Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **2**

Συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών

2.1 Εισαγωγή, βασικές έννοιες

Μια μεταβλητή *w* μπορεί να είναι συνάρτηση περισσοτέρων της μιας μεταβλητών *x*, *y*, *z*, … δηλαδή οι τιμές που παίρνει να εξαρτώνται από τις τιμές που δέχονται οι μεταβλητές αυτές.

Π. χ. αν καλέσουμε *w* τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και *x*, *y*, *z* τις τρεις διαστάσεις του, θα έχουμε $w = xyz$, δηλαδή ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι συνάρτηση των τριών διαστάσεών του.

Γενικά λέμε ότι μια μεταβλητή *w* λέγεται συνάρτηση των μεταβλητών *x*, *y*, *z* και σημειώνεται με $w = f\,(x, y, z)$ όταν σε κάθε τριάδα των μεταβλητών αυτών η οποία ανήκει σ' ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου RxRxR= R^3, αντιστοιχεί μια ορισμένη πραγματική και πεπερασμένη τιμή του *w*. Το υποσύνολο αυτό του καρτεσιανού γινομένου R^3 λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Έστω π. χ. η συνάρτηση με δύο μεταβλητές *x*, *y* :

$$w = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για ζεύγη τιμών *x*, *y* που πληρούν τη σχέση (για να έχει νόημα το ριζικό):

$$x^2 + y^2 \le 16$$

Η σχέση αυτή ορίζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *w*. Αν εκφράσουμε τα *x*, *y* σε ορθογώνιες συντεταγμένες, τότε σε κάθε ζεύγος (*x*, *y*) θα αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου xOy και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *w* είναι ο κύκλος (εσωτερικό κύκλου και περιφέρεια), που έχει κέντρο την αρχή O και ακτίνα 4. Το πεδίο ορισμού είναι όπως λέμε *κλειστό*, γιατί η συνάρτηση ορίζεται <u>και</u> για τα σημεία της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 16$.

Αν όμως θεωρήσουμε τη συνάρτηση $y = \dfrac{7}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

τότε αυτή ορίζεται για τα σημεία που πληρούν τη σχέση $x^2 + y^2 < 4$.

(Για $x^2 + y^2 = 4$ μηδενίζεται ο παρονομαστής άρα δεν ορίζεται η συνάρτηση). Δηλ. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2. Το πεδίο ορισμού είναι όπως λέμε *ανοικτό*.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$w = 3x^4y^2 - 5xy^3 - 2x^3$$

η συνάρτηση αυτή ορίζεται σ' ολόκληρο το επίπεδο xOy, δηλαδή στο RxR = R^2.

2.1.1 Συνέχεια της συνάρτησης $z = f(x,y)$

Όπως ένα ζεύγος τιμών των δύο μεταβλητών x, y παριστάνει ένα σημείο του ε-πιπέδου xOy, ή του χώρου δύο διαστάσεων (του R^2), κατά τον ίδιο τρόπο λέμε ότι μια *ν – άδα* αριθμών $x_1, x_2, ..., x_\nu$ παριστάνει ένα σημείο P του χώρου ν διαστάσεων (του R^ν) και το σημειώνουμε με $P(x_1, x_2, ..., x_\nu)$. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναφέρεται ο ν – διάστατος αυτός χώρος λέγεται **καρτεσιανό ορθογώνιο**, όταν ως απόσταση δύο σημείων $P_1(x_1, x_2, ..., x_\nu)$, $P_2(y_1, y_2, ..., y_\nu)$ λαμβάνεται η

$$P_1P_2 = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_\nu - x_\nu)^2}\,.$$

(Για ν = 1 ο μονοδιάστατος χώρος αποτελεί τον άξονα x΄Ox και για ν = 3 ο τρισδιά-στατος χώρος αποτελεί το φυσικό χώρο, ενώ για ν > 3 δεν υπάρχει φυσική εποπτεία του χώρου). Όταν η απόσταση αυτή είναι πολύ μικρή, τότε τα σημεία P_1, P_2 λέγονται *γειτονικά* και για να συμβαίνει αυτό πρέπει όλες οι διαφορές

$$(y_1 - x_1),\ (y_2 - x_2),\ \ldots,\ (y_\nu - x_\nu)$$

να είναι πολύ μικρές.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση δύο μεταβλητών την $z = f(x,y)$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ όταν

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \text{ ή } \lim_{P\to P_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)\,.$$

Δηλαδή με βάση τον ορισμό του ορίου, θα πρέπει για κάθε θετικό αριθμό ε οσονδή-ποτε μικρό, να υπάρχει ένας άλλος θετικός αριθμός a τέτοιος ώστε, όταν έχουμε

$$|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < a\,,$$

να συνεπάγεται ότι

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon\,.$$

Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σ' όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση στον τόπο αυτό.

Π. χ. η συνάρτηση $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ η οποία ορίζεται για σημεία μέσα στον κύκλο $x^2 + y^2 \leq 1$ είναι συνεχής. Αυτή παραμένει συνεχής και στην περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ όπου είναι $w = 0$.

2.1.2 Βασικές τοπολογικές έννοιες

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε χωρίς μαθηματική αυστηρότητα βασικές τοπολογικές έννοιες απαραίτητες στην ανάλυση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

2.1.2.1 Φραγμένα σύνολα, φραγμένες συναρτήσεις

Ένα υποσύνολο A του R^3 (ή του R^2) λέγεται *φραγμένο*, αν η απόσταση δύο τυχαίων σημείων του $P_1,\ P_2$ είναι πεπερασμένος αριθμός, δηλαδή αν υπάρχει $M > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $d(P_1,\ P_2) \leq M$ για κάθε $P_1,\ P_2 \in A$. Π.χ.

το σύνολο $A = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ του R^2 είναι φραγμένο διότι η απόσταση οποιωνδήποτε σημείων του είναι μικρότερη ή ίση του 2.

- το σύνολο $A = \{(x, y) \,/\, x \leq y \leq 3x \text{ και } x \geq 0\}$ του του R^2 (η γωνία των ημιευθειών $y = x$ και $y = 3x$) δεν είναι φραγμένο, αφού για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό $M > 0$ υπάρχουν σημεία $P_1,\ P_2$ του A που απέχουν απόσταση μεγαλύτερη του M ($d(P_1,\ P_2) > M$)

Μία συνάρτηση $f(x, y, z)$ ή ($f(x, y)$) λέγεται *φραγμένη* σε μια περιοχή A του R^3 (ή του R^2) αν οι τιμές της είναι πεπερασμένες ή δεν απειρίζεται στην περιοχή A, δηλαδή αν υπάρχει $M > 0$, τέτοιος ώστε $|f(x, y, z)| \leq M$ (αντίστοιχα $|f(x, y)| \leq M$) για κάθε $(x, y, z) \in A$ (αντίστοιχα $(x, y) \in A$). Π.χ.

- Η συνάρτηση $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ είναι φραγμένη στο R^2, διότι

  $|f(x, y)| = e^{-(x^2 + y^2)} \leq 1$ για κάθε $(x, y, z) \in A = R^2$.

- Η συνάρτηση $f(x, y, z) = \dfrac{1}{xyz}$ δεν είναι φραγμένη στο R^3, διότι απειρίζεται

στο σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2.2.2.2 Περιοχή σημείου, ανοικτά και κλειστά σύνολα

Ονομάζουμε σφαιρική *περιοχή* $\pi(P, \varepsilon)$ ακτίνας ε ενός σημείου *P* ενός χώρου $\Omega \subseteq \mathrm{R}^3$ το σύνολο των σημείων του Ω που απέχουν από το *P* απόσταση μικρότερη του ε και είναι το εσωτερικό της σφαίρας κέντρου *P* και ακτίνας ε. Η περιοχή αυτή αν αναφέρεται στο χώρο $\Omega \subseteq R^2$ δηλαδή στο επίπεδο, ονομάζεται επίπεδη περιοχή, και είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο *P* και ακτίνα ε, ενώ αν αναφέρεται στο χώρο $\Omega \subseteq R$ δηλαδή στον, άξονα των πραγματικών αριθμών, ονομάζεται περιοχή διαστήματος με κέντρο το *P* και άκρα διαστήματος τα ($P-\varepsilon$, $P+\varepsilon$).

Ένα υποσύνολο *A* του Ω λέγεται *ανοικτό*, αν για κάθε σημείο του *P* υπάρχει σφαιρική περιοχή $\pi(P, \varepsilon)$ που να ανήκει στο υποσύνολο του *A*. Π.χ.

- Το σύνολο $A = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ του εσωτερικού του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ είναι ανοικτό, επειδή για κάθε σημείο *P* του *A* υπάρχει επίπεδη περιοχή που είναι υποσύνολο του *A*.

- Το σύνολο $A = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ της περιφέρειας και του εσωτερικού του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ δεν είναι ανοικτό, επειδή για τα σημεία *P* του κύκλου δεν υπάρχει επίπεδη περιοχή $\pi(P, \varepsilon)$ που να είναι υποσύνολο του *A*.

Ένα υποσύνολο *A* του Ω λέγεται *κλειστό*, αν το συμπλήρωμα του $A' = \Omega - A$ είναι ανοικτό σύνολο. Π.χ.

- Το σύνολο $A = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ της σφαίρας και του εσωτερικού της είναι κλειστό, επειδή το συμπλήρωμά του $A' = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 + x^2 > 1\}$ είναι α-νοικτό, αφού για κάθε σημείο *P* του A' υπάρχει σφαιρική περιοχή $\pi(P, \varepsilon)$ που να είναι υποσύνολο του A'.

2.2 Μερικές παράγωγοι

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών π.χ. την

$$w = f(x, y, z).$$

Αν οι μεταβλητές y και z θεωρηθούν σταθερές, τότε η συνάρτηση αυτή γίνεται συνάρτηση μόνο του x. Αν υπάρχει η παράγωγος της f ως προς x, τότε αυτή λέγεται *1η μερική παράγωγος της f ως προς x* και παριστάνεται με τα σύμβολα

$$f'_x, \quad w'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Π. χ. αν $w = 3x^2y^3 - 5xy^2 + 4y^4$ θα έχουμε

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 6xy^3 - 5y^2.$$

Ανάλογα, αν θεωρήσουμε τα x, z σταθερά και παραγωγίσουμε ως προς y, θα πάρουμε τη μερική παράγωγο της w ως προς y, η οποία παριστάνεται με ένα από τα σύμβολα

$$f'_y, \quad w'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 9x^2y^2 - 10xy + 16y^3$$

Εντελώς ανάλογα ορίζεται και η $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Η $\frac{\partial w}{\partial x}$ είναι κι αυτή μια συνάρτηση περισσοτέρων μεταβλητών. Αν πάλι όλες τις μεταβλητές εκτός από την x τις θεωρήσουμε σταθερές και παραγωγίσουμε την $\frac{\partial w}{\partial x}$, θα πάρουμε την *2η μερική παράγωγο* της w *ως προς* x η οποία παριστάνεται με τα σύμβολα

$$f''_{x^2}, \quad w''_{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα είναι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6y^3$$

Παρόμοια, αν στη συνάρτηση $\frac{\partial w}{\partial x}$ θεωρήσουμε όλες τις μεταβλητές σταθερές εκτός από την y και παραγωγίσουμε αυτή ως προς y, θα πάρουμε τη *2η μερική παράγωγο ως προς x και y* η οποία παριστάνεται με ένα από τα σύμβολα

$$f''_{xy}, \quad w''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Στο παράδειγμα είναι: $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 18xy^2 - 10y$.

Αν τώρα παραγωγίσουμε την $\frac{\partial w}{\partial y}$ ως προς x θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές, θα πάρουμε την 2η μερική παράγωγο της w *ως προς* y *και* x που θα είναι

$$f''_{yx}, \quad w''_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}.$$

Στο παράδειγμα είναι: $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 18xy^2 - 10y$.

Επίσης, αν παραγωγίσουμε την $\frac{\partial w}{\partial y}$ ως προς y θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές, θα πάρουμε τη *2η μερική παράγωγο της* w *ως προς* y, που θα είναι η

$$f''_{y^2}, \quad w''_{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Στο παράδειγμα είναι: $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 18x^2 y - 10x + 48y^2$.

Γενικά, αν τη συνάρτηση $w = f(x, y, z)$ την παραγωγίσουμε: μ φορές ως προς x, ν φορές ως προς y και ρ φορές ως προς z, θα πάρουμε την $(\mu + \nu + \rho)$ τάξης μερική παράγωγο της f ως προς x, y, z που παριστάνεται με το σύμβολο

$$\frac{\partial^{\mu+\nu+\rho} f}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu} \partial z^{\rho}}.$$

Αποδεικνύεται ότι η τάξη κατά την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις δεν έχει σημασία, αρκεί να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και να είναι επιπλέον ***<u>συνεχείς</u>*.** Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 18xy^2 - 10y \text{ ή } w''_{xy} = w''_{yx}.$$

Επομένως, κατά την εύρεση των μερικών παραγώγων, εφόσον υπάρχουν οι παράγωγοι αυτές και είναι συνεχείς, μπορούμε να μεταβάλλουμε τη σειρά των παραγωγίσεων όπως θέλουμε.

Παραδείγματα

1) Αν $f(x,y,z)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ να δειχτεί ότι:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=1$$

Λύση

Θέτουμε για συντομία $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, οπότε

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1+2x/2r}{x+r}=\frac{1}{r}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y/2r}{x+r}=\frac{y}{r(x+r)}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z/2r}{x+r}=\frac{z}{r(x+r)}$. Άρα

$$\begin{aligned}&x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x}{r}+\frac{y^2}{r(x+r)}+\frac{z^2}{r(x+r)}=\\&=\frac{x(x+r)+y^2+z^2}{r(x+r)}=\frac{r^2+rx}{r(x+r)}=1\end{aligned}.$$

2) Αν $f(x,y,z)=\frac{z}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ να δειχτεί ότι $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

Λύση

Είναι $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{z}{x^2}\ln\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{z}{x}\cdot\frac{-y/x^2}{y/x}=-\frac{z}{x^2}\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right]$. Επίσης

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{z}{x}\cdot\frac{1/x}{y/x}=\frac{z}{xy}$, και $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται

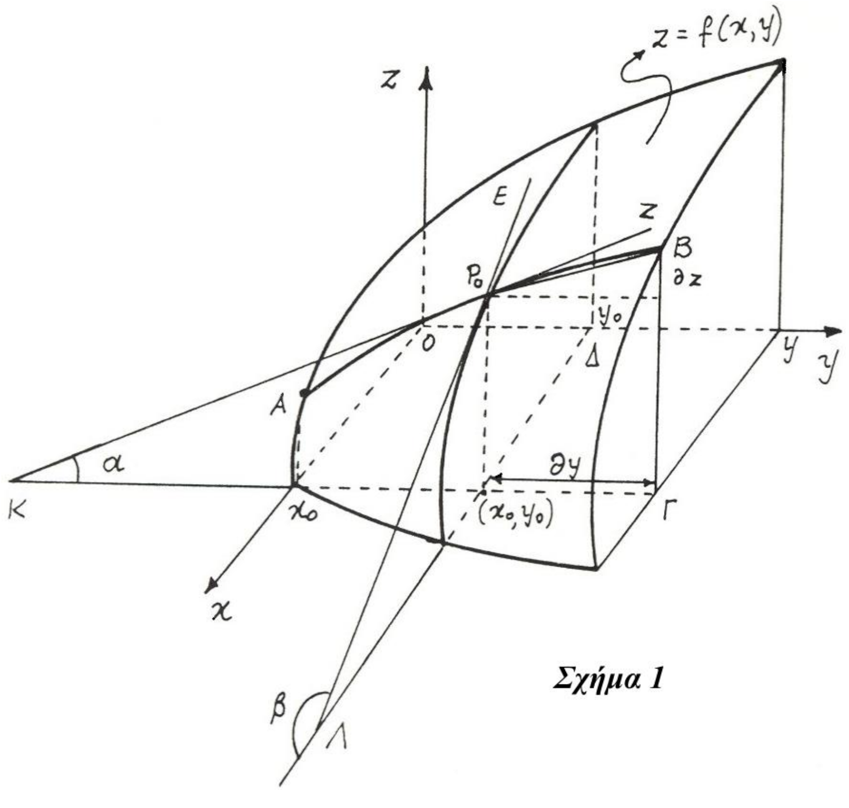
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{z}{x}\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right]+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

2.2.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης z = $f(x,y)$ και ερμηνεία των μερικών παραγώγων

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση $z=f(x,y)$ η οποία ορίζεται σ' ένα υποσύνολο Τ του καρτεσιανού γινομένου RxR = R^2 (που είναι φυσικά ένα μέρος του επιπέδου xOy). Τότε σε κάθε $(x, y)\subset T\subset R^2$ αντιστοιχεί μέσω της $f(x, y)$ ένας και μόνο ένας πραγματικός αριθμός ο z και επομένως η διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) απεικονίζεται σ' ένα σημείο $A(x, y\ z)$ του χώρου. Το σύνολο των εικόνων των διατεταγμένων τριάδων (x, y, z) αποτελεί επομένως μια επιφάνεια E της οποίας η προβολή στο επίπεδο xOy δίνει το πεδίο ορισμού της.

Η γραφική παράσταση επομένως μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$ που αναφέρεται σ' ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz είναι μια επιφάνεια που είναι συνεχής (χωρίς κενά) όταν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και y σ' όλο το πεδίο ορισμού της Τ.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση αυτή και υποθέτουμε ότι είναι παραγωγίσιμη ως προς x και y. Θα ζητήσουμε να βρούμε τι παριστάνει γεωμετρικά η μερική παράγωγος της z ως προς x και ως προς y σ' ένα σημείο της $P_0(x_0, y_0)$. Αν φέρουμε απ' το P_0 επίπεδο κάθετο στον άξονα Οx, αυτό τέμνει την επιφάνεια κατά την καμπύλη AB (σχήμα 1). Διατηρώντας το x_0 σταθερό και δίνοντας στο y μια μικρή αύξηση ∂y μεταφέρουμε το πρόβλημα στο επίπεδο $ΓΚP_0$ και βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος της z ως προς y στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ εκφράζει την εφα που σχηματίζει η εφαπτομένη της AB στο P_0 με τον θετικό Οy δηλ. $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=y_0} = \text{εφ}\alpha$.



Σχήμα 1

Ανάλογα αν σκεφτούμε, διατηρώντας το y_0 σταθερό και μεταβάλλοντας το x_0 κατά ∂x βρίσκουμε ότι $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \text{εφ}\beta$ (όπου β είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη $P_0Λ$ με τον θετικό Οx) όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί ο τόπος ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ (*Απάντηση*: ο κύκλος $x^2 + y^2 = 25$ και το εσωτερικό του),

β) $z = 5x - 2y$ (*Απάντηση*: Ολόκληρο το καρτεσιανό επίπεδο RxR)

γ) $z = \dfrac{x+y}{xy}$ (*Απάντηση*: Ολόκληρο το επίπεδο RxR εκτός των αξόνων)

δ) $z = \log(x + y - 1)$ (*Απάντηση*: Όλο το ημιεπίπεδο πάνω από την $x + y - 1 = 0$)

ε) $z = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$ (*Απάντηση*: το ορθογώνιο $-3 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 2$)

2) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων ως προς όλες τις μεταβλητές που περιέχουν:

α) $z = e^{2x}\sigma\upsilon\nu(x - y)$

($A\pi$:: $z'_x = e^{2x}\{2\sigma\upsilon\nu(x-y) - \eta\mu(x-y)\}$, $z'_y = e^{2x}\eta\mu(x-y)$)

β) $z = e^{x^2 - xy}$ (*Απάντηση*: $z'_x = (2x - y)e^{x^2 - xy}$, $z'_y = -xe^{x^2 - xy}$)

γ) $z = e^{\frac{x}{y}}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{y}$ (*Απάντηση*: $z'_x = \dfrac{1}{y}e^{x/y}\left(\sigma\upsilon\nu(x/y) - \eta\mu(x/y)\right)$,

$z'_y = \dfrac{1}{y^2}e^{x/y}\left(x\eta\mu(x/y) - x\sigma\upsilon\nu(x/y)\right)$)

δ) $w = z^{yx}$ (*Απάντηση*: $w'_x = yz^{xy}\ln z$, $w'_y = xz^{xy}\ln z$, $w'_z = xyz^{xy-1}$)

ε) $w = y^{x^2\ln z}$ ($A\pi.$ $w'_x = 2xy^{x^2\ln z}\ln y \cdot \ln z$,

$w'_y = x^2y^{x^2\ln z - 1}\ln z$, $w'_z = \dfrac{1}{z}x^2y^{x^2\ln z}\ln y$)

στ) $w = yze^{xy^2z}$ ($A\pi.$ $w'_x = y^3z^2e^{xy^2z}$,

$w'_y = (2xy^2z^2 + z)e^{xy^2z}$, $w'_z = (xy^3z + y)e^{xy^2z}$)

3) Να δειχτεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις πληρούν τη σχέση που αναγράφεται δίπλα από καθεμιά τους:

α) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $x\dfrac{\partial z}{\partial z} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

β) $z = \log\sqrt{x^2+y^2}$: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

γ) $z = (x-2y)^2$: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$

δ) $z = \dfrac{x}{2}\log(x^2+y^2) - y\,\text{τοξεφ}\,\dfrac{y}{x}$: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

ε) $z = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

ζ) $z = \dfrac{xy}{x-y}$: $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

2.3 Ολικό διαφορικό συνάρτησης

Έστω $z = f(x,y)$ μια συνάρτηση με δύο μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι Δz είναι η ολική μεταβολή της συνάρτησης που επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη μεταβολή των x και y, δηλ.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y). \qquad (\text{i})$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας την ποσότητα $f(x, y+\Delta y)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta z = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]$$

Η πρώτη αγκύλη είναι προφανώς η μεταβολή του z με σταθερό το $y + \Delta y$ και η δεύτερη αγκύλη δίνει τη μεταβολή της z με σταθερό το x. Υποθέτουμε ότι η $f(x, y)$ έχει μερικές παραγώγους στον τόπο που ορίζεται (το τυχαίο σημείο (x, y) είναι εσωτερικό σημείο του τόπου αυτού). Εφαρμόζουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x+\theta\Delta x) \text{ όπου } 0<\theta<1$$

για κάθε μια από τις παραπάνω μεταβλητές που επιτρέπεται, γιατί μια μόνο μεταβλητή μεταβάλλεται κάθε φορά. Έτσι έχουμε:

$$\Delta z = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y \text{ όπου } 0<\theta_1,\theta_2<1.$$

Υποθέτοντας ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ είναι συνεχείς, μπορούμε να πούμε ότι ο συντελεστής του Δx τείνει στο $f'_x(x,y)$ και ο συντελεστής του Δy τείνει στο $f'_y(x,y)$ όταν τα Δx, Δy τείνουν στο μηδέν. Έτσι

$$\Delta z = \left(f'_x(x,y) + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(f'_y(x,y) + \varepsilon_2\right)\Delta y \text{ ή}$$

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

όπου τα ε_1, ε_2 είναι πολύ μικροί αριθμοί, αντίστοιχα με τα Δx, Δy. Τα γινόμενα $\varepsilon_1 \Delta x$ και $\varepsilon_2 \Delta y$ είναι απειροστά $2^{ης}$ τάξης ως προς τα Δx και Δy αντίστοιχα. Αν οι αυθαίρετες μεταβολές Δx και Δy των ανεξάρτητων μεταβλητών συμπέσουν με τα διαφορικά αυτών dx, dy τότε μπορούν να παραλειφθούν οι όροι $\varepsilon_1 \Delta x$ και $\varepsilon_2 \Delta y$ οπότε έχουμε

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy \text{ ή}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $w = f(x,y,z)$, αποδεικνύεται ανάλογα ότι

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \qquad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) μας δίνουν το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης των συναρτήσεων $z = f(x,y)$ και $w = f(x,y,z)$.

Παρόμοια ορίζεται και το ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης, που είναι το διαφορικό του διαφορικού. Έτσι ορίζουμε: $d^2 w = d(dw)$ όπου dw είναι το ολικό διαφορικό της (2). Επομένως έχουμε

$$d^2 w = d(dw) = \frac{\partial dw}{\partial x}dx + \frac{\partial dw}{\partial y}dy + \frac{\partial dw}{\partial z}dz \text{. Είναι}$$

$$\frac{\partial dw}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dz,$$
$$\frac{\partial dw}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dz,$$
$$\frac{\partial dw}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} d^2 w = &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dz \right)dx + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dz \right)dy + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz \right)dz \end{aligned}$$

ή μετά τις πράξεις:

$$\begin{aligned} d^2 w = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε στο β΄ μέλος συμβολικά το $\partial^2 f$ με ∂f^2, έχουμε το ανάπτυγμα του τετραγώνου της παράστασης $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$d^2 w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \right)^{(2)} \tag{3}$$

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι για διαφορικό ν τάξης ισχύει:

$$d^\nu w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \right)^{(\nu)}.$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το ολικό διαφορικό και η ολική αύξηση της συνάρτησης $z = xy - x$ στο σημείο (1, 2) αν Δx = 0,1 και Δy = 0,2 .

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο (i) της παρ. 2.3 έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \left[(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(x+\Delta x)\right]-(xy-x) = \\ &= xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - x - \Delta x - xy + x = \\ &= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - \Delta x = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}32\end{aligned}$$

δηλαδή η ολική αύξηση της z είναι 0,32.

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο (1) της παρ. 2.3 έχουμε ($\frac{\partial z}{\partial x} = y-1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$). Άρα

$$dz = (y-1)dx + xdy = (2-1)\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}2 = 0{,}3\,.$$

Επομένως, το σφάλμα που κάνουμε παίρνοντας το Δz και το dz είναι 0,32 -0,3 = 0,02.

Παρατήρηση

Η σπουδαιότητα του ολικού διαφορικού είναι σημαντική, αφού μπορεί να μας υπολογίζει πολύ εύκολα κατά προσέγγιση, πόσο αλλάζει μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών όταν μεταβληθούν ταυτόχρονα κατά λίγο όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές.

2) Να βρεθεί το ολικό διαφορικό της $w = e^{x^2+y^2}\eta\mu(z^2)$

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2) έχουμε

$$\begin{aligned}dw &= 2xe^{x^2+y^2}\eta\mu(z^2)dx + 2ye^{x^2+y^2}\eta\mu(z^2)dy + 2ze^{x^2+y^2}\sigma\upsilon\nu(z^2)dz = \\ &= 2e^{x^2+y^2}(x\eta\mu(z^2)dx + y\eta\mu(z^2)dy + z\sigma\upsilon\nu(z^2)dz).\end{aligned}$$

2.4 Διαφόριση σύνθετων συναρτήσεων

Έστω $\omega = F(u, v, w)$ σύνθετη συνάρτηση, όπου u, v, w είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z δηλαδή

$$u = \varphi(x, y, z), \quad v = \sigma(x, y, z), \quad w = \tau(x, y, z). \qquad (1)$$

Τα (x, y, z) βρίσκονται στο χώρο Τ υποσύνολο του τρισδιάστατου χώρου R^3 έτσι ώστε οι αντίστοιχες τιμές των (u, v, w) να βρίσκονται στο χώρο Τ′ του τρισδιάστατου χώρου όπου ορίζεται η συνάρτηση F. Ζητάμε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z}\ .$$

Αντικαθιστώντας τα u, v, w με τις τιμές των απ' την (1) θεωρούμε το ω συνάρτηση μόνο του x, δίνοντας προς στιγμή σταθερές τιμές στα y και z. Στη μεταβολή Δx του x θα έχουμε αντίστοιχα τις μεταβολές Δu, Δv, Δw των u, v, w.

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= F(u+\Delta u,\, v+\Delta v,\, w+\Delta w) - F(u,\, v,\, w) = \\ &= \left[F(u+\Delta u,\, v+\Delta v,\, w+\Delta w) - F(u,\, v+\Delta v,\, w+\Delta w)\right] + \\ &\quad + \left[F(u,\, v+\Delta v,\, w+\Delta w) - F(u,\, v,\, w+\Delta w)\right] + \\ &\quad + \left[F(u,\, v,\, w+\Delta w) - F(u,\, v,\, w)\right].\end{aligned}$$

Αν εργαστούμε όπως ακριβώς και στην περίπτωση του ολικού διαφορικού θα έχουμε

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = F'_u(u,v,w)\frac{\partial u}{\partial x} + F'_v(u,v,w)\frac{\partial v}{\partial x} + F'_w(u,v,w)\frac{\partial w}{\partial x} \text{ ή}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2}$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά και για τις y και z έχουμε

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} \text{ και} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4}$$

Το ολικό διαφορικό της συνάρτησης ω, αν τη θεωρήσουμε ως συνάρτηση των x, y, z, είναι όπως το υπολογίσαμε

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας στην (5) τις τιμές των (2), (3) και (4) έχουμε μετά τις πράξεις

$$\begin{aligned}d\omega &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) + \frac{\partial\omega}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right) + \\ &\quad + \frac{\partial\omega}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\end{aligned}$$

Αλλά οι ποσότητες που είναι στις παρενθέσεις είναι τα ολικά διαφορικά των u, v, w δηλαδή τα du, dv, dw. Άρα

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial u}du + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv + \frac{\partial\omega}{\partial w}dw.$$

Δηλαδή το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης μιας σύνθετης συνάρτησης έχει την ίδια μορφή που θα είχε αν οι μεταβλητές ήταν ανεξάρτητες.

Για να υπολογίσουμε τώρα το $d^2\omega$ θα εφαρμόσουμε πάλι τον τύπο (3) της παραγράφου 2.3. όπου όμως υπεισέρχονται οι ενδιάμεσες συναρτήσεις *du, dv, dw*.

$$\begin{aligned}
d^2\omega = {} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w}dudw + \frac{\partial F}{\partial u}d^2 u + \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}dvdw + \frac{\partial F}{\partial v}d^2 v + \\
& + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w}dudw + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}dvdw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w}d^2 w = \\
& = \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}du + \frac{\partial \omega}{\partial v}dv + \frac{\partial \omega}{\partial w}dw\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u}d^2 u + \frac{\partial F}{\partial v}d^2 v + \frac{\partial F}{\partial w}d^2 w
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο τύπος είναι πιο σύνθετος από τον (3) της παρ. 2.3 επειδή οι όροι d^2u, d^2v, d^2w δεν μηδενίζονται. Για να υπολογίσουμε το $d^3\omega$ εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα και το αποτέλεσμα θα είναι ακόμα πιο πολύπλοκο κ.ο.κ.

Παραδείγματα

2) Δίνεται η συνάρτηση $z = u^2 + uv + v^2$ όπου $u = 2x + y, \quad v = x - 3y$. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Λύση

Είναι $\frac{\partial z}{\partial u} = 2u + v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u + 2v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -3$.

Οι τύποι (2) και (3) με μεταβλητές *u, v* των *x, y* γίνονται

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \text{ ή}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2u + v)\cdot 3 + (u + 2v)\cdot 1 = 7u + 5v =$$

$$= 7(3x + y) + 5(x - 3y) = 26x - 8y. \text{ Ανάλογα,}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2u + v)\cdot 1 + (u + 2v)\cdot(-3) = -u - 5v =$$

$$= -(3x + y) - 5(x - 3y) = -8x + 14y.$$

2) Δίνεται η συνάρτηση $z = u^2 v^3$ με $u = 2t^3,\ v = 3t^2$. Να βρεθεί η $\frac{dz}{dt}$.

Λύση

Εδώ παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις *u* και *v* είναι συναρτήσεις μιας μόνο μεταβλητής της *t*. Έτσι, τις μερικές παραγώγους των *u* και *v* ως προς *t*, δηλαδή τις $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}$ θα τις αντικαταστήσουμε με τις συνηθισμένες παραγώγους $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ και τελικά δεν υπολογίζουμε την $\frac{\partial z}{\partial t}$ αλλά την $\frac{dz}{dt}$, οπότε ο τύπος (2) με μεταβλητές *u, v* του *t* γίνεται

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$ Είναι

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^3,\quad \frac{\partial z}{\partial v} = 3u^2v^2,\quad \frac{du}{dt} = 6t^2,\quad \frac{dv}{dt} = 6t.$$ Άρα

$$\frac{dz}{dt} = 2uv^2\cdot 6t^2 + 3u^2v^2\cdot 6t = 12uv^2t^2 + 18v^2u^2t =$$
$$= 12(2t^3)(3t^2)^2t^2 + 18(3t^2)^2(2t^3)^2t = 216t^9 + 648t^{11}.$$

2.5 Ολοκλήρωση ολικών διαφορικών

Έστω συνάρτηση $y = F(x)$ μιας μεταβλητής ορισμένη και συνεχής στο διάστημα *I*, όπου $I \subseteq R$. Όπως ξέρουμε, το διαφορικό της συνάρτησης αυτής είναι

$$dy = d(F(x)) = F'(x)dx = \frac{d(F(x))}{dx}\cdot dx = f(x)dx.$$

Έτσι, αν ξέρουμε ότι $f(x)dx$ είναι το διαφορικό μιας συνάρτησης *y*, δηλαδή

$$dy = f(x)dx,$$

για να βρεθεί η συνάρτηση αυτή, ως γνωστό, αρκεί να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη αυτής. (λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = f(x)$), δηλαδή

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $z = f(x, y)$ δύο μεταβλητών *x* και *y*. Είδαμε ότι το διαφορικό της συνάρτησης αυτής είναι

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,,$$

δηλαδή θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια 'επέκταση' του διαφορικού της $f(x)$, όμως για δύο μεταβλητές.

Ανάλογα, όπως είδαμε, υπολογίζεται και μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως 'επέκταση', το διαφορικό για περισσότερες μεταβλητές. Π.χ. για μια συνάρτηση με τρεις μεταβλητές, την $w = f(x, y, z)$, το διαφορικό της είναι

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \text{ κ.ο.κ.}$$

Μετά από αυτά, θεωρούμε την παράσταση

$$A = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (1)$$

η οποία ορίζεται στον τόπο $T \subseteq R^2$ με $P(x, y)$, $Q(x, y)$ συνεχείς συναρτήσεις των x και y. Στην παράσταση αυτή αναφερθήκαμε στην παράγρ. 1.8.[1] του 1^{ου} κεφαλαίου.

Η A λέγεται **τέλειο (ακριβές) διαφορικό,** αν υπάρχει κάποια συνάρτηση $\Phi = \Phi(x, y)$ της οποίας το ολικό διαφορικό να είναι η παράσταση (1), δηλαδή

$$d\Phi(x, y) = A = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \forall (x, y) \in T \subseteq R^2. \qquad (1α)$$

Ανάλογα η παράσταση

$$B = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \qquad (2)$$

ορισμένη στον τόπο $T \subseteq R^3$ με P, Q, R συνεχείς, είναι **τέλειο (ακριβές) διαφορικό**, αν υπάρχει συνάρτηση $\Phi = \Phi(x, y, z)$ τέτοια ώστε

$$d\Phi(x, y, z) = B = Pdx + Qdy + Rdz \quad \forall (x, y, z) \in T \subseteq R^3.$$

(2α)

Για την παράσταση (1) αποδεικνύεται ότι:

Αν οι συναρτήσεις $P(x, y)$, $Q(x, y)$ δύο μεταβλητών, καθώς και οι $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

[1] την είδαμε ως ΔΕ της μορφής $Pdx+Qdy = 0$.

είναι συνεχείς συναρτήσεις στον τόπο $T \subseteq R^2$, τότε η παράσταση

$$A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

είναι τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης $\Phi = \Phi(x,y)$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν η παράσταση $A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $\Phi = \Phi(x,y)$, θα έχουμε

$$d\Phi(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = Pdx + Qdy \text{ δηλ. } P = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ και } Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Άρα $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$, επίσης $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$

Τα δεύτερα μέλη των σχέσεων αυτών είναι ίσα, άρα $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Επίσης, για την παράσταση (2) αποδεικνύεται ότι, αν οι συναρτήσεις τριών μεταβλητών, *P*, *Q*, *R*, καθώς και οι $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial R}{\partial y}$

είναι συνεχείς στον τόπο $T \subseteq R^3$, τότε η παράσταση (2) είναι τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης $\Phi = \Phi(x,y,z)$ αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{4}$$

Η απόδειξή είναι ακριβώς ίδια με την προηγούμενη.

Μετά από τους παραπάνω ορισμούς θα βρούμε τη λύση της ΔΕ

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{5}$$

όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1.8. του 1ου κεφαλαίου των Διαφορικών Εξισώσεων. Αν λοιπόν οι συντελεστές των *dx* και *dy* δηλαδή τα *P* και *Q* ικανοποιούν τη σχέση (3), τότε το αριστερό μέλος της (5) είναι το ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $\Phi = \Phi(x,y)$, οπότε θα έχουμε

$$d\big(\Phi(x,y)\big) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Τότε η ΔΕ (5) λέγεται **ακριβής** και η γενική λύση της θα είναι προφανώς η

$$\Phi(x,y) = c\,. \tag{6}$$

Για να βρούμε τη γενική αυτή λύση $\Phi(x,y)$ εργαζόμαστε ως εξής: Έχουμε

$$d\big(\Phi(x,y)\big) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Επομένως: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y)$ και $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$.

Αν ολοκληρώσουμε την σχέση $d\big(\Phi(x,y)\big) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ως προς x διατηρώντας το y σταθερό, παίρνουμε

$$\Phi(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y) = K(x,y) + g(y)\,,$$

(7)

όπου $g(y)$ είναι μία αυθαίρετη (προς το παρόν) συνάρτηση του y.

Παραγωγίζοντας τώρα την (7) ως προς y θα πάρουμε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{\partial K}{\partial y} + g'(y)$$

απ' την οποία υπολογίζουμε το $g'(y)$, διότι οι ποσότητες Q και K είναι γνωστές, οπότε με μια απλή ολοκλήρωση υπολογίζουμε την $g(y)$ χωρίς την αυθαίρετη σταθερή c. Αυτή (η αυθαίρετη σταθερή) αποτελεί το 2^{ο} μέλος της γενικής λύσης (6).

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $\ln(y^2+1)dx + \dfrac{2y(x-1)}{y^2+1}dy = 0$

Λύση

Ελέγχουμε πρώτα αν ικανοποιείται η συνθήκη (3). Θέτοντας

$$P(x,y) = \ln(y^2+1)\,,\ Q(x,y) = \frac{2y(x-1)}{y^2+1}\,,$$

έχουμε $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2y}{y^2+1}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2y}{y^2+1}$, συνεπώς ισχύει η συνθήκη (3).

Επειδή είναι $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y) = \ln(y^2+1)$ και $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y) = \dfrac{2y(x-1)}{y^2+1}$, ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση ως προς x έχουμε

$$\Phi(x,y) = \int \ln(y^2+1)dx = \ln(y^2+1)\int dx = x\ln(y^2+1) + g(y). \tag{8}$$

Απ' την τελευταία σχέση (8), αν την παραγωγίσουμε ως προς y, προκύπτει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2xy}{y^2+1} + g'(y).$$

Αλλά $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y) = \dfrac{2y(x-1)}{y^2+1}$. Άρα $\dfrac{2y(x-1)}{y^2+1} = \dfrac{2xy}{y^2+1} + g'(y)$.

Απ' την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $g'(y) = -\dfrac{2y}{y^2+1}$. Άρα

$$g(y) = -\int \frac{2y}{y^2+1}dy = -\int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1} = -\ln(y^2+1).$$

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ λόγω της (8) είναι

$$\Phi(x,y) = x\ln(y^2+1) - \ln(y^2+1) = (x-1)\ln(y^2+1) = c.$$

Αξιοσημείωτες παρατηρήσεις

1) Στην περίπτωση που ισχύει η σχέση (3), οπότε η παράσταση (1) είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $\Phi = \Phi(x,y)$, αυτή η συνάρτηση που επαληθεύει την (1α) υπολογίζεται αμέσως απ' τον τύπο

$$\Phi(x,y) = \int_{\alpha}^{x} P(t,y)dt + \int_{\beta}^{y} Q(\alpha,t)dt, \tag{9}$$

όπου (α, β) αυθαίρετο σημείο του τόπου $T \subseteq R^2$ και οι παραστάσεις μετά την ολοκλήρωση, που περιέχουν τα α, β αντικαθίστανται από την αυθαίρετη σταθερή c.

2) Στην περίπτωση που ισχύουν οι σχέσεις (4), οπότε η παράσταση (2) είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $\Phi = \Phi(x,y,z)$, αυτή η συνάρτηση που επαληθεύει την (2α) υπολογίζεται αμέσως απ' τον τύπο

$$\Phi(x,y,z) = \int_{\alpha}^{x} P(t,y,z)dt + \int_{\beta}^{y} Q(\alpha,t,z)dt + \int_{\gamma}^{z} Q(\alpha,\beta,t)dt \tag{10}$$

όπου (α, β, γ) αυθαίρετο σημείο του τόπου $T \subseteq R^3$ και οι παραστάσεις μετά την ολοκλήρωση, που περιέχουν τα α, β, γ αντικαθίστανται από την αυθαίρετη σταθερή c.

Και στις δύο περιπτώσεις η ολοκλήρωση γίνεται ως προς *t*, ενώ θεωρούμε τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ εξίσωση $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

Λύση

Είναι $P=3x^2+6xy^2,\ Q=6x^2y+4y^3$ και

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy \text{ δηλαδή } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

άρα το 1ο μέλος της ΔΕ είναι τέλειο διαφορικό. Έτσι ο τύπος της (9) δίνει

$$\Phi(x,y)=\int_\alpha^x(3t^2+6ty^2)dt+\int_\beta^y(6\alpha^2t+4t^3)dt=\left[t^3+3t^2y^2\right]_\alpha^x+\left[3\alpha^2t^2+t^4\right]_\beta^y=$$
$$=(x^3+3x^2y^2-\alpha^3-3\alpha^2y^2)+(3\alpha^2y^2+y^4-3\alpha^2\beta^2-\beta^4)=$$
$$=x^3+3x^2y^2+y^4-\alpha^3-3\alpha^2\beta^2-\beta^4=x^3+3x^2y^2+y^4+c_1$$

Άρα $\Phi(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4+c_1=c$ ή $\Phi(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4=c-c_1=C$

2) Να δειχθεί ότι η παράσταση

$$(y^2+2zx)dx+(z^2+2xy)dy+(x^2+2yz)dz$$

είναι τέλειο διαφορικό και να βρεθεί η συνάρτηση της οποίας ολικό διαφορικό είναι η δοσμένη παράσταση.

Λύση

Είναι $P=y^2+2zx,\ Q=z^2+2xy,\ R=x^2+2yz$ και

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial P}{\partial z}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=2z,\ \frac{\partial R}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial R}{\partial y}=2z \text{, δηλαδή}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},$$

επομένως η παράσταση που δόθηκε είναι τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης

$\Phi(x,y,z)$ και ο τύπος (10) δίνει

$$\Phi(x,y,z) = \int_{\alpha}^{x}(y^2 + 2zt)dt + \int_{\beta}^{y}(z^2 + 2\alpha t)dt + \int_{\gamma}^{z}(\alpha^2 + 2\beta t)dt =$$

$$= \left[y^2 t + zt^2\right]_{\alpha}^{x} + \left[z^2 t + \alpha t^2\right]_{\beta}^{y} + \left[\alpha^2 t + \beta t^2\right]_{\gamma}^{z} = y^2 x + zx^2 - y^2\alpha - z\alpha^2 +$$

$$+ z^2 y + \alpha y^2 - z^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha^2 z + \beta z^2 - \alpha^2\gamma - \beta\gamma^2 = xy^2 + yz^2 + zx^2 + c$$

Άρα, η παράσταση που μας δόθηκε είναι το ολικό διαφορικό της συνάρτησης

$$\Phi(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2 + c .$$

2.5.1 Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Είδαμε πριν ότι η ΔΕ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ λύνεται αμέσως αν το πρώτο μέλος αυτής είναι τέλειο διαφορικό.

Τι γίνεται όμως αν η έκφραση $Pdx + Qdy$ δεν είναι τέλειο διαφορικό;

Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να γίνει τέλειο διαφορικό αρκεί να πολλαπλασιαστεί με μια κατάλληλη συνάρτηση $\mu(x,y)$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**. Τότε η παράσταση

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy$$

θα είναι τέλειο διαφορικό, άρα θα ισχύει

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$ απ' όπου προκύπτει

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P + \frac{\partial P}{\partial y}\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\mu$$ ή

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 . \qquad (9)$$

Παρατηρούμε ότι η αναζήτηση ενός ολοκληρωτικού παράγοντα ανάγεται στην ολοκλήρωση της ΔΕ (9) με μερικές παραγώγους, δηλαδή σ' ένα πολύ δυσκολότερο πρόβλημα. Γι' αυτό η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις μπορεί να οδηγήσει στη λύση. Θα μελετήσουμε μερικές τέτοιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατόν να βρεθεί εύκολα ένας τέτοιος ολοκληρωτικός παράγοντας.

α) Η συνάρτηση $\mu(x,y)$ είναι συνάρτηση μόνο του x, δηλ. $\mu = \mu(x)$.

Τότε η εξίσωση (9) γίνεται

$$P\cdot 0 - Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \text{ ή } \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y' - Q_x'}{Q}dx \text{, ή } \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y' - Q_x'}{Q} \qquad (10)$$

όπου $\mu' = \dfrac{d\mu}{dx}$, $P_y' = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ και $Q_x' = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Από την (10) προκύπτει ότι η ύπαρξη ενός τέτοιου ολοκληρωτικού παράγοντα (δηλαδή εξαρτώμενου μόνο από το *x*) είναι δυνατή μόνο αν οι συναρτήσεις *P* και *Q* της ΔΕ $Pdx + Qdy = 0$ είναι τέτοιες ώστε η παράσταση $\dfrac{P_y' - Q_x'}{Q}$ να είναι συνάρτηση μόνο του *x*, δηλαδή η $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}$.

Έτσι, αν συμβαίνει αυτό, υπολογίζουμε τη συνάρτηση $\mu = \mu(x)$ με μια απλή ολοκλήρωση ως προς *x*.

β) Η συνάρτηση $\mu(x, y)$ είναι συνάρτηση μόνο του *y*, δηλ. $\mu = \mu(y)$.

Εργαζόμενοι εντελώς ανάλογα, βρίσκουμε ότι η (9) γίνεται

$$P\frac{d\mu}{dy} - Q\cdot 0 + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \text{ ή } \frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q_x' - P_y'}{P}dy \text{ ή } \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{Q_x' - P_y'}{P} \qquad (11)$$

όπου η τελευταία $\dfrac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \dfrac{Q_x' - P_y'}{P}$ πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του *y*.

Και εδώ, η συνάρτηση $\mu = \mu(y)$ υπολογίζεται με απλή ολοκλήρωση ως προς *y*.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $(x + y^2)dx + xy\,dy = 0$

Λύση

Είναι $P = x + y^2$, $Q = xy$. Επίσης, $P_y' = 2y$, $Q_x' = y$,

οπότε η συνθήκη $P_y' = Q_x'$ δεν ικανοποιείται και η ΔΕ που μας δόθηκε δεν είναι ακριβής. Ελέγχουμε λοιπόν, αν επιδέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα που εξαρτάται μόνο από το *x* ή μόνο από το *y*. Έτσι εξετάζουμε τα πηλίκα

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} \text{ και } \frac{Q'_x - P'_y}{P},$$

αν το πρώτο είναι συνάρτηση μόνο του x ή το δεύτερο είναι συνάρτηση μόνο του y. Στη περίπτωσή μας έχουμε

$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$, δηλαδή συνάρτηση μόνο του x. Έτσι

$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x}$. Άρα $\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{d(\mu(x))}{\mu(x)} = \int \frac{dx}{x}$, συνεπώς

$\ln \mu(x) = \ln x$ (χωρίς αυθαίρετη σταθερή), οπότε τελικά $\mu = \mu(x) = x$.

Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τη δοσμένη ΔΕ με x, οπότε παίρνουμε

$(x^2 + xy^2)\,dx + x^2 y\,dy = 0$ με νέα

$P = x^2 + xy^2$, $Q = x^2 y$ τα οποία δίνουν

$P'_y = 2xy$, $Q'_x = 2xy$,

συνεπώς η δοσμένη ΔΕ έγινε ακριβής την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά. Έτσι,

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P = x^2 + xy^2$, άρα $\Phi = \int (x^2 + xy^2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} + g(y)$ και

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q = x^2 y =$ (λόγω της τελευταίας) $x^2 y + g'(y)$.

Άρα $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$.

Συνεπώς, η τελική λύση είναι $\Phi(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} = c - c_1 = C$

2) Να λυθεί η ΔΕ $4xydx + (3x^2 + y)dy = 0$

Λύση

Είναι $P = 4xy$, $Q = 3x^2 + y$ και $P'_y = 4x$, $Q'_x = 6x$. Διαπιστώνουμε ότι

$\frac{Q'_x - P'_y}{p} = \frac{6x - 4x}{4xy} = \frac{2x}{4xy} = \frac{1}{2y} = \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}$. Άρα

$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}$ ή $\int \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}$.

Άρα $\ln \mu(y) = \frac{1}{2}\ln y = \ln y^{1/2}$. Συνεπώς $\mu = \mu(y) = y^{1/2}$.

Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τη δοσμένη ΔΕ με $y^{1/2} = \sqrt{y}$, οπότε παίρνουμε

$$4xy\sqrt{y}\,dx + (3x^2 + y)\sqrt{y}\,dy = 0 .$$

Τα νέα P και Q είναι τώρα

$$P = 4xy\sqrt{y} = 4xy^{3/2},\ Q = (3x^2 + y)\sqrt{y} \text{ με}$$

$$P'_y = \frac{3}{2}y^{1/2}4x = 6x\sqrt{y}\ ,\ Q'_x = 6x\sqrt{y} .$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έγινε ακριβής, οπότε τη λύνουμε κανονικά. Είναι

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P = 4x\sqrt{y^3}$ άρα $\Phi = \int 4x\sqrt{y^3}\,dx = 2x^2\sqrt{y^3} + g(y)$. Ακόμα,

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q = (3x^2 + y)\sqrt{y} =$ (λόγω της τελευταίας) $2x^2\frac{3}{2}y^{1/2} + g'(y)$. Άρα

$3x^2\sqrt{y} + y\sqrt{y} = 3x^2\sqrt{y} + g'(y)$. Επομένως $g'(y) = y\sqrt{y} = y^{3/2}$ και τελικά

$$g(y) = \int y^{3/2}dy = \frac{y^{3/2+1}}{3/2+1} = \frac{y^{5/2}}{5/2} = \frac{2\sqrt{y^5}}{5} .$$

Συνεπώς, η τελική λύση είναι $\Phi(x, y) = 2x^2\sqrt{y^3} + \frac{2\sqrt{y^5}}{5} = c$.

γ) Η $\mu(x, y)$ είναι συνάρτηση του γινομένου xy, δηλ. $\mu = \mu(xy)$.

Όταν ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι συνάρτηση του γινομένου $z = xy$, δηλαδή $\mu = \mu(z) = \mu(xy)$, τότε από την παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων έχουμε

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}y \text{ και } \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}x .$$

Τότε η εξίσωση (9) γίνεται

$$P\frac{d\mu}{dz}x - Q\frac{d\mu}{dz}y + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \text{ ή}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{Px - Qy}dz \text{ ή } \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{Q'_x - P'_y}{Px - Qy}, \tag{12}$$

όπου το δεξιό μέλος της (12) πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του γινομένου *xy*.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $(xy^3+2x^2y^2-y^2)dx+(x^2y^2+2x^3y-2x^2)dy=0$ με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\mu=\mu(z)=\mu(xy)$

Λύση

Είναι $P=xy^3+2x^2y^2-y^2$, $Q=x^2y^2+2x^3y-2x^2$ και

$P'_y=3xy^2+4x^2y-2y$, $Q'_x=2xy^2+6x^2y-4x$,

οπότε σχηματίζουμε την παράσταση (12). Είναι

$$Q'_x-P'_y=(2xy^2+6x^2y-4x)-(3xy^2+4x^2y-2y)=$$
$$-xy^2+2x^2y-4x+2y=xy(2x-y)-2(2x-y)=(2x-y)(xy-2),\ \text{και}$$

$$Px-Qy=(xy^3+2x^2y^2-y^2)x-(x^2y^2+2x^3y-2x^2)y=$$
$$=2x^2y-xy^2=xy(2x-y).\ \text{Επομένως}$$

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}=\frac{Q'_x-P'_y}{Px-Qy}=\frac{(2x-y)(xy-2)}{xy(2x-y)}=\frac{xy-2}{xy}=\frac{z-2}{z}.$$

Άρα ολοκληρώνοντας

$$\int\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}dz=\int\frac{z-2}{z}dz\ \text{ή}\ \int\frac{d\mu(z)}{\mu(z)}=\int\left(1-\frac{2}{z}\right)dz\ \text{ή}$$

$$\ln\mu(z)=z-2\ln z=\ln e^z+\ln z^{-2}=\ln(e^z\cdot z^{-2}).$$

Άρα $\mu(z)=e^zz^{-2}=e^{xy}x^{-2}y^{-2}$

Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν τη δοσμένη ΔΕ με

$$\mu=e^{xy}x^{-2}y^{-2}$$

αυτή γίνεται ακριβής διότι για τα νέα

$P=e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right)$ και $Q=e^{xy}\left(1+\frac{2x}{y}-\frac{2}{y^2}\right)$, έχουμε

$P'_y=e^{xy}(y+2x)=Q'_x$. Είναι

$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P=e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right)$. Άρα

$$\Phi = \int e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right)dx + g(y) = \frac{1}{y}\int\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right)d(e^{xy}) = \kappa.\pi.o. =$$

$$= \frac{1}{y}\left[e^{xy}\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right) - \int e^{xy} d\left(\frac{y}{x}+2-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \underbrace{e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{yx^2}\right)}_{a} -$$

$$-\frac{1}{y}\int e^{xy}\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx = a + \underbrace{\int e^{xy}\frac{1}{x^2}dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{2}{y}\int e^{xy}\frac{1}{x^3}dx.}_{I_2}$$

Είναι όμως

$$I_1 = \frac{1}{y}\int \frac{1}{x^2} d(e^{xy}) = \kappa.\pi.o. = \frac{1}{y}\left[\frac{1}{x^2}e^{xy} - \int e^{xy} d\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{yx^2}e^{xy} - \frac{1}{y}\int e^{xy}\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx = \frac{1}{yx^2}e^{xy} + \frac{2}{y}\int e^{xy}\frac{1}{x^3}dx.$$

Άρα

$$\Phi = a + I_1 + I_2 = e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{yx^2}\right) + \frac{1}{yx^2}e^{xy} +$$

$$+\frac{2}{y}\int e^{xy}\frac{1}{x^3}dx - \frac{2}{y}\int e^{xy}\frac{1}{x^3}dx = e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) + g(y).$$

Παραγωγίζω την Φ ως προς y και έχω

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = xe^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) + e^{xy}\left(-\frac{2}{y^2}\right) + g'(y) = Q = e^{xy}\left(1+\frac{2x}{y}-\frac{2}{y^2}\right).$$

Συνεπώς $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$. Άρα $\Phi(x,y) = e^{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) = C$, όπου $C = c - c_1$.

γ) Η συνάρτηση $\mu(x,y)$ είναι συνάρτηση του πηλίκου x/y, δηλ. $\mu = \mu(x/y)$.

Είναι $\mu = \mu(z) = \mu(x/y)$. Εργαζόμενοι παρόμοια, σύμφωνα με την παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων έχουμε

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{1}{y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

οπότε η (9) γίνεται

$$P\frac{d\mu}{dz}\left(-\frac{x}{y^2}\right) - Q\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{1}{y} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \text{ ή } \frac{d\mu(z)}{\mu(z)} = \frac{y^2(P'_y - Q'_x)}{Px+Qy},$$

όπου βεβαίως το δεξιό μέλος πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του πηλίκου x/y.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε και άλλους ολοκληρωτικούς παράγοντες, όταν ξέρουμε ότι τα x και y είναι μιας συγκεκριμένης συναρτησιακής μορφής, όπως π.χ. της μορφής $z = x + y$, $z = x - y$, $z = x^2 + y^2$, $z = xy^2$ και πολλές άλλες.

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι παρακάτω <u>ακριβείς</u> διαφορικές εξισώσεις

α) $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$ (*Απάντηση*: $y^3 + 3xy^2 = c$),

β) $ydx + xdy = 0$ (*Απάντηση*: $xy = c$),

γ) $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$ (*Απάντηση*: $y^2 + 2xy - x^2 = c$),

δ) $(2x - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ (*Απάντηση*: $x^2 y - xy^2 = c$),

ε) $y^2 dx + (2xy + e^y)dy$ (*Απάντηση*: $e^y + xy^2 = c$),

στ) $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$ (*Απάντηση*: $y(1 + x^2) = c$),

ζ) $y\sigma\upsilon\nu\, xdx + (\eta\mu\, x + 2y)dy = 0$ (*Απάντηση*: $y^2 + y\eta\mu\, x = c$),

η) $(3x^2y^2 + 1)dx + (2x^3y + ye^{y^2})dy = 0$ (*Απάντηση*: $y^2x^3 + x + (y-1)e^y = c$),

θ) $(y + 2xy^3)dx + (x + 3x^2y^2)dy = 0$ (*Απάντηση*: $xy + x^2y^3 = c$),

ι) $(2xy^2 + 1)dx + (2x^2y - 1)dy = 0$ (*Απάντηση*: $x^2y^2 + x - y = c$),

ια) $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$ (*Απάντηση*: $x^3y + xy^3 = c$),

ιβ) $(ye^{xy} + 1)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$ (*Απάντηση*: $e^{xy} + x - y^2 = c$),

ιγ) $(x - y/x^2)dx + (y + 1/x)dy = 0$ (*Απάντηση*: $y^2 + (2y/x) + x^2 = c$),

ιδ) $(y + e^x)dx + (x + 2y)dy = 0$ (*Απάντηση*: $xy + e^x + y^2 = c$),

ιε) $(2x - y)dx + (3y^2 - x)dy = 0$ (*Απάντηση*: $x^2 + y3 - xy = c$).

2) Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις που δεν είναι ακριβείς, μπορούν όμως να γίνουν με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα που εξαρτάται μόνο απ' το *x*, ή μόνο απ' το *y*:

α) $(2y+3x)dx+xdy=0$ (*Απάντηση*: $x^2y+x^3=c$),

β) $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$ (*Απάντηση*: $x^2y+y^{-1}=c$),

γ) $(x^2y-y^2)dx+(2xy+x^3)dy=0$ (*Απάντηση*: $x^{-1}y^2+xy=c$),

δ) $(x^2+y^2-2x)dx-2ydy=0$ (*Απάντηση*: $(x^2+y^2)e^{-x}=c$),

ε) $(2x^2+2xy+1)dx+dy=0$ (*Απάντηση*: $(x+y)e^{x^2}=c$),

στ) $ydx+(x+xy)dy=0$ (*Απάντηση*: $xye^y=c$),

ζ) $(x^2y-1)dx+x^3dy=0$ (*Απάντηση*: $xy+x^{-1}=c$),

η) $4xydx+(3x^2+y)dy=0$ (*Απάντηση*: $2x^2y^{3/2}+(2/5)y^{5/2}=c$),

θ) $ydx+(x+xy+1)dy=0$ (*Απάντηση*: $(xy+1)e^y=c$),

3) Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις που δεν είναι ακριβείς, μπορούν όμως να γίνουν με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα της συναρτησιακής μορφής που αναγράφεται δίπλα:

α) $(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(xy)$ (*Απ.* $(xy)^{-1}+\ln(y/x)=c$),

β) $(2xy-y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(y/x)$ (*Απ.* $x^2ye^{y/x}=c$),

γ) $(y+2x^2)dx+(x+2xy^2)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(x^2+y^2)$ (*Απ.* $xye^{x^2+y^2}=c$),

δ) $(3xy-2y^2)dx+(2x^2-3xy)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(xy)$ (*Απ.* $x^3y^2-x^2y^3=c$),

ε) $(x^2-y^2-2xy)dx+(x^2-y^2+2xy)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(x-y)$

(*Απάντηση*: $(x^2+y^2)/(x-y)=c$),

στ) $(xe^{-y}+1)dx+dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(x+y)$ (*Απ.* $(x-1)e^x+e^{x+y}=c$),

ζ) $2ydx+(y-x)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(x+y)$ (*Απ.* $y/(x+y)^2=c$),

η) $ydx+(y-x)dy=0$: $\mu=\mu(z)=\mu(y/x)$ ($A\pi.$ $y^2e^{2x/y}=c$).

4) Να δειχτεί ότι η ΔΕ: $Pdx+Qdy=0$, διαθέτει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu=\mu(z)$, όπου $z=z(x,y)$ συνάρτηση των *x* και *y*, μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη $\dfrac{\mu'}{\mu}=\dfrac{P'_y-Q'_x}{z'_xQ-z'_yP}$, όπου το 2º μέλος είναι συνάρτηση μόνο του *z*.

(*Υπόδειξη*: Αντικαταστήστε στη σχέση (9) της 2.5.1. τα $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}$ με τα ίσα τους από τις σχέσεις $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mu'_z z'_x$, $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=\dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mu'_z z'_y$).

2.6 Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις που εξετάσαμε ως τώρα, είχαν τη μορφή $\omega=\varphi(x, y, z, \ldots)$ όπου τα *x*, *y*, *z*, … ήταν ή όχι, ανεξάρτητες μεταβλητές. Όμως, μια συνάρτηση *ω* οσωνδήποτε μεταβλητών μπορεί να ορισθεί και από μια σχέση της μορφής

$$f(x, y, z, \ldots, \omega)=0 \qquad (1)$$

Στην περίπτωση αυτή (σχέση 1) η *ω* λέγεται **πεπλεγμένη** συνάρτηση των μεταβλητών *x*, *y*, *z*, …. Για τις πεπλεγμένες συναρτήσεις αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα γνωστό ως θεώρημα ύπαρξης λύσης πεπλεγμένης συνάρτησης.

Θεώρημα ύπαρξης λύσης μιας πεπλεγμένης συνάρτησης (2.6.1.)

Αν $x_0, y_0, z_0, \ldots, \omega_0$ είναι ένα σύστημα τιμών που ικανοποιεί τη σχέση

$f(x, y, z, \ldots, \omega)=0$ και

α) στην περιοχή του σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0, \ldots, \omega_0)$ η συνάρτηση $f(x, y, z, \ldots, \omega)$ είναι συνεχής και έχει μερικές παραγώγους 1ης τάξης επίσης συνεχείς,

β) η μερική παράγωγος $f'_\omega(x, y, z, \ldots, \omega)$ δεν μηδενίζεται για όλες τις τιμές $x_0, y_0, z_0, \ldots, \omega_0$, τότε υπάρχει συνάρτηση $\omega=\varphi(x,y,z,\ldots)$ που ορίζεται μονοσήμαντα και είναι παραγωγίσιμη, η οποία ικανοποιεί την σχέση $f(x,y,z,\ldots,\omega)=0$ τέτοια ώστε $\omega_0=\varphi(x_0,y_0,z_0,\ldots)$.

Έτσι, π.χ.

1) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ορίζει το *z* ως πεπλεγμένη συνάρτηση των *x* και *y*. Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς *z* έχουμε $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όπου το τυχαίο σημείο (*x*, *y*) ανήκει στον τόπο $T = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2) Η εξίσωση $z^5 - 4xyz^4 + 3x^2z^3 - 2y^2z^2 - 8x^2 + y^2 = 0$ ορίζει το *z* ως πεπλεγμένη συνάρτηση των *x*, *y*. Δεν μπορούμε όμως να εκφράσουμε τη λύση αυτή ρητά με τη βοήθεια ρητών συναρτήσεων.

2.7 Παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων

2.7.1 Παράγωγοι μιας ανεξάρτητης μεταβλητής

Θεωρούμε την πεπλεγμένη συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής *x* που ορίζεται απ' τη σχέση

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

Αν σ' ένα πεδίο ορισμού της συνάρτησης η *f* είναι συνεχής, έχει μερικές παραγώγους επίσης συνεχείς και η $f'_y \neq 0$ τότε κατά το θεώρημα ύπαρξης 2.6.1 υπάρχει μια συνάρτηση *y* = *y*(*x*) μονοσήμαντη που ικανοποιεί την (1).

Αν παραγωγίσουμε την (1) ως προς *x* θα έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \text{ όπου } y' = \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Από την (2) προκύπτει $y' = -\dfrac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$ (3)

Για να βρούμε την y'' παραγωγίζουμε την (2) ως προς *x*.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 \text{ ή}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 \tag{4}$$

Αν θέσουμε στην (4) τη τιμή της (3) υπολογίζουμε την y'', επειδή η $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ που είναι συντελεστής της y'', είναι διάφορη του μηδενός. Στη πράξη όμως, η εύρεση των διαδοχικών παραγώγων γίνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω η πεπλεγμένη συνάρτηση y της μεταβλητής x που ορίζεται απ' τη σχέση

$$y^4 - 5x^3y^2 + 2x^2 = 0. \tag{1}$$

Να υπολογιστεί η y' και η y''.

Λύση

Παραγωγίζουμε την (1) θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x.

$4y^3y' - 15x^2y^2 - 10x^3yy' + 4x = 0$ απ' την οποία προκύπτει

$$y' = \frac{15x^2y^2 - 4x}{4y^3 - 10x^3y} \tag{2}$$

Για να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο y'' παραγωγίζουμε κανονικά τη (2) όπου όμως το y θεωρείται πάντα συνάρτηση του x.

$$y'' = \frac{(15x^2y^2 - 4x)'(4y^3 - 10x^3y) - (15x^2y^2 - 4x)(4y^3 - 10x^3y)'}{(4y^3 - 10x^3y)^2} =$$

$$= \frac{(30xy^2 + 30x^2yy' - 4)(4y^3 - 10x^3y) - (15x^2y^2 - 4x)(12y^2y' - 30x^2y - 10x^2y')}{(4y^3 - 10x^3y)^2}$$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση το y' με το ίσο του από τη (2) υπολογίζουμε το y'' κ.ο.κ.

2.7.2 Παράγωγοι περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση z δύο μεταβλητών x και y που ορίζεται απ' τη σχέση (πεπλεγμένη)

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Αν σ' ένα τόπο ορισμού της συνάρτησης η f έχει μερικές παραγώγους και είναι συνεχείς με $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, τότε, κατά το θεώρημα ύπαρξης λύσης 2.6.1 υπάρχει η συνάρτηση $z = \varphi(x, y)$ παραγωγίσιμη που ικανοποιεί την (1).

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της (1) ως προς x, y και έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \tag{2}$$

Για να πάρουμε τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης ως προς x και y, αρκεί να παραγωγίσουμε πάλι τις εξισώσεις (2) ως προς x και y, οπότε θα προκύψουν μόνο τρεις διακεκριμένες σχέσεις, επειδή η παράγωγος της πρώτης των (2) ως προς y συμπίπτει με την παράγωγο της δεύτερης των (2) ως προς x.

Παραγωγίζουμε την πρώτη των (2) ως προς x.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ ή}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

Παραγωγίζουμε τώρα τη δεύτερη των (2) ως προς y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Τέλος παραγωγίζουμε την πρώτη των (2) ως προς y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \text{ κ.τ.λ.}$$

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = e^x \eta\mu\, y + e^y \eta\mu\, x - 1 = 0 .$$

Λύση

Απ' τον τύπο $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \eta\mu y + e^y \sigma\upsilon\nu x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \sigma\upsilon\nu y + e^y \eta\mu x .$$

Άρα $y' = -\dfrac{e^x \eta\mu y + e^y \sigma\upsilon\nu x}{e^x \sigma\upsilon\nu y + e^y \eta\mu x}$.

Σημείωση:

Η y' μπορεί να βρεθεί όπως και η παράγωγος του παραδείγματος της παραγράφου 2.7.1 (παραγωγίζοντας το 1^o μέλος, θεωρώντας το *y* ως συνάρτηση του *x*.)

2) Να βρεθούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ της πεπλεγμένης συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0 .$$

Λύση

Απ' τους τελευταίους τύπους (2) έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Απ' τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x - 4y}{3x + 2z}.$$

2.7.3 Παράγωγοι που ορίζονται με σύστημα εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα δύο πεπλεγμένες συναρτήσεις τις

$$f(x,y,u,v) = 0 \text{ και } g(x,y,u,v) = 0 \qquad (1)$$

δύο ανεξάρτητων μεταβλητών των *x*, *y*. Το θεώρημα ύπαρξης λύσης 2.6.1 για τις συναρτήσεις *u* και *v* γενικεύεται τώρα ως εξής:

Θεώρημα ύπαρξης λύσης δύο πεπλεγμένων συναρτήσεων (2.7.3.1.)

Αν οι συναρτήσεις (1) είναι συνεχείς σε μια περιοχή που περιέχει το σημείο (x_0, y_0, u_0, v_0) για το οποίο $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ και αν:

α) οι πρώτες παράγωγοι των *f* και *g* είναι συνεχείς σ' όλη την περιοχή, β) στο σημείο (x_0, y_0, u_0, v_0) η ορίζουσα:

$$J = \frac{D(f,g)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

τότε οι συναρτήσεις f και g μπορούν να λυθούν ως προς u και v ταυτόχρονα, ως συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις των x και y, και δίνουν τις συναρτήσεις

$u = \varphi(x, y)$ και $v = \tau(x, y)$.

Η ορίζουσα $J = \dfrac{D(f,g)}{D(u,v)}$

λέγεται ***Ιακωβιανή (Jacobian)*** των f και g ως προς τις u και v.

Παράδειγμα

1) Αν u και v είναι συναρτήσεις των x και y και ορίζονται από τις εξισώσεις

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0,$$
$$g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0$$

να βρεθούν οι $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ \dfrac{\partial v}{\partial x}, \ \dfrac{\partial u}{\partial y}, \ \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους των f, g ως προς x. Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{ή} \quad 1 + 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{ή} \quad 2x - y + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων ως προς $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ δίνει

(εφόσον η Ιακωβιανή $J = \dfrac{D(f,g)}{D(u,v)} \neq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y - 2x)}{2(u^2 - v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x - y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

Τώρα υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των f, g ως προς y. Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{ή} \quad 2y + 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \text{ή} \quad -x+2y+2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

απ' τις οποίες προκύπτει όπως και πριν

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u(x-2y)+2vy}{2(u^2-v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v(2y-x)-2uy}{2(u^2-v^2)}.$$

2.7.4 Ορισμός συναρτησιακής εξάρτησης

Έστω οι συναρτήσεις

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_\nu),\, f_2(x_1,x_2,\cdots,x_\nu),\cdots,\, f_\nu(x_1,x_2,\cdots,x_\nu) \qquad (1)$$

που ορίζονται στο σύνολο $\mathrm{T}\subset R^\nu$ με συνεχείς μερικές παραγώγους στο Τ. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $f_1, f_2,\cdots, f_\nu$ είναι συναρτησιακά εξαρτημένες στο Τ, ή απλά **εξαρτημένες**, τότε και μόνο τότε, αν επαληθεύουν μια σχέση της μορφής:

$$F(f_1,f_2,\cdots,f_\nu)=0 \text{ για κάθε } (x_1,x_2,\cdots,x_\nu)\in\mathrm{T} \qquad (2)$$

όπου η τελευταία σχέση (2) να μη περιέχει καμία από τις μεταβλητές $x_1,x_2,...,x_\nu$.

Αν οι σχέσεις (1) δεν επαληθεύουν καμία σχέση της μορφής (2), τότε οι $f_1, f_2,\cdots, f_\nu$ λέγονται συναρτησιακά ανεξάρτητες, ή απλά **ανεξάρτητες**.

Αποδεικνύεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι οι συναρτήσεις $f_1, f_2,\cdots, f_\nu$ συναρτησιακά εξαρτημένες, είναι η Ιακωβιανή των $f_1, f_2,\cdots, f_\nu$ ως προς $x_1,x_2,\cdots,x_\nu$ να είναι μηδέν. Δηλαδή

$$J=\frac{D(f_1,f_2,\cdots,f_\nu)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_\nu)}=0 \text{ για κάθε } (x_1,x_2,...,x_\nu)\in\mathrm{T}\subset R^\nu$$

Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι οι τρεις συναρτήσεις $\begin{cases} f_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ f_2(x,y,z)=x+y+z \\ f_3(x,y,z)=xy+yz+zx \end{cases}$

είναι συναρτησιακά εξαρτημένες και να βρεθεί η σχέση εξάρτησης αυτών.

Λύση

Είναι

$$J=\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\\ y+z & z+x & x+y\end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ y+z & z+x & x+y\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ x+y+z & x+y+z & x+y+z\end{vmatrix}=$$

$$=2(x+y+z)\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2(x+y+z)\cdot 0=0\,.$$

Άρα οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 είναι συναρτησιακά εξαρτημένες.

Η σχέση εξάρτησης $F(f_1,f_2,f_3)=0$ είναι προφανώς η

$$F(f_1,f_2,f_3)=f_2^2-f_1-2f_3=0$$

η οποία ισχύει ως ταυτότητα για κάθε $(x, y, z)\in R^3$ ($f_2^2=f_1+2f_3$).

2.8 Αλλαγές μεταβλητών

Μια εφαρμογή των παραγώγων υπάρχει στη χρήση αλλαγής μεταβλητών. Το πρόβλημα δηλαδή συνίσταται στο να εκφράσουμε τις παραγώγους μιας συνάρτησης ως προς τις αρχικές της μεταβλητές, συναρτήσει των παραγώγων της ως προς τις νέες μεταβλητές. Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

2.8.1 Αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής

Έστω ότι η συνάρτηση είναι της μορφής $y=f(x)$ και το x (η ανεξάρτητη μεταβλητή) είναι συνάρτηση της νέας ανεξάρτητης μεταβλητής t, δηλαδή $x=\varphi(t)$. Ζητάμε να εκφράσουμε τις παραγώγους της y ως προς x, συναρτήσει των παραγώγων της y ως προς t.

Η συνάρτηση $y=f(x)$ γράφεται $y=f(\varphi(t))=F(t)$.

Σύμφωνα με τη παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης έχουμε:

$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ οπότε λύνοντας ως προς $\frac{dy}{dx}$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{\varphi'(t)} \quad \text{όπου} \quad \varphi'(t) = \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Για να εκφράσουμε τώρα τη δεύτερη παράγωγο ως προς *x*, εφαρμόζουμε πάλι τον προηγούμενο κανόνα. Δηλαδή:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{x^2} = y'_x(y'_x) = \frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{y''_{t^2}\cdot\varphi'(t) - y'_t\cdot\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^2}}{\varphi'(t)} =$$

$$= \frac{y''_{t^2}\cdot\varphi'(t) - y'_t\cdot\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y''_{x^2}\right)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y''_{t^2}\cdot\varphi'(t) - y'_t\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}\right)}{\varphi'(t)} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η νέα μορφή της εξίσωσης

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

όπου *n* σταθερή, αν αντικατασταθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή *x* με τη νέα μεταβλητή *t* όπου το *x* συνδέεται με το *t* με τη σχέση $x = \sigma\upsilon\nu\, t$.

Λύση

Απ' τους τύπους (1) και (2) παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\eta\mu t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\eta\mu t\frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\upsilon\nu t\frac{dy}{dt}}{-\eta\mu^3 t}$$

οπότε, με αντικατάστασή τους στην αρχική εξίσωση προκύπτει

$$(1-\sigma\upsilon\nu^2 t)\frac{-\eta\mu t\frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\upsilon\nu t\frac{dy}{dt}}{-\eta\mu^3 t} - \sigma\upsilon\nu t\frac{\frac{dy}{dt}}{-\eta\mu t} + n^2y = \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0\,.$$

2.8.2 Αλλαγή εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση του *x*, όπου τα *x* και *y* είναι συναρτήσεις των *t* και *u*, και συνδέονται με τις σχέσεις $x = g(t, u)$, $y = h(t, u)$, ενώ η *u* παίζει το ρόλο ενδιάμεσης συνάρτησης του *t* δηλαδή $u = u(t)$. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt}}{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt}}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \text{ κ.τ.λ.}$$

2.8.3 Αλλαγή περισσοτέρων ανεξάρτητων μεταβλητών

Έστω $z = f(x, y)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών, όπου τα *x* και *y* συνδέονται με τις μεταβλητές *ρ, θ* με τις σχέσεις $x = g(\rho, \theta)$ και $y = h(\rho, \theta)$, έτσι ώστε το z είναι τελικά συνάρτηση των *ρ* και *θ,* δηλαδή $z = F(\rho, \theta)$.

Θέλουμε να εκφράσουμε τις μερικές παραγώγους της *z* ως προς *ρ* και *θ* και των μερικών παραγώγων των *x* και *y* ως προς *ρ* και *θ*. Έχουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \tag{3}$$

Λύνοντας το σύστημα (3) ως προς $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$, υποθέτοντας την Ιακωβιανή

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \neq 0,$$

γιατί αλλιώς δεν θα είχε έννοια η αλλαγή των μεταβλητών, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \mathrm{A} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \Gamma \frac{\partial z}{\partial \rho} + \Delta \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{4}$$

όπου $\mathrm{A} = \frac{\partial y}{\partial \theta} / J, \quad \mathrm{B} = -\frac{\partial y}{\partial \rho} / J, \quad \Gamma = -\frac{\partial x}{\partial \theta} / J, \quad \Delta = \frac{\partial x}{\partial \rho} / J$ (5)

Οι τύποι (4) λύνουν το πρόβλημα για τις παραγώγους $1^{ης}$ τάξης.

Για να βρούμε τις παραγώγους $2^{ης}$ τάξης, αρκεί να εφαρμόσουμε στις παραγώγους $1^{ης}$ τάξης την προηγούμενη διαδικασία. Δηλαδή:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{A} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \tag{6}$$

Η πρώτη των (4) γράφεται αναλυτικά $\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{A}\frac{\partial}{\partial \rho} + \mathrm{B}\frac{\partial}{\partial \theta}$ και εφαρμόζεται στους τελεστές αυτούς η συνάρτηση z. Τώρα αντί της z θα εφαρμοστεί η παρένθεση της (6).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{A}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \mathrm{B}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \mathrm{A}\left(\mathrm{A}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) +$$

$$+ \mathrm{B}\left(\mathrm{A}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$$

Μετά τις πράξεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \mathrm{A}^2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \mathrm{B}^2\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + 2\mathrm{AB}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \\ &+ \left(\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \rho} + \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta}\right)\frac{\partial z}{\partial \rho} + \left(\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \rho} + \mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \theta}\right)\frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned} \qquad (7)$$

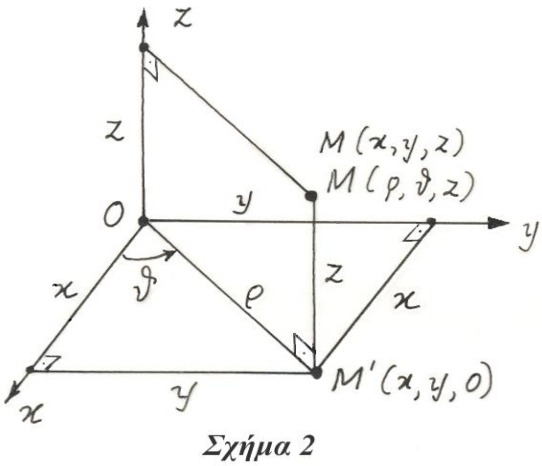
Ανάλογες εκφράσεις βρίσκουμε και για τις παραγώγους $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ κ.τ.λ.

2.8.4 Εφαρμογές - Παραδείγματα

Εφαρμογές

1) Ορισμός κυλινδρικών συντεταγμένων (*ρ, θ, z*)

Έστω ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων και σημείο $M(x, y, z)$ του χώρου με $\mathrm{M}'(x, y, 0)$ την προβολή του στο επίπεδο xOy (σχήμα 2).



Σχήμα 2

Θεωρούμε το ζεύγος ρ, θ όπου $\rho > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi]$. Η τριάδα (ρ, θ, x) λέμε ότι αποτελεί σύστημα **κυλινδρικών συντεταγμένων** και προσδιορίζει πλήρως τη θέση του Μ στο χώρο R^3.

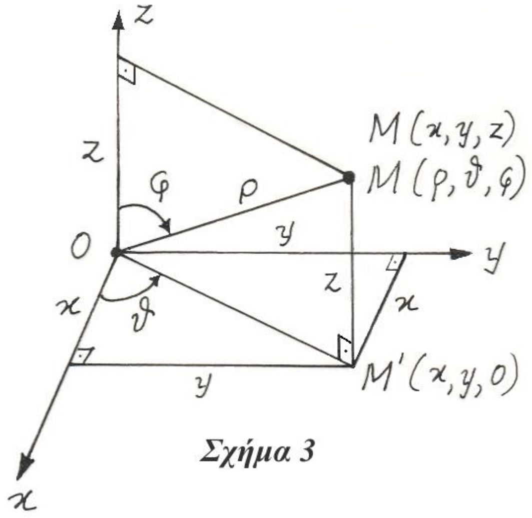
Από το σχήμα 1α, προκύπτουν τα x, y, z συναρτήσει των ρ, θ, z ως εξής:

$$x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y = \rho\eta\mu\theta,\ z = z$$

Ενώ τα ρ, θ, z εκφράζονται συναρτήσει των x, y, z ως:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tau o \xi \varepsilon \varphi \frac{y}{x} \ (\ x > 0) \ \text{ή} \ \theta = \pi + \tau o \xi \varepsilon \varphi \frac{y}{x} \ (\ x < 0), \quad z = z \,.$$

2) Ορισμός σφαιρικών συντεταγμένων (*ρ, θ, φ*)



Σχήμα 3

Η τριάδα (*ρ, θ, φ*) αποτελεί τις **σφαιρικές συντεταγμένες** του σημείου *M*(*x, y, z*), όπου $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ και $\varphi \in [0, \pi]$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Η τριάδα αυτή προσδιορίζει πλήρως τη θέση σημείου *M*(*x, y, z*) στο χώρο.

Απ' το σχήμα 3 προκύπτουν τα *x, y, z* συναρτήσει των *ρ, θ, φ*:

$$x = OM'\sigma\upsilon\nu\theta = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi,$$
$$y = OM'\eta\mu\theta = \rho\,\eta\mu\theta\eta\mu\varphi,$$
$$z = \rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

ενώ τα *ρ, θ, φ* εκφράζονται συναρτήσει των *x, y, z* με τους τύπους:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tau o \xi \varepsilon \varphi \frac{y}{x} \ (\ x > 0) \ \text{ή} \ \pi + \tau o \xi \varepsilon \varphi \frac{y}{x} \ (\ x < 0), \quad \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

3) Ιακωβιανές κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων

Να βρεθούν οι Ιακωβιανές:

α) J_1 των <u>κυλινδρικών</u> και **β)** J_2 των <u>σφαιρικών</u> συντεταγμένων,

δηλαδή να βρεθούν οι $J_1 = \dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}, \ J_2 = \dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\phi)}$.

Λύση

α) Ιακωβιανή των <u>κυλινδρικών</u> συντεταγμένων

Στις κυλινδρικές είναι: $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta, \ y = \rho\eta\mu\theta, \ z = z.$ Τότε:

$$J_1 = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_z \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_z \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\rho\eta\mu\theta & 0 \\ \eta\mu\theta & \rho\sigma\upsilon\nu\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = \rho$$

β) Ιακωβιανή των <u>σφαιρικών</u> συντεταγμένων

Στις σφαιρικές είναι: $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi,\ y = \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi,\ z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$. Τότε:

$$J_2 = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\eta\mu\varphi & -\rho\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi & \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \\ \eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi & \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\eta\mu\varphi & \rho\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi & 0 & -\rho\,\eta\mu\,\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\eta\mu\varphi$$

Παραδείγματα

4) Να δειχτεί ότι για την συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x,y)$ ισχύει

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$ όπου $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\eta\mu\theta$.

Λύση

Είναι $\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta$. Παρόμοια

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\eta\mu\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sigma\upsilon\nu\theta$$ ή

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\eta\mu\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\theta\ .$$

Υψώνοντας την πρώτη και τελευταία σχέση στο τετράγωνο προκύπτει

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\mu\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-\eta\mu\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 .$$

5) Θεώρημα του **Euler:** Να δειχτεί ότι για την ομογενή συνάρτηση $f(x,y)$ με βαθμό ομογένειας *p* ισχύει: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = pf(x,y)$. (1)

(Το θεώρημα γενικεύεται και για *n* μεταβλητές τις $x_1, x_2, ..., x_n$).

Λύση

Υπενθυμίζεται ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής βαθμού *p*, αν ισχύει

$$f(\lambda x,\ \lambda y) = \lambda^p f(x,y)\quad \forall \lambda \in R\ . \tag{2}$$

Π.χ. η συνάρτηση $f(x,y)=x^4-2xy^3$ είναι ομογενής βαθμού 4 επειδή ισχύει

$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4-2(\lambda x)(\lambda y)^3=\lambda^4(x^4-2xy^3)=\lambda^4 f(x,y)$.

Για την απόδειξη της σχέσης (1), θέτουμε $\lambda x=u,\ \lambda y=v$ και η (2) γίνεται

$$f(u,v)=\lambda^p f(x,y) \tag{3}$$

Παραγωγίζουμε το αριστερό μέλος της (3) ως προς λ:

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\lambda}=\frac{\partial f}{\partial u}x+\frac{\partial f}{\partial v}y$$

Παραγωγίζουμε τώρα το δεξιό μέλος της (3) ως προς λ και έχουμε:

$$p\lambda^{p-1}f(x,y)$$

Επομένως, $\dfrac{\partial f}{\partial u}x+\dfrac{\partial f}{\partial v}y=p\lambda^{p-1}f(x,y)$. (4)

Θέτοντας στην (4) $\lambda=1$ έτσι ώστε $u=x,\ v=y$ έχουμε

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=pf(x,y).$$

6) Η έκφραση που συμβολίζεται με $\nabla^2 z$ λέγεται **Λαπλασιανή** της συνάρτησης $z=z(x,y)$ και είναι ίση με

$$\nabla^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Να μετασχηματισθεί σε αντίστοιχη έκφραση με κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου

$$x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\rho\eta\mu\theta,\ z=z.$$

(2)

Λύση

Απ’ τους τύπους (4) της παραγράφου 1.7. Γ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\rho}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial z}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\,\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\eta\mu\theta\\ \frac{\partial z}{\partial\theta}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}\rho\eta\mu\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\rho\sigma\upsilon\nu\,\theta\end{aligned} \tag{3}$$

Λύνοντας το σύστημα (3) ως προς $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{A}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \Gamma\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \Delta\,\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

όπου

$$\mathrm{A} = \frac{\partial y}{\partial \theta}\Big/ J\,, \quad \mathrm{B} = -\frac{\partial y}{\partial \rho}\Big/ J\,, \quad \Gamma = -\frac{\partial x}{\partial \theta}\Big/ J\,, \quad \Delta = \frac{\partial x}{\partial \rho}\Big/ J$$

Είναι

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & -\rho\,\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \end{vmatrix} = \rho\,(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = \rho\,.$$ Άρα

$$\mathrm{A} = \frac{\partial y}{\partial \theta} / J = \frac{\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho} = \sigma\upsilon\nu\,\theta, \quad \mathrm{B} = -\frac{\partial y}{\partial \rho} / J = -\frac{\eta\mu\theta}{\rho}\,,$$

$$\Gamma = -\frac{\partial x}{\partial \theta} / J = \frac{\rho\eta\mu\theta}{\rho} = \eta\mu\theta, \quad \Delta = \frac{\partial x}{\partial \rho} / J = \frac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}$$

οπότε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\eta\mu\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \eta\mu\theta\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\,.$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους της συνάρτησης *z* ως προς *x* και *y* αντίστοιχα. Είναι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{A}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\mathrm{A}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \mathrm{B}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{A}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \mathrm{B}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\eta\mu\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) - \frac{\eta\mu\theta}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\eta\mu\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \theta}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\eta\mu^2\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \theta} + \frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\eta\mu^2\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\eta\mu^2\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \theta} + \frac{2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho^2}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\eta\mu^2\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

Επίσης $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Gamma\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\Gamma\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \Delta\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \Delta\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Gamma\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \Delta\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$

$$= \eta\mu\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\eta\mu\theta\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \frac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\eta\mu\theta\,\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) =$$

$$=\left(\eta\mu^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}-\frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta}\right)+$$

$$+\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}+\frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right)=$$

$$=\eta\mu^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}$$

Προσθέτοντας τα τελευταία αποτελέσματα των $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ προκύπτει

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}.$$

7) Να βρεθούν οι παράγωγοι $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ των συναρτήσεων $y=y(x),\ z=z(x)$ που ορίζονται από το σύστημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων *f* και *g* με εξισώσεις:

$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ και $g(x,y,z)=x+y+z-1=0$.

Λύση

Οι ζητούμενες παράγωγοι θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0\\ \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0\end{array}\right\}\ (1)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους, το σύστημα (1) γράφεται

$$\left.\begin{array}{l}3(x^2-yz)+3(y^2-xz)\frac{dy}{dx}+3(z^2-xy)\frac{dz}{dx}=0\\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\end{array}\right\}\ (2)$$

Έτσι, οι «άγνωστοι» $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ θα υπολογιστούν απ’ τη λύση του συστήματος (2).

Είναι $\frac{dy}{dx}=\dfrac{\begin{vmatrix}yz-x^2 & z^2-xy\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y^2-xz & z^2-xy\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{(z-x)(x+y+z)}{(y-z)(x+y+z)}=\frac{z-x}{y-z}$ και

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} y^2-xz & yz-x^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^2-xz & z^2-xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{(x-y)(x+y+z)}{(y-z)(x+y+z)}=\frac{x-y}{y-z}.$$

8) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ των συναρτήσεων

$u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$

που ορίζονται από το σύστημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων *f* και *g*:

$$f(x,y,u,v)=ux+vy-1=0 \text{ και } g(x,y,u,v)=\frac{x}{u}+\frac{y}{v}-1=0.$$

Λύση

Οι ζητούμενες παράγωγοι θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\} \text{ ή } \left.\begin{aligned} u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{1}{u}-\frac{x}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{y}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό ως προς $\frac{\partial u}{\partial x}$ (η $\frac{\partial v}{\partial x}$ δεν ζητείται), έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -u & y \\ -\frac{1}{u} & -\frac{y}{v^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ -\frac{x}{u^2} & -\frac{y}{v^2} \end{vmatrix}}=\frac{\frac{uy}{v^2}+\frac{y}{u}}{-\frac{xy}{v^2}+\frac{yx}{u^2}}=\frac{y\frac{u^2+v^2}{uv^2}}{xy\frac{v^2-u^2}{u^2v^2}}=\frac{u(u^2+v^2)}{x(v^2-u^2)}$$

Ανάλογα η $\frac{\partial v}{\partial y}$ (η $\frac{\partial u}{\partial y}$ δεν ζητείται) θα υπολογιστεί από το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \text{ ή } \left.\begin{aligned} v+x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{1}{v}-\frac{x}{u^2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{y}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \text{ και είναι}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v(u^2+v^2)}{y(u^2-v^2)}.$$

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν τα ολικά διαφορικά των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $z = e^{x^2-y^2}$ (*Απάντηση*: $dz = 2xe^{x^2-y^2}dx - 2ye^{x^2-y^2}dy$),

β) $z = (x+y)\ln(x-y)$ (*Απ*: $dz = \left(\ln(x-y) + \dfrac{x+y}{x-y}\right)dx + \left(\ln(x-y) - \dfrac{x+y}{x-y}\right)dy$),

γ) $z = \text{τοξεφ}\,\dfrac{y}{x}$ (*Απάντηση*: $dz = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$),

δ) $z = \ln\dfrac{y}{x}$ (*Απάντηση*: $dz = -\dfrac{1}{x}dx + \dfrac{1}{y}dy$),

2) Αν $z = u^2 - v^2$ και $u = 2x+3y,\ v = 2x-3y$ να βρεθούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(*Απάντηση*: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 24y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 24x$)

3) Αν $z = x\sigma\upsilon\nu\, y$ και $x = \eta\mu 2t,\ y = \sigma\upsilon\nu 2t$ να βρεθεί η $\dfrac{dz}{dt}$.

(*Απάντηση*: $\dfrac{dz}{dt} = 2y\cdot\sigma\upsilon\nu\, y + 2x^2\eta\mu\, y$)

4) Αν $u = f(x,y,z) = xy + yz + zx$, όπου $y = e^x,\ z = x^2$ να βρεθεί η $\dfrac{du}{dx}$.

(*Απάντηση*: $\dfrac{du}{dx} = e^x(x^2+3x+1) + 3x^2$)

5) Αν $z = x^\nu f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ τότε να δειχθεί ότι : $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \nu z$.

6) Να βρεθεί η $\dfrac{dy}{dx}$ των πεπλεγμένων συναρτήσεων $y = y(x)$:

α) $f(x,y) = xy - e^x\sigma\upsilon\nu y = 0$ (*Απάντηση*: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y - e^x\sigma\upsilon\nu\, y}{x + e^x\eta\mu\, y}$)

β) $f(x,y) = \log(x^2y) + \tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{y}{x} = 0$ (*Απάντηση*: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y(2x^2 - xy + 2y^2)}{x(x^2+xy+y^2)}$)

γ) $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - e^{\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x}} = 0$ (*Απάντηση*: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x}} + 2x(x^2+y^2)}{xe^{\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x}} - 2y(x^2+y^2)}$)

7) Να βρεθούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ των πεπλεγμένων συναρτήσεων $z = z(x,y)$:

α) $f(x,y,z) = \log z - 3z - 2y - x = 0$

(*Απάντηση*: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{1-3z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2z}{1-3z}$),

β) $f(x,y,z)=e^x\eta\mu(y+z)-z=0$

(*Απάντηση*: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x\eta\mu(y+z)}{1-e^x\eta\mu(y+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^x\sigma\upsilon\nu(y+z)}{1-e^x\eta\mu(y+z)}$),

γ) $f(x,y,z)=xe^y+e^z-z^2=0$

(*Απάντηση*: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^y}{2z-e^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^y}{e^z-2x}$),

δ) $f(x,y,z)=z^3-z-xy\eta\mu z=0$

(*Απάντηση*: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\eta\mu z}{3z^2-1-xy\sigma\upsilon\nu z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\eta\mu z}{3z^2-1-xy\sigma\upsilon\nu z}$).

8) Αν $f_1(x,y)=\frac{x+y}{1-xy}$, $f_2(x,y)=\tau o\xi\varepsilon\varphi x+\tau o\xi\varepsilon\varphi y$ δείξτε ότι οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. (συναρτησιακή σχέση: $f_1-\varepsilon\varphi f_2=0$).

9) Αν $f_1(x,y,z)=x^2+3y^2-z^3$, $f_2(x,y,z)=2x^2yz$, $f_3(x,y,z)=2z^2xy$, να υπολογιστεί η Ιακωβιανή $J=\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,z)}$.

(*Απάντηση*: $J=8x^4yz^2-12x^2yz^2(6y^2+z^3)$)

12. Να μετασχηματισθούν οι παρακάτω σχέσεις (ΔΕ), όταν εισαχθεί νέα ανεξάρτητη μεταβλητή *t* που συνδέεται με το *x* με τη διπλανή της σχέση:

α) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha x\frac{dy}{dx}+\beta y=0$ όταν $x=e^t$ (*Απάντηση*: $\frac{d^2y}{dt^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dt}+\beta y=0$)

β) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$ όταν $x^2=4t$ (*Απάντηση*: $t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$)

2.9 Εξισώσεις επιπέδων και επιφανειών 2ου βαθμού

Ως γνωστό, κάθε εξίσωση της μορφής

$F(x, y, z) = 0$ ή $z = f(x, y)$

παριστάνει μια επιφάνεια. Κάθε σημείο που οι συντεταγμένες του επαληθεύουν μια απ’ τις παραπάνω σχέσεις βρίσκεται στην επιφάνεια αυτή και αντίστροφα.

Η εξίσωση μιας καμπύλης στο χώρο καθορίζεται από τρεις εξισώσεις τις

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$$

που είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης. Κάθε τιμή της παραμέτρου *t* αντιστοιχεί σε ένα σημείο της καμπύλης το $A(x, y, z) = A(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$.

Ένας άλλος καθορισμός της εξίσωσης μιας καμπύλης στο χώρο προέρχεται από τις εξισώσεις δύο επιφανειών

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

δηλαδή η καμπύλη εκφράζεται ως τομή των δύο επιφανειών στο χώρο που είναι τα κοινά τους σημεία.

Οι εξισώσεις του επιπέδου, της ευθείας καθώς και των επιφανειών 2ου βαθμού παρουσιάζουν μεγάλη αντιστοιχία με εκείνες της ευθείας και των κωνικών τομών (καμπύλων 2ου βαθμού) στο επίπεδο xOy, όπου όμως εδώ προστίθενται και οι αντίστοιχοι παράγοντες με την κατηγμένη *z*.

2.9.1 Εξίσωση επιπέδου

Η γενική εξίσωση επιπέδου είναι γραμμική ως προς *x*, *y*, *z* και είναι της μορφής:

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

(ανάλογη με την εξίσωση ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ στο επίπεδο xOy).

Μια άλλη μορφή της εξίσωσης του επιπέδου είναι η

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

(ανάλογη της $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$), όπου α, β, γ είναι οι συντεταγμένες επί την αρχή. Δηλαδή αν οι τομές του επιπέδου με τους άξονες x΄Ox, y΄Oy και z΄Oz είναι τα σημεία Κ, Λ, Μ αντίστοιχα, τότε ΚΟ = α, ΛΟ = β και ΜΟ = γ (Ο η αρχή των συντεταγμένων).

Ακόμα, η εξίσωση επιπέδου που περνάει από τρία σημεία

$\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, $\Gamma(x_3, y_3, z_3)$, είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (ανάλογη της ευθείας $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ που περνάει από δύο σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$).

Επίσης, και εδώ το επίπεδο Ax + By + Γz + Δ = 0 είναι κάθετο στο διάνυσμα

$\vec{n}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma)$

(όπως και η ευθεία Ax + By + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$).

2.9.2 Εξίσωση ευθείας στο χώρο

Η εξίσωση ευθείας στο χώρο που διέρχεται από σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ είναι:

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

(ανάλογη με την ευθεία $\dfrac{x - x_1}{\alpha} = \dfrac{y - y_1}{\beta}$ στο επίπεδο xOy που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha, \beta)$), και ορίζεται <u>ως τομή δύο επιπέδων</u> στο χώρο.

Η απόσταση ενός σημείου $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο Ax + By + Γz + Δ = 0 αποδεικνύεται ότι είναι:

$$d = \frac{|\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \Gamma z_1 + \Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2}}$$

(ανάλογη με την απόσταση $d = \dfrac{|\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$ του σημείου $P_1(x_1, y_1)$ από την ευθεία Ax + By + Γ = 0 στο επίπεδο xOy).

2.9.3 Εξίσωση σφαίρας

Κάνοντας τις ίδιες σκέψεις όπως και στην περίπτωση του κύκλου, βρίσκουμε ότι η εξίσωση σφαίρας είναι της μορφής:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \rho^2$$

όπου Κ(α, β, γ) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου και ρ είναι η ακτίνα της σφαίρας. Αν το Κ συμπίπτει με την αρχή των αξόνων Ο, η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 .$$

2.9.4 Εξίσωση ελλειψοειδούς

Το ελλειψοειδές (σχήμα 4α) έχει εξίσωση της μορφής:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

όπου α, β, γ είναι οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς.

Αν $\alpha = \beta > \gamma$ έχουμε το *πεπλατυσμένο* ελλειψοειδές εκ περιστροφής, που προέρχεται από την περιστροφή της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ γύρω από τον μικρό άξονα (τον 2γ) ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο xOz.

Αν $\alpha = \beta < \gamma$ προκύπτει το *επίμηκες* ελλειψοειδές εκ περιστροφής που προέρχεται από την περιστροφή της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ γύρω από τον μεγάλο άξονα (τον 2γ) ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο xOz.

Τέλος, αν $\alpha = \beta = \gamma$ προκύπτει η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$.

2.9.5 Εξίσωση υπερβολοειδούς

Α) Υπερβολοειδές με μια χοάνη (σχήμα 4β)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

όπου α, β είναι οι πραγματικοί ημιάξονες και γ ο φανταστικός ημιάξονας.

Β) Υπερβολοειδές με δύο χοάνες (σχήμα 4γ)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1,$$

όπου τώρα *γ* είναι ο πραγματικός ημιάξονας και *α, β* οι φανταστικοί ημιάξονες.

Και για τα δύο υπερβολοειδή, οι τομές τους με επίπεδα παράλληλα προς τον άξονα z είναι υπερβολές, ενώ με επίπεδα παράλληλα προς το xOy είναι ελλείψεις.

Για $\alpha = \beta$ έχουμε υπερβολοειδές εκ περιστροφής της υπερβολής με ημιάξονες τους α και γ γύρω από τον άξονα 2γ.

2.9.6 Εξίσωση κώνου

Ο κώνος έχει εξίσωση της μορφής (σχήμα 4δ):

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0,$$

και έχει την κορυφή του στην αρχή των συντεταγμένων.

Ως οδηγός καμπύλη είναι η έλλειψη με ημιάξονες α, β που το επίπεδό της είναι κάθετο στον άξονα z, σε απόσταση γ από την αρχή Ο, όπως προκύπτει για $z=\gamma$.

Για $\alpha=\beta$ έχουμε τον κυκλικό κώνο.

2.9.7 Εξισώσεις παραβολοειδών

Οι εξισώσεις επιφανειών που ακολουθούν δεν έχουν κέντρο. Η κορυφή των παραβολοειδών βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων, ο άξονας Oz είναι άξονας συμμετρίας καθώς και τα επίπεδα xOz και yOz είναι επίπεδα συμμετρίας.

Α) <u>*Το ελλειπτικό παραβολοειδές*</u>

Έχει εξίσωση (σχήμα 4ε):

$$z=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$$

Παράλληλες τομές προς τον άξονα Oz είναι παραβολές, ενώ παράλληλες τομές προς το επίπεδο xOy είναι ελλείψεις.

Για $\alpha=\beta$ έχουμε το παραβολοειδές εκ περιστροφής, που προκύπτει με περιστροφή της παραβολής $z=\frac{x^2}{\alpha^2}$ γύρω από τον Oz.

Β) <u>*Το υπερβολικό παραβολοειδές*</u>

Είναι το κοινό <u>*σάγμα ή σαμάρι*</u> επειδή μοιάζει μ’ αυτό και έχει εξίσωση:

$$z=\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2} \text{ (σχήμα 4ζ)}$$

Παράλληλες τομές με το επίπεδο zOy είναι *παραβολές* με εξίσωση

$$z=\frac{c^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2} \text{ } (x = c \text{ σταθερό}) \textbf{ (i)}.$$

Παράλληλες τομές με το επίπεδο zOx είναι επίσης *παραβολές* με εξίσωση

$$z=\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{c^2}{\beta^2} \text{ } (y = c \text{ σταθερό}) \textbf{ (ii)},$$

ενώ παράλληλες τομές με το επίπεδο xOy είναι *υπερβολές* με εξίσωση

$c = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ (z = c σταθερό).

Η πρώτη και η δεύτερη παραβολή (**i**), (**ii**) για $c = 0$ παίρνουν τη μορφή

$z = -\frac{y^2}{\beta^2}$ και $z = \frac{x^2}{\alpha^2}$ αντίστοιχα.

Έχουν δε:

η μεν πρώτη $z = -\frac{y^2}{\beta^2}$ το σημείο (y = 0, z = 0) σημείο μεγίστου,

ενώ η δεύτερη $z = \frac{x^2}{\alpha^2}$ το σημείο (x = 0, z = 0) σημείο ελαχίστου.

Δηλαδή το σημείο (0,0,0) είναι ταυτόχρονα και σημείο μεγίστου και ελαχίστου για το υπερβολικό παραβολοειδές, λέγεται δε ***σημείο σάγματος***.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, έτσι λέγονται τα σημεία μιας επιφάνειας που αποτελούν μια περιοχή, όπου η επιφάνεια παρουσιάζει ταυτόχρονα και μέγιστο και ελάχιστο για τα ίδια σημεία.

2.9.8 Εξισώσεις κυλινδρικών επιφανειών

Κυλινδρική επιφάνεια προκύπτει από παράλληλη μεταφορά μιας ευθείας (της γενέτειρας) κατά μήκος μιας καμπύλης (της οδηγού καμπύλης). Η αντίστοιχη εξίσωση κώνου που είδαμε πιο πάνω, προκύπτει από κίνηση μιας ευθείας (της γενέτειρας) που διέρχεται από σταθερό σημείο (την κορυφή) και γλιστράει κατά μήκος μιας καμπύλης (της οδηγού καμπύλης).

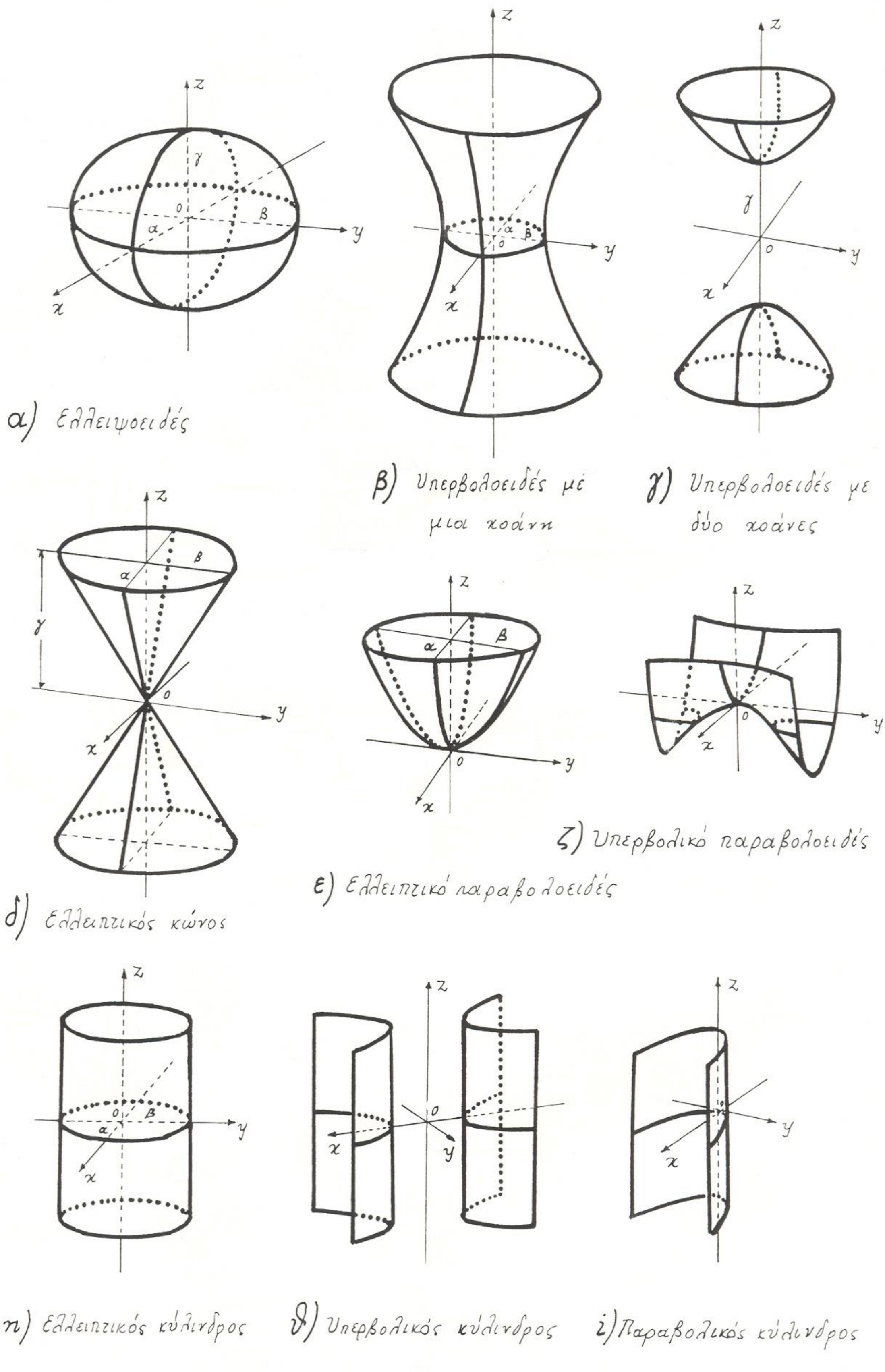
Η εξίσωση μιας κυλινδρικής επιφάνειας της οποίας η γενέτειρα είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox ή Oy ή Oz δεν περιέχει αντίστοιχα την τετμημένη x ή την τεταγμένη y ή την κατηγμένη z και η εξίσωσή της θα είναι αντίστοιχα της μορφής: $f(y,z)=0$, $f(z,x)=0$, $f(x, y) = 0$. Έτσι έχουμε τις εξισώσεις μερικών κυλινδρικών επιφανειών, όπως:

Α) *Εξίσωση ελλειπτικού κυλίνδρου*

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (σχήμα 4η) με γενέτειρα παράλληλη προς τον Oz.

Β) *Εξίσωση υπερβολικού κυλίνδρου*

$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (σχήμα 4θ) με γενέτειρα παράλληλη προς τον Oz.


α) Ελλειψοειδές
β) Υπερβολοειδές με μια χοάνη
γ) Υπερβολοειδές με δύο χοάνες
δ) Ελλειπτικός κώνος
ε) Ελλειπτικό παραβολοειδές
ζ) Υπερβολικό παραβολοειδές
η) Ελλειπτικός κύλινδρος
θ) Υπερβολικός κύλινδρος
ι) Παραβολικός κύλινδρος

Σχήμα 4

Γ) *<u>Εξίσωση παραβολικού κυλίνδρου</u>*

$y^2 = 2px$ (σχήμα 4ι) με γενέτειρα παράλληλη προς τον Oz

Όλες οι κυλινδρικές επιφάνειες, οι κωνικές επιφάνειες, καθώς και το υπερβολοειδές με μια χοάνη και το υπερβολικό παραβολοειδές λέγονται *<u>ευθειογενείς επιφάνειες</u>*.