Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **3**

Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Η θεωρία μεγίστων και ελαχίστων μιας πραγματικής συνάρτησης με μια μεταβλητή είναι γνωστή. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τη θεωρία μεγίστων και ελαχίστων για πραγματικές συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών. Δίνουμε όμως πρώτα τον επόμενο γενικό ορισμό:

«Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα τόπο Τ. Θα λέμε ότι η f έχει σχετικό *μέγιστο* (αντίστοιχα *ελάχιστο*) στο σημείο P_0 εσωτερικό του τόπου Τ, αν υπάρχει κατάλληλη περιοχή ω του P_0, τέτοια ώστε για όλα τα σημεία $P \in \omega$ να είναι $f(P) \leq f(P_0)$ (αντίστοιχα $f(P) \geq f(P_0)$) ».

Αυτά τα σχετικά ακρότατα είναι με την ευρεία έννοια. Αν δεν ισχύει η ισότητα έχουμε ακρότατα με τη στενή έννοια. Όπως και στη θεωρία των ακρότατων μιας πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, έτσι κι' εδώ θα μελετήσουμε τις συνθήκες ύπαρξης ακρότατων συνάρτησης f πολλών μεταβλητών και θα βρούμε τα σημεία όπου η f έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

Προς τούτο θα διακρίνουμε διάφορες κατηγορίες συναρτήσεων πολλών μεταβλητών που θα αναζητήσουμε τα ακρότατα. Αυτές είναι:

- **Ακρότατα συνάρτησης δύο μεταβλητών**
- **Ακρότατα συνάρτησης πολλών μεταβλητών**
- **Ακρότατα πεπλεγμένης συνάρτησης**
- **Ακρότατα συνάρτησης με συνθήκες.**

3.1 Ακρότατα συνάρτησης δύο μεταβλητών

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x, y)$ και σημείο P_0 (x_0, y_0) του τόπου ορισμού $T \subset R^2$. Αν το $f(x_0, y_0)$ είναι ένα σχετικό μέγιστο, τότε με βάση τον παραπάνω ορισμό, είναι δυνατό να βρούμε έναν αριθμό *n* θετικό, τέτοιο ώστε για κάθε *h* και *k* μικρότερα απολύτως του *n*, δηλαδή

για $|h| < n,\ |k| < n$, να προκύπτει ότι $f(x_0 + h, y_0 + k) \leq f(x_0, y_0)$. (1)

Θα αναζητήσουμε τις αναγκαίες συνθήκες για την εύρεση σημείων όπου η $f(x, y)$ παίρνει άκρες τιμές. Ας υποθέσουμε ότι το *y* παραμένει σταθερό και ίσο με y_0. Τότε το *z* γίνεται συνάρτηση μόνο της μεταβλητής *x*, οπότε, για να διατηρεί η διαφορά

$$f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0, y_0)$$

σταθερό πρόσημο για μικρές τιμές του *h*, πρέπει η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}$ να είναι μηδέν για $x = x_0$ και $y = y_0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι μηδέν και η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Επομένως οι τιμές των *x* και *y* που δίνουν σχετικά μέγιστα ή ελάχιστα πρέπει να αναζητηθούν στη λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 . \tag{2}$$

(επέκταση της συνθήκης $f'(x) = 0$ της $y = f(x)$)

Τα σημεία του τόπου Τ που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις του παραπάνω συστήματος λέγονται **σημεία στάσης.** Όπως τονίστηκε πριν, οι παραπάνω συνθήκες είναι αναγκαίες, όχι όμως ικανές. Δηλαδή, η λύση του συστήματος αυτού δίνει σημεία τα οποία μπορεί να είναι ή να μην είναι ακρότατα της συνάρτησης $z = f(x, y)$. Την απάντηση στο θέμα αυτό μας τη δίνουν μερικές ακόμα συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για την $z = f(x, y)$.

Υποθέτουμε ότι οι παράγωγοι 2ης τάξης της $f(x, y)$ είναι συνεχείς στην περιοχή του σημείου στάσης $P_0(x_0, y_0)$ και δεν είναι όλες 0, για $x = x_0$ *και* $y = y_0$. Θέτουμε:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} = \mathrm{A}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} = \mathrm{B}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} = \Gamma \tag{3}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $B^2 - A\Gamma < 0$, τότε η $f(x, y)$ έχει άκρα τιμή στο σημείο στάσης $P_0(x_0, y_0)$ και μάλιστα:

σχετικό **μέγιστο** αν $A = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} < 0, \quad ή \quad \Gamma = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} < 0,$

σχετικό **ελάχιστο** αν $A = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} > 0, \quad ή \quad \Gamma = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} > 0 \quad .$

(Τα Α, Γ αποδεικνύεται ότι έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο).

2η περίπτωση: Αν $B^2 - A\Gamma > 0$, τότε η $f(x, y)$ δεν έχει άκρα τιμή στο σημείο στάσης P_0.

3η περίπτωση: Αν $B^2 - A\Gamma = 0$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα αν η $f(x, y)$ παρουσιάζει στο σημείο στάσης P_0 τοπικό ακρότατο. Στη περίπτωση αυτή καταφεύγουμε στον ορισμό. Εξετάζουμε δηλαδή τη διαφορά:

$$\delta = f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad ή \quad \delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

Αν το ***δ διατηρεί σταθερό πρόσημο*** σε μια περιοχή του σημείου $P_0(x_0, y_0)$ τότε,

όταν $\boldsymbol{\delta > 0}$ το $P_0(x_0, y_0)$ είναι σημείο **ελαχίστου**,

διότι τότε θα είναι $\delta > 0 \Leftrightarrow f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0 \Leftrightarrow f(x, y) > f(x_0, y_0)$, ενώ

όταν $\boldsymbol{\delta < 0}$ το $P_0(x_0, y_0)$ είναι σημείο **μεγίστου**.

Αν όχι, (δηλαδή αν η διαφορά ***δ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο***), τότε το $P_0(x_0, y_0)$ θεωρείται ταυτόχρονα σημείο **μεγίστου και ελαχίστου** και λέγεται σημείο **σάγματος** (σαμαριού) ή **σαγματικό σημείο**.

Η ονομασία του προέρχεται απ' τη γνωστή επιφάνεια με εξίσωση

$$z = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2},$$

υπερβολικό παραβολοειδές – το σαμάρι ή σάγμα – όπως την γνωρίσαμε στην 2.9.7 (σχήμα 4, 2ζ), όπου για $x = 0$ παίρνουμε $z = -\dfrac{y^2}{\beta^2}$ δηλαδή την κάτω παραβολή, ενώ για $y = 0$ παίρνουμε $z = \dfrac{x^2}{\alpha^2}$ δηλαδή την πάνω παραβολή. Οι δύο αυτές παραβολές έχουν το σημείο (0, 0) σημείο μεγίστου η πρώτη και ελαχίστου η δεύτερη, όμως και οι δύο αυτές παραβολές ανήκουν στην ίδια επιφάνεια, όπως είχε τονιστεί και στην παράγραφο 2.9.7.

<u>Ώστε συμπερασματικά</u>, για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ διπλά διαφορίσιμης σ' ένα τόπο Τ εργαζόμαστε ως εξής:

α) Εξισώνουμε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y με μηδέν, δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

και βρίσκουμε όλες τις λύσεις του συστήματος που δίνουν τα σημεία στάσης. Θεωρούμε τα σημεία στάσης που βρίσκονται μέσα στον τόπο Τ.

β) Βρίσκουμε την τιμή της παράστασης $B^2 - A\Gamma$ όπου τα Α, Β, Γ ορίζονται απ' τις σχέσεις (3) για κάθε σημείο στάσης. Για το <u>εκάστοτε σημείο στάσης</u>:

- Αν $B^2 - A\Gamma < 0$, τότε υπάρχει άκρα τιμή και μάλιστα σχετικό μέγιστο αν $A < 0$ ή $(\Gamma < 0)$, ενώ σχετικό ελάχιστο αν $A > 0$ ή $(\Gamma > 0)$.
- Αν $B^2 - A\Gamma > 0$, τότε δεν υπάρχει άκρα τιμή.
- Αν $B^2 - A\Gamma = 0$, τότε έχουμε απροσδιοριστία και βρίσκουμε το *δ.*

γ) Βρίσκουμε τις άκρες τιμές της συνάρτησης αντικαθιστώντας τις τιμές των σημείων στάσης στην $z = f(x, y)$.

Παραδείγματα

1) Δίνεται η συνάρτηση $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Να βρεθούν οι θέσεις των τοπικών ακρότατων αυτής.

Λύση

Η $f(x, y)$ είναι ορισμένη σ' όλο το επίπεδο R^2 και έχει μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης στο R^2. Τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y)$ - αν υπάρχουν – θα αναζητηθούν στις πραγματικές τιμές του συστήματος:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0, \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x = 0 \quad (2).$$

Η (2) δίνει $x = -y^2$ οπότε η (1) γίνεται $(-y^2)^2 + y = 0$ ή $y^4 + y = 0$ η οποία έχει πραγματικές ρίζες $y = 0$ και $y = -1$. Για τις τιμές αυτές του y η (1) δίνει $x = 0$ και $x = \pm 1$. (Η τιμή $x = 1$ απορρίπτεται γιατί δεν επαληθεύει τη 2η εξίσωση).

Άρα τα σημεία στάσης (πιθανά ακρότατα) είναι τα $P_0(0, 0)$ και $P_1(-1, -1)$.

Επιπλέον είναι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$.

α) Για το σημείο στάσης $P_0(0, 0)$ έχουμε:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, \ \mathrm{B} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 3, \ \Gamma = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 .$$

Επομένως $\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma = 3^2 - 0 \cdot 0 = 9 > 0$,

άρα το σημείο στάσης $P_0(0, 0)$ δεν είναι σημείο ακρότατου.

β) Για το σημείο στάσης $P_1(-1, -1)$ έχουμε

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -6, \ \ \mathrm{B} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 3, \ \ \Gamma = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} - 6 .$$

Επομένως $\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma = 3^2 - (-6)\cdot(-6) = -27 < 0$.

Άρα το $P_1(-1, -1)$ είναι θέση τοπικού ακρότατου της $f(x, y)$ και επειδή

$\mathrm{A} = -6 < 0$ το $P_1(-1, -1)$ θα είναι θέση τοπικού μεγίστου που είναι:

$z = f_{\mu\varepsilon\gamma.}(-1, -1) = (-1)^3 + (-1)^3 + 3(-1)(-1) = 1$.

2) Δίνεται η συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 + y^4$. Να βρεθούν οι θέσεις των τοπικών ακρότατων αυτής (αν υπάρχουν).

Λύση

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad y = 0$.

Άρα το μοναδικό σημείο στάσης είναι το $P_0(0, 0)$. Είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

επομένως

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 2, \quad \mathrm{B} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, \quad \Gamma = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

οπότε

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$$

άρα έχουμε απροσδιοριστία (3η περίπτωση).

Πιθανώς λοιπόν το $P_0(0, 0)$ να είναι θέση τοπικού ακρότατου, πιθανώς όχι. Έτσι καταφεύγουμε στον ορισμό. Εξετάζουμε δηλαδή αν η διαφορά

$$\delta = f(x, y) - f(0,0) = x^2 + y^4 - (0^2 + 0^4) = x^2 + y^4$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο σε μια περιοχή του $P_0(0, 0)$. Είναι όμως

$$\delta = x^2 + y^4 > 0$$

για κάθε $(x, y) \in \mathrm{T}_1 - \{(0,0)\}$, όπου T_1 είναι μια περιοχή του $P_0(0, 0)$. Δηλαδή

$$f(x, y) - f(0,0) = x^2 + y^4 > 0, \text{ άρα } f(x, y) > f(0,0).$$

Άρα, το $P_0(0, 0)$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου του $f_{ελ.}(0, 0) = 0^2 + 0^4 = 0$.

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x, y) = 12xy - x^3 - y^3$ (*Απ*: $f(0,0) = 0$ σαγματικό, $f_{\max}(4,4) = 64$)

β) $f(x, y) = y^x$ (*Απάντηση*: $f(0,1) = 1$ σαγματικό).

2) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$ (*Απ*: $f_{\min}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $f_{\max}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$)

β) $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 6y + 1$ (*Απ*: Δεν υπάρχουν ακρότατα)

γ) $f(x, y) = x^3 + +y^3 - 3x - 3y + 1$ (*Απ*: $f_{\max}(-1,-1) = 5$, $f_{\min}(1,1) = -3$)

δ) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ (*Απ*: $f_{\min}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f_{\min}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$)

ε) $f(x, y) = 2x^3 + (x - y)^2 - 6y$ (*Απ*: $f_{\min}(1,4) = -13$, $f(-1,2) = -5$ σαγματικό)

στ) $f(x,y) = xy + (x+y)(10-x-y)$ ($A\pi$: $f_{\max}\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{3}$)

ζ) $f(x,y) = \etaμx + \etaμy + \etaμ(x+y)$ με $(x, y) \in [0, \pi]$ x $[0, \pi]$.

($Απάντηση$: $f_{\max}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$)

η) $f(x,y) = (x+y)^4 + y^2$ ($Απάντηση$: $f(0,0) = 0$ σαγματικό)

3.2 Ακρότατα συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ $\nu \geq 3$ ορισμένη σ' ένα σύνολο Τ $\subset$ R^ν, της οποίας υπάρχουν στο Τ και είναι συνεχείς οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης. Έστω ακόμα το σημείο $P_0(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu) \in$Τ το οποίο είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \ .$$

Θέτουμε $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{P_0} = \alpha_{ij}$.

Ως γνωστό ισχύει $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$ δηλαδή $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Για $p = 1, 2, \ldots, \nu$ σχηματίζουμε την εκάστοτε ορίζουσα

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \quad \text{με} \quad \Delta_1 = a_{11}.$$

Έτσι σχηματίζονται οι ορίζουσες:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω **συνθήκες**:

1. Για να έχει η f ένα τοπικό <u>*ελάχιστο*</u> στο σημείο P_0, αρκεί οι ορίζουσες Δ_1, Δ_2, ..., Δ_ν να είναι **όλες θετικές**.

2. Για να έχει η f ένα τοπικό *μέγιστο* στο σημείο P_0, αρκεί οι παραπάνω ορίζουσες να είναι $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots$ δηλαδή να είναι **εναλλάξ αρνητικές και θετικές** (ξεκινώντας με αρνητική την πρώτη).

Παρατηρήσεις

1. Αν για το σημείο P_0 δεν ικανοποιείται μια απ' τις συνθήκες **1** ή **2**, δεν θα πρέπει να συμπεράνουμε ότι το P_0 δεν αποτελεί θέση ακρότατου. Στην περίπτωση αυτή, η τελική διαπίστωση θα γίνεται με τη βοήθεια του ορισμού (πρόσημο του δ)

2. Διαπιστώνεται εύκολα, ότι οι συνθήκες ύπαρξης σχετικού μεγίστου ή ελαχίστου στην περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών συμπίπτουν με τις συνθήκες ύπαρξης άκρων τιμών της προηγούμενης παραγράφου, γιατί στην περίπτωση αυτή έχουμε προφανώς:

$$a_{11} = \mathrm{A}, \quad a_{22} = \Gamma, \quad a_{21} = a_{12} = \mathrm{B}\ .$$

Επομένως είναι

$$\Delta_1 = a_{11} = \mathrm{A}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \Gamma \end{vmatrix} = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{B}^2 .$$

Άρα για

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \text{ δηλαδή για } \mathrm{A} > 0, \quad \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{B}^2 > 0 \text{ ή } \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma < 0$$

έχουμε ελάχιστο, όπως είδαμε στην 1^{η} περίπτωση της παρ. 3.1., ενώ για

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \text{ δηλαδή για } \mathrm{A} < 0, \text{ και } \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{B}^2 > 0 \text{ ή } \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma < 0$$

έχουμε μέγιστο.

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$\omega = f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx\ .$$

Λύση

Λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y + 3z = 0 \quad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x + 3z = 0 \quad (2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 3y + 3x = 0 \quad (3)$$

Με αφαίρεση των (2) και (3) κατά μέλη έχουμε

$$y^2 - z^2 + z - y = 0 \quad \text{ή} \quad (y-z)(y+z-1) = 0 \quad (4)$$

Από την (4) προκύπτει: $z = y$ (5), ή $y + z = 1$ (6)

- Από την (5), για $z = y$

η (1) γίνεται $x^2 + 2y = 0$ (ι), ενώ η (2) γίνεται $y^2 + x + y = 0$ (ιι)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (ι) και (ιι) υπολογίζουμε τα *x*, *y*. Έτσι, η (ιι) δίνει $x = -(y^2 + y)$, ενώ η (ι) για την τιμή αυτή του *x* γίνεται

$$\left[-(y^2+y)\right]^2 + 2y = 0 \text{ ή } (y^2+y)^2 + 2y = 0 \text{ ή } y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(y^3 + 2y^2 + y + 2) = 0 \Leftrightarrow y\left(y^2(y+2) + (y+2)\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(y+2)(y^2+1) = 0 \qquad (7).$$

Απ' την (7) παίρνουμε τις πραγματικές ρίζες $y = 0$ ή $y = -2$.

- Για $y = 0$ η (5) δίνει $z = 0$ και η (1) δίνει $x = 0$.

Άρα το σημείο $\underline{P_1(0,0,0)}$ είναι ένα σημείο στάσης.

- Για $y = -2$ η (5) δίνει $z = -2$ και η (2) δίνει $x = -2$.

Άρα το σημείο $\underline{P_2(-2,-2,-2)}$ είναι ένα δεύτερο σημείο στάσης.

- Από την (6) για $z = 1 - y$

η (1) γίνεται $x^2 + y + 1 - y = 0$ που δίνει φανταστικές ρίζες για το *x* τις $x = \pm i$.

Μετά την εύρεση των σημείων στάσης βρίσκουμε στη θέση $\underline{P_1(0,0,0)}$ τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης της $f(x,y,z)$. Είναι:

$$a_{11} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6x\big|_{P_1} = 0,\ a_{22} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6y\big|_{P_1} = 0,\ a_{33} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{P_1} = 6z\big|_{P_1} = 0,$$
$$a_{12} = a_{21} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 3,\ a_{23} = a_{32} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_{P_1} = 3,\ a_{13} = a_{31} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_{P_1} = 3.$$

Οπότε, $\Delta_1 = a_{11} = 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0\,,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Παρατηρούμε ότι $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 < 0,\ \Delta_3 > 0$, άρα δεν εφαρμόζονται οι συνθήκες **1η** ή **2η**, επομένως δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το σημείο $P_1(0,0,0)$ είναι σημείο ακρότατου. Θα εξετάσουμε αυτό με τη βοήθεια του ορισμού. Δηλαδή θα βρούμε αν υπάρχει περιοχή του $P_1(0,0,0)$ στην οποία η διαφορά

$$\delta = f(x,y,z) - f(0,0,0)$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως, σε οποιαδήποτε περιοχή του $P_1(0,0,0)$ υπάρχουν σημεία

(x_0, y_0, z_0) π.χ. $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$\delta = f(x_0,y_0,z_0) - f(0,0,0) = x_0^{\,3} + y_0^{\,3} + z_0^{\,3} + 3x_0y_0 + 3x_0z_0 + 3y_0z_0 > 0\,,$$

καθώς και σημεία

(x_0', y_0', z_0') π.χ. $x_0' > 0,\ y_0' < 0,\ z_0' < 0$ τέτοια ώστε

$$\delta = f(x_0',y_0',z_0') - f(0,0,0) = x_0'^{\,3} + y_0'^{\,3} + z_0'^{\,3} + 3x_0'y_0' + 3x_0'z_0' + 3y_0'z_0' < 0\,,$$

δηλαδή η διαφορά δ <u>δεν διατηρεί</u> σταθερό πρόσημο.

Άρα το $P_1(0,0,0)$ δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου. Στην περίπτωση αυτή επομένως το $P_1(0,0,0)$ αποτελεί *σημείο σάγματος* (ή σαγματικό σημείο).

Εργαζόμαστε τώρα εντελώς ανάλογα για το $\underline{P_2(-2,-2,-2)}$.

Είναι $a_{11} = a_{22} = a_{33} = -12,\quad a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 3$, οπότε

$$\Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 135 > 0\,,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -1350 < 0\,.$$

Άρα σύμφωνα με τη **2η** συνθήκη, στο σημείο στάσης $P_2(-2,-2,-2)$ έχουμε τοπικό *μέγιστο*, το $f_{\max}(-2,-2,-2) = 12$.

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx$ (*Απ*: $f_{\max}(-2,-2,-2) = 12,\ f(0,0,0) = 0$ σαγ)

2) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z)$ (*Απάντηση*: $f_{\max}(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = \frac{1}{256}$).

3) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ (*Απάντηση*: $f(0,0,0) = 0$ σαγματικό σημείο, ενώ $f_{\min}(1,1,1) = f_{\min}(1,-1,-1) = f_{\min}(-1,1,-1) = f_{\min}(-1,-1,1) = -1$).

4) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y,z) = xyz + y - z + \frac{x^2}{2}$ (*Απάντηση*: $f(1,1,-1) = \frac{3}{2}$ σαγματικό σημείο).

5) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y,z) = 7 - x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2xz$ (*Απάντηση*: $f_{\max}(0,0,0) = 7$).

3.3 Ακρότατα πεπλεγμένης συνάρτησης

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

3.3.1 (1η Περίπτωση): Πεπλεγμένη με μια μεταβλητή

Έστω η πεπλεγμένη συνάρτηση *y* που ορίζεται με μια ανεξάρτητη μεταβλητή

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

όπου $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η (1) έχει παραγώγους μέχρι 2ης τάξης συνεχείς. Όπως ξέρουμε, στην περίπτωση που η (1) θα ήταν λυμένη ως προς *y*, η συνθήκη άκρων τιμών είναι $y' = 0$. Αν παραγωγίσουμε την (1) θα πάρουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \tag{2}$$

η οποία για τα σημεία ακρότατων ($y' = 0$) παίρνει τη μορφή $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Λύνοντας το σύστημα

$$f(x, y) = 0 \text{ και } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

έχουμε τα πιθανά σημεία ακροτάτων της y. Για να εξακριβώσουμε, αν οι λύσεις του συστήματος (3) αποτελούν μέγιστο ή ελάχιστο, πρέπει να καθορίσουμε το σημείο της y''. Η παραγώγιση της (2) δίνει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y' = 0$, έχουμε $y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$.

Έτσι, αν $y'' > 0$ έχουμε ελάχιστο, αν $y'' < 0$ μέγιστο και αν $y'' = 0$ απροσδιοριστία.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι άκρες τιμές της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Λύση

Είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$f(x, y) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, ή

$x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (1), και $3x^2 - 3y = 0$ (2).

Απ' τη (2) $\Rightarrow y = x^2$ οπότε η (1) γίνεται $x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$ ή $x^6 - 2x^3 = 0$ ή

$x^3(x^3 - 2) = 0$ απ' όπου προκύπτει $x = 0$ ή $x = \sqrt[3]{2}$.

Για $x = 0$ η (2) δίνει $y = 0$, ενώ για $x = \sqrt[3]{2}$ δίνει $y = \sqrt[3]{4}$.

- Για $x = 0$ έχουμε $y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{0}{0}$ (απροσδιοριστία),
- ενώ για $x = \sqrt[3]{2}$ έχουμε $y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\sqrt[3]{2}\\y=\sqrt[3]{4}}} = -\frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} < 0$,

επομένως για $x = \sqrt[3]{2}$ έχουμε μέγιστο, το $y_{\mu\varepsilon\gamma} = \sqrt[3]{4}$.

3.3.2 (2η Περίπτωση): Πεπλεγμένη με δύο μεταβλητές

Έστω η πεπλεγμένη συνάρτηση z που ορίζεται απ' την εξίσωση με δύο μεταβλητές x, y, και είναι η

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

η οποία έχει μερικές παραγώγους μέχρι 2ης τάξης συνεχείς. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

και έστω μια λύση αυτού η $P_0(x_0, y_0, z_0)$ με $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \neq 0$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 2.6.1. ορίζεται η συνάρτηση $z = \varphi(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου P_0.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ στη θέση (x_0, y_0) και εφαρμόζουμε τη θεωρία της παραγράφου 3.1. για τα ακρότατα της συνάρτησης $z = \varphi(x, y)$. Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να γενικευθεί και για πεπλεγμένες συναρτήσεις με περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Στη πράξη όμως, για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = 0$ το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ αποτελεί:

i) σημείο τοπικού *ελαχίστου*, όταν:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{P_0} > 0 \quad \text{και} \quad D_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} < 0$$

ii) σημείο τοπικού *μεγίστου*, όταν

$$D_1 > 0 \quad \text{και} \quad D_2 > 0.$$

Αν $D_1 = 0$, τότε για την εξακρίβωση ακρότατων χρειαζόμαστε τις μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης της $f(x, y, z)$ (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν τα ακρότατα της πεπλεγμένης συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0\,.$$

Λύση

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 4z + 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\,.$

Λύνουμε το σύστημα: $f(x,y,z) = 0,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\,,$

δηλαδή το σύστημα: $x^2 + y^2 + z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0,\quad 2x = 0,\quad 2y = 0\,.$

Οι δύο τελευταίες αν αντικατασταθούν στην πρώτη δίνουν $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ ή

$z^3 + 1 + 2z(z+1) = 0$ ή $(z+1)(z^2 - z + 1) + 2z(z+1) = 0$ ή $(z+1)(z^2 + z + 1) = 0.$

Η τελευταία εξίσωση έχει τη μοναδική πραγματική ρίζα $z = -1$. Άρα το σημείο στάσης της f είναι το P_0 με $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -1)$, για το οποίο είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} = 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 1 \neq 0\,.$$

Εξ άλλου έχουμε

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{P_0} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ D_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} = 2\cdot 1 > 0\,.$$

Άρα το σημείο $P_0(0, 0, -1)$ είναι θέση τοπικού μεγίστου της $z = \varphi(x, y)$ και είναι:

$z_{\mu\varepsilon\gamma.} = \varphi(0, 0) = -1.$

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 = 0\,.$

(*Απάντηση*: $y_{\max}(\sqrt[8]{3}) = \sqrt[8]{27},\ y_{\min}(-\sqrt[8]{3}) = -\sqrt[8]{27}$)

2) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $z = f(x,y)$ που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $F(x,y,z) = z^2 + xyz - x^2 y - y^3 = 0$

(*Απάντηση*: $f_{\max}(-6\sqrt{3}, -6) = -12\sqrt{3},\ f_{\min}(6\sqrt{3}, -6) = 12\sqrt{3}$).

3) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $z = f(x,y)$ που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $F(x,y,z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$

(*Απάντηση*: $f_{\max}(-6, -6\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$, $f_{\min}(-6, 6\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$).

3.4 Ακρότατα συνάρτησης με συνθήκες

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ $\nu = 2, 3, \ldots$ (1)

που ορίζεται στον τόπο $T \subset R^\nu$, της οποίας όμως οι μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά επαληθεύουν τις p εξισώσεις (p < ν)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

όπου οι πραγματικές συναρτήσεις (2) ορίζονται σ' ένα υποσύνολο του T, το $T_0 \subset T \subset R^\nu$. Θα ζητήσουμε να βρούμε τις θέσεις των ακρότατων τιμών της συνάρτησης $f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ που υπόκειται στις συνθήκες (2).

Μια μέθοδος για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων είναι αυτή των **πολλαπλασιαστών του Lagrange.** Κατά την μέθοδο αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_p\varphi_p$$

με παραμέτρους τα $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in R$.

2. Μηδενίζουμε τις μερικές παραγώγους της F ως προς τις ν + p μεταβλητές, τις $x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ δηλαδή

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad \text{ή} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_p \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \quad \text{ή} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_p \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{ή} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_\nu} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_\nu} + \cdots + \lambda_p \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_\nu} = 0 \end{array}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_\text{p}} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi_\text{p}(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν σύστημα ν + p εξισώσεων με ν + p αγνώστους, τους $x_1, x_2, \cdots, x_\nu, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\text{p}$. Αν $P_0'(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\text{p})$ είναι μια λύση του συστήματος αυτού των ν + p εξισώσεων, τότε το σημείο $P_0(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$ ενδέχεται να είναι μια θέση ακρότατου της *f* με τις συνθήκες (2).

Μένει να διαπιστωθεί αν ένα τέτοιο σημείο P_0 είναι ή όχι θέση ακρότατου, και αν είναι, ποιο είναι το είδος του. Επειδή στις εφαρμογές συνήθως παρουσιάζονται οι περιπτώσεις (ν = 3, p = 2) ή (ν = 3, p = 1), θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τις ικανές συνθήκες που δίνουν τις θέσεις ακροτάτων για κάθε μια απ' τις περιπτώσεις αυτές.

3.4.1 (1η Περίπτωση) (ν = 3 μεταβλητές, p = 2 συνθήκες)

Έστω η συνάρτηση *f (x, y, z)* με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές *x, y, z* που περιέχει, και οι συνθήκες $\varphi_1(x, y, z) = 0,\ \varphi_2(x, y, z) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$,

και έστω $P_0'(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$ μια λύση του συστήματος

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 .$$

Εξετάζουμε την ορίζουσα

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} & F''_{xz} & \varphi'_{1x} & \varphi'_{2x} \\ F''_{yx} & F''_{y^2} & F''_{yz} & \varphi'_{1y} & \varphi'_{2y} \\ F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{z^2} & \varphi'_{1z} & \varphi'_{2z} \\ \varphi'_{1x} & \varphi'_{1y} & \varphi'_{1z} & 0 & 0 \\ \varphi'_{2x} & \varphi'_{2y} & \varphi'_{2z} & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|_{P_0'} .$$

- Αν $\Delta > 0$ τότε το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι σημείο *ελαχίστου* για την *f*, ενώ

- αν $\Delta < 0$ τότε το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι σημείο <u>*μεγίστου*</u>.

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, που πληρούν τους περιορισμούς $\varphi_1(x,y,z) = xz + yz + 2 = 0,\ \varphi_2(x,y,z) = xy - 1 = 0$.

Λύση

Σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(xz + yz + 2) + \lambda_2(xy - 1).$$

Πιθανές θέσεις των ακρότατων είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda_1 z + \lambda_2 y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda_1 z + \lambda_2 x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda_1 y + \lambda_1 x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = xz + yz + 2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = xy - 1 = 0 \quad (5)$$

Απ' τη (2) αφαιρούμε την (1) κι έχουμε

$$2(y - x) - \lambda_2(y - x) = 0 \text{ ή } (y - x)(2 - \lambda_2) = 0$$

απ' όπου προκύπτει

$$x = y \text{ ή } \lambda_2 = 2$$

Διακρίνουμε επομένως τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για $x = y$:

η (5) γίνεται $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, οπότε και $y = \pm 1$.

  - Η (4) για $x = 1,\ y = 1$ δίνει $2z + 2 = 0$ ή $z = -1$,
  - ενώ για $x = -1,\ y = -1$ δίνει $-2z + 2 = 0$ ή $z = 1$.

- Η (3) για $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$ δίνει $-2 + \lambda_1 + \lambda_1 = 0$ ή $\lambda_1 = 1$,
- ενώ για $x = -1,\ y = -1,\ z = 1$ δίνει $2 - \lambda_1 - \lambda_1 = 0$ ή $\lambda_1 = 1$.
- Η (2) για $x = 1,\ y = 1, z = -1,\ \lambda_1 = 1$ δίνει $2 - 1 + \lambda_2 = 0$ ή $\lambda_2 = -1$,
- ενώ για $x = -1,\ y = -1,\ z = 1,\ \lambda_1 = 1$ δίνει $-2 + 1 - \lambda_2 = 0$ ή $\lambda_2 = -1$.

Ώστε για $x = y$ έχουμε δύο πεντάδες ως λύση του συστήματος, τις:

$\underline{P_1'(1, 1, -1, 1, -1)}$ και $\underline{P_2'(-1, -1, 1, 1, -1)}$.

- Για $\lambda_2 = 2$:
  - η (2) γίνεται $2y + \lambda_1 z + 2x = 0$ ή $2(x + y) + \lambda_1 z = 0$ (6),
  - η (4) γίνεται $x + y = -2/z$ (7),
  - οπότε η (6) λόγω της (7) γίνεται $2(-2/z) + \lambda_1 z = 0$ ή $z^2 = 4/\lambda_1$ (8).
  - Η (3) γίνεται $2z + \lambda_1(x + y) = 0$ ή λόγω της (7)

    $2z + \lambda_1(-2/z) = 0$ ή $z^2 = \lambda_1 \geq 0$ (9).

    Απ' τις (8) και (9) προκύπτει $4/\lambda_1 = \lambda_1$ ή $\lambda_1{}^2 = 4$

    άρα (λόγω του περιορισμού της (9))

    $\lambda_1 = 2$, οπότε η (9) δίνει $z^2 = 2$ άρα $z = \pm 2$ και επομένως
  - η (7) δίνει $x + y = -\dfrac{2}{\pm\sqrt{2}} = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Και επειδή η (5) δίνει $xy = 1$, (δηλαδή είναι γνωστά το άθροισμα $x + y$ και το γινόμενο xy), άρα αυτά (τα x και y) θα είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\omega + 1 = 0 \text{ με διακρίνουσα } \Delta = -7/2 < 0,$$

επομένως οι τιμές των x και y που θα προκύψουν θα είναι μιγαδικές, οπότε απορρίπτονται.

Ώστε για $\lambda_1 = 2$ δεν υπάρχει πραγματική πεντάδα ως λύση του συστήματος, επομένως οι μόνες πραγματικές λύσεις είναι οι $P_1'(1, 1, -1, 1, -1)$ και $P_2'(-1, -1, 1, 1, -1)$.

Βρίσκουμε τώρα τα στοιχεία της ορίζουσας Δ. Είναι

$$\begin{array}{lllll} F''_{x^2} = 2, & F''_{xy} = \lambda_2, & F''_{xz} = \lambda_1, & \varphi'_{1x} = z, & \varphi'_{2x} = y \\ F''_{yx} = \lambda_2, & F''_{y^2} = 2, & F''_{yz} = \lambda_1, & \varphi'_{1y} = z, & \varphi'_{2y} = x \\ F''_{zx} = \lambda_1, & F''_{zy} = \lambda_1, & F''_{z^2} = 2, & \varphi'_{1z} = x + y, & \varphi'_{2z} = 0 \end{array}$$

οπότε η ορίζουσα Δ για τις τιμές P_1' και P_2' γίνεται

$$\Delta_1 = \left.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|_{P_1'} = 24, \quad \Delta_2 = \left.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|_{P_2'} = 24.$$

Επομένως, τόσο το σημείο $P_1(1, 1, -1)$ όσο και το $P_2(-1, -1, 1)$ είναι θέσεις τοπικού ελαχίστου της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ και είναι

$$f_{\varepsilon\lambda.}(1, 1, -1) = f_{\varepsilon\lambda.}(-1, -1, 1) = 3.$$

3.4.2 (2η Περίπτωση) (ν = 3 μεταβλητές, p = 1 συνθήκη)

Εδώ δηλαδή έχουμε μια συνάρτηση με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως και πριν, την $f(x, y, z)$ και μια συνθήκη την $\varphi(x, y, z) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$$

και έστω $P_0'(x_0, y_0, z_0, \lambda)$ μια λύση του συστήματος

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad (1).$$

Θεωρούμε τις ορίζουσες:

$$\Delta_1 = \left.\begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} & F''_{xz} & \varphi'_x \\ F''_{yx} & F''_{y^2} & F''_{yz} & \varphi'_y \\ F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{z^2} & \varphi'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & 0 \end{vmatrix}\right|_{P_0'}, \quad \Delta_2 = \left.\begin{vmatrix} F''_{y^2} & F''_{yz} & \varphi'_y \\ F''_{zy} & F''_{z^2} & \varphi'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z & 0 \end{vmatrix}\right|_{P_0'}.$$

Αν για τη λύση $P_0'(x_0, y_0, z_0, \lambda)$ του συστήματος (1) είναι

i) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, τότε η λύση αυτή P_0' είναι θέση *ελαχίστου* της *f*,

ii) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, τότε είναι θέση *μεγίστου* της *f*.

iii) Αν δεν συμβαίνει καμία απ' τις περιπτώσεις (**i**) και (**ii**), τότε εφαρμόζουμε τον ορισμό, εξετάζοντας το πρόσημο του δ .

Παρατηρήσεις

1. Στην πράξη, αν η συνθήκη $\varphi(x, y, z) = 0$ λύνεται εύκολα ως προς μια των μεταβλητών της, π.χ. της *z* (χωρίς όμως να εκφράζεται με ριζικά) και δίνει έστω την $z = g(x,y)$, συνήθως αντικαθίσταται η τιμή αυτή του z στη συνάρτηση $f(x, y, z)$, οπότε προκύπτει νέα συνάρτηση η $f(x, y, g(x, y)) = h(x, y)$ της οποίας υπολογίζουμε τα ακρότατα κατά τα γνωστά.

2. Στη περίπτωση που έχουμε **(ν = 2, p = 1)** και δεν μπορεί η $\varphi(x, y) = 0$ να εκφραστεί συναρτήσει του ενός από τους *x*, *y*, τότε βρίσκουμε μια λύση $P_0'(x_0, y_0, \lambda)$ απ' το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2)$$

όπου $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ και παίρνουμε τις

$$\Delta_1 = F''_{x^2}\Big|_{P_0'}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{y^2} \end{vmatrix}_{P_0'}$$

Αν για τη λύση P_0' του συστήματος (2) είναι

i) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, τότε το $P_0(x_0, y_0)$ είναι θέση <u>*ελαχίστου*</u> της *f*,

ii) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, τότε το $P_0(x_0, y_0)$ είναι θέση <u>*μεγίστου*</u> της *f*.

iii) Αν δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω, τότε πάμε στον ορισμό, εξετάζοντας το πρόσημο του δ.

Παράδειγμα

1) Να βρεθούν οι άκρες τιμές της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ με τη συνθήκη } \varphi(x, y, z) = x + y + z + 1 = 0.$$

Λύση

$1^{ος}$ Τρόπος

Σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z+1)$$

όπου $\lambda \in R$ και λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda=0 \quad (1), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda=0 \quad (2),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z+\lambda=0 \quad (3), \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y+z+1=0 \quad (4)$$

Από (2) – (1): $2y-2x=0 \Leftrightarrow x=y$ (5). Από (3) – (2): $2z-2y=0 \Leftrightarrow z=y$ (6).

Από (5), (6) προκύπτει $x=y=z$ (7). Η (4) λόγω της (7) δίνει $3x+1=0$.

Άρα $x=y=z=-1/3$, οπότε η (1) δίνει $\lambda=-2/3$. Άρα $P_0'(-1/3, -1/3, -1/3, -2/3)$.

Βρίσκουμε τώρα τα στοιχεία της ορίζουσας Δ_1 και Δ_2 για τις τιμές της λύσης

$P_0'(-1/3, -1/3, -1/3, -2/3)$. Είναι:

$$\begin{aligned}
&F''_{x^2}=2, \quad F''_{xy}=0, \quad F''_{xz}=0, \quad \varphi'_x=1\\
&F''_{yx}=0, \quad F''_{y^2}=2, \quad F''_{yz}=0, \quad \varphi'_y=1 \text{ Άρα}\\
&F''_{zx}=0, \quad F''_{zy}=0, \quad F''_{z^2}=2, \quad \varphi'_z=1
\end{aligned}$$

$$\Delta_1=\left.\begin{vmatrix}2&0&0&1\\0&2&0&1\\0&0&2&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\right|_{P_0'}=-12, \quad \Delta_2=\left.\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}\right|_{P_0'}=-4.$$

άρα δεν πληρούται καμία από τις συνθήκες **i)** και **ii).**

Επομένως το σημείο $P_0'(-1/3, -1/3, -1/3, -2/3)$ πιθανώς να αποτελεί θέση ακρότατου πιθανώς όχι. Πάμε στον ορισμό και παίρνουμε τη διαφορά:

$$\delta=f(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l)-f(x_0,\ y_0,\ z_0). \text{ Είναι}$$

$$\delta=(-1/3+h)^2+(-1/3+k)^2+(-1/3+l)^2-\left((-1/3)^2+(-1/3)^2+(-1/3)^2\right)$$

με τη συνθήκη

$$(-1/3+h)+(-1/3+k)+(-1/3+l)+1=0 \quad \text{ή} \quad h+k+l=0. \text{ Είναι}$$

$$\delta = h^2 + \frac{1}{9} - \frac{2h}{3} + k^2 + \frac{1}{9} - \frac{2k}{3} + l^2 + \frac{1}{9} - \frac{2l}{3} - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) =$$

$$= h^2 + k^2 + l^2 - \frac{2}{3}(h + k + l) = h^2 + k^2 + l^2 - \frac{2}{3}\cdot 0 = h^2 + k^2 + l^2 > 0$$

Άρα το σημείο $P_0'(-1/3, -1/3, -1/3, -2/3)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου του

$$f_{ελ}(-1/3, -1/3, -1/3) = 1/3 .$$

<u>2ος Τρόπος</u>

Η συνθήκη $\varphi(x, y, z) = x + y + z + 1 = 0$ μπορεί να λυθεί π. χ. ως προς z οπότε γίνεται $z = g(x, y) = -x - y - 1$. Άρα η δοθείσα συνάρτηση γίνεται

$$f(x, y, z) = f(x, y, g(x, y)) = x^2 + y^2 + (-x - y - 1)^2 \text{ ή}$$

$$h(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1.$$

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε τα ακρότατα της $h(x, y)$. Είναι κατά τα γνωστά:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x + 2y + 2 = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 4y + 2x + 2 = 0 .$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε $x = y = -1/3$.

Άρα το σημείο $A_0(-1/3, -1/3)$ είναι σημείο στάσης. Εξ άλλου είναι

$$\mathrm{A} = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_{A_0} = 4 > 0, \quad \mathrm{B} = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right|_{A_0} = 2, \quad \Gamma = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right|_{A_0} = 4 \text{, οπότε}$$

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma = 2^2 - 4\cdot 4 = -12 < 0 .$$

Επομένως, σύμφωνα με τη θεωρία της παραγράφου 3.1 η $h(x, y)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $A_0(-1/3, -1/3)$ το

$$h_{ελ}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}.$$

Κατά συνέπεια η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $P_0(-1/3, -1/3, -1/3)$ το

$$f_{ελ}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3},\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

2) Να βρεθεί σημείο του επιπέδου $2x+y-z-5=0$ που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$.

Λύση

Το πρόβλημα είναι να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ με τη δέσμευση $\varphi(x,y,z)=2x+y-z-5=0$. Μπορούμε, αντί της συνάρτησης w να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ για να αποφύγουμε τα ριζικά. Σχηματίζουμε λοιπόν τη βοηθητική συνάρτηση

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(2x+y-z-5)$$

Την παραγωγίζουμε ως προς τις μεταβλητές x, y, z, λ και λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda=0 \\ F_y=2y+\lambda=0 \\ F_z=2z-\lambda=0 \\ F_\lambda=2x+y-z-5=0 \end{cases} \quad \text{που έχει λύση } x=\frac{5}{3},\ y=\frac{5}{6},\ z=-\frac{5}{6},\ \lambda=-\frac{5}{3}.$$

επομένως, θα ελέγξουμε στο σημείο $P_0'(5/3,\,5/6,\,-5/6,\,-5/3)$ το πρόσημο των οριζουσών

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} & F''_{xz} & \varphi'_x \\ F''_{yx} & F''_{y^2} & F''_{yz} & \varphi'_y \\ F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{z^2} & \varphi'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & 0 \end{vmatrix}_{P_0'},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} F''_{y^2} & F''_{yz} & \varphi'_y \\ F''_{zy} & F''_{z^2} & \varphi'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z & 0 \end{vmatrix}_{P_0'}.\ \text{Αλλά}$$

$$F''_{x^2}=2,\ F''_{xy}=0,\ F''_{xz}=0,\ \varphi'_x=2$$

$$F''_{yx}=0,\ F''_{y^2}=2,\ F''_{yz}=0,\ \varphi'_y=1$$

$$F''_{zx}=0,\ F''_{zy}=0,\ F''_{z^2}=2,\ \varphi'_z=-1$$

Επομένως

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-24<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-4<0$$

και άρα δεν πληρούται καμία από τις συνθήκες (**i**) και (**ii**) της θεωρίας (2η Περίπτωση ν = 3, p = 1), επομένως το σημείο $P_0(5/3, 5/6, -5/6)$ πιθανώς να αποτελεί θέση ακροτάτου, πιθανώς όχι. Πάμε λοιπόν στον ορισμό και παίρνουμε τη διαφορά:

$\delta = f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0)$. Είναι

$$\delta = \left(\frac{5}{3}+h\right)^2 + \left(\frac{5}{6}+k\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}+l\right)^2 - \left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2\right]$$

με τη συνθήκη

$$2\left(\frac{5}{3}+h\right) + \left(\frac{5}{6}+k\right) - \left(-\frac{5}{6}+l\right) - 5 = 0 \text{ ή } 2h+k-l=0. \text{ Άρα}$$

$$\delta = \frac{25}{9} + h^2 + \frac{10h}{3} + \frac{25}{36} + k^2 + \frac{5k}{3} + \frac{25}{36} + l^2 - \frac{5l}{3} - \left(\frac{25}{9} + \frac{25}{36} + \frac{25}{36}\right) =$$

$$= h^2 + k^2 + l^2 + \frac{5}{3}(2h+k-l) = h^2 + k^2 + l^2 + \frac{5}{3}\cdot 0 = h^2 + k^2 + l^2 > 0$$

Ώστε το σημείο $P_0(5/3, 5/6, -5/6)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου του

$f_{\min}(5/3, 5/6, -5/6) = 25/6$.

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ με τη δέσμευση $\varphi(x,y,z) = x+y+z-12 = 0$ (*Απάντηση*: $f_{\min}(2,4,6) = 3$)

2) Να βρεθεί σημείο του επιπέδου $2x-3y+z-7=0$ που να απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(-1,4,2)$. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(*Υπόδειξη*: Να θεωρήσετε τη συνάρτηση $f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2$ με τη δέσμευση $\varphi(x,y,z) = 2x-3y+z-7=0$). (*Απάντηση*: $f_{\min}\left(\frac{12}{7}, -\frac{1}{14}, \frac{47}{14}\right) = \frac{19}{14}\sqrt{14}$)

3) Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ για τα σημεία της ευθείας που ορίζουν τα επίπεδα $x+2y+3z=0$ και $2x+3y+z-4=0$.

(*Απάντηση*: $f_{\min}\left(\frac{68}{75}, \frac{16}{15}, -\frac{76}{75}\right) = \frac{224}{75}$)

4) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ με τις δεσμεύσεις $x^2+y^2-4=0$ και $x+z=1$.

(*Απ.* $f_{\max}(-2, 0, 3)=13$, $f_{\max}(2, 0, -1)=5$, $f_{\min}(1, \sqrt{3}, 0)=f_{\min}(1, -\sqrt{3}, 0)=4$)

5) Να βρεθούν οι άκρες τιμές της συνάρτησης $f(x,y,z)=xy^2z^3$ που υπόκειται στη συνθήκη $x + y + z = 6$ με $x, y, z > 0$. (*Απάντηση*: $f_{\max}(1, 2, 3)=108$)

6) Να βρεθούν τρεις θετικοί αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι 12 και το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο. (*Υπόδειξη*: Θεωρήσετε τη συνάρτηση $f(x,y,z)=xyz$ με δέσμευση $\varphi(x,y,z)=x+y+z-12=0$). (*Απάντηση*: $f_{\max}(4, 4, 4)=64$)

7) Κιβώτιο με σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, που είναι ανοιχτό προς τα πάνω, πρέπει να έχει όγκο 108 cm^3. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του, ώστε η ολική του επιφάνεια *S* να είναι ελάχιστη;

(*Υπόδειξη*: Αν *y*, *z*, οι διαστάσεις της βάσης και *x* το ύψος του κιβωτίου, θεωρήσετε τη συνάρτηση $S=f(x,y,z)=2xy+2xz+yz$ με τη δέσμευση $V=\varphi(x,y,z)=xyz=108$. Αντικαθιστώντας το $z=\dfrac{108}{xy}$ στην *S* προκύπτει συνάρτηση δύο μεταβλητών $F(x,y)$)

(*Απάντηση*: $f_{\min}(3, 6, 6)=108$)

8) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=xyz$ που υπόκειται στις συνθήκες $\varphi_1(x,y,z)=x+y+z-5=0$, $\varphi_2(x,y,z)=xy+yz+zx-8=0$.

(*Απάντηση*: $f_{\min}(2, 2, 1)=f_{\min}(2, 1, 2)=f_{\min}(1, 2, 2)=4$).