαδοχικών απλών ολοκληρωμάτων.



Σχήμα 6

Έστω συνάρτηση $z = f(x, y)$ που ορίζεται σε μια κλειστή περιοχή R με τη καμπύλη c_1, τέτοια ώστε οι παράλληλες προς τον άξονα Ox ή Oy να τη κόβουν σε δύο το πολύ σημεία. Έστω ακόμα A το σημείο καμπύλης c_1 που έχει την μικρότερη τετμημένη α και B το σημείο της c_1 που έχει τη μεγαλύτερη τετμημένη β, καθώς και τυχαία τετμημένη x_1 τέτοια ώστε $\alpha < x_1 < \beta$ (σχήμα 6). Η ευθεία $x = x_1$ τέμνει την c_1 στα σημεία Γ και Δ. Φέρνουμε τις $\Gamma\Gamma_1$ και $\Delta\Delta_1$ παράλληλες προς τον άξονα Oz που τέμνουν την καμπύλη c_2 (οριοθέτηση της $z = f(x, y)$) στα σημεία Γ_1 και Δ_1 αντίστοιχα. Το επίπεδο $\Gamma\Delta\Delta_1\Gamma_1$ τέμνει την επιφάνεια ε_1 κατά μια καμπύλη $\Gamma_1\Delta_1$ η οποία έχει εξισώσεις $x = x_1$, $z = f(x_1, y)$. Έστω $y = \sigma(x)$ η εξίσωση της καμπύλης ΑΓΒ (κάτω μέρος c_1) στο επίπεδο xOy και $y = \varphi(x)$ η εξίσωση της καμπύλης ΑΔΒ (πάνω μέρος c_1). Τότε θα είναι $x_1\Gamma = \sigma(x_1)$ και $x_1\Delta = \varphi(x_1)$.



Σχήμα 7

Αν προβάλλουμε το χωρίο $\Gamma\Delta\Delta_1\Gamma_1$ στο επίπεδο yOz θα πάρουμε ίσο χωρίο, γιατί το προβαλλόμενο σχήμα είναι παράλληλο προς το επίπεδο προβολής (σχήμα 7). Το εμβαδόν του χωρίου αυτού είναι

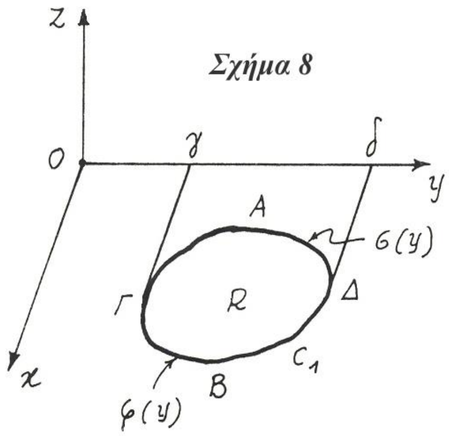
$$\Gamma\Delta\Delta_1\Gamma_1 = \int_{\sigma(x_1)}^{\varphi(x_1)} f(x_1, y)dy .$$

Δηλαδή το εμβαδόν της τομής του στερεού V από το επίπεδο $\Gamma\Delta\Delta_1\Gamma_1$ είναι συνάρτηση του x_1 έστω η $\Sigma(x_1)$. Επομένως ο όγκος V θα είναι ως γνωστό

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \Sigma(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\sigma(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$ Άρα

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy = \int_{x=\alpha}^{\beta} \left[\int_{y=\sigma(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \right] dx \quad \textbf{(ολοκλήρωση τύπου I)}$$

Το ολοκλήρωμα μέσα στην αγκύλη, επειδή έχει ως όρια ολοκλήρωσης τις συναρτήσεις $\sigma(x)$ και $\varphi(x)$ δίνει τελικά μια συνάρτηση του x η οποία ολοκληρώνεται τώρα με όρια από α μέχρι β. Δηλαδή η ολοκλήρωση έγινε πρώτα κατά τον άξονα των y και μετά κατά τον άξονα των x.



Σχήμα 8

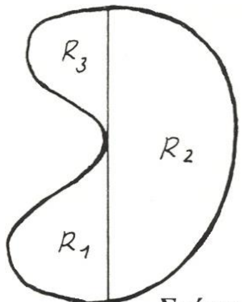
Αν υποθέσουμε ότι η καμπύλη c_1 τέμνεται από κάθε παράλληλη προς τον άξονα Ox σε δύο το πολύ σημεία και Γ είναι το σημείο της c_1 που έχει την μικρότερη τεταγμένη γ, ενώ Δ το σημείο της c_1 που έχει την μεγαλύτερη τεταγμένη δ (σχήμα 8), τότε η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει επίσης, πρώτα κατά τον άξονα Ox και μετά κατά τον άξονα Oy. Πράγματι, αν $x = \sigma(y)$ η εξίσωση του τόξου ΓΑΔ και $x = \varphi(y)$ η εξίσωση του ΓΒΔ, τότε προκύπτει εντελώς ανάλογα:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{y=\gamma}^{\delta} \left[\int_{x=\sigma(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)dx \right] dy \quad \textbf{(ολοκλήρωση τύπου II)}$$

Σημείωση:

Αν είναι $f(x,y) = g(x)h(y)$, δηλαδή γινόμενο δύο συναρτήσεων χωριζομένων μεταβλητών, τότε οι τύποι I και II ολοκλήρωσης γράφονται αντίστοιχα:

$$\left[\int_{x=\alpha}^{\beta} g(x)dx \right] \left[\int_{y=\sigma(x)}^{\varphi(x)} h(y)dy \right] \textbf{(I)}, \quad \left[\int_{y=\gamma}^{\delta} h(y)dy \right] \left[\int_{x=\sigma(y)}^{\varphi(y)} g(x)dx \right] \textbf{(II)}.$$



Σχήμα 9

Όταν η περιοχή R τέμνεται από παράλληλες ως προς τους άξονες σε περισσότερα σημεία, τότε τη χωρίζουμε σε μικρότερες περιοχές R_1, R_2, R_3 των οποίων οι περιβάλλουσες καμπύλες τέμνονται από παράλληλες προς τους άξονες σε δύο το πολύ σημεία (σχήμα 9). Τότε

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)dxdy + \iint_{R_3} f(x,y)dxdy$$

4.4 Παραδείγματα – Εφαρμογές

Από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος φαίνεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο μιας κυλινδρικής επιφάνειας της οποίας η κάτω βάση αποτελεί την περιοχή που ορίζεται η συνάρτηση, ενώ η πάνω βάση αποτελεί την επιφάνεια $z = f(x, y)$.

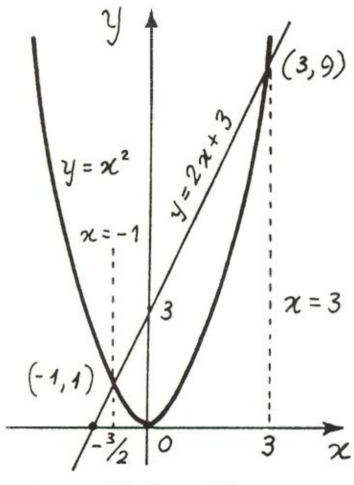
Ακόμα, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα 6. της παρ. 4.2 μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν Α μιας κλειστής περιοχής R από τη σχέση:

$$\iint_R dxdy = \mathrm{A}.$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 2x + 3$.

Λύση



Σχήμα 10

Η περιοχή R ορίζεται από τις ευθείες $x = -1$, $x = 3$ και από τις εξισώσεις των καμπύλων $y = x^2$ και $y = 2x + 3$ (η $y = x^2$ ορίζεται ολόκληρη από το -1 μέχρι το 3, το ίδιο και η $y = 2x + 3$). Άρα (σχήμα 10) η ολοκλήρωση θα γίνει πρώτα κατά τον Oy και μετά κατά τον Ox

$$A = \iint_R dxdy = \int_{-1}^{3}\left[\int_{x^2}^{2x+3} dy\right]dx =$$

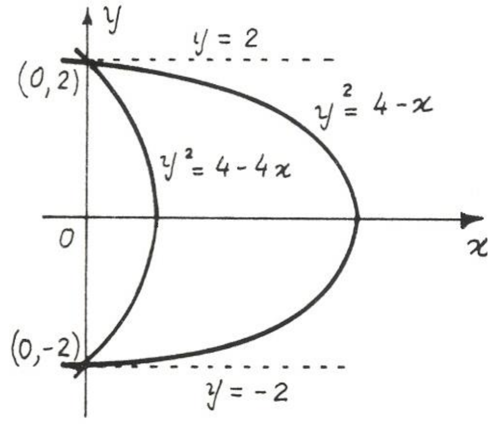
$$= \int_{-1}^{3}\left(2x+3-x^2\right)dx = \left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3} \text{ τετρ. μον.}$$

2) Να βρεθεί η επιφάνεια που ορίζεται από τις παραβολές

$$y^2 = 4 - x \text{ και } y^2 = 4 - 4x.$$

Λύση

Κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις των παραβολών παρατηρούμε ότι και οι δύο έχουν άξονα συμμετρίας τον Ox και τέμνονται στα σημεία (0, 2) και (0, –2). Επομένως (σχήμα 11) η περιοχή R ορίζεται από τις ευθείες $y = 2$ και $y = -2$ καθώς και από τις καμπύλες:



Σχήμα 11

$y^2 = 4 - x$ και $y^2 = 4 - 4x$ ή τις $x = 4 - y^2$ και $x = 1 - \frac{y^2}{4}$. Άρα θα ολοκληρώσουμε πρώτα κατά τον άξονα Οx και μετά κατά τον Οy. Αν λάβουμε υπόψη τη συμμετρία ως προς τον Οx θα έχουμε:

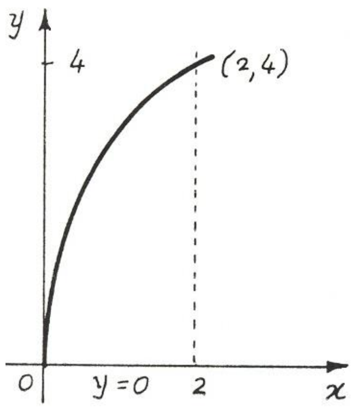
$$A = \iint_R dxdy = 2\int_0^2 \left[\int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx \right] dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left[\left(4 - y^2\right) - \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) \right] dy = 6\int_0^2 \left(1 - \frac{y}{4}\right) dy = 8$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R \left(x^2 + y\right) dxdy$ όπου R είναι η περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες $y = 0$, $x = 2$ και την παραβολή $y = \sqrt{8x}$.

Λύση

Ολοκληρώνοντας κατά τον Οy και μετά κατά τον Οx θα έχουμε (σχήμα 12):



Σχήμα 12

$$\iint_R \left(x^2 + y\right) dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{8x}} \left(x^2 + y\right) dy \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{8x}} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2\sqrt{8x} + \frac{8x}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(2\sqrt{2}x^{5/2} + 4x \right) dx =$$

$$= \left[2\sqrt{2}\,\frac{x^{7/2}}{7/2} + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{7} 2^{7/2} + 8 = \frac{64}{7} + 8 = \frac{120}{7} \text{ κ.μ.}$$

4) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R (x+y)dxdy$, όπου η περιοχή ολοκλήρωσης ορίζεται από τις ευθείες $y = 0$, $x + 2y - 3 = 0$ και τη παραβολή $y = x^2$.

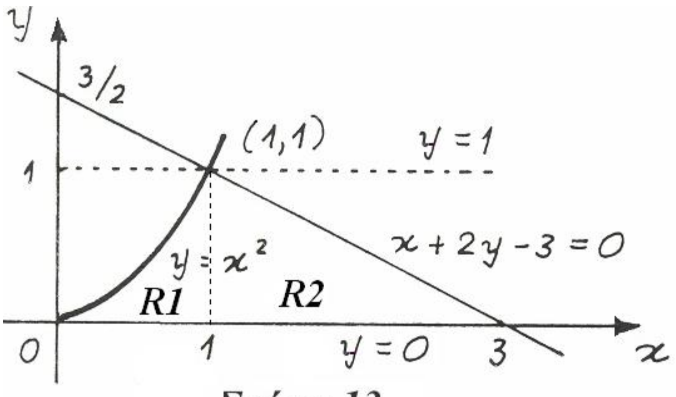
Λύση

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $x + 2y - 3 = 0$, βρίσκουμε ότι τέμνονται στο σημείο (1, 1) άρα η περιοχή ολοκλήρωσης R ορίζεται από την παραβολή $y = x^2$, την ευθεία $x + 2y - 3 = 0$ και τις ευθείες $y = 0$, (δηλ. τον άξονα Ox), και $y = 1$ (σχήμα 13).

Θα το υπολογίσουμε με δύο τρόπους, χρησιμοποιώντας τους δύο τύπους ολοκλήρωσης I και II κατά περίπτωση.

1ος τρόπος (με ολοκλήρωση τύπου I)

Με την ολοκλήρωση τύπου I, η περιοχή R θα πρέπει να χωριστεί σε δύο υποπεριοχές τις R_1 και R_2, έτσι ώστε η πρώτη R_1 να ορίζεται απ' τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, την παραβολή $y = x^2$ (πάνω καμπύλη) και την ευθεία $y = 0$ (κάτω καμπύλη), ενώ η δεύτερη R_2 από τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$, την ευθεία $y = (3-x)/2$ (πάνω) και την $y = 0$ (κάτω), εφόσον το πάνω μέρος της περιοχής R αποτελείται από δύο καμπύλες, τις $y = x^2$ και $y = (3-x)/2$. Άρα θα έχουμε:



Σχήμα 13

$$\iint_R (x+y)dxdy = \iint_{R_1} (x+y)dxdy + \iint_{R_2} (x+y)dxdy =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{x^2} (x+y)dy \right] dx + \int_{x=1}^{3} \left[\int_{y=0}^{(3-x)/2} (x+y)dy \right] dx =$$

$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2}dx+\int_1^3\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{(3-x)/2}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx+\int_1^3\left(x\frac{3-x}{2}+\frac{(3-x)^2}{8}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1+\left[\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{6}-\frac{(3-x)^3}{24}\right]_1^3=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{47}{20}$$

2ος τρόπος (με ολοκλήρωση τύπου ΙΙ)

Με την ολοκλήρωση τύπου ΙΙ, η περιοχή *R* ορίζεται τώρα από τις ευθείες $y=0$, $y=1$, και τις καμπύλες $x=\sqrt{y}$ (αριστερή καμπύλη) και $x=3-2y$ (δεξιά καμπύλη). (Οι δύο τελευταίες καμπύλες πρέπει να είναι λυμένες ως προς *x* όπως φαίνεται στην ολοκλήρωση τύπου ΙΙ). Άρα θα έχουμε:

$$\iint_R (x+y)dxdy=\int_{y=0}^{1}\left[\int_{x=\sqrt{y}}^{3-2y}(x+y)dx\right]dy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_{\sqrt{y}}^{3-2y}dy=\int_0^1\left[\frac{(3-2y)^2}{2}+y(3-2y)-\frac{y}{2}-y\sqrt{y}\right]dy=$$

$$=\left[-\frac{(3-2y)^3}{12}+\frac{3y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}-\frac{y^2}{4}-\frac{2y^{5/2}}{5}\right]_0^1=\frac{1}{10}-(-\frac{9}{4})=\frac{47}{20}$$

Σημείωση:

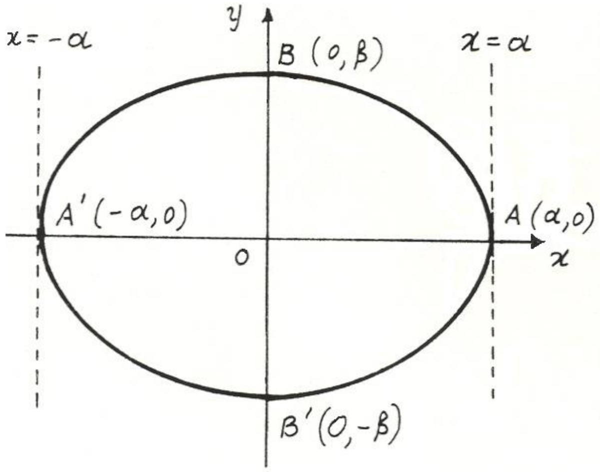
Σκόπιμα υπολογίστηκε το ολοκλήρωμα αυτό με δύο τρόπους για να φανεί η διαφορά. Αξίζει επομένως να προσέχουμε τον τρόπο επιλογής ολοκλήρωσης (Ι ή ΙΙ) προς αποφυγήν επιπλέον υπολογισμών των ολοκληρωμάτων.

5) Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Λύση

Το εμβαδόν δίνεται ως γνωστό απ' τον τύπο $A=\iint_R dxdy$ όπου *R* είναι η κλειστή γραμμή που περιλαμβάνει η έλλειψη και που ορίζεται από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=-\alpha$ και τις καμπύλες ΑΒΑ΄ και ΑΒ΄Α΄ (σχήμα 14) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \text{ και } y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$



Σχήμα 14

Λόγω συμμετρίας, στο μισό εμβαδόν από τον άξονα Ox μέχρι το B, οι καμπύλες που περιέχονται στο διάστημα [–α, α] είναι $y = 0$ και $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Άρα θα είναι

$$A = \iint_R dxdy = 2\int_{-a}^{a}\left[\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}} dy\right] dx = 2\int_{-\alpha}^{\alpha} y\Big|_0^{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}} dx = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}dx.$$

Θέτουμε τώρα $x = \alpha\eta\mu\theta,\ dx = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta,\ \left(-\pi/2 \le \theta \le \pi/2\right)$ και βρίσκουμε τα νέα όρια μεταβολής.

Για $x = -\alpha$: $-\alpha = \alpha\eta\mu\theta$ ή $\eta\mu\theta = -1$ ά$\rho\alpha$ $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Για. $x = \alpha$: $\alpha = \alpha\eta\mu\theta$ ή $\eta\mu\theta = 1$ άρα $\theta = \frac{\pi}{2}$

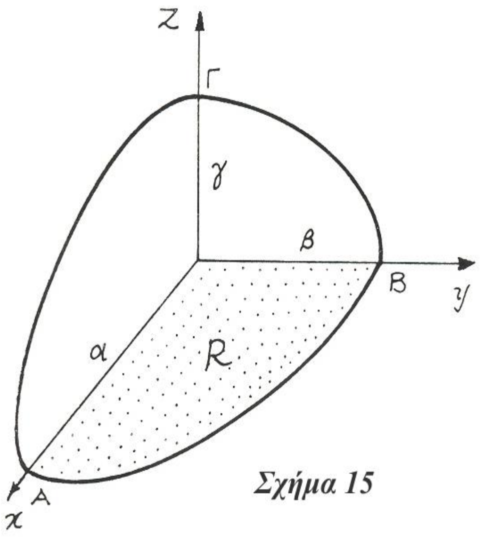
Άρα το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$A = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\, \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\alpha\beta\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha\sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta = 2\alpha\beta\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\alpha\beta$$

6) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ με διπλό ολοκλήρωμα.

Λύση



Σχήμα 15

Σε τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (σχ. 15), φαίνεται το $1/8$ του όγκου του ελλειψοειδούς με περιοχή R το $1/4$ της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Κατόπιν, από την εξίσωση του ελλειψοειδούς έχουμε: $z=\pm\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}$

(το πρόσημο (+) για το μέρος της επιφάνειας πάνω από το επίπεδο xOy και το (–) για το μέρος της επιφάνειας κάτω απ' αυτό). Άρα:

$$V=8\iint_R zdxdy=8\gamma\int_0^{\alpha}\left[\int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}dy\right]dx\,,$$

όπου $y=\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$ είναι η εξίσωση του τόξου ΑΒ της έλλειψης. Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα της αγκύλης. Είναι

$$\int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}dy=\int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\sqrt{\frac{1}{\beta^2}\left[\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)-y^2\right]}dy=$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\sqrt{\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)-y^2}\,dy$$

Θέτουμε $\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)=k^2$ οπότε τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται από 0 μέχρι k και το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{\beta}\int_0^{k}\sqrt{k^2-y^2}\,dy\,.$$

Κάνουμε νέα αντικατάσταση $y=k\eta\mu t,$ οπότε $dy=k\sigma\upsilon\nu\, tdt$.

Άρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης που θα προκύψουν είναι:

Για $y=0$: $0=k\eta\mu t$ ή $\eta\mu t=0$ άρα $t=0$.

Για $y=k$: $k=k\eta\mu t$ ή $\eta\mu t=1$ άρα $t=\pi/2$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{\beta}\int_0^k \sqrt{k^2-y^2}\,dy = \frac{1}{\beta}\int_0^{\pi/2} k\sigma\upsilon\nu\, t\cdot k\sigma\upsilon\nu\, t dt = \frac{k^2}{\beta}\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 t dt =$$

$$= \frac{k^2}{\beta}\left[\frac{t}{2}+\frac{\eta\mu t\sigma\upsilon\nu\, t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi k^2}{4\beta} = \frac{\pi\beta}{4}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right).$$

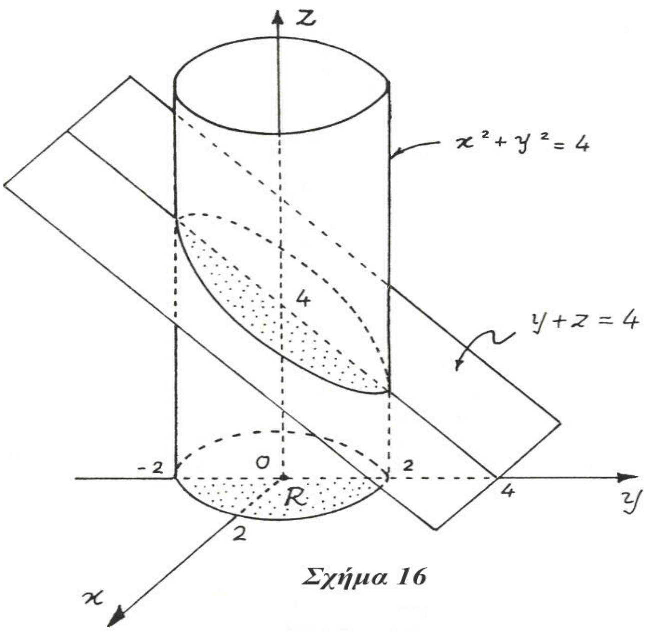
Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$V = 8\gamma\cdot\frac{\pi\beta}{4}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)dx = 2\pi\beta\gamma\left[x-\frac{x^3}{3\alpha^2}\right]_0^{\alpha} = 2\pi\beta\gamma\left(\alpha-\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma\,.$$

Παρατήρηση:

Αν τα μήκη *α, β, γ* γίνουν ίσα μεταξύ τους, τότε προφανώς το ελλειψοειδές μετασχηματίζεται σε σφαίρα της οποίας ο όγκος είναι $V_{\sigma\phi.} = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$.

7) Να βρεθεί ο όγκος στερεού που ορίζεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=4$ και τα επίπεδα $z = 0$ (δηλαδή το επίπεδο xOy) και $y + z = 4$.



Σχήμα 16

Λύση

Όπως είναι γνωστό, η εξίσωση $x^2+y^2=4$ στο χώρο παριστάνει κύλινδρο με βάση τον κύκλο $x^2+y^2=4$ και κεντρικό άξονα τον Oz, ενώ η εξίσωση $y + z = 4$ παριστάνει επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα Ox, το οποίο τέμνει τους άξονες Oy και Oz στα σημεία 4 και 4 αντίστοιχα (σχήμα 16).

Ως περιοχή ολοκλήρωσης, λόγω συμμετρίας παίρνουμε αυτή που ορίζεται από τις ευθείες: $x = -2$, $x = 2$, τον άξονα Oy ($x = 0$), καθώς και την ημιπεριφέρεια στο σκιασμένο μέρος που έχει εξίσωση $x=\sqrt{4-y^2}$. Επομένως, ο όγκος *V* του στερεού προκύπτει ότι είναι:

$$V = \iint_R z dx dy = 2\int_{-2}^{2}\left[\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)dx\right]dy = 2\int_{-2}^{2}\left[(4-y)\sqrt{4-y^2}\right]dy =$$

$$= 8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy - 2\int_{-2}^{2} y\sqrt{4-y^2}\,dy .$$

Υπολογίζουμε πρώτα το πρώτο ολοκλήρωμα $8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy$.

Θέτουμε $y = 2\eta\mu t$, οπότε $dy = 2\sigma\upsilon\nu\, t dt$.

Υπολογίζουμε την αλλαγή ορίων.

Για $y = 2$: $2 = 2\eta\mu t$ άρα $t = \pi/2$,

για $y = -2$: $-2 = 2\eta\mu t$ άρα $t = -\pi/2$. Άρα

$$8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy = 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\text{συν}\,t \cdot 2\text{συν}\,t dt =$$

$$32\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\text{συν}^2 t dt = 32\left[\frac{t}{2} + \frac{\text{ημ}\,t\,\text{συν}\,t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 16\pi.$$

Υπολογίζουμε τώρα το δεύτερο ολοκλήρωμα: $-2\int_{-2}^{2} y\sqrt{4-y^2}\,dy$. Είναι

$$-2\int_{-2}^{2} y\sqrt{4-y^2}\,dy = \int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,d(4-y^2) =$$

$$= \int_{-2}^{2}(4-y^2)^{1/2}\,d(4-y^2) = \left[\frac{(4-y^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{2} = 0 .$$

Άρα $V = 16\pi + 0 = 16\pi$.

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=y}^{3y}(x+y)dx\right)dy$ (*Απάντηση*: 14),

β) $\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\rho=0}^{\sigma\upsilon\nu\theta} \text{ρημ}\,\theta\, d\text{ρ}\right)d\theta$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{3}$),

γ) $\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x^2} xe^y dy\right)dx$ (*Απάντηση*: $\frac{e}{2}-1$),

δ) $\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{x} xy^2 dy\right)dx$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{40}$).

2) Να υπολογιστούν τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα στους τόπους που α-ναφέρεται το καθένα:

α) $\iint_D (x+y)dxdy$ όπου $D: y^2 = 4x,\ y = 0,\ x = 3$ (*Απ*: $\frac{36\sqrt{3}}{5} + 9$),

β) $\iint_D (x^2 + y^4)dxdy$ όπου $D: x^2 + y^2 = 1$ (*Απάντηση*: $\frac{3\pi}{8}$),

γ) $\iint_D \frac{x^2 + y^2}{2} dxdy$ όπου $D: x = -1,\ x = 1,\ y = -3,\ y = 3$ (*Απ*: 20),

δ) $\iint_D 6xydxdy$ όπου $D: y = 0,\ y = \sqrt{x}$ και $y = x - 2$ (*Απ*: 36),

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περιλαμβάνεται μεταξύ των παρακάτω καμπύλων:

α) $y = x^2$ και $y = x + 2$ (*Απάντηση*: $\frac{9}{2}$),

β) $y^2 = 9 - x$ και $y^2 = 9 - 9x$ (*Απάντηση*: 32),

γ) $y = 3x - x^2$ και $y = x$ (*Απάντηση*: $\frac{4}{3}$),

δ) $y = 2x^2 - 4x$ και $y = 2x - x^2$ (*Απάντηση*: 4),

ε) $3x^2 = 4y$ και $2y^2 = 9x$ (*Απάντηση*: 2),

στ) $x^2 + y^2 = 16$ και $16x^2 + 25y^2 = 400$ (*Απάντηση*: 4π).

4) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού το οποίο περικλείεται από τα συντεταγμένα επίπεδα ($z = 0,\ y = 0,\ x = 0$) και το επίπεδο $3x + 2y + 5z = 6$. (*Απ*.: $V = 6/5$)

5) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού το οποίο περικλείεται από τα συντεταγμένα επίπεδα $z = 0,\ y = 0$ και τα επίπεδα $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ και $x + y + z = 6$. (*Απάντηση*: $V = 12$)

4.5 Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος σε πολικές συντεταγμένες

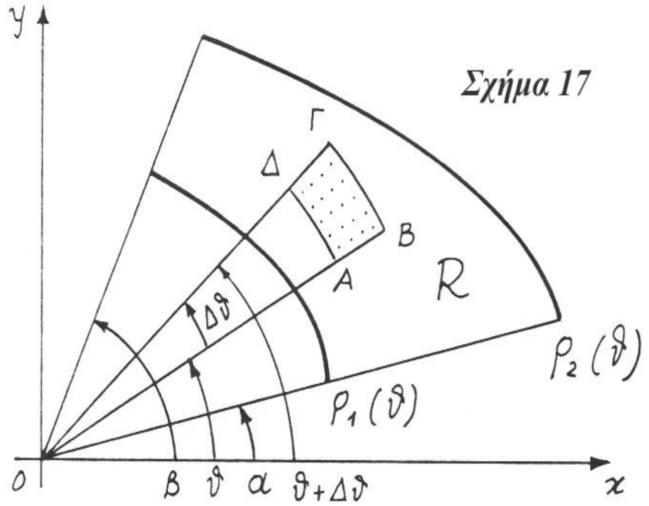
Θα ζητήσουμε να εκφράσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R f(x,y)dxdy$ σε πολικές συ-ντεταγμένες.

Αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \rho\eta\mu\theta$ η συνάρτηση

$z = f(x, y)$ γίνεται $f(x, y) = f(\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \rho\eta\mu\theta)$.

Για να υπολογίσουμε το *dxdy* εργαζόμαστε ως εξής:

Υποθέτουμε πρώτα – πρώτα ότι η περιοχή *R* ορίζεται από τις πολικές ακτίνες $\theta = \alpha$ και $\theta = \beta$, καθώς και τις καμπύλες $\rho_1 = \rho_1(\theta)$ και $\rho_2 = \rho_2(\theta)$.



Διαιρούμε τώρα την περιοχή αυτή αφ' ενός με ομόκεντρους κύκλους που έχουν κέντρο την αρχή Ο, αφ' ετέρου με ευθείες που περνούν απ' το Ο. Έστω ΑΒΓΔ μια τέτοια υποπεριοχή (σχήμα 17). Όπως φαίνεται απ' το σχήμα, αυτή είναι διαφορά δύο κυκλικών τομέων. Αν συμβολίσουμε με $\Delta\varepsilon$ το εμβαδόν της θα είναι

$\Delta\varepsilon$ = εμβ.κυκλ.τομ.(ΟΒΓ) – εμβ.κυκλ.τομ.(ΟΑΔ).

Όπως ξέρουμε το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας ω που εκφράζεται σε ακτίνια είναι

$E_{\kappa.\tau.} = \frac{1}{2}R^2\omega$ (*R* ακτίνα). Άρα

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}(OB)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}(OA)^2\Delta\theta .$$

Αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα του κυκλικού τομέα ΟΑΔ είναι ρ και του ΟΒΓ είναι ρ + Δρ, τότε οι συντεταγμένες των κορυφών του καμπυλόγραμμου τετράπλευρου ΑΒΓΔ θα είναι:

A(ρ, θ), **B**$(\rho + \Delta\rho, \theta)$, **Γ**$(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$, **Δ**$(\rho, \theta + \Delta\theta)$.

Άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta = \rho\cdot\Delta\rho\cdot\Delta\theta + \frac{1}{2}\Delta\theta\cdot(\Delta\rho)^2 .$$

Η ποσότητα $\frac{1}{2}\Delta\theta\cdot(\Delta\rho)^2$ είναι απειροστό 3ης τάξης και μπορεί να παραληφθεί όταν οι ποσότητες $\Delta\rho$, $\Delta\theta$ τείνουν στο μηδέν, ενώ το γινόμενο $\rho\cdot\Delta\rho\cdot\Delta\theta$ αν και είναι απειροστό 2ης τάξης, εν τούτοις δεν μπορεί να παραληφθεί γιατί είναι της ίδιας τάξης με το απειροστό $\Delta\varepsilon$ που θέλουμε να υπολογίσουμε (το οποίο εκφράζει επιφάνεια γι' αυτό και θεωρείται κι' αυτό 2ης τάξης). Έτσι

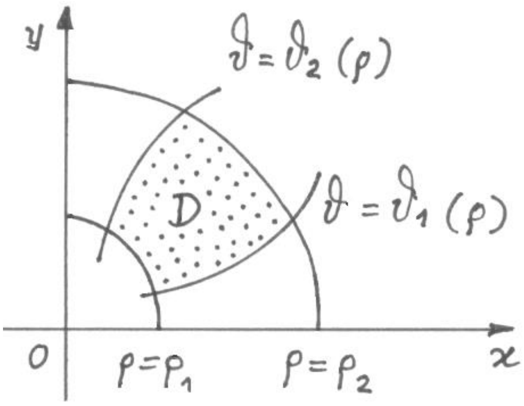
$\Delta\varepsilon \approx d\varepsilon = dxdy = \rho d\rho d\theta$. Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho,\theta)\rho d\rho\right]d\theta \quad \textbf{(τύπος ολοκλήρωσης I)} \ (1)$$

Αν είναι $f(\rho,\theta)=1$ δηλαδή $f(x,y)=1$, τότε το διπλό ολοκλήρωμα δίνει το εμβαδόν της περιοχής R όπως έχουμε δει, που θα είναι

$$\iint_R dxdy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho\right]d\theta \,. \qquad (2)$$

Παρατήρηση



Και στις πολικές συντεταγμένες υπάρχουν δύο τύποι ολοκλήρωσης (όπως οι τύποι I και II στις καρτεσιανές). Ο τύπος I είναι αυτός που αναφέρθηκε πριν και όπως φαίνεται, η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα ως προς ρ και μετά ως προς θ.

Στον τύπο II η περιοχή R ορίζεται από τους κύκλους (βλέπε διπλανό σχήμα)

$$\rho=\rho_1,\ \rho=\rho_2\ (\rho_1<\rho_2)$$

και τις καμπύλες με εξισώσεις (λυμένες ως προς θ)

$$\theta=\theta_1(\rho),\ \theta=\theta_2(\rho)\ \forall\rho\in[\rho_1,\rho_2]$$

και η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα ως προς θ και μετά ως προς ρ. Έτσι είναι

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\left[\int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho,\theta)\rho d\theta\right]d\rho \ \textbf{(τύπος ολοκλήρωσης II)} \ (3)$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ με διπλό ολοκλήρωμα και με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων.

Λύση

Η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$ έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 1. Αν προβληθεί πάνω στο επίπεδο xOy, τότε η προβολή της που θα είναι και η περιοχή ολοκλήρωσης *R* είναι ο κύκλος $x^2+y^2=1$ με το εσωτερικό του.

Λύνοντας τη σχέση $x^2+y^2+z^2=1$ ως προς z έχουμε $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$.

(Το πρόσημο + εκφράζει την επιφάνεια της σφαίρας που βρίσκεται πάνω από το xOy και το – εκφράζει την επιφάνεια της σφαίρας που βρίσκεται κάτω από το xOy). Λόγω συμμετρίας ο όγκος της σφαίρας θα είναι

$$V=2\iint_R zdxdy=2\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

Επειδή $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta$ η εξίσωση $x^2+y^2=1$ μετατρέπεται στην

$$\rho^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)=1 \text{ ή } \rho=1\ \left(\rho\geq 0\right).$$

Επομένως το ρ μεταβάλλεται από 0 μέχρι 1, ενώ η γωνία θ μεταβάλλεται από 0 μέχρι 2π ακτίνια. Άρα

$$R=\left\{(\rho,\theta)\,/\,0\leq\theta\leq 2\pi,\quad 0\leq\rho\leq 1\right\} \text{ και}$$

$$V=2\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho\right]d\theta.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα $\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho$. Είναι

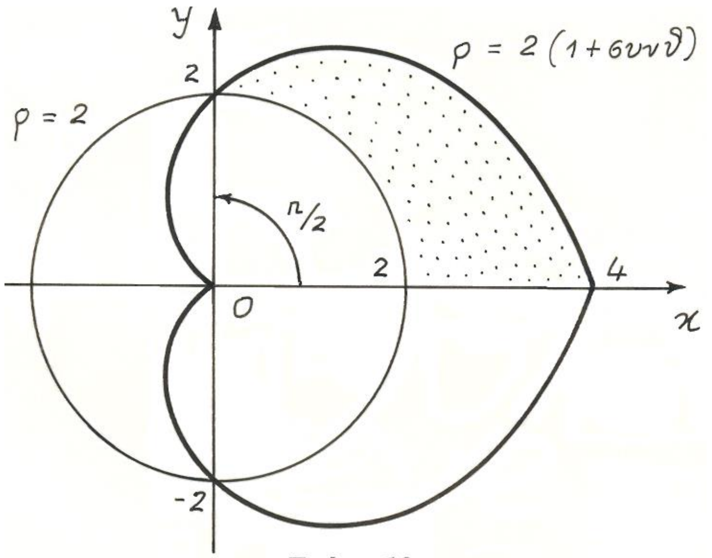
$$\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d(1-\rho^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\rho^2)^{1/2}d(1-\rho^2)=\left[-\frac{1}{2}\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Επομένως $V=2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=\frac{2}{3}[\theta]_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{3}$ κυβ. μ.

2) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται έξω από τον κύκλο $\rho = 2$ και μέσα στην καρδιοειδή $\rho = 2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ (ή $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$).

Λύση



Σχήμα 18

Απ' τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων βλέπουμε ότι ο κύκλος ρ = 2 και η καρδιοειδής ρ = 2(1 + *συνθ*) τέμνονται πάνω στον άξονα Oy στα σημεία –2 και 2, η δε περιοχή *R* ολοκλήρωσης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox (σχήμα 18). Έτσι, το εμβαδόν που ζητάμε θα είναι διπλάσιο της σκιασμένης περιοχής.

Τα όρια μεταβολής της γωνίας *θ* είναι από 0 μέχρι $\pi/2$, ενώ οι καμπύλες είναι $\rho = 2$ (κύκλος) και $\rho = 2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ (καρδιοειδής). Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο (1) της παραγράφου 4.5 έχουμε:

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\left[\int_2^{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\rho d\rho\right]d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_2^{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}d\theta$$

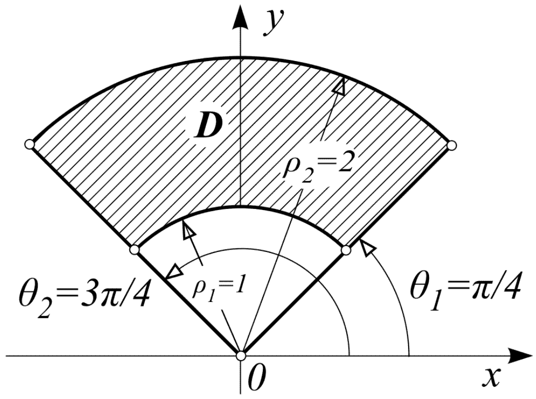
$$= 2\int_0^{\pi/2}\left(2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 2\right)d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left(2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\right)d\theta = 4\left[2\eta\mu\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 4\left[2\eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 0 - 0\right] = 8 + \pi.$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D \eta\mu(x^2+y^2)dxdy$, όπου D είναι το τμήμα κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ και τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$.

Λύση



Κάνοντας χρήση των πολικών συντεταγμένων $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta, y=\rho\eta\mu\theta$, οι εξισώσεις που ορίζουν τον τόπο D μετατρέπονται στις

$$\rho^2=1,\ \rho^2=4,\ \text{ή}\ \rho=1,\ \rho=2,$$

$$\rho\eta\mu\theta=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \rho\eta\mu\theta=-\rho\sigma\upsilon\nu\theta,$$

ή $\varepsilon\varphi\theta=1,\ \varepsilon\varphi\theta=-1$, δηλαδή

$$\rho_1=1,\ \rho_2=2,\ \theta_1=\pi/4 \text{ και } \theta_2=3\pi/4 \text{ αντίστοιχα,}$$

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δηλαδή ο νέος τόπος είναι:

$D'=\{(\rho,\theta)\in R^2 / 1\le\rho\le 2,\ \pi/4\le\theta\le 3\pi/4\}$. Έτσι,

$$\iint_D \eta\mu(x^2+y^2)dxdy=\iint_{D'}\eta\mu(\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\int_1^2\eta\mu(\rho^2)\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{2}\left[\int_1^2\eta\mu(\rho^2)d(\rho^2)\right]d\theta=-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[\sigma\upsilon\nu(\rho^2)\right]_1^2d\theta=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(4)-\sigma\upsilon\nu(1)\right]\left[\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}=-\frac{\pi}{4}(-1{,}193946)=0{,}937723.$$

4.6 Αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα

Κατά τον υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος σ’ ένα τόπο D είναι συχνά σκόπιμο να χρησιμοποιούμε άλλες συντεταγμένες διαφορετικές από τις καρτεσιανές συντεταγμένες, π.χ. πολικές συντεταγμένες ή άλλες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (βλέπε παράγραφο 5.10.).

Η αλλαγή αυτή κρίνεται σκόπιμη, όχι μόνο για να διευκολυνθούμε στην επίλυση ενός ολοκληρώματος, αλλά γενικά για να απλουστεύσουμε τη μελέτη μιας συνάρτησης, και λέγεται **μετασχηματισμός**. Ο μετασχηματισμός αυτός απ’ τις παλιές συντεταγμένες x και y στις νέες u και v γίνεται με βάση κάποιες σχέσεις που συνδέουν τα x και y με τα u και v.

Απλά παραδείγματα μετασχηματισμών είναι:

- ***Παράλληλη μεταφορά:*** $x = u + a, \quad y = v + \beta$ (όπου α, β οι συντεταγμένες του κέντρου Ο΄ του νέου συστήματος συντεταγμένων uΟ΄v)
- ***Στροφή κατά γωνία θ:*** $x = u\sigma\upsilon\nu\theta - v\eta\mu\theta, \quad y = u\eta\mu\theta + v\sigma\upsilon\nu\theta$
- ***Γραμμικός μετασχηματισμός:*** $x = au + \beta v, \quad y = \gamma u + \delta v$, $(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$
- ***Πολικές συντεταγμένες:*** $x = u\sigma\upsilon\nu v, \quad y = u\eta\mu v$ κ.τ.λ.

Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ όπου οι x και y ορίζονται στον τόπο $D \subset R^2$ και η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής παντού στο τόπο D. Έστω ακόμα

$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v) \tag{1}$$

οι σχέσεις που συνδέουν τις παλιές συντεταγμένες x και y με τις νέες συντεταγμένες u και v, όπου οι u και v ορίζονται στον τόπο $D' \subset R^2$ και οι σχέσεις (1) έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης για κάθε $(u, v) \subset D'$. Οι τόποι D και D' θεωρούνται κλειστοί και περατωμένοι. Με τις σχέσεις (1) επιτυγχάνεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του τόπου D του επιπέδου xOy στον τόπο D' του επιπέδου uOv. Υποθέτουμε ότι η Ιακωβιανή

$J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$. Τότε αποδεικνύεται ότι

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} F(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv \tag{2}$$

όπου $F(u,v) = f\big(g(u,v), h(u,v)\big)$. Ο τύπος (2) αποτελεί την γενική περίπτωση αλλαγής μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα και χρησιμοποιείται πολύ στις εφαρμογές.

Αν ο μετασχηματισμός των x και y γίνει στις πολικές συντεταγμένες ρ και θ, τότε θα είναι:

$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta, \ y = \rho\eta\mu\theta$, οπότε

$\dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \sigma\upsilon\nu\theta, \quad \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\eta\mu\theta, \quad \dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \eta\mu\theta, \quad \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$.Επομένως

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\rho\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \rho\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = \rho\sigma\upsilon\nu^2\theta + \rho\eta\mu^2\theta = \rho$$

Άρα η (2) γίνεται

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho\sigma\upsilon\nu\theta, \rho\eta\mu\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \qquad (3)$$

δηλαδή ο τύπος (1) της προηγούμενης παραγράφου 4.5.

Αν $f(x, y) = 1$ τότε ο (2) παίρνει τη μορφή

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv \qquad (4)$$

και υπολογίζει ως γνωστό, το εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας όταν μεταβαίνουμε απ' το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων *x, y* του επιπέδου xOy σε άλλο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων *u, v* του επιπέδου uOv.

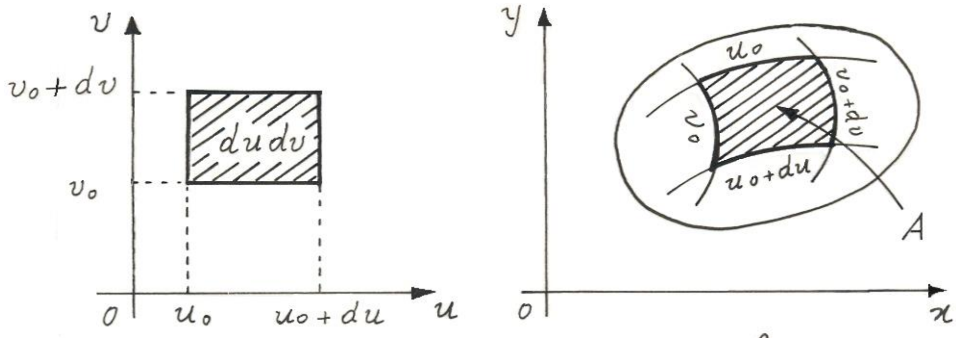
Παρατηρήσεις

1. Η αλλαγή μεταβλητών σ' ένα διπλό ολοκλήρωμα (όπως και σε κάθε ολοκλήρωμα) έχει ως σκοπό, όπως τονίστηκε πριν, να διευκολύνει τον υπολογισμό του και γι' αυτό γίνεται. Θα πρέπει όμως κάθε φορά να χρησιμοποιούμε τις κατάλληλες μεταβλητές (σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων), η επιλογή των οποίων εξαρτάται τόσο από τον τόπο ολοκλήρωσης, όσο και από την ολοκληρωτέα συνάρτηση.

2. Αποδεικνύεται ότι $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}$, απ' όπου δικαιολογείται και ο συμβολισμός της Ιακωβιανής ορίζουσας. Αυτή η σχέση τονίζεται στα παραδείγματα: (6) της τρέχουσας παρ. και (1) της παρ. 4.7., όπου φαίνεται και η σπουδαιότητά της.

3. Η παράσταση $A = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv$ γεωμετρικά ερμηνεύεται ως εξής:

Αν θεωρήσουμε το απειροστό ορθογώνιο στο σύστημα uOv με πλευρές τις ευθείες $u = u_0$, $u = u_0 + du$, καθώς και $v = v_0$, $v = v_0 + dv$ με εμβαδόν *dudv* (σχήμα 19α), τότε



α *Σχήμα 19* β

αυτό μετασχηματίζεται με τους τύπους $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ σε καμπυλόγραμμο παραλληλόγραμμο (σχήμα 19β) που έχει εμβαδόν τη παράσταση A.

Παραδείγματα

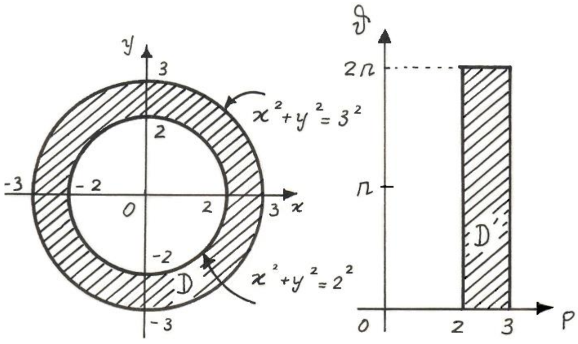
1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$ όπου ο τόπος D περικλείεται απ’ τις περιφέρειες

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9\ .$$

Λύση

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες. Θέτουμε

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \ y = \rho\eta\mu\theta,\ \ \rho > 0 \ \text{ και } \ 0 \le \theta \le 2\pi,$$



α *Σχήμα 20* β

οπότε ο τόπος D (σχήμα 20α) μετασχηματίζεται στον νέο τόπο D' (σχήμα 20β). Πράγματι, με αντικατάσταση των περιφερειών

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9$$

στις πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\rho^2 = 4 \text{ ή } \rho = 2 \text{ και } \rho^2 = 9 \text{ ή } \rho = 3,$$

ενώ το θ μεταβάλλεται από 0 μέχρι 2π.

Επομένως, ο κυκλικός δακτύλιος D, απ΄ το αρχικό σύστημα συντεταγμένων xOy μετασχηματίζεται τελικά στο ορθογώνιο D' στο νέο σύστημα συντεταγμένων ρOθ, δηλαδή είναι

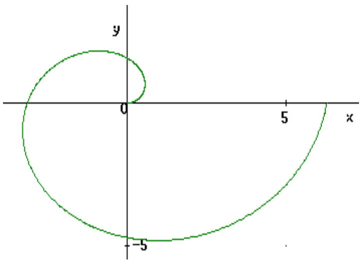
$$D' = \{(\rho,\theta) \in R^2 \,/\, 2 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$ Έτσι έχουμε:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\rho^2\eta\mu^2\theta}\cdot \rho d\rho d\theta = \iint_{D'} \rho\cdot\rho\, d\rho d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\rho=2}^{3} \rho^2 d\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 d\theta = \frac{19}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{38\pi}{3}.$$

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της σπείρας του Αρχιμήδη για ένα πλήρη κύκλο, με εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες $\rho(\theta)=\alpha\theta$ ($\alpha\in R$).

Λύση



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της σπείρας για $\alpha=1$. Το εμβαδόν E δίνεται απ' τον τύπο (2) της 4.5. $\iint_R dxdy = \int_\alpha^\beta\left[\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho\right]d\theta$.

Είναι

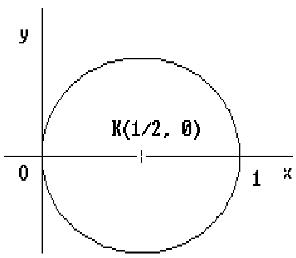
$$E=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\alpha\theta}\rho\, d\rho\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\rho^2\right]_0^{\alpha\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\alpha^2\theta^2 d\theta = \frac{4\alpha^2\pi^3}{3}$$

3) Να υπολογιστεί με χρήση πολικών συντεταγμένων το ολοκλήρωμα

$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ όπου ο D περικλείεται απ' τον κύκλο $x^2+y^2=x$.

Λύση

Η εξίσωση του κύκλου γράφεται $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.



Επομένως ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(1/2,0)$ και ακτίνα $1/2$. Θέτοντας $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$ στην αρχική εξίσωση του κύκλου αυτή γίνεται $\rho^2=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$ ή $\rho=\sigma\upsilon\nu\theta$. Έτσι, ο τόπος D μεταβάλλεται στον τόπο D' με

$$D'=\left\{(\rho,\theta)\in R^2 \,/\, -\pi/2\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\rho\le\sigma\upsilon\nu\theta\right\}.$$

Άρα

$$I=\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\iint_{D'}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{\sigma\upsilon\nu\theta}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]d\theta.$$

Αλλά $\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-\rho^2)}{(1-\rho^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -\sqrt{1-\rho^2}+c$. Άρα

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{\sigma\upsilon\nu\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-|\eta\mu\theta|\right)d\theta .$$

Επειδή

$$\forall\,\theta\in[-\pi/2, 0) \Rightarrow |\eta\mu\theta| = -\eta\mu\theta \ \text{ και } \ \forall\,\theta\in[0, \pi/2] \Rightarrow |\eta\mu\theta| = \eta\mu\theta ,$$

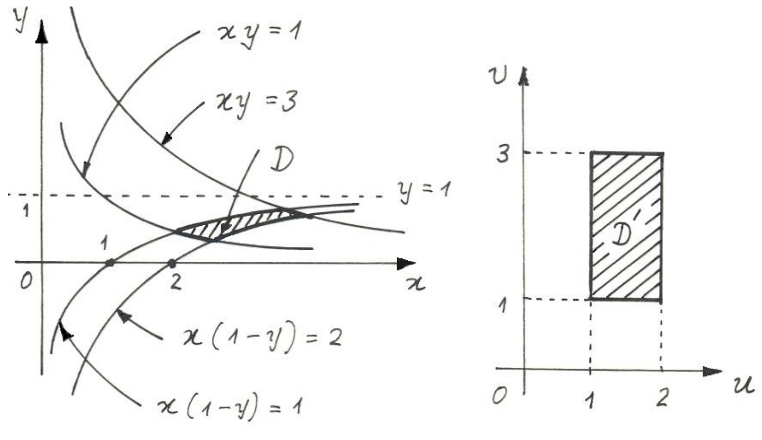
έχουμε

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta - \int_{-\pi/2}^{0}(-\eta\mu\theta)\, d\theta - \int_0^{\pi/2}\eta\mu\theta\, d\theta = \pi - [\sigma\upsilon\nu\theta]_{-\pi/2}^{0} + [\sigma\upsilon\nu\theta]_0^{\pi/2} = \pi - 2 .$$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D x dx dy$ όπου ο τόπος D περικλείεται απ' τις καμπύλες: $x(1-y)=1$, $x(1-y)=2$, $xy=1$ και $xy=3$ με $x>0$.

Λύση

Θέτουμε $u = x(1-y)$ και $v = xy$ (1)



α *Σχήμα 21* β

Λύνοντας το σύστημα των (1) ως προς x και y παίρνουμε

$$x = u+v,\ y = \frac{v}{u+v} \quad (2)$$

Επίσης είναι $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v}{(u+v)^2}$, $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{(u+v)^2}$. Άρα $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{u+v}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v}$

Ο τόπος D που ορίζεται απ' τις παραπάνω καμπύλες δίνεται στο σχήμα 21α. Ο τόπος αυτός μετασχηματίζεται με τις σχέσεις (2) στον ορθογώνιο τόπο που περιορίζεται απ' τις ευθείες:

$u = 1$, $u = 2$ και $v = 1$, $v = 3$ (σχήμα 21β). Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$\iint_D x dx dy = \iint_{D'} (u+v)\left|J\right| dudv = \iint_{D'} (u+v)\frac{1}{u+v} dudv = \int_{u=1}^{2}\left(\int_{v=1}^{3} dv\right) du = 2 .$$

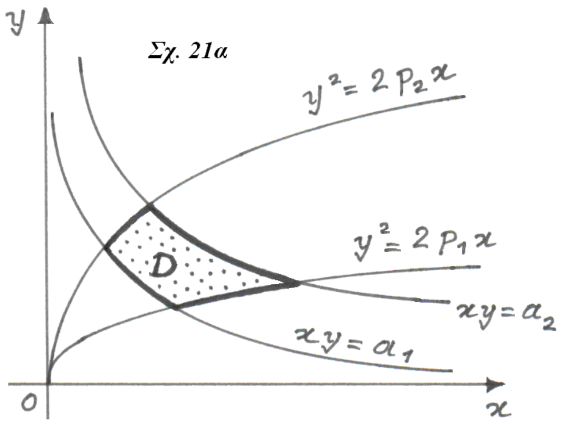
5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που περικλείεται:

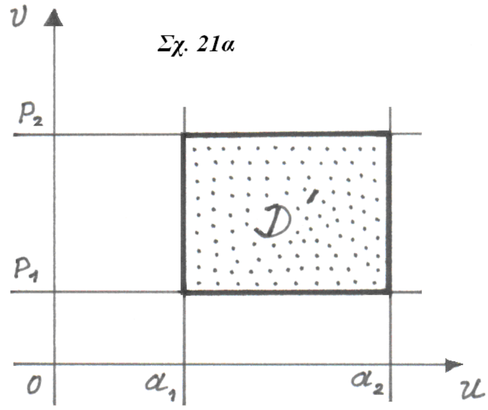
από τις παραβολές $y^2 = 2p_1 x$, $y^2 = 2p_2 x$, με $0 < p_1 < p_2$

και τις υπερβολές $xy = a_1$, $xy = a_2$, με $0 < a_1 < a_2$.

Λύση

Το χωρίο D φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (21α). Είναι $E = \iint_D dxdy$.





Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κάνοντας αλλαγή μεταβλητών:

$$xy = u\,,\ \frac{y^2}{2x} = v\,.$$

Είναι φανερό, ότι η περιοχή D μετασχηματίζεται στην περιοχή D' όπου

$D' = \left\{(u,v) \in R^2 \,/\, a_1 \le u \le a_2,\ p_1 \le v \le p_2\right\}$. Άρα (τύπος (2) της 4.6.)

$$E = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv\,.$$

Επίσης $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{2x^2} & \dfrac{y}{x} \end{vmatrix} = 3\dfrac{y^2}{2x} = 3v$ και (παρατ. 2. της 4.6.)

$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \dfrac{1}{3v}$. Έτσι τελικά προκύπτει

$$E=\iint_{D'}\frac{1}{3v}dudv=\int_{u=a_1}^{u=a_2}\left(\int_{v=p_1}^{v=p_2}\frac{1}{3v}dv\right)du=\frac{1}{3}(a_2-a_1)\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right).$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\iint_D (y-x)dxdy$ όπου D είναι ο τόπος που ορίζεται απ' τις ευθείες: $y=x+1,\quad y=x-3,\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3},\quad y=-\frac{1}{3}x+5$.

Λύση

Ο απ' ευθείας υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος παρουσιάζει αρκετές πράξεις, αλλά με μια κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών μπορούμε να το αναγάγουμε σ' ένα άλλο ολοκλήρωμα του οποίου ο τόπος D' ολοκλήρωσης είναι ένα ορθογώνιο όπως φαίνεται στο σχήμα 22β. Ο αρχικός τόπος D είναι

$$D=\left\{(x,y)\in R^2\,/-3\le y-x\le 1,\ 7/3\le y+1/3x\le 5\right\}.$$

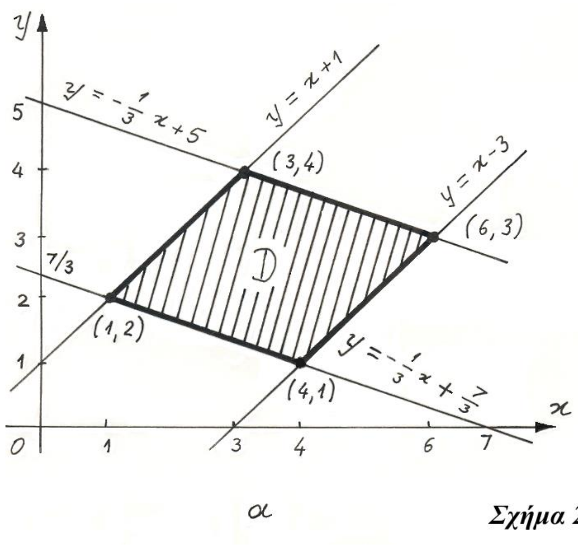
Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $u=y-x$, (1)

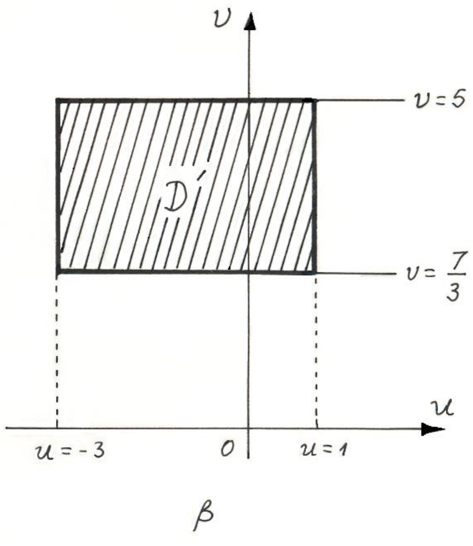
έτσι ώστε απ' τις $y=x+1,\ y=x-3$, το $u=y-x$ να μεταβάλλεται από -3 μέχρι 1,

καθώς και το μετασχηματισμό $v=y+\frac{1}{3}x$, (2)

έτσι ώστε απ' τις $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3},\ y=-\frac{1}{3}x+5$, το v να μεταβάλλεται από $\frac{7}{3}$ μέχρι 5.

Έτσι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 22β ο νέος τόπος D' είναι





Σχήμα 22

$$D' = \left\{(u,v) \in R^2 \,/\, -3 \le u \le 1,\ 7/3 \le v \le 5\right\}.$$

Λύνοντας ως προς *x* και *y* το παραπάνω σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\,.$$

Επίσης είναι

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{3}{4}, \text{ και}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \ne 0.$$

Έτσι, εκτελώντας το γραμμικό μετασχηματισμό

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$$

ο αρχικός τόπος D των ευθειών, ο οποίος στο xOy είναι παραλληλόγραμμο (σχήμα 22α), μετασχηματίζεται στον τόπο D', ο οποίος στο σύστημα νέων συντεταγμένων uOv είναι ορθογώνιο (σχήμα 22β). Έτσι

$$I = \iint_D (y-x)\,dxdy = \iint_{D'} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\right)\right]\left|-\frac{3}{4}\right| dudv =$$

$$= \iint_{D'} u\frac{3}{4}\,dudv = \frac{3}{4}\int_{v=7/3}^{5}\left(\int_{u=-3}^{1} u\,du\right)dv = \frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}(-4)\,dv = -8\,.$$

Σημείωση

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1\Big/\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ και να υπολογίσουμε την $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$, αποφεύγοντας να λύσουμε το σύστημα των (1) και (2) (βλέπε παρατήρηση 2. της τρέχουσας παραγράφου)

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα στον τόπο D που περικλείεται από τις καμπύλες δίπλα σε κάθε ολοκλήρωμα:

α) $\iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy$ όπου D ο δακτύλιος που ορίζεται απ’ τους κύκλους:

$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4$. (*Απάντηση*: 21π)

β) $\iint_D (x+y)dxdy$ όπου D είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες

$2x+3y=3$, $2x+3y=8$, $2y-7x=-4$, $2y-7x=6$. ($Απάντηση$: $97/25$)

γ) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ όπου D ο δακτύλιος που ορίζεται απ' τους κύκλους:

$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$. ($Απάντηση$: $14\pi/3$)

δ) $\iint_D (x+y)^2 dxdy$ όπου D είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ευθείες

$x+y=1$, $x+y=4$, $x-2y=-2$, $x-2y=1$. ($Απάντηση$: 21)

4.7 Εφαρμογές των διπλών ολοκληρωμάτων στη Μηχανική

Θεωρούμε μια επίπεδη υλική πλάκα G η οποία βρίσκεται στο επίπεδο xOy και περιβάλλεται απ' τον τόπο *D*. Η συνάρτηση δ (συνεχής) της κατανομής πυκνότητας της πλάκας G είναι συνάρτηση μόνο της θέσης της πλάκας, δηλαδή $\delta = \delta(x, y)$. Τότε

1. Η συνολική μάζα m της πλάκας G δίνεται απ' τον τύπο:

$$m = \iint_D \delta(x,y)dxdy \tag{1}$$

Για $\delta(x, y) = c$ σταθερό είναι $m = c\iint_D dxdy$ (2)

2. Το κέντρο βάρους (Κ.Β.) της μάζας της πλάκας G έχει συντεταγμένες x_G, y_G οι οποίες δίνονται απ' τους τύπους:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D x\delta(x,y)dxdy, \quad y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\delta(x,y)dxdy \tag{3}$$

και για $\delta(x, y) = c$ σταθερό οι τύποι (3) γίνονται

$$x_G = \iint_D xdxdy \Big/ \iint_D dxdy, \quad y_G = \iint_D ydxdy \Big/ \iint_D dxdy \tag{4}$$

3. Η ροπή αδράνειας της πλάκας G είναι:

i) ως προς τον Oy: $I_y = \iint_D x^2\delta(x,y)dxdy$ (5)

ii) ως προς τον Ox: $I_x = \iint\limits_D y^2 \delta(x,y)dxdy$ (6)

iii) ως προς την αρχή O (πολική ροπή αδράνειας):

$$I_O = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\delta(x,y)dxdy \quad (7)$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η πολική ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς πλάκας G που βρίσκεται στο επίπεδο xOy και περιβάλλεται απ’ τις καμπύλες:

$x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 9,\ xy = 2,\ xy = 4$ με $x > 0,\ y > 0$ και $\delta(x, y) = 1$.

Λύση

Επειδή $\delta(x, y) = 1$, ο τύπος (7) της πολικής ροπής αδράνειας γίνεται

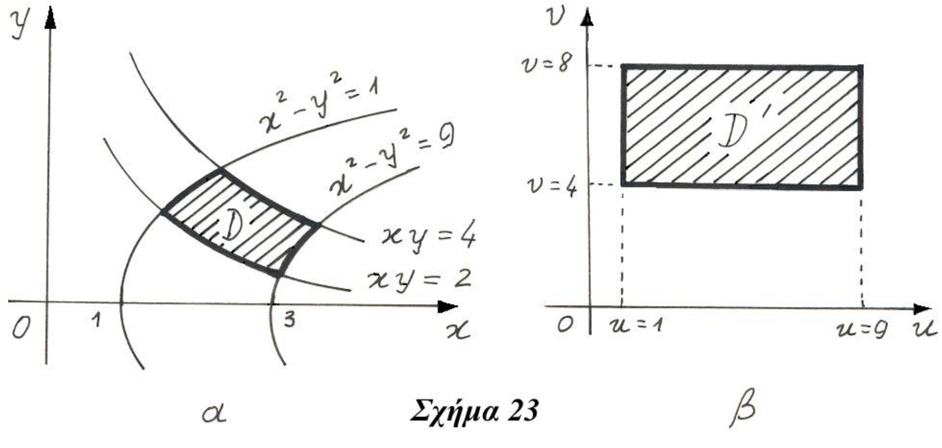
$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy\ .$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I_O κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$x^2 - y^2 = u \quad \text{και} \quad 2xy = v \quad (1)$$

Ο αρχικός τόπος D στο xOy είναι καμπυλωτό παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τις ισοσκελείς υπερβολές $x^2 - y^2 = 1$ και $x^2 - y^2 = 9$, καθώς και τις υπερβολές $xy = 2$ και $xy = 4$ (σχήμα 23α) δηλαδή

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, 1 \le x^2 - y^2 \le 9,\ 2 \le xy \le 4\right\}$$



Σχήμα 23

Ο μετασχηματισμένος τόπος D' στο σύστημα νέων συντεταγμένων uOv είναι κανονικό ορθογώνιο (σχήμα 23β) δηλαδή

$$D' = \{(u,v) \in R^2 / 1 \le u \le 9,\ \ 4 \le v \le 8\}.$$

Υψώνοντας τις σχέσεις (1) στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = u^2 + v^2 \quad ή \quad x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad (2)$$

Προσθέτοντας την πρώτη των (1) και την (2) βρίσκουμε

$$2x^2 = \sqrt{u^2 + v^2} + u \text{ και επειδή } x > 0,\ x = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} + u}{2}}$$

Αφαιρώντας απ' την (2) την πρώτη των (1) βρίσκουμε

$$2y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} - u \text{ και επειδή } y > 0,\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2}}.$$

Επίσης

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u}}{2\sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{v}{2\sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u}}{2\sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{v}{2\sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u}} \text{ και}$$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{v}{8(u^2 + v^2)}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u}}{\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u}} + \frac{\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u}}{\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u}}\right) =$$

$$= \frac{v}{8(u^2 + v^2)}\left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2} + u + \sqrt{u^2 + v^2} - u}{\sqrt{u^2 + v^2 - u^2}}\right) = \frac{2\sqrt{u^2 + v^2}}{8(u^2 + v^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (3)$$

Επομένως το ολοκλήρωμα I_0 λόγω των (2) και (3) γίνεται

$$I_0 = \iint_{D'} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{dudv}{4\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}\left(\int_{v=4}^{8} dv\right)du = 8.$$

2ος τρόπος

Όπως έγινε αντιληπτό, με τις αντικαταστάσεις (1) και τη λύση του συστήματος ως προς *x* και *y*, η εύρεση των παραγώγων των *x* και *y* ως προς *u* και *v*, καθώς και ο υπολογισμός της Ιακωβιανής *J* ήταν δουλειά κουραστική. Θα μπορούσαμε να είχαμε αποφύγει όλη αυτή τη δουλειά αν χρησιμοποιούσαμε την βασική ιδιότητα των Ιακωβιανών:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=1 \qquad (4)$$

απ' την οποία δικαιολογείται και ο συμβολισμός τους ως πηλίκου (βλέπε παρατήρηση 2. της παραγράφου 4.6.) Η ιδιότητα αυτή ισχύει υπό τον όρο ότι οι εξισώσεις

$$x = g(u,\ v),\ y = h(u, v)$$

μπορούν να λυθούν ως προς u και v, οπότε οι παραπάνω Ιακωβιανές είναι η μια αντίστροφη της άλλης.

Έτσι, παίρνουμε τις μερικές παραγώγους των u και v ως προς x και y απ' τις (1):

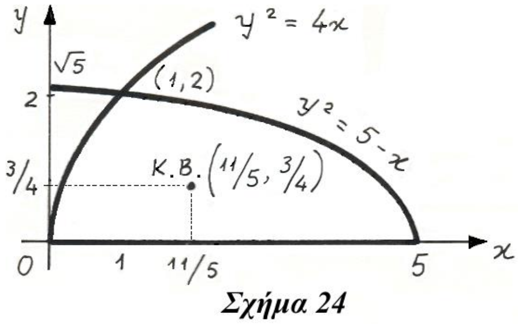
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x,\quad \text{οπότε}$$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4x^2+4y^2=4\sqrt{u^2+v^2}\ \ \text{(λόγω της (2))}.$$

Απ' την τελευταία λόγω της (4) προκύπτει ότι $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\dfrac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}$.

2) Να βρεθεί το κέντρο βάρους λεπτής ομογενούς πλάκας με σταθερή πυκνότητα $\delta(x,y)=c$ η οποία καλύπτει στο επίπεδο xOy τον τόπο D με εξισώσεις καμπύλων: $y^2=4x,\ y^2=5-x$ και $y\geq 0$.

Λύση



Σχήμα 24

Βρίσκουμε το κοινό σημείο τομής των καμπύλων

$$y^2=4x,\ y^2=5-x,\ \text{(το (1, 2))}$$

εξισώνοντας τα 2^{α} μέλη τους $(4x=5-x)$ (σχ. 24). Σύμφωνα με τους τύπους (2) και (4) της παραγράφου 4.7. έχουμε:

$$m=c\iint_D dxdy=c\int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=y^2/4}^{5-y^2}dx\right)dy=\frac{20}{3}c$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D x\cdot c dx dy = \frac{3}{20}\int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=\frac{y^2}{4}}^{5-y^2} x dx\right)dy = \frac{3}{40}\int_0^2\left[\left(5-y^2\right)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2\right]dy =$$

$$= \frac{3}{40}\int_0^2\left(25 - 10y^2 + \frac{15}{16}y^4\right)dy = \frac{3}{40}\left[25y - \frac{10}{3}y^3 + \frac{3}{16}y^5\right]_0^2 = \frac{11}{5}.$$

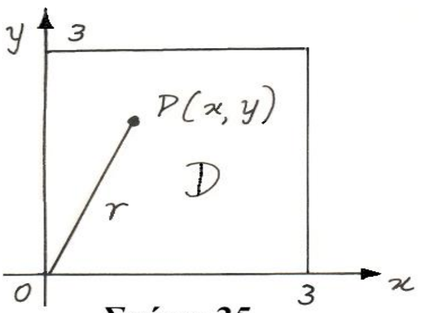
$$y_G = \frac{1}{m}\iint_D y\cdot c dx dy = \frac{3}{20}\int_{y=0}^{2} y\left(\int_{x=y^2/4}^{5-y^2} dx\right)dy = \frac{3}{20}\int_0^2 y\left(5 - y^2 - \frac{y^2}{4}\right)dy =$$

$$= \frac{3}{20}\int_0^2\left(5y - \frac{5}{4}y^3\right)dy = \frac{3}{4}.$$

Άρα οι συντεταγμένες του Κ. Β. είναι $(x_G, y_G) = \left(\frac{11}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

3) Να βρεθεί η μάζα *m* μιας τετράγωνης πλάκας με πλευρά 3 που η πυκνότητά της μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από μια κορυφή.

Λύση



Σχήμα 25

Αν O είναι η κορυφή απ' την οποία η πυκνότητα της τετράγωνης μάζας μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης, τότε είναι (σχήμα 25):

$$\delta(x, y) = kr^2 = k(x^2 + y^2)$$

οπότε χρησιμοποιώντας το τύπο (1) της παρ. 4.7. με τόπο *D* το τετράγωνο πλευράς 3, βρίσκουμε:

$$m = \iint_D \delta(x, y) dx dy = \int_{y=0}^{3}\left(\int_{x=0}^{3} k\left(x^2 + y^2\right)dx\right)dy = k\int_0^3\left(\frac{3^3}{3} + 3y^2\right)dy = 54k.$$

4) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας I_0 του δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$, αν η επιφανειακή του πυκνότητα είναι ανάλογη της απόστασης απ' το κέντρο O, δηλ. $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση

Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες. Είναι

$\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2} = k\sqrt{\rho^2} = k\rho$. Έτσι ο τύπος (7) της παρ. 4.7. γίνεται

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\delta(x,y)dxdy = k\int_0^{2\pi}\left[\int_1^2 \rho^2 \rho\cdot\rho\, d\rho\right]d\theta = \frac{31k}{5}2\pi = \frac{62k\pi}{5}.$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς την αρχή O, του ομογενούς χωρίου *D* με $\delta(x,y)=k$, που περικλείεται από τις ευθείες $y=0,\ y=x,\ x=4$. (*Απ.* $256k/3$)

2) Να βρεθεί η μάζα και το κέντρο βάρους του χωρίου *D* που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2,\ y=x$, του οποίου η επιφανειακή πυκνότητα είναι $\delta(x,y)=kx$, όπου $k>0$ (σταθερή). (*Απάντηση*: $m=k/12$, $K.B.=(3/5,1/2)$)

3) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Ox του ομογενούς χωρίου *D* με σταθερή πυκνότητα *δ*, που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2,\ y=2-x$ και του άξονα Ox. (*Απάντηση*: $I_x = \dfrac{11\delta}{84}$)

4) Να βρεθεί το κέντρο βάρους μάζας ομογενούς χωρίου *D*, ($\delta(x,y)=1$) όπου

$D=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge 1\}$. Απάντηση: $K.B.=\left(\dfrac{3(\pi-2)}{2},\ \dfrac{3(\pi-2)}{2}\right)$

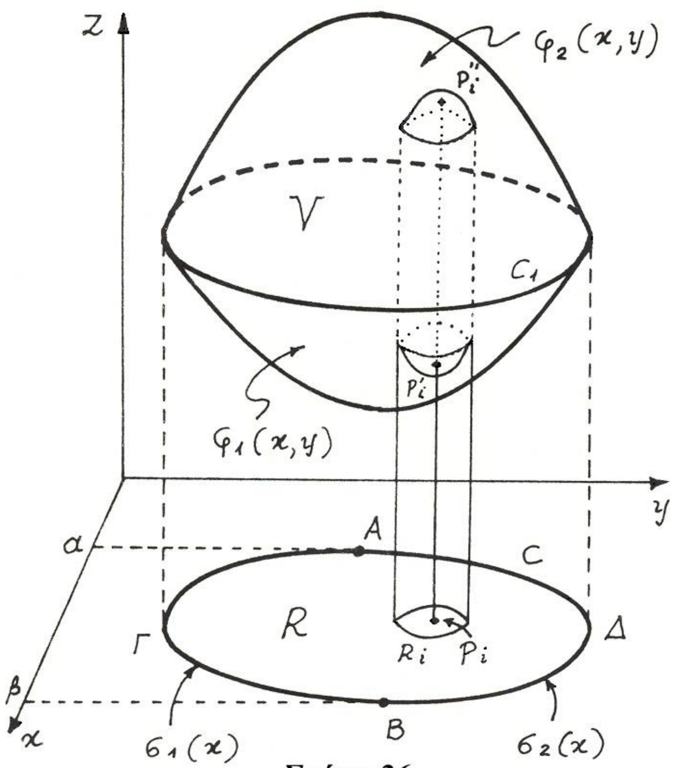
5) Να βρεθεί η μάζα, το κέντρο βάρους και οι ροπές αδράνειας $I_x,\ I_y$ και I_0 ενός ομογενούς χωρίου *D* με σχήμα ημικυκλίου, όπου $D: x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0$.

(*Απάντηση*: $m=\dfrac{a^2\pi}{2}$, $K.B.=\left(0,\dfrac{4a}{3\pi}\right)$, $I_x=I_y=\dfrac{a^4\pi}{8}$, $I_0+I_x+I_y=\dfrac{a^4\pi}{4}$)

Β. ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.8 Ορισμός, ιδιότητες και υπολογισμός αυτών

Θεωρούμε ένα τρισορθογώνιο και δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων Oxyz και



Σχήμα 26

ένα στερεό *V* που περικλείεται από μια κλειστή και φραγμένη επιφάνεια η οποία τέμνεται από παράλληλες προς τον Oz σε δύο το πολύ σημεία. (σχήμα 26). Τα σημεία του στερεού *V* προβάλλονται στο επίπεδο xOy στην κλειστή περιοχή *R* που ορίζεται από την καμπύλη *c*. Η κυλινδρική επιφάνεια που σχηματίζουν οι παράλληλες προς τον Oz οι οποίες φέρονται από τα σημεία της *c*, εφάπτεται με το στερεό *V* κατά μια καμπύλη c_1, η οποία χωρίζει την επιφάνεια του στερεού σε δύο επιφάνειες S_1 και S_2 με εξισώσεις $z = \phi_1(x, y),\ z = \phi_2(x, y)$ αντίστοιχα. Χωρίζουμε το στερεό *V* σε μικρότερα στερεά τα V_1, V_2, …, V_ν και σε καθένα απ' αυτά τα V_i (i = 1, 2, …, ν) παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

Έστω μια συνάρτηση η $f(x, y, z)$ συνεχής και φραγμένη σ' όλα τα σημεία του στερεού *V*. Σχηματίζουμε το άθροισμα των γινομένων

$$I_\nu = f(x_1, y_1, z_1)V_1 + f(x_2, y_2, z_2)V_2 + \cdots + f(x_\nu, y_\nu, z_\nu)V_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i, y_i, z_i)V_i$$

όπου V_i είναι οι όγκοι των αντίστοιχων στερεών. Αποδεικνύεται ότι το I_ν τείνει προς ένα συγκεκριμένο όριο όταν το ν τείνει στο άπειρο, εφόσον καθένα από τα στερεά V_1, V_2, …, V_ν τείνει στο μηδέν κατά όλες τις διαστάσεις του. Το όριο αυτό λέγεται **τριπλό ολοκλήρωμα** της $f(x, y, z)$ στο στερεό *V* και παριστάνεται με:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{\nu} f(x_i, y_i, z_i)V_i \ .$$

4.8.1 Ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος

Οι ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος είναι παρόμοιες μ' αυτές του διπλού ολοκληρώματος και είναι οι παρακάτω:

1) Αν ο τόπος ολοκλήρωσης *V* είναι άθροισμα των τόπων V_1, V_2, … που είναι πεπερασμένου πλήθους, τότε

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz + \cdots$$

2) Αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ γράφεται

$f(x,y,z) = \alpha\, f_1(x,y,z) + \beta\, f_2(x,y,z)$ τότε

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V \alpha\, f_1(x,y,z)dxdydz + \iiint_V \beta\, f_2(x,y,z)dxdydz \ .$$

3) Αν $f(x,y,z)=1$, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_V dxdydz = V$$

παριστάνει τον **όγκο του στερεού *V*** που ορίζεται ως τόπος του.

Όπως βλέπουμε από τον ορισμό του, το $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ θεωρείται ότι είναι μια '**επέκταση**' της ιδέας του απλού ολοκληρώματος. Πράγματι:

Το **απλό** ολοκλήρωμα (ορισμένο) μιας συνάρτησης $y = f(x)$ μιας μεταβλητής *x* δηλαδή το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ έχει ως τόπο ένα κλειστό διάστημα [α, β] στον Ox και όταν $f(x) = 1$, τότε παριστάνει το μήκος του διαστήματος αυτού.

Το **διπλό** ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $z = f(x,y)$ δύο μεταβλητών *x, y* δηλαδή το $\iint_R f(x,y)dxdy$ έχει ως τόπο μια κλειστή περιοχή *R* στο επίπεδο xOy και όταν $f(x,y) = 1$, τότε παριστάνει το εμβαδόν της περιοχής αυτής.

Το **τριπλό** ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $w = f(x,y,z)$ τριών μεταβλητών *x*, *y*, *z* δηλαδή το $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ έχει ως τόπο ένα κλειστό στερεό *V* στο χώρο Οxyz και όταν $f(x,y,z) = 1$, τότε παριστάνει τον όγκο του στερεού αυτού.

4.8.2 Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος

Για να υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα, χωρίζουμε την περιοχή *R* σε μικρότερες περιοχές και σε κάθε μια R_i παίρνουμε τυχαίο σημείο $P_i(x_i, y_i, 0)$. Από το σημείο P_i φέρνουμε παράλληλη προς τον Oz η οποία τέμνει τις επιφάνειες S_1 και S_2 στα σημεία P_i' και P_i'' (σχήμα 24) με εξισώσεις $z' = \varphi_1(x_i, y_i)$, $z'' = \varphi_2(x_i, y_i)$. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση του διπλού ολοκληρώματος, για να πάρουμε τους προσθετέους του αθροίσματος I_v.

Στο σχήμα 26, αν Α είναι το σημείο της περιοχής *R* που έχει την μικρότερη τετμημένη *α* και Β το σημείο της *R* που έχει την μεγαλύτερη τετμημένη *β*, επίσης, αν $y = \sigma_1(x)$ είναι η εξίσωση της καμπύλης ΑΓΒ και $y = \sigma_2(x)$ η εξίσωση της καμπύλης ΑΔΒ και τέλος, αν $z = \varphi_1(x,y)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας που είναι κάτω απ' την καμπύλη c_1 και $z = \varphi_2(x,y)$ είναι η εξίσωση της επιφάνειας που είναι πάνω απ' την καμπύλη c_1, τότε αποδεικνύεται ότι

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\sigma_1(x)}^{\sigma_2(x)} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right] dx \qquad (1)$$

δηλαδή τα όρια ολοκλήρωσης είναι τέτοια ώστε να καλύπτουν το στερεό κατά τους τρεις άξονες Οx, Oy, Oz.

Σημείωση:

Ανάλογα με τη μορφή του κλειστού στερεού *V* ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μπορεί να γίνει και με διαφορετική σειρά ολοκλήρωσης, π. χ. πρώτα ως προς *z*, μετά ως προς *x*, και τέλος ως προς *y* ώστε τα όρια ολοκλήρωσης να καλύπτουν το στερεό κατά τους τρεις άξονες, δηλαδή

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{y=\gamma}^{\delta} \left[\int_{x=\tau_1(y)}^{\tau_2(y)} \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx \right] dy \, . \qquad (2)$$

Θα μπορούσαμε τέλος να γενικεύσουμε τον τύπο υπολογισμού του τριπλού ολοκληρώματος. Έτσι, ανάλογα με τη θέση και μορφή που έχει το κλειστό στερεό V, και βέβαια υπό τον όρο ότι τηρούνται όλες οι προϋποθέσεις ορισμού του, ακόμη δε ότι η κλειστή επιφάνεια S μπορεί να λυθεί ως προς μία των μεταβλητών της x, y, z, καθώς επίσης η προβολή της επιφάνειας S στα επίπεδα xOy, yOz, zOx, να δίνουν καμπύλες που πληρούν ανάλογους όρους του ολοκληρώματος (1), τότε προκύπτουν τελικά 6 διαφορετικοί τρόποι υπολογισμού του, όσες δηλαδή είναι όλες οι μεταθέσεις στη σειρά των τριών μεταβλητών του x, y, z, (3! = 6, μεταθέσεις ν πραγμάτων: ν!).

Π.χ. για την ολοκλήρωση πρώτα ως προς x, μετά ως προς y και τέλος ως προς z και την προβολή της S στο επίπεδο yOz (εφόσον η S είναι λυμένη ως προς x), είναι

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=\kappa}^{\lambda}\left[\int_{y=h_1(z)}^{h_2(z)}\left[\int_{x=g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right]dy\right]dz \qquad (3)$$

4.9 Παραδείγματα – Εφαρμογές

1) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\Omega = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{2-x} xyzdz\right]dy\right]dx$.

Λύση

Είναι $\Omega = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2-x} dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{xy(2-x)^2}{2}dy\right]dx =$

$$= \int_0^1\left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2(2-x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{6x^5}{5} + \frac{13x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{13}{240}.$$

2) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_D e^{x+y+z}dxdydz$ όπου D είναι ο τόπος $D = \{(x,y,z) \,/\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le x+y\}$

Λύση

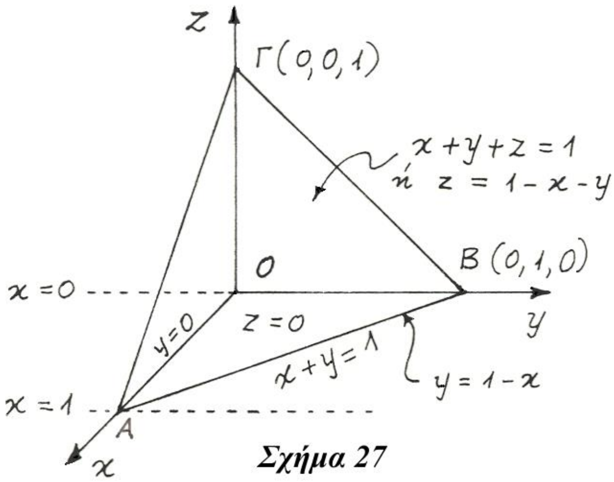
$$\iiint_D e^{x+y+z}dxdydz = \int_0^1\left[\int_0^x\left[\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz\right]dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^x\left[e^{x+y+z}\right]_0^{x+y} dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^x(e^{2(x+y)} - e^{x+y})dy\right]dx = \int_0^1\left\{\frac{1}{2}\left[e^{2(x+y)}\right]_0^x - \left[e^{x+y}\right]_0^x\right\}dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + e^x\right)dx = \frac{1}{8}\left[e^{4x}\right]_0^1 - \frac{3}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1 = \frac{e^4}{8} - \frac{3}{4}e^2 + e - \frac{3}{8}.$$

3) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_V (x^2 - 3y + 2z)dxdydz$ όπου V είναι το τετράεδρο ΟΑΒΓ (Ο η αρχή των αξόνων και Α, Β, Γ σημεία πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, Oz αντίστοιχα) με εξίσωση επιπέδου ΑΒΓ $x + y + z = 1$ και $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y + z \leq 1$.

Λύση



Σχήμα 27

Τα όρια μεταβολής του τετραέδρου V είναι (σχήμα 27):

Για το x: Από 0 μέχρι 1 δηλαδή οι τετμημένες στον άξονα Ox.

Για το y: Από $y = 0$ (εξίσωση του Ox), μέχρι $y = 1 - x$ (εξίσωση τομής του επιπέδου $x + y + z = 1$ και του επιπέδου $z = 0$ (του xOy)), δηλαδή η περιοχή R = ΟΑΒ.

Για το z: Από $z = 0$ (εξίσωση του xOy) μέχρι $z = 1 - x - y$ (εξίσωση του ΑΒΓ) δηλαδή ο όγκος V του τετραέδρου ΟΑΒΓ.

Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\iiint_V (x^2 - 3y + 2z)dxdydz = \int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{1-x}\left[\int_{z=0}^{1-x-y}\left(x^2 - 3y + 2z\right)dz\right]dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\left(x^2 - 3y\right)z + z^2\right]_0^{1-x-y}dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\left(x^2 - 3y\right)(1 - x - y) + (1 - x - y)^2\right]dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[x^2 - 3y - x^3 + 3xy - yx^2 + 3y^2 + (1-x-y)^2 \right] dy \right] dx =$$

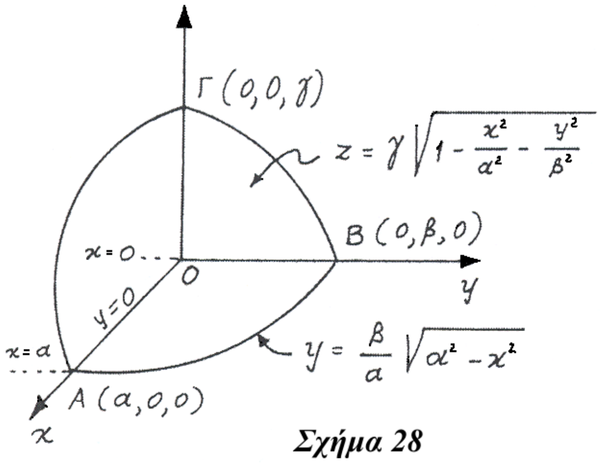
$$= \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{3y^2}{2} - x^3 y + \frac{3xy^2}{2} - \frac{y^2 x^2}{2} + y^3 - \frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right]_{y=0}^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\begin{array}{l} x^2(1-x) - \dfrac{3(1-x)^2}{2} - x^3(1-x) + \dfrac{3x(1-x)^2}{2} - \\ - \dfrac{(1-x)^2 x^2}{2} + (1-x)^3 + \dfrac{(1-x)^3}{3} \end{array} \right] dx = -\frac{1}{40}$$

Το τελευταίο είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα πολυωνυμικό ως προς x και υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

4) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ κάνοντας χρήση το τριπλό ολοκλήρωμα.

Λύση



Σχήμα 28

Όπως φαίνεται στο σχήμα 28, ο όγκος του ελλειψοειδούς είναι:

$$V = 8(\mathrm{OAB\Gamma}) = 8 \iiint_{(\mathrm{OAB\Gamma})} dxdydz \; .$$

Τα όρια μεταβολής για τους άξονες Ox, Oy, και Oz φαίνονται στο σχήμα. Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα θα έχουμε

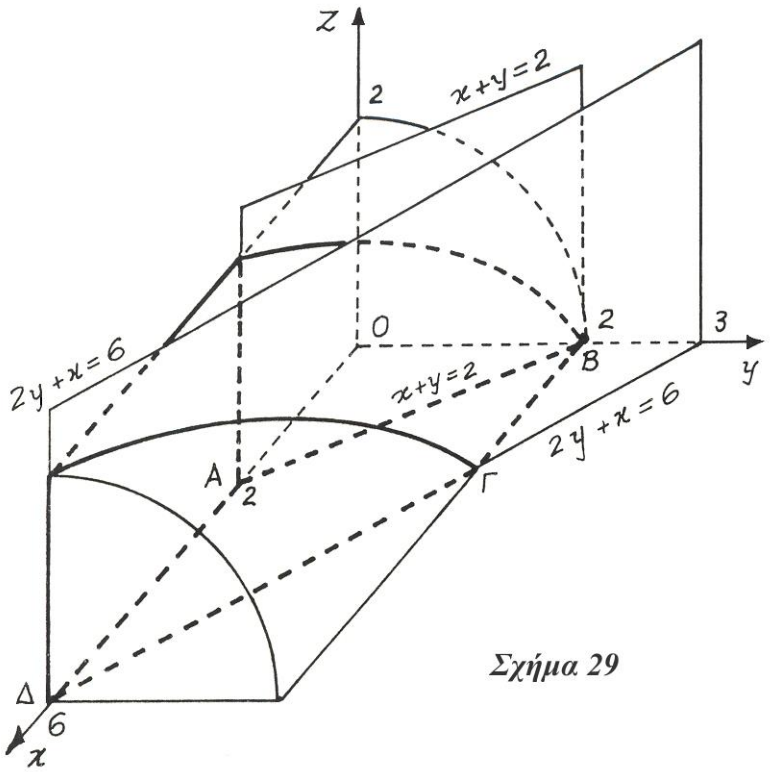
$$V = 8\int_0^{\alpha} \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \int_0^{\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}} dzdydx = 8\int_0^{\alpha} \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \left[z \right]_0^{\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}} dydx =$$

$$= 8\gamma \int_0^{\alpha} \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}} \, dydx = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$$

που είναι το ίδιο με ο διπλό ολοκλήρωμα του παραδείγματος 6 της παρ. 4.4.

5) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $F(x,y,z) = z$ στο στερεό που ορίζεται από τα επίπεδα xOz, (δηλ. το $y = 0$), xOy (δηλ. το z = 0), $x + y = 2$, $2y + x = 6$ και τον κύλινδρο $y^2 + z^2 = 4$.

Λύση



Σχήμα 29

Αν κάνουμε όλες τις γραφικές παραστάσεις των επιπέδων και των επιφανειών βλέπουμε ότι ο τόπος V της ολοκλήρωσης είναι το στερεό που προκύπτει από την τομή του τεταρτημόριου του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 4$ με τα επίπεδα $x + y = 2$ και $2y + x = 6$ που είναι και τα δύο παράλληλα προς τον άξονα Oz (σχήμα 29). Η βάση του στερεού αυτού, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Ο τόπος ολοκλήρωσης V παριστάνεται με έντονες διακεκομμένες γραμμές. Έτσι, τα όρια μεταβολής είναι:

Για το y: από $y = 0$ μέχρι $y = 2$,

για το x: από $x = 2 - y$ μέχρι $x = 6 - 2y$ και τέλος

για το z: από $z = 0$ μέχρι $z = \sqrt{4 - y^2}$ (θετική τετραγωνική ρίζα)

Επομένως το τριπλό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_{y=0}^{2} \left[\int_{x=2-y}^{6-2y} \left[\int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}} z dz \right] dx \right] dy = \int_0^2 \left[\int_{2-y}^{6-2y} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \int_{2-y}^{6-2y} (4 - y^2) \, dx \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\left(4 - y^2\right) x \right]_{2-y}^{6-2y} dy =$$

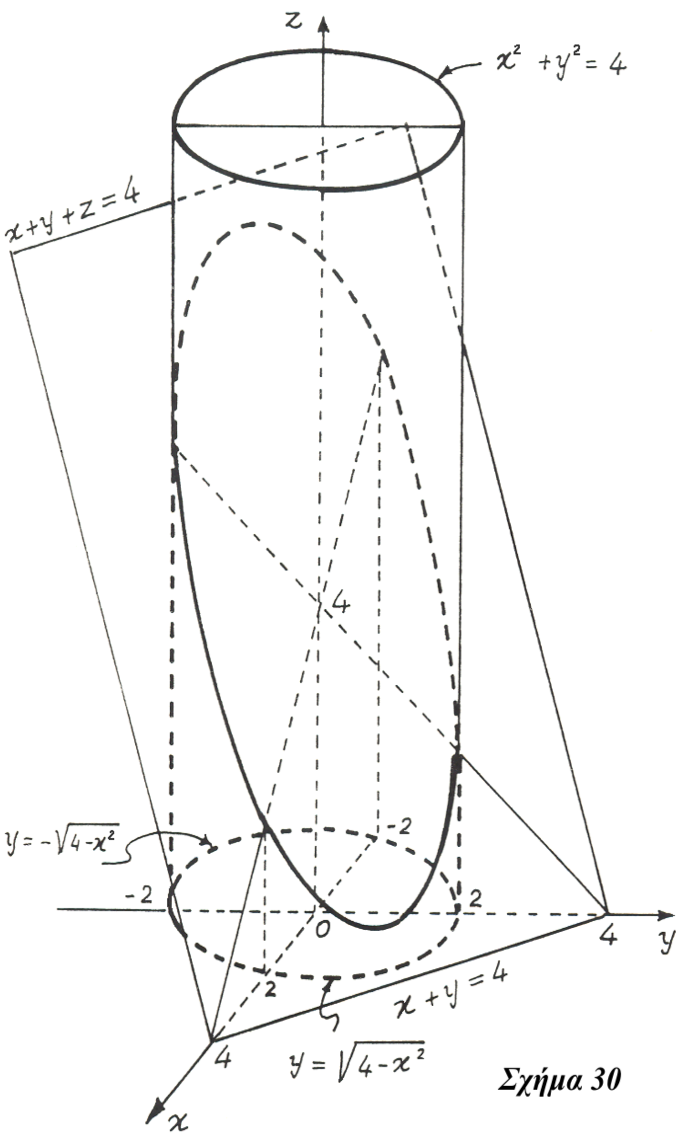
$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left[\left(4-y^2\right)(6-2y)-\left(4-y^2\right)(2-y)\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(16-4y-4y^2+y^3\right)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[16y-2y^2-\frac{4}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(32-8-\frac{32}{3}+4\right)=\frac{26}{3}\,.$$

6) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που ορίζεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=4$, το επίπεδο $x+y+z=4$ και το επίπεδο xOy ($z=0$).

Λύση

Η προβολή του στερεού αυτού (κυλίνδρου) στο επίπεδο xOy θα είναι ο κύκλος $x^2+y^2=4$. Κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις του κυλίνδρου $x^2+y^2=4$ και του επιπέδου $x+y+z=4$, βλέπουμε ότι τα όρια μεταβάλλονται ως εξής (σχήμα 30):



Σχήμα 30

Για το x: από $x = –2$ μέχρι $x = 2$,

για το y: από $y = -\sqrt{4-x^2}$ μέχρι $y = \sqrt{4-x^2}$ και τέλος

για το z: από $z = 0$ (επίπεδο xOy) μέχρι $z = 4 - x - y$.

Συνεπώς έχουμε:

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x-y} dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x-y)dydx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[(4-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\left[(4-x)\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{2}\right] - \left[(4-x)(-\sqrt{4-x^2}) - \frac{(-\sqrt{4-x^2})^2}{2}\right]\right]dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{2}(4-x)\sqrt{4-x^2}\,dx = 8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Υπολογίζουμε το $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$. Θέτουμε $x = 2\eta\mu t$, οπότε $dx = 2\sigma\upsilon\nu t dt$.

Για $x = 2$: $2 = 2\eta\mu t$ άρα $t = \pi/2$.

Για $x = –2$: $-2 = 2\eta\mu t$, άρα $t = -\pi/2$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται ($|\text{συν}t| = \text{συν}t \ \ \forall t \in [-\pi/2,\ \pi/2]$):

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sigma\upsilon\nu t\cdot 2\sigma\upsilon\nu t dt =$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 t dt = 4\left[\frac{t}{2} + \frac{\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi\ .$$

Υπολογίζουμε τώρα το $\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx.$ Είναι

$$\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(-2x)\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{1/2}d\left(4-x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{2} = \left[-\frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{3}\right]_{-2}^{2} = 0$$

Άρα ο τελικός όγκος είναι $V = 8\cdot 2\pi = 16\pi$.

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα παρακάτω τριπλά ολοκληρώματα:

α) $\int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{z=\frac{x^2+y^2}{4}}^{4} dzdydx$ (*Απάντηση*: 8π),

β) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x}\int_{z=0}^{xy} dzdydx$ (*Απάντηση*: $\frac{1}{24}$),

γ) $\int_{y=0}^{6}\int_{x=0}^{12-2y}\int_{z=0}^{4-\frac{2y}{3}-\frac{x}{3}} xdzdydx$ (*Απάντηση*: 144),

δ) $\int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{z=x-y}^{x+y} zdzdydx$ (*Απάντηση*: $-\frac{175}{4}$),

ε) $\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2}\int_{z=0}^{x+y} xdxdydz$ (*Απάντηση*: $\frac{7}{20}$),

στ) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{2-x-y} xyzdxdydz$ (*Απάντηση*: $\frac{11}{360}$),

ζ) $\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{z=0}^{1}\int_{\rho=0}^{2} z\rho^2 \eta\mu\theta\, d\rho d\theta dz$ (*Απάντηση*: $\frac{2\pi}{3}$).

4.10 Αλλαγή μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα

Όπως και στο διπλό ολοκλήρωμα, θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα σε ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων στο χώρο.

Θεωρούμε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_V F(x,y,z)dxdydz$ όπου οι x, y, z ορίζονται στο χώρο $V \subset R^3$ και η συνάρτηση $F(x,y,z)$ είναι συνεχής παντού στον V.

Έστω $x = f(u,v,w), \quad y = g(u,v,w), \quad z = h(u,v,w)$ (1)

οι σχέσεις που συνδέουν τις παλιές συντεταγμένες x, y, z με τις νέες συντεταγμένες u, v, w, όπου οι u, v, w ορίζονται στο χώρο $V' \subset R^3$ και οι (1) έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης για κάθε $(u, v, w) \in V'$. Οι χώροι V και V' θεωρούνται κλειστοί και περατωμένοι. Με τις σχέσεις (1) επιτυγχάνεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του χώρου V του τρισορθογώνιου συστήματος Oxyz στο χώρο V' του τρισορθογώνιου συστήματος Ouvw. Υποθέτουμε ακόμα ότι η Ιακωβιανή

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0\,.$$

Τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\iiint\limits_{V} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} G(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw \qquad (2)$$

όπου $G(u,v,w) = F\big(f(u,v,w),\, g(u,v,w),\, h(u,v,w)\big)$.

Ο τύπος (2) αποτελεί γενική περίπτωση αλλαγής μεταβλητών στο τριπλό ολοκλήρωμα και είναι πολύ χρήσιμος, ιδιαίτερα στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1. Αν ο μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων *x, y, z* γίνει στις ***κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, θ, z),*** τότε ως γνωστό (εφαρμογή 1 της 2.8.4), τα *x, y, z* εκφράζονται συναρτήσει των *ρ, θ, z* ως:

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta, \quad y = \rho\eta\mu\theta, \quad z = z$$

ενώ η ιακωβιανή J των *x, y, z* ως προς τα *ρ, θ, z* είναι (εφαρμογή 3. της 2.8.4)

$J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$. Επομένως ο (2) γίνεται:

$$\iiint\limits_{V} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} F(\rho\eta\mu\theta,\, \rho\sigma\upsilon\nu\theta,\, z)\cdot\rho\cdot d\rho d\theta dz\,. \qquad (3)$$

2. Αν ο μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων *x, y, z* γίνει στις ***<u>σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ)</u>***, τότε (εφαρμογή 2 της 2.8.4) τα *x, y, z* εκφράζονται συναρτήσει των *ρ, θ, φ* ως:

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi, \quad y = \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi, \quad z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$$

ενώ η ιακωβιανή J των *x, y, z* ως προς τα *ρ, θ, φ* είναι

$J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\eta\mu\varphi \neq 0$. Επομένως ο (2) γίνεται:

$$\iiint\limits_{V} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} F(\rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi,\, \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi,\, \rho\sigma\upsilon\nu\varphi)\cdot\rho^2\eta\mu\varphi\cdot d\rho d\theta d\varphi\,. \quad (4)$$

Αν *F*(*x, y, z*) = 1, τότε ο τύπος (2) παίρνει τη μορφή:

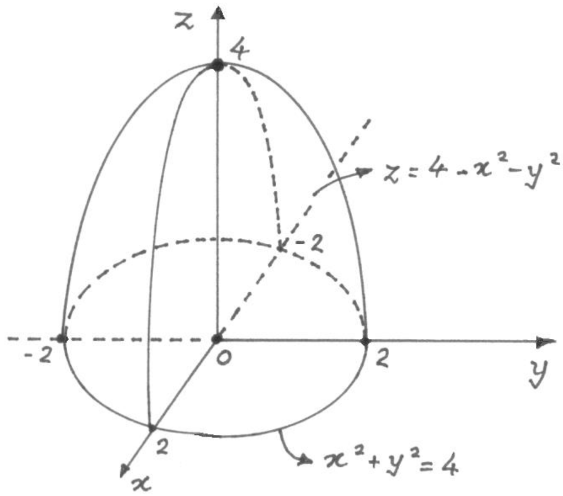
$$\iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{V'} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw \qquad (5)$$

και υπολογίζει ως γνωστό τον όγκο του χώρου V όταν μεταβαίνουμε απ' το σύστημα συντεταγμένων Oxyz στο αντίστοιχο νέο Ouvw.

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περιβάλλεται απ' το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$ και το επίπεδο xOy.

Λύση



Το παραβολοειδές, (διπλανό σχήμα) με την κορυφή Κ στον άξονα Oz στο σημείο K(0, 0, 4), προβάλλεται στο επίπεδο xOy κατά τον κυκλικό δίσκο $x^2 + y^2 \le 4$. Η τομή του παραβολοειδούς με το επίπεδο xOy (z = 0) είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ (προκύπτει για z = 0). Επομένως τα όρια ολοκλήρωσης είναι:

Για το x: από –2 μέχρι 2,

για το y: από $-\sqrt{4-x^2}$ μέχρι $\sqrt{4-x^2}$ και

για το z: από 0 μέχρι $4 - x^2 - y^2$.

Άρα ο όγκος είναι

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_{x=-2}^{2} \left(\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{z=0}^{4-x^2-y^2} dz \right) dy \right) dx = 8\pi \,.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι παρόμοιο με προηγούμενα και μπορεί να υπολογιστεί κατά τα γνωστά, σχετικά δύσκολα λόγω ριζικών.

Χρησιμοποιώντας όμως κυλινδρικές συντεταγμένες ρ, θ, z, η νέα στερεά περιοχή D έχει όρια

$$D = \left\{ (\rho, \theta, z) \in R^3 \,/\, 0 \le \rho \le 2,\; 0 \le \theta \le 2\pi,\; 0 \le z \le 4 - \rho^2 \right\}$$

Η Ιακωβιανή των x, y, z, ως προς ρ, θ, z είναι $J = \rho$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2}\int_{z=0}^{4-\rho^2} dz\rho\, d\rho\, d\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(4-\rho^2\right)\rho\, d\rho\, d\theta=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 d\theta=\int_{0}^{2\pi}4d\theta=8\pi.$$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$ όπου V είναι η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Λύση

Επειδή ο χώρος V είναι συμμετρικός και η συνάρτηση $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ είναι συμμετρική παντού στο V, θα χρησιμοποιήσουμε ως τόπο V το πρώτο ογδοημόριο της σφαίρας. Αυτή προβάλλεται στο xOy κατά τον κύκλο $x^2+y^2=a^2$.

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες για το πρώτο ογδοημόριο έχουμε

$$x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi,\quad y=\rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi,\quad z=\rho\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Οι μεταβολές που προκύπτουν για τα ρ, θ, φ είναι:

για το ρ: από 0 μέχρι α,

για το θ: από 0 μέχρι $\pi/2$ και

για το φ: από 0 μέχρι $\pi/2$.

Έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι οκταπλάσιο της τιμής του ολοκληρώματος με τα όρια αυτά.

Η ιακωβιανή των x, y, z συναρτήσει των ρ, θ, φ είναι

$$J=-\rho^2\eta\mu\theta \;\; o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \;\; \left|J\right|=\rho^2\eta\mu\theta .$$

Έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται τελικά

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=8\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\alpha} \rho^2\cdot\rho^2\eta\mu\theta\cdot d\rho\, d\theta d\varphi=$$

$$=8\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{\alpha^5}{5}\eta\mu\theta d\theta d\varphi=8\frac{\alpha^5}{5}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[-\sigma\upsilon\nu\theta\right]_0^{\pi/2}d\varphi=$$

$$=\frac{8}{5}\alpha^5\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[0-(-1)\right]d\varphi=\frac{4\alpha^5}{5}.$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν οι όγκοι των παρακάτω τόπων με τριπλή ολοκλήρωση.

α) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=1$ ($A\pi$: $V=1/6$)

β) $z=0, \quad x^2+y^2=1, \quad z=x^2+y^2$ ($A\pi$: $V=\pi/2$)

γ) $z=5-x^2-y^2 \quad z=1, \quad x\geq 0, \quad y\leq 0$ ($A\pi$: $V=2\pi$)

δ) $x^2+z^2=1, \quad y^2+z^2=1$ ($A\pi$: $V=\frac{16}{3}$)

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ όπου D ο τόπος που περικλείεται από τις σφαίρες $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$, $x^2+y^2+z^2=\beta^2$, ($0<\beta<\alpha$).

4.11 Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος στη Μηχανική

Θεωρούμε στο χώρο ένα στερεό Σ με όγκο V στο οποίο υποθέτουμε ότι η συνεχής συνάρτηση κατανομής της πυκνότητας δ αυτού του υλικού είναι συνάρτηση μόνο της θέσης του, δηλαδή $\delta = \delta(x, y, z)$. Τότε

1. Η συνολική μάζα m του στερεού Σ δίνεται απ' τον τύπο

$$m=\iiint\limits_V \delta(x,y,z)\,dxdydz \tag{1}$$

ενώ για $\delta(x, y, z) = c$ η μάζα γίνεται

$$m=c\iiint\limits_V dxdydz \tag{2}$$

2. Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους (Κ. Β.) του στερεού δίνονται απ' τους τύπους

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\cdot\delta(x,y,z)\cdot dxdydz \\ y_G &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\cdot\delta(x,y,z)\cdot dxdydz \\ z_G &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\cdot\delta(x,y,z)\cdot dxdydz\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Για $\delta(x, y, z) = c$ σταθερό οι τελευταίοι τύποι γίνονται

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_V x \cdot dxdydz \ , \quad y_G = \frac{1}{m}\iiint_V y \cdot dxdydz \ , \quad z_G = \frac{1}{m}\iiint_V z \cdot dxdydz \qquad (4)$$

όπου το m αντικαθίσταται από τους τύπους (1) ή (2) κατά περίπτωση.

3. Η ροπή αδράνειας του στερεού δίνεται απ' τους τύπους:

i) ως προς τον Οx: $I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\,dxdydz$

ii) ως προς τον Οy: $I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\,dxdydz$

iii) ως προς τον Οz: $I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\delta(x, y, z)\,dxdydz$ (5)

iv) ως προς την αρχή Ο: $I_O = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\,dxdydz$

v) ως προς το επίπεδο Οxy: $I_{xy} = \iiint_V z^2\, \delta(x, y, z)\,dxdydz$

vi) ως προς το επίπεδο Οyz: $I_{yz} = \iiint_V x^2 \delta(x, y, z)\,dxdydz$

vii) ως προς το επίπεδο Οzx: $I_{zx} = \iiint_V y^2\, \delta(x, y, z)\,dxdydz$

Παραδείγματα

1) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της μάζας ομογενούς ημισφαίριου με πυκνότητα $\delta(x, y, z)$ = σταθερή και ακτίνα α.

Λύση

Επειδή το ημισφαίριο έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα z, το κέντρο βάρους του θα βρίσκεται πάνω σ' αυτόν (δηλαδή $x_G = y_G = 0$).

Ως γνωστό, $m = \delta V = c \cdot \frac{2}{3}\pi\alpha^3$ ($V_{\sigma\phi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$). Άρα

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_V zdxdydz = \frac{3}{2\pi\alpha^3}\iiint_V zdxdydz =$$

$$= \frac{3}{2\pi\alpha^3}\int_{x=\alpha}^{\alpha}\int_{y=-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}} zdzdydx$$

Για την επίλυσή του χρησιμοποιούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi, \quad y = \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi, \quad z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$$

με $|J| = |-\rho^2\eta\mu\varphi| = \rho^2\eta\mu\varphi$ και όρια μεταβολής: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \rho \le \alpha$

$$x_G = \frac{3}{2\pi\alpha^3}\cdot\frac{\alpha^4}{4}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\alpha} \rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\rho^2\eta\mu\varphi\cdot d\rho\, d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{3}{2\pi\alpha^3}\cdot\frac{\alpha^4}{4}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{3\alpha}{8\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\eta\mu(2\varphi)d(2\varphi)d\theta = \frac{3\alpha}{32\pi}\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\sigma\upsilon\nu 2\varphi\right]_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= \frac{3\alpha}{32\pi}\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-(-1-1)\right] d\theta = \frac{3}{8}\alpha\,.$$

Επομένως οι συντεταγμένες του Κ. Β. είναι $(0, 0, 3a/8)$.

2) Να βρεθεί το κέντρο μάζας του πρώτου ογδοημόριου της ομογενούς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$.

Λύση

Επειδή η σφαίρα είναι ομογενής είναι $\delta(x, y, z) = c$ σταθερή, άρα

$m = c\iiint_D dxdydz$ και επειδή ο όγκος σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$ έχουμε

$$m = c\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi\alpha^3 = \frac{1}{6}c\pi\alpha^3$$

Η τετμημένη του Κ. Β. της μάζας δίνεται από τον τύπο

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_D xcdxdydz = \frac{c}{\frac{1}{6}c\pi\alpha^3}\iiint_D xdxdydz = \frac{6}{\pi\alpha^3}\iiint_D xdxdydz$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$D = \{(\rho, \theta, \phi) \,/\, 0 \le \rho \le \alpha,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2\}$. Έτσι,

$$x_G = \frac{6}{\pi\alpha^3}\iiint_D \rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi\cdot\rho^2\eta\mu\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{6}{\pi\alpha^3}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{\rho=0}^{\alpha}\rho^3 d\rho\right]\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta\right]\eta\mu^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{6}{\pi\alpha^3}\cdot\frac{\alpha^4}{4}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\alpha}{8}$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$y_G = \frac{6}{\pi\alpha^3}\iiint_D y dxdydz = \frac{6}{\pi\alpha^3}\iiint_D \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi\cdot\rho^2\eta\mu\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{6}{\pi\alpha^3}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\int_{\rho=0}^{\alpha}\rho^3 d\rho\right]\eta\mu\theta\, d\theta\right]\eta\mu^2\varphi\, d\varphi = \frac{6}{\pi\alpha^3}\cdot\frac{\alpha^4}{4}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\alpha}{8}\ \ \kappa\alpha\iota$$

$$z_G = \frac{6}{\pi\alpha^3}\iiint_D z dxdydz = \frac{3\alpha}{8}.\ \text{Άρα}\ K\left(\frac{3\alpha}{8}, \frac{3\alpha}{8}, \frac{3\alpha}{8}\right).$$

3) Να υπολογιστεί η μάζα μιας σφαίρας ακτίνας α, αν η πυκνότητά της μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα προς το τετράγωνο της απόστασης απ' το κέντρο.

Λύση

Η απόσταση ενός σημείου Ρ απ' το κέντρο της σφαίρας Ο είναι

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.\ \text{Άρα}$$

$$\delta(x,y,z) = \frac{k}{\rho^2} = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}.$$

Επομένως η μάζα *m* γίνεται

$$m = \iiint_V \frac{k}{x^2+y^2+z^2} dxdydz\ .$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, όπως και πριν, με όρια μεταβολής:

$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le \alpha\ \text{ βρίσκουμε}$$

$$m = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{\alpha}\frac{k}{\rho^2}\cdot\rho^2\eta\mu\varphi\, d\rho\, d\varphi d\theta = ka\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\eta\mu\varphi\, d\varphi d\theta =$$

$$ka\int_0^{2\pi}\left[-\sigma\upsilon\nu\varphi\right]_0^{\pi} d\theta = 2ka\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi ka\,.$$

4) Η πυκνότητα του τόπου *D* που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$ και $z=0$ καθώς και το επίπεδο $x+y+z=1$ είναι $\delta(x,y,z)=kx,\ k>0$. Να βρεθούν συναρτήσει του *k*:

α) η μάζα *m* του στερεού,

β) το κέντρο βάρους του (Κ. Β.) και

γ) η ροπή αδράνειάς του ως προς το επίπεδο Oyz.

Λύση

α) Το επίπεδο $x+y+z=1$ τέμνει το $z=0$ κατά την ευθεία $x+y=1$ (λύση του συστήματος των εξισώσεων των επιπέδων). Άρα ο τόπος *D* είναι (βλέπε παράδειγμα 3 της 4.9.)

$$D=\{(x,y,z)\ /\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}.$$

Η μάζα του στερεού δίνεται απ' τον τύπο $m=\iiint\limits_D \delta(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_D kx\cdot dxdydz$.

$$m=\iiint\limits_D kx\cdot dxdydz=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y}kxdz\right]dy\right]dx=$$

$$=k\int_0^1\left[\int_0^{1-x}x(1-x-y)\,dy\right]dx=k\int_0^1 x\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=k\int_0^1 x\left[(1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx=k\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\,dx=\frac{k}{24}.$$

β) Οι συντεταγμένες του Κ. Β. είναι (τύπος (3) της 4.11)

$$x_G=\frac{1}{m}\iiint\limits_D x\cdot kx\cdot dxdydz=\frac{1}{k/24}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y}kx^2dz\right]dy\right]dx=$$

$$=24\int_0^1 x^2\,\frac{(1-x)^2}{2}\,dx=\frac{2}{5}$$

$$y_G=\frac{1}{m}\iiint\limits_D y\cdot kx\cdot dxdydz=\frac{1}{k/24}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y}kxydz\right]dy\right]dx=$$

$$=24\int_0^1\left[\int_0^{1-x}xy(1-x-y)\,dy\right]dx=24\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=24\int_0^1 x\frac{(1-x)^3}{6}\,dx=\frac{1}{5}$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_D z\cdot kx\cdot dxdydz = \frac{1}{k/24}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y} kxzdz\right]dy\right]dx =$$

$$= 24\int_0^1\left[\int_0^{1-x} x\frac{1}{2}(1-x-y)^2 dy\right]dx = 12\int_0^1 -x\left[\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= 4\int_0^1 x(1-x)^3 dx = \frac{1}{5}$$

Επομένως το Κ. Β. του στερεού είναι το σημείο $G(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

γ) Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς το επίπεδο Oyz είναι (τύπος (5))

$$I_{yz} = \iiint_D x^2\delta(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D x^2kx\,dxdydz = k\int_0^1\left[\int_0^{1-x} x^3(1-x-y)\,dy\right]dx =$$

$$= k\int_0^1 x^3\left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = k\int_0^1 x^3\,\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{k}{120}.$$

5) Να βρεθεί το κέντρο βάρους της μάζας ενός ορθού κυλίνδρου ακτίνας *r* και ύψους *h*, αν η πυκνότητα μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση απ’ τη βάση.

Λύση

Η πυκνότητα είναι $\delta(x, y, z) = kz$. Επομένως η μάζα είναι

$$m = \iiint_V \delta(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V kz\cdot dxdydz$$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες x =ρσυνθ, y = ρημθ, z = z με όρια μεταβολής $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le r$, $0 \le z \le h$ και $J = \rho$. Έτσι έχουμε

$$m = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{r}\int_{z=0}^{h} kz\cdot\rho dz d\rho d\theta = \frac{kh^2}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{r}\rho d\rho d\rho = \frac{kh^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{k\pi h^2r^2}{2}.$$

Προφανώς το κέντρο βάρους του κυλίνδρου λόγω συμμετρίας θα βρίσκεται πάνω στον άξονα των z ($x_G, y_G = 0$). Είναι

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_V \delta(x,y,z)\,z\cdot dxdydz = \frac{2}{k\pi h^2r^2}\iiint_V kz^2dxdydz =$$

$$= \frac{2}{k\pi h^2r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{r}\int_{z=0}^{h} kz^2\rho dz d\rho d\theta = \frac{2h}{3\pi r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{r}\rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{2h}{3\pi r^2} \cdot \frac{r^2}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{2h}{3\pi r^2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \frac{2h}{3}.$$

Επομένως οι συντεταγμένες του Κ. Β. του ορθού κυλίνδρου είναι $(0, 0, 2h/3)$.

6) Σε μια σφαίρα με ακτίνα $R = 1$ έχει κατανεμηθεί η μάζα της με πυκνότητα $\delta = \dfrac{1}{1+\rho^2}$ σε απόσταση ρ από το κέντρο της. Να βρεθεί η συνολική μάζα της.

Λύση

Ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων παίρνουμε το κέντρο της σφαίρας. Η συνολική μάζα m που έχει κατανεμηθεί στη σφαίρα δίνεται απ' τον τύπο

$$\iiint_D \delta(x, y, z) dxdydz \quad \text{όπου} \quad \delta(x, y, z) = \frac{1}{1+\rho^2}.$$

Προφανώς χρησιμοποιούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες ρ, θ, φ οι οποίες ορίζουν τον τόπο D ως εξής

$$D = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) / 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi \right\}.$$

Επομένως

$$\iiint_D \delta(x, y, z) dxdydz = \iiint_D \frac{1}{1+\rho^2} \rho^2 \eta\mu\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left[\int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} \rho^2 d\rho \right] \eta\mu\varphi\, d\varphi \right] d\theta$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} d\rho = \int_0^1 \frac{\rho^2+1-1}{\rho^2+1} d\rho = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+\rho^2}) d\rho = \int_0^1 d\rho - \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} d\rho =$$

$$= [\rho]_0^1 - [\tau o\xi\varepsilon\varphi\, \rho]_0^1 = 1 - (\tau o\xi\varepsilon\varphi 1 - \tau o\xi\varepsilon\varphi 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Άρα $m = 2\pi[-\sigma\upsilon\nu\phi]_0^{\pi}(1 - \pi/4) = 2\pi[-(-1-1)](1-\pi/4) = 4\pi - \pi^2$.

Ασκήσεις

1) Η πυκνότητα μιας σφαίρας ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων είναι $\delta(x, y, z) = k\rho$, $k > 0$ σταθερή και ρ η απόσταση από το κέντρο της. Να βρεθούν συναρτήσει του k: α) η μάζα m της σφαίρας και β) η ροπή αδράνειάς της ως προς το επίπεδο Oxy. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθούν σφαιρικές συντεταγμένες).

(*Απάντηση*: α) $m = k\pi R^4$, β) $I_{xy} = \dfrac{2k\pi R^6}{9}$)

2) Να βρεθεί η μάζα του τόπου που ορίζεται από τις σχέσεις

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$, αν η πυκνότητα είναι $\delta(x, y, z) = xyz$ (*Απ.* $\dfrac{4}{3}$)

3) Να βρεθεί ο όγκος και το κέντρο βάρους του τόπου που ορίζεται από το επίπεδο $x/\alpha + y/\beta + z/\gamma = 1$, με $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ όπου α, β, γ είναι οι συντεταγμένες επί την αρχή του επιπέδου. (*Απάντηση*: $V = \alpha\beta\gamma/6$, $x_G = \dfrac{\alpha}{4}$, $y_G = \dfrac{\beta}{4}$, $z_G = \dfrac{\gamma}{4}$)

4) Να βρεθεί το κέντρο βάρους ενός ημισφαιρικού κελύφους που έχει εξωτερική ακτίνα α και εσωτερική ακτίνα β, αν η πυκνότητά του διατηρείται σταθερή.

(*Απάντηση*: $x_G = y_G = 0$, $z_G = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^3 - \beta^3}$)

Γ. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.12 Ορισμοί

Στους ορισμούς του διπλού και τριπλού ολοκληρώματος, όπως είδαμε, (αλλά και του απλού βεβαίως), πρέπει η συνάρτηση να είναι φραγμένη και η αντίστοιχη περιοχή να είναι επίσης φραγμένη.

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ ή $f(x,y)$ ή $f(x)$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή A του R^3 ή του R^2 ή του R, αν δεν απειρίζεται στην A. Επίσης μια περιοχή A του R^3 ή του R^2 ή του R είναι φραγμένη, αν η απόσταση δύο οποιωνδήποτε σημείων της P_1, P_2 είναι πεπερασμένος αριθμός, δηλαδή αν υπάρχει $M \in R$, τέτοιος ώστε (βλέπε παράγρ. 2.1.2.1.)

$$d(P_1,\ P_2) \le M \quad \text{για κάθε } P_1,\ P_2 \in A\ .$$

Όταν δεν ισχύουν οι περιορισμοί αυτοί που θέσαμε, τότε τα ολοκληρώματα που ορίζονται λέγονται **γενικευμένα** ολοκληρώματα. Δηλαδή, στα γενικευμένα ολοκληρώματα, είτε η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στην αντίστοιχη περιοχή, είτε η περιοχή η ίδια δεν είναι φραγμένη.

Υπάρχουν λοιπόν τα εξής είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

1. Φραγμένης συνάρτησης σε μη φραγμένη περιοχή,

2. Μη φραγμένης συνάρτησης σε φραγμένη περιοχή, και

3. Μη φραγμένης συνάρτησης σε μη φραγμένη περιοχή.

Τα πρώτα ολοκληρώματα ονομάζονται γενικευμένα $1^{ου}$ είδους, τα δεύτερα γενικευμένα $2^{ου}$ είδους και τα τρίτα γενικευμένα $3^{ου}$ είδους.

Παραδείγματα

1) Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους γιατί η περιοχή που ορίζεται $[1, \infty)$ είναι μη φραγμένη.

2) Το ολοκλήρωμα $\int_{-5}^{5} \frac{dx}{x^2-2}$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους γιατί η συνάρτηση $1/(x^2-2)$ είναι μη φραγμένη (απειρίζεται στα σημεία $\pm\sqrt{2}$).

3) Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα 3^{ου} είδους γιατί και συνάρτηση είναι μη φραγμένη (δεν ορίζεται στο σημείο $x=0$) και η περιοχή που ορίζεται $(-\infty, \infty)$ δεν είναι φραγμένη.

4) Το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ όπου $D=\left\{(x,y) \,/\, x^2+y^2 \le 1\right\}$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα 2^{ου} είδους, γιατί η συνάρτηση $f(x,y)=1/(x^2+y^2)$ απειρίζεται στο σημείο $(0,0)\in D$.

5) Το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{x^2+y^2}{x-y}dxdy$ όπου $D=\left\{(x,y) \,/\, 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\right\}$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα 2^{ου} είδους, γιατί η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ απειρίζεται κατά μήκος της ευθείας $x-y=0$, η οποία διασχίζει την περιοχή *D*.

6) Το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{dxdy}{\ln(x^2+y^2)}$ όπου $D=\left\{(x,y) \,/\, 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$ είναι επίσης ολοκλήρωμα 2^{ου} είδους, γιατί η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$ δεν ορίζεται πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=1$, ο οποίος ανήκει στην περιοχή *D*.

4.13 Επίλυση γενικευμένων ολοκληρωμάτων

Όλα τα ολοκληρώματα που αναφέραμε πριν θεωρούνται γενικευμένα ολοκληρώματα υπό τον όρο ότι υπάρχουν (είναι πεπερασμένα). Μόνο τότε ορίζονται ως γενικευμένα. Ο υπολογισμός αυτών είναι γενικά πολύπλοκος και περιέχει πολλές περιπτώσεις ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης και το είδος της περιοχής.

Εμείς θα αναφέρουμε δύο περιπτώσεις ορισμού και υπολογισμού αυτών.

1^{η} περίπτωση:

Ολοκληρώματα φραγμένων συναρτήσεων σε μη φραγμένα σύνολα

Έστω η συνάρτηση $f(x,y)\ge 0$ που ορίζεται σ' ένα σύνολο *D* μη φραγμένο. Υποθέτουμε ότι η *f* είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1 \subset D$ και επομένως, αν με μια βοηθητική καμπύλη *c* αποκόψουμε από το *D* μια κλειστή περιοχή D_1, τότε υ-πάρχει το ολοκλήρωμα

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy\ .$$

Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία καμπύλων $c_1, c_2, ..., c_n$ όπου $n \to \infty$, δημιουργώντας την αντίστοιχη ακολουθία κλειστών περιοχών $D_1, D_2, ..., D_n$ που περικλείονται απ' αυτές, όπου $D_n \to D$, τότε το όριο του ολοκληρώματος (1) εφόσον υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός λέγεται *γενικευμένο ολοκλήρωμα* της *f* στο *μη φραγμένο σύνολο* (περιοχή) *D* και συμβολίζεται με $\iint_D f(x,y)dxdy$

δηλαδή είναι: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy\ . \qquad (1)$$

2η περίπτωση:

Ολοκληρώματα με μη φραγμένη συνάρτηση σε μια κλειστή περιοχή *D*.

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) \geq 0$ η οποία δεν είναι φραγμένη στην περιοχή ενός σημείου $P_0 \in D$, όπου *D* κλειστή περιοχή. Υποθέτουμε ότι η *f* είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1 \subset D$ που δεν περιέχει το P_0. Περικλείουμε το σημείο P_0 σε μια κλειστή καμπύλη *c*. Αν από την *D* αφαιρέσουμε το τμήμα που περικλείεται από την *c*, προκύπτει μια κλειστή περιοχή D_1 για την οποία το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

υπάρχει. Αν *ρ* είναι η απόσταση του σημείου P_0 από την καμπύλη *c*, τότε το όριο

$$\lim_{\rho\to 0}\iint_{D_1} f(x,y)dxdy \qquad (2)$$

εφόσον υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός λέγεται *γενικευμένο ολοκλήρωμα* της *μη φραγμένης συνάρτησης f* στην περιοχή *D* και συμβολίζεται με $\iint_D f(x,y)dxdy$

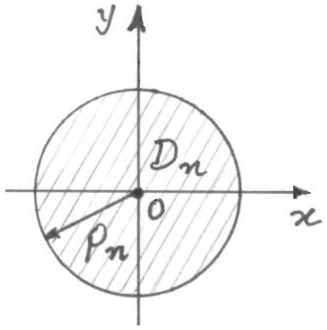
δηλαδή είναι: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\rho\to 0}\iint_{D_1} f(x,y)dxdy\ .$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \text{ όπου } D = R^2 \text{ (μη φραγμένο σύνολο)}$$

Λύση



Το ολοκλήρωμα I γράφεται και ως $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

Προφανώς η συνάρτηση $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)^{3/2}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1 \subset R^2$. Θεωρούμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών (ρ_n) με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = +\infty$ και την ακολουθία των κλειστών περιοχών (D_n) (βλέπε διπλανό σχήμα), όπου

$$D_n = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ x^2 + y^2 \le \rho_n^2\right\} \ n \in N^*.$$

Επειδή για κάθε $n \in N^*$ η περιοχή D_n είναι κλειστή, το ολοκλήρωμα

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \text{ υπάρχει.}$$

Άρα (1η περίπτωση), το γενικευμένο ολοκλήρωμα I υπάρχει, όταν υπάρχει το όριο

$\lim_{\rho_n\to\infty} I_n$ και τότε είναι $I = \lim_{\rho_n\to\infty} I_n$.

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες η περιοχή D_n γίνεται

$$D_n' = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 \ / -\pi \le \theta \le \pi, \ 0 \le \rho \le \rho_n\right\} \ n \in N^* \text{ και}$$

$$I_n = \iint_{D_n'} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(1+\rho^2)^{3/2}} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{\rho_n} \frac{\rho\, d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}}\right] =$$

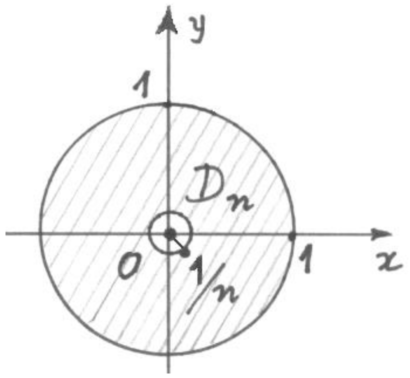
$$= 2\pi \frac{1}{2}\left[\frac{(1+\rho^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^{\rho_n} = 2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{1+\rho_n^2}}$$

Άρα $I = \lim_{\rho_n\to\infty} I_n = \lim_{\rho_n\to\infty}\left[2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{1+\rho_n^2}}\right] = 2\pi$.

2) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy \text{ , όπου } D = \left\{(x,y) \in R^2 \;/\; x^2+y^2 \le 1\right\}$$

Λύση



Η $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ στην περιοχή D απειρίζεται μόνο στο σημείο (0, 0) του D.

Θεωρούμε την ακολουθία των περιοχών του επιπέδου (βλέπε διπλανό σχήμα)

$$D_n = \left\{ (x,y) \in R^2 \;/\; \frac{1}{n} \le x^2+y^2 \le 1 \right\} \quad n \in N^*$$

η οποία ακολουθία τείνει στην περιοχή D όταν το $n \to \infty$. Προφανώς η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε μία τέτοια περιοχή. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I στις περιοχές D_n χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες και η περιοχή D_n γίνεται

$$D_n' = \left\{ (\rho,\theta) \in R^2 \;/ -\pi \le \theta \le \pi,\; \frac{1}{n} \le \rho \le 1 \right\} \quad n \in N^* \text{ και άρα}$$

$$I_n = \iint_{D_n'} \ln \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta = 2\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln \rho \, d\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right) d\theta =$$

$$= 2\cdot 2\pi \left(\left[\frac{\rho^2}{2}\ln\rho\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{1}{\rho}d\rho \right) = 4\pi\left[\frac{1}{2n^2}\ln n - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} 4\pi\left[\frac{1}{2n^2}\ln n - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] = 4\pi\left[\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{4}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

Είναι όμως (κανόνας L' Hospital)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \text{ . Άρα}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 4\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}(1-0^2)\right) = -\pi \text{ .}$$

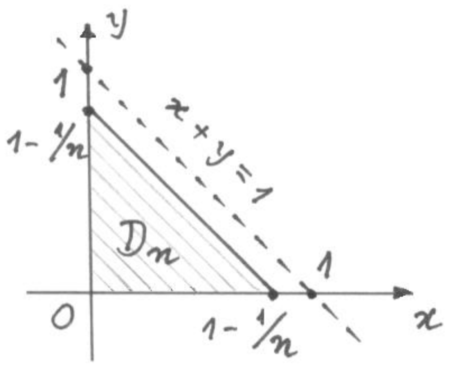
Επομένως $I = \iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = -\pi$.

3) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{1}{(1-x-y)^2}\,dxdy\ ,$$

όπου *D* είναι η περιοχή που περικλείεται από την ευθεία $x+y=1$ και τους άξονες.

Λύση



Προφανώς η περιοχή *D* γράφεται

$$D=\{(x,y)\ /\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x\}.$$

Επίσης, η συνάρτηση $f(x,y)=1/(1-x-y)^2$ απειρίζεται κατά μήκος της ευθείας $x+y-1=0$, η οποία ανήκει στον *D*.

Θεωρούμε την ακολουθία περιοχών του επιπέδου (βλέπε διπλανό σχήμα)

$$D_n=\left\{(x,y)\ /\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x-\frac{1}{n}\right\}\quad n\in N^*$$

η οποία τείνει στην περιοχή *D* για $n\to\infty$, όπου η *f* είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε μία τέτοια περιοχή. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα *I* στις περιοχές D_n. Είναι

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{1}{(1-x-y)^2}\,dxdy=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_0^{1-x-\frac{1}{n}}\frac{1}{(1-x-y)^2}\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{1-x-y}\right]_{y=0}^{1-x-\frac{1}{n}}dx=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(n-\frac{1}{1-x}\right)dx=n\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left[\ln(1-x)\right]_0^{1-\frac{1}{n}}=n-1-\ln n$$

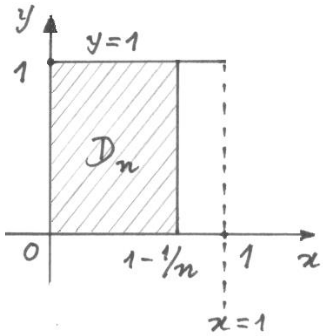
οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n-1-\ln n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n}\right)=+\infty(1-0-0)=+\infty$

(διότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$).

Άρα $\iint_D \frac{1}{(1-x-y)^2}\,dxdy=+\infty$, δηλαδή το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

4) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{y+1}{(x-1)^3}\,dxdy$, όπου $D=\{(x,y)\,/\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.

Λύση



Η $f(x,y)=\dfrac{y+1}{(x-1)^3}$ στην περιοχή D απειρίζεται κατά μήκος της ευθείας $x=1$, η οποία ανήκει στην περιοχή D. Θεωρούμε την ακολουθία περιοχών του επιπέδου

$$D_n=\left\{(x,y)\,/\,0\le x\le 1-\frac{1}{n},\ 0\le y\le 1\right\}\ n\in N^*$$

(βλέπε διπλανό σχήμα) η οποία τείνει στην D για $n\to\infty$, όπου η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε τέτοια περιοχή. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I στις D_n. Είναι

$$I_n=\iint\limits_{D_n}\frac{y+1}{(x-1)^3}dxdy=\int_0^1(1+y)\,dy\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{(x-1)^3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{-2}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}(n^2-1)$$

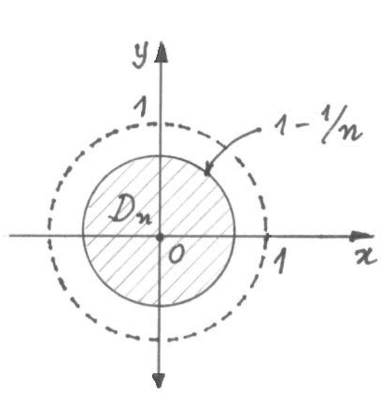
οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}(n^2-1)\right)=-\infty$, επομένως $\iint\limits_D\frac{y+1}{(x-1)^3}dxdy=\lim\limits_{n\to\infty}I_n=-\infty$,

δηλαδή το αρχικό γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

5) Να υπολογιστεί συναρτήσει του k το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\iint\limits_D\frac{1}{(1-x^2-y^2)^k}dxdy$, όπου $D=\{(x,y)\in R^2\,/\,x^2+y^2\le 1\ \text{ και }\ 0<k<1\}$.

Λύση



Η $f(x,y)=\dfrac{1}{(1-x^2-y^2)^k}$ απειρίζεται πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=1$, ο οποίος ανήκει στην περιοχή D. Θεωρούμε την ακολουθία περιοχών του επιπέδου

$$D_n=\left\{(x,y)\,/\,0\le\sqrt{x^2+y^2}\le 1-\frac{1}{n}\right\}\ n\in N^*,$$

(βλέπε διπλανό σχήμα) η οποία τείνει στην περιοχή D για $n \to \infty$, όπου η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε τέτοια περιοχή και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στις D_n χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, οπότε η νέα ακολουθία περιοχών είναι

$$D'_n = \left\{ (\rho, \theta) \,/\, 0 \le \rho \le 1 - \frac{1}{n},\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\},\ n \in N^*,\ \text{οπότε}$$

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{(1-\rho^2)^k} \rho \, d\rho \right) d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{1-k} \left[(1-\rho^2)^{1-k} \right]_0^{1-\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\pi}{k-1} \left[\left(1 - (1 - \frac{1}{n})^2 \right)^{1-k} - 1^{1-k} \right]$$

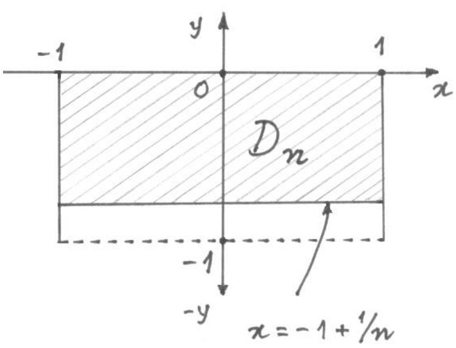
Επομένως,

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{k-1} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - (1 - \frac{1}{n})^2 \right)^{1-k} - 1 \right] = \frac{\pi}{k-1}.$$

6) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+y}} dxdy$,

όπου $D = \left\{ (x, y) \in R^2 \,/\, -1 \le x \le 1 \text{ και } -1 \le y \le 0 \right\}$.

Λύση



Επειδή η $f(x, y) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+y}}$ απειρίζεται μόνο κατά μήκος της ευθείας $y = -1$, η οποία ανήκει στην περιοχή D, θεωρούμε την ακολουθία των περιοχών του επιπέδου (βλέπε διπλανό σχήμα), οπότε:

$$D_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \,/\, -1 \le x \le 1 \text{ και } -1 + \frac{1}{n} \le y \le 0 \right\}\ n \in N^*$$

η οποία τείνει στην περιοχή D για $n \to \infty$, όπου η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε μία τέτοια περιοχή και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f στις περιοχές D_n. Είναι

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+y}} dxdy = \int_{-1}^{1} e^{-x} dx \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = -\left[e^{-x} \right]_{-1}^{1} \left[2\sqrt{1+y} \right]_{-1+\frac{1}{n}}^{0} = 2\left(e - \frac{1}{e} \right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

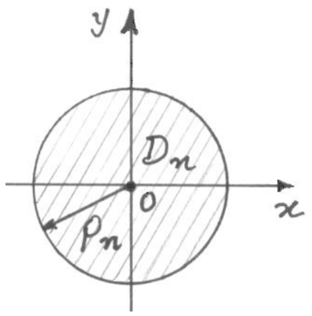
οπότε $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[2\left(e-\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = 2\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

Άρα $\iint\limits_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+y}}dxdy = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 2\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

7) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, όπου $D = R^2$, δηλαδή ολόκληρο το επίπεδο xOy, και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Λύση

Η περιοχή *D* δεν είναι φραγμένη και γράφεται αναλυτικά



$$D = \left\{(x,y)\in R^2 \;/\; -\infty < x < +\infty \;\text{ και }\; -\infty < y < +\infty\right\}.$$

Θεωρούμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών (ρ_n) με $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = +\infty$ και την ακολουθία των κλειστών περιοχών (D_n) όπου (βλέπε διπλανό σχήμα)

$$D_n = \left\{(x,y)\in R^2 \;/\; x^2+y^2 \le \rho_n^2\right\} \; n\in N^*.$$

Με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες η περιοχή D_n γίνεται

$$D'_n = \left\{(\rho,\theta)\in R^2 \;/\; 0\le\theta\le 2\pi,\; 0\le\rho\le\rho_n\right\} \; n\in N^*$$

η οποία τείνει στην περιοχή *D* για $\rho_n\to\infty$, και η *f* είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε μία τέτοια περιοχή και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της *f* στις περιοχές D'_n. Είναι

$$I_n = \iint\limits_{D'_n} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\rho_n} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho_n} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\left[e^{-\rho^2}\right]_0^{\rho_n}\right) = \pi(1-e^{-\rho_n^2}).$$

Επομένως $\lim\limits_{\rho_n\to\infty} I_n = \lim\limits_{\rho_n\to\infty}\pi(1-e^{-\rho_n^2}) = \pi$.

Άρα $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim\limits_{\rho_n\to\infty} I_n = \pi$.

Επειδή $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$, το τελευταίο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \pi \ .$$

Επιπλέον δε είναι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy$, άρα η τελευταία σχέση γίνεται:

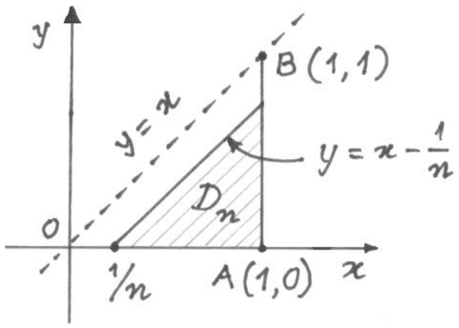
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi \text{, άρα } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \ .$$

8) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^{2/3}},$$

όπου D η περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες $y=0,\ y=x$ και $x=1$.

Λύση



Από τις ευθείες προκύπτει ότι η περιοχή

$$D = \{(x,y)\in R^2 \ / \ 0<x<1,\ 0<y<x\}$$

είναι το τρίγωνο ΟΑΒ (βλέπε διπλανό σχήμα). Η συνάρτηση $f(x,y) = 1/(x-y)^{2/3}$ δεν είναι φραγμένη στην ευθεία $y=x$, αλλά είναι φραγμένη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1 \subset D$ που δεν περιέχει σημεία της ευθείας $y=x$. Θεωρούμε την ακολουθία των περιοχών του επιπέδου

$$D_n = \left\{(x,y)\in R^2 \ / \ \frac{1}{n}\le x\le 1,\ 0\le y\le x-\frac{1}{n}\right\} \ n\in N^*$$

η οποία τείνει στην περιοχή D για $n \to \infty$, όπου η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε μία τέτοια περιοχή και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f στις περιοχές D_n. Είναι

$$I_n = \iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x-y)^{2/3}} = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{dy}{(x-y)^{2/3}}\right]dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{-(x-y)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_0^{x-\frac{1}{n}}dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[-3(x-y)^{1/3}\right]_0^{x-\frac{1}{n}}dx = 3\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(x^{1/3}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}\right)dx = 3\left[\frac{3}{4}x^{4/3}-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= \frac{9}{4}-3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{4/3}+3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}\cdot\frac{1}{n} = \frac{9}{4}-3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{4/3}$$

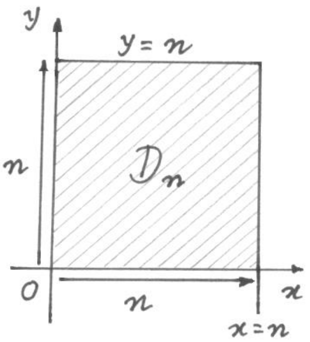
Άρα $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x-y)^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{4} - 3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{4/3}\right) = \frac{9}{4}$.

9) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\displaystyle\iint\limits_D (x+y)e^{-(x+y)}dxdy$, όπου D είναι το 1$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο του επιπέδου xOy.

Λύση

Η περιοχή D δεν είναι φραγμένη και η συνάρτηση $f(x,y) = (x+y)e^{-(x+y)}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1 \subset D$. Θεωρούμε την ακολουθία των περιοχών του επιπέδου (βλέπε διπλανό σχήμα)



$$D_n = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n\right\} \quad n \in N^*$$

η οποία τείνει στην περιοχή D για $n \to \infty$. Δηλαδή η περιοχή D_n αποτελείται από όλα τα συνοριακά σημεία του τετραγώνου με πλευρές $x = 0,\ x = n,\ y = 0,\ y = n$. Είναι

$$I_n = \iint\limits_{D_n} (x+y)e^{-(x+y)}dxdy = \iint\limits_{D_n} (xe^{-x}\cdot e^{-y} + ye^{-x}\cdot e^{-y})\,dxdy =$$

$$= \left[\int_0^n xe^{-x}dx\right]\left[\int_0^n e^{-y}dy\right] + \left[\int_0^n e^{-x}dx\right]\left[\int_0^n ye^{-y}dy\right].$$

Αλλά

$$\int xe^{-x}dx = -\int xd(e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(1+x)e^{-x},$$

και $\displaystyle\int_0^n xe^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n = 1-(1+n)e^{-n}$,

παρόμοια

$$\int_0^n ye^{-y}dy = \int_0^n xe^{-x}dx = 1-(1+n)e^{-n}, \text{ και } \int_0^n e^{-x}dx = \int_0^n e^{-y}dy = 1-e^{-n}.$$

Επομένως,

$$I_n = \left[1-(1+n)e^{-n}\right](1-e^{-n}) + (1-e^{-n})\left[1-(1+n)e^{-n}\right] = 2\left(1-\frac{1+n}{e^n}\right)\left(1-\frac{1}{e^n}\right).$$

Και επειδή (κανόνας L' Hospital)

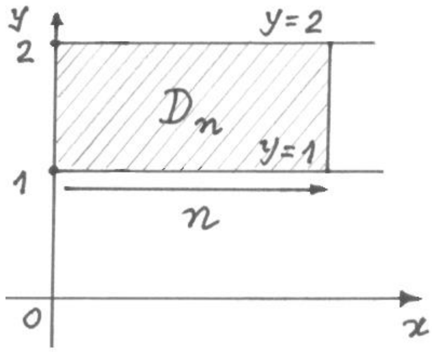
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0$, έχουμε $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 2(1-0)(1-0) = 2$. Άρα

$$\iint_D (x+y)e^{-(x+y)}dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = 2 .$$

10) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\iint_D \frac{dxdy}{e^x\sqrt{y}}$, όπου $D=\{(x,y)\in R^2 \ / \ x>0, \ 1\le y\le 2\}$.

Λύση



Το σύνολο (περιοχή) *D* είναι λωρίδα του διπλανού σχήματος το οποίο προφανώς είναι μη φραγμένο. Η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1\subset D$. Σχηματίζουμε την ακολουθία των περιοχών του επιπέδου

$D_n=\{(x,y)\in R^2 \ / \ 0\le x\le n, \ 1\le y\le 2\} \quad n\in N^*$

η οποία τείνει στην περιοχή *D* για *n* → ∞ (βλέπε διπλανό σχήμα). Τότε έχουμε

$$I_n=\iint_{D_n}\frac{dxdy}{e^x\sqrt{y}}=\left[\int_0^n e^{-x}dx\right]\left[\int_1^2 y^{-1/2}dy\right]=\left[-e^{-x}\right]_0^n\left[2y^{1/2}\right]_1^2=$$

$=\left(1-\frac{1}{e^n}\right)(2\sqrt{2}-2)=2(\sqrt{2}-1)\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$. Και τελικά

$$\iint_D\frac{dxdy}{e^x\sqrt{y}}=\lim_{n\to\infty}I_n=2(\sqrt{2}-1)(1-0)=2(\sqrt{2}-1).$$

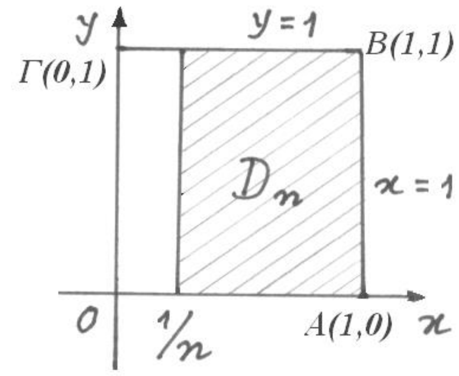
11) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\iint_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x}}$, όπου $D=\{(x,y)\in R^2 \ / \ 0\le x\le 1, \ 0\le y\le 1\}$.

Λύση

Εδώ η περιοχή *D* είναι κλειστή και είναι το τετράγωνο ΟΑΒΓ (βλέπε διπλανό σχήμα).

Η συνάρτηση $f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x}}$ δεν είναι φραγμένη πάνω στην ευθεία $x=0$ (πλευρά Ο-Γ), είναι όμως φραγμένη σε κάθε κλειστή περιοχή $D_1\subset D$ που δεν περιέχει σημεία της $x=0$.



Σχηματίζουμε λοιπόν την ακολουθία των περιοχών του επιπέδου

$$D_n = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, \frac{1}{n} \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \right\} \ n \in N^*$$

η οποία τείνει στην περιοχή D για $n \to \infty$. Έτσι έχουμε

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{ydxdy}{\sqrt{x}} = \left[\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right] \left[\int_0^1 ydy \right] = \left[2\sqrt{x} \right]_{1/n}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \sqrt{n}\,.$$

Άρα $\displaystyle\iint_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} (1-\sqrt{n}) = 1$.

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα γενικευμένα ολοκληρώματα στην περιοχή D που αναγράφεται δίπλα τους:

1) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$: $D = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2+y^2 \le 1 \right\}$. (*Απάντηση*: $I = \pi$),

2) $\displaystyle\iint_D e^{x/y} dxdy$: $D = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1 \right\}$. (*Απ.*: $I = \frac{1}{2}$),

3) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^k}$: $D = R^2$ και $k > 0$. (*Απ.*: $I = \begin{cases} \dfrac{\pi}{k-1}, & \text{για } k>1 \\ +\infty, & \text{για } k \le 1 \end{cases}$),

4) $\displaystyle\iint_D \frac{\varepsilon\phi\; ydxdy}{\frac{\pi}{4} - y}$: όπου D η περιοχή που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x + y = \frac{\pi}{4}$. (*Απάντηση*: $I = \ln\sqrt{2}$).