Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **1**

Στοιχεία Διαφορικών Εξισώσεων

1.1 Εισαγωγή

Σε όλους τους κλάδους των σύγχρονων επιστημών (πειραματικών, οικονομικών, τεχνολογικών, ιατρικών, κ.ά.), ιδιαίτερα δε της Φυσικής, Χημείας, Μηχανικής, Αστρονομίας, υπεισέρχεται η μαθηματική έννοια της διαφορικής εξίσωσης. Η διαφορική εξίσωση (ΔΕ) είναι μία μαθηματική σχέση που συνδέει την μεταβλητή *x*, την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και τις παραγώγους αυτής $y'(x),\ y''(x), \ldots,\ y^{(n)}(x)$.

Δηλαδή, η ΔΕ είναι μια σχέση της μορφής:

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Λύση της παραπάνω ΔΕ είναι η εύρεση της άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίζεται *n* φορές σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών *I*. Η συνάρτηση αυτή $y = f(x)$ είναι τέτοια ώστε, μετά την αντικατάσταση των $y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ με τα $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ \ldots, \ f^{(n)}(x)$ στην σχέση (1), αυτή να γίνεται ταυτότητα ως προς *x*, δηλαδή να ισχύει:

$$F[x,\ f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots,\ f^{(n)}(x)] = 0$$

για κάθε *x* που ανήκει στο I ($\forall x \in I$).

Π.χ. η συνάρτηση $y_1 = 2x^3$ είναι λύση της ΔΕ $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$, διότι:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d(2x^3)}{dx} = 6x^2 \text{ και } x\frac{dy_1}{dx} - 3y_1 = x \cdot 6x^2 - 3 \cdot 2x^3 = 0 \ \ \forall x.$$

Για μια συστηματική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων είναι απαραίτητη η ταξινόμησή τους σε μεγάλες κατηγορίες με βάση κάποιο σημαντικό χαρακτηριστικό γνώρισμα. Μία πρώτη μεγάλη τέτοια βασική διάκριση είναι εκείνη μεταξύ:

1) Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και

2) Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους.

Στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή και έτσι μόνο οι παράγωγοι ως προς αυτή τη μεταβλητή εμφανίζονται στην εξίσωση. Αν όμως η άγνωστη συνάρτηση του προβλήματος εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές, τότε αναφερόμαστε σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. (Δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την κατηγορία διαφορικών εξισώσεων).

Μία δεύτερη διάκριση είναι εκείνη μεταξύ:

α) Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων και έχει πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους

β) Μη Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων

Γραμμική ΔΕ ονομάζεται κάθε συνήθης ΔΕ που είναι της μορφής

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_0(x)y = F(x),$$

όπου $f_i(x),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι συναρτήσεις του *x*, δηλαδή είναι γραμμική (δεν υπάρχουν δυνάμεις) ως προς την *y* και τις παραγώγους της.

Είναι φανερό λοιπόν ότι μία έκφραση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση και παραγώγους αυτής αποτελεί ΔΕ. Δεν αποτελούν διαφορικές εξισώσεις εκφράσεις για τις οποίες συμβαίνει μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) οι εκφράσεις που είναι ταυτότητες ως προς τη συνάρτηση *y*, (δηλ. ισχύουν για <u>κάθε</u> συνάρτηση *y*), όπως π.χ. στη σχέση: $\dfrac{d(x^2y)}{dx} = 2xy + x^2\dfrac{dy}{dx}$,

β) οι εκφράσεις στις οποίες η εμφάνιση των παραγώγων είναι εικονική, (δηλ. οι παράγωγοι μπορούν να <u>απλοποιηθούν</u>), όπως π.χ. στη σχέση: $y^3 + 3y'' = x^3/2 + 3y''$.

Σε μια ΔΕ που μας δίδεται προς επίλυση, εκτός από τις παραγώγους της συνάρτησης $y = y(x)$ είναι δυνατόν να εμφανίζεται μόνο η ανεξάρτητη μεταβλητή *x*, ή μόνο η συνάρτηση *y*, ή να εμφανίζονται και οι δύο. Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων αποτελούν οι σχέσεις:

$y'' - y' = 2x^2$ (εδώ εμφανίζεται μόνο η ανεξάρτητη μεταβλητή *x*),

$y'' + 3y' - 5y = 10$ (εδώ εμφανίζεται μόνο η συνάρτηση *y*),

$(y'')^3 - y^2 = x^3$ (εδώ εμφανίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή *x* και η συνάρτηση *y*).

Ορίζουμε μια ΔΕ ως **διαφορική εξίσωση *n* – τάξης**, αν η μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων της συνάρτησης *y* που εμφανίζονται στη ΔΕ (χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η δύναμη που ενδεχομένως υψώνονται οι παράγωγοι), είναι *n*. Π.χ. οι ΔΕ:

$$y' - 5x^2y = 2x^3,\quad \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sqrt{x},\quad y^{(4)} - x^2y'' = 2xy,$$

είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης, δεύτερης και τέταρτης τάξης αντίστοιχα.

Σήμερα, παρά την τεράστια πρόοδο που έχει επιτευχθεί τελευταία στον τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών και τα αναρίθμητα μαθηματικά προγράμματα λογισμικού που έχουν αναπτυχθεί, δεν δόθηκε ακριβή λύση στο κύριο πρόβλημα της θεωρίας των Διαφορικών εξισώσεων, που είναι η εύρεση όλων των λύσεων μιας ΔΕ. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις, και από αυτές θα εξετάσουμε μερικές απλές κατηγορίες, που θα μας απασχολήσουν στις επόμενες παραγράφους.

1.2 Απλές ΔΕ - Γενική και μερική λύση ΔΕ

Στην εξέταση των διαφορικών εξισώσεων η πιο απλή μορφή ΔΕ είναι η

$\frac{dy}{dx} = f(x)$, ή $y' = f(x)$, όπου $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x. (1)

Όπως ξέρουμε από τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή το $\int f(x)dx + c$ είναι μια συνάρτηση y, την οποία αν παραγωγίσουμε, βρίσκουμε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(x)$, δηλ. $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Άρα: $y = \int f(x)dx + c = \int \left(\frac{dy}{dx}\right)dx + c$. (2)

Επομένως, είναι φανερό ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) προκύπτει με μια ολοκλήρωση και είναι προφανώς η $y = \int f(x)dx + c$, όπου $c \in R$ είναι αυθαίρετη σταθερή της ολοκλήρωσης που τίθεται σε κάθε υπολογισμό ολοκληρώματος.

Από το αποτέλεσμα του τύπου (2) προκύπτει ότι η ΔΕ (1) δεν έχει μία μόνο λύση αλλά άπειρες, οι οποίες προφανώς αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές της αυθαίρετης σταθερής c. Όλες αυτές οι λύσεις αποτελούν όπως λέμε μια **μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων.** Κάθε καμπύλη της οικογένειας αυτής λέγεται **μέλος** ή **ολοκληρωτική καμπύλη** της οικογένειας και η έκφραση (2) αποτελεί την εξίσωση της οικογένειας των καμπύλων, ή τη λύση της ΔΕ (1).

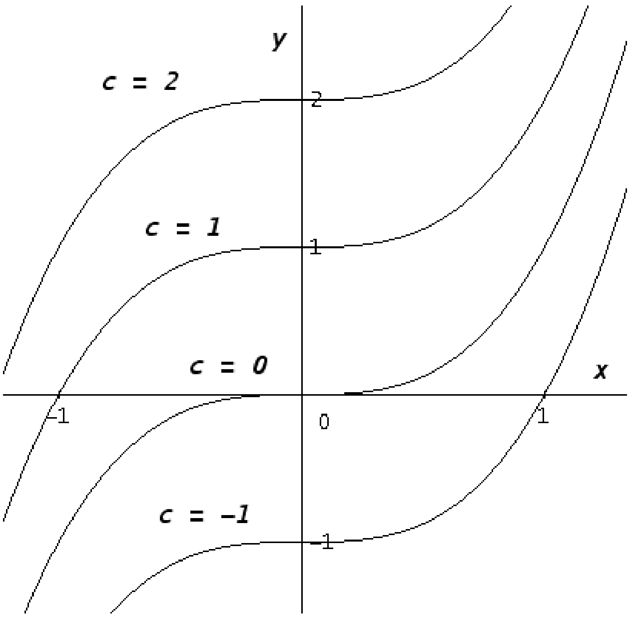
Παραδείγματα

1) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ή $y' = 3x^2$

Λύση

Η λύση αυτής που προκύπτει με απλή ολοκλήρωση είναι

$$y = \int 3x^2 dx + c = x^3 + c\ .$$



Αυτή είναι η εξίσωση της μονοπαραμετρικής οικογένειας των καμπύλων του διπλανού σχήματος. Τα διάφορα μέλη της οικογένειας αυτής είναι οι διάφορες θέσεις που παίρνει μία απ' τις καμπύλες, π.χ. η $y = x^3$, όταν κινείται ως στερεό σύστημα παράλληλα προς τον άξονα Oy. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων μελών της οικογένειας για τις τιμές της αυθαίρετης σταθερής $c = 2$, $c = 1$, $c = 0$, και $c = -1$ δηλαδή των καμπύλων $y = x^3 + 2$, $y = x^3 + 1$, $y = x^3$ και $y = x^3 - 1$ αντίστοιχα.

Ο τύπος (2) μπορεί να γενικευθεί και να εφαρμοστεί για την εύρεση της $n-1$ τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης ($y^{(n-1)}(x) = \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$) όταν είναι γνωστή η παράγωγος της n – στής τάξης αυτής ($y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$).

Έτσι έχουμε, $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \displaystyle\int \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) dx + c_1$, $\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \displaystyle\int \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) dx + c_2$, κλπ. (3)

Επομένως, η λύση μιας ΔΕ της μορφής $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f(x)$, όπου $n \geq 2$ βρίσκεται προφανώς με n διαδοχικές ολοκληρώσεις και εξαρτάται από n αυθαίρετες σταθερές.

2) Να λυθεί η ΔΕ $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 6x$.

Λύση

Εφαρμόζοντας τους τύπους (3) για n = 2 ολοκληρώνοντας μια φορά έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \int \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx + c_1 = \int 6x dx + c_1 = 3x^2 + c_1 .$$

Με μια ακόμα ολοκλήρωση βρίσκουμε την άγνωστη συνάρτηση

$$y = \int \left(\frac{dy}{dx} \right) dx + c_2 = \int (3x^2 + c_1) dx + c_2 = x^3 + c_1 x + c_2 .$$

Όπως φαίνεται από το αποτέλεσμα, η συνάρτηση y που βρήκαμε εξαρτάται από δύο αυθαίρετες σταθερές τις $c_1,\ c_2$.

Έτσι, γενικεύοντας όσα είπαμε παραπάνω, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η **γενική λύση ή το γενικό ολοκλήρωμα** της διαφορικής εξίσωσης

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0 , \tag{4}$$

υπό τον όρο ότι η (4) πληροί κάποιες συνθήκες (που πρακτικά ικανοποιούνται), είναι

$$y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n) \tag{5}$$

ή σε πεπλεγμένη μορφή (μη λυμένη ως προς την συνάρτηση y)

$$g(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0 , \tag{6}$$

η οποία γενική λύση (5) ή (6), όπως φαίνεται, εξαρτάται από n αυθαίρετες σταθερές. Γεωμετρικά η (5) ή (6) είναι η εξίσωση μιας n – παραμετρικής οικογένειας καμπύλων του επιπέδου xOy, ενώ τα διάφορα μέλη αυτής αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές των n αυθαιρέτων σταθερών $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$.

Αν στη λύση της διαφορικής εξίσωσης (4), δηλ. στην (5) ή (6) δώσουμε ορισμένες (συγκεκριμένες) τιμές στις αυθαίρετες σταθερές, τότε το μέλος της οικογενείας που προκύπτει λέγεται **μερική λύση ή ολοκληρωτική καμπύλη της** n – παραμετρικής αυτής οικογένειας. Γεωμετρικά η μερική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, είναι η εξίσωση <u>μιας και μόνο</u> καμπύλης από εκείνες της οικογένειας της γενικής λύσης. Η n – παραμετρική αυτή οικογένεια των καμπύλων της γενικής λύσης μιας ΔΕ λέγεται και οικογένεια **ολοκληρωτικών καμπύλων** της διαφορικής εξίσωσης.

Για να επιλέξουμε μια μερική λύση της ΔΕ (4), δηλαδή για να βρούμε τις τιμές των n αυθαίρετων σταθερών που αντιστοιχούν σ' αυτή, πρέπει να μας δοθούν n ανεξάρτητες μεταξύ τους συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές έχουν συνήθως τη μορφή:

$$y(\alpha) = \beta_0, \quad y'(\alpha) = \beta_1, \quad y''(\alpha) = \beta_2, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1} \tag{6}$$

δηλαδή υποχρεώνουν τις συναρτήσεις $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ να πάρουν καθορισμένες τιμές $\beta_o, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}$ για συγκεκριμένη τιμή α της ανεξάρτητης μεταβλητής *x*. Οι παραπάνω συνθήκες (6) λέγονται **αρχικές συνθήκες** της ΔΕ. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας μερικής λύσης η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (6) λέγεται **πρόβλημα αρχικών τιμών.** (Η ονομασία του προέρχεται από τα προβλήματα εκείνα, όπου ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος *t* και είναι γνωστές οι συνθήκες τους στην αρχή του χρόνου, όταν δηλ. *t* = 0.)

Από τα παραπάνω προκύπτει για τις αρχικές συνθήκες ότι:

Αν η ΔΕ είναι 1ης τάξης, θα χρειαστεί μία αρχική συνθήκη (ΑΣ): η $y(\alpha) = \beta_0$.

Αν η ΔΕ είναι 2ης τάξης, θα χρειαστούν δύο ΑΣ: οι $y(\alpha) = \beta_0$, $y'(\alpha) = \beta_1$.

Αν η ΔΕ είναι 3ης τάξης, τρεις ΑΣ: οι $y(\alpha) = \beta_0$, $y'(\alpha) = \beta_1$, $y''(\alpha) = \beta_2$, κ.ο.κ.

Επειδή, όσες είναι οι αυθαίρετες σταθερές της γενικής λύσης, τόσες θα είναι και οι εξισώσεις των αρχικών συνθηκών που θα προκύψουν, λύνοντας το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων αυτών ως προς τις αυθαίρετες σταθερές, υπολογίζουμε τις τιμές τους και τις τοποθετούμε στη γενική λύση της ΔΕ, οπότε θα έχουμε μια μερική λύση ή ολοκληρωτική καμπύλη της οικογένειας των καμπύλων, η οποία οικογένεια αποτελεί τη γενική λύση της ΔΕ.

Παραδείγματα

3) Να βρεθεί η μερική λύση της ΔΕ $y' = 3x^2 - 2x + 4$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη: $y(1) = 3$.

Λύση

Η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \int (3x^2 - 2x + 4)dx + c = x^3 - x^2 + 4x + c\,.$$

Επειδή $y(1) = 3$, θέτουμε στη γενική λύση όπου $x = 1$, $y = 3$ και έχουμε:

$3 = 1 - 1 + 4 + c$, απ' όπου προκύπτει $c = -1$.

Άρα η ζητούμενη λύση είναι η

$$y = x^3 - x^2 + 4x - 1\,.$$

Σημείωση:

Θα μπορούσε το πρόβλημα του παραδείγματος αυτού να διατυπωθεί και ως εξής: «Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ $y' = 3x^2 - 2x + 4$ που περνάει απ' το σημείο (1, 3), εφόσον $x = 1, y = 3$, δηλαδή $y(1) = 3$».

4) Να βρεθούν τα c_1, c_2 ώστε η $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2\eta\mu\, x$ (διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων) να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Λύση

Επειδή $y(0) = 0$, απ' την αρχική σχέση έχουμε:

$$0 = c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^0 + 2\eta\mu 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (1)$$

Επίσης, $y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2\sigma\upsilon\nu\, x$ και επειδή $y'(0) = 1$, έχουμε

$$1 = 2c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^0 + 2\sigma\upsilon\nu\, 0 \Rightarrow 2c_1 + c_2 + 2 = 1 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = -1 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $c_1 = -1,\ c_2 = 1$.

Άρα $y = -e^{2x} + e^x + 2\eta\mu\, x$ (συγκεκριμένη ολοκληρωτική καμπύλη)

Εκτός από το πρόβλημα των αρχικών τιμών, έχουμε και το πρόβλημα των **συνοριακών τιμών.** Αυτό είναι παρόμοιο με το πρόβλημα των αρχικών τιμών. Εδώ, για την εύρεση μιας μερικής λύσης $y = f(x)$ της ΔΕ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, η οποία ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, οι συνθήκες που θέλουμε να ικανοποιεί η ζητούμενη μερική λύση είναι τέτοιες ώστε, μερικές από τις συναρτήσεις $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ με $n \geq 2$, να πάρουν καθορισμένες τιμές στο ένα άκρο $x = \alpha$ του διαστήματος (πρώτο σύνορο), ενώ οι υπόλοιπες συναρτήσεις να πάρουν καθορισμένες τιμές στο άλλο άκρο $x = \beta$ του διαστήματος (δεύτερο σύνορο).

1.2.1 Αντίστροφο πρόβλημα Διαφορικών Εξισώσεων

Όταν μας δίδεται η ΔΕ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ και ζητείται η λύση της, αυτή όπως είδαμε πριν θα είναι η (5) ή (6) και είναι πολλές φορές επίπονη ή και αδύνατη. Πολλές φορές όμως (όπως θα φανεί παρακάτω στις ορθογώνιες τροχιές καμπύλων) απαιτείται λύση και στο **<u>αντίστροφο</u> του κυρίου προβλήματος των διαφορικών εξισώσεων,** δηλαδή: 'Να βρεθεί η ΔΕ της *n* - παραμετρικής οικογένειας των καμπύλων του επιπέδου $y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ ή $g(x, y, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) = 0$ ’. Η εύρεση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι πάντα δυνατή και γίνεται ως εξής:

1) Παραγωγίζουμε την εξίσωση της n - παραμετρικής οικογένειας n φορές ως προς x, οπότε προκύπτουν n νέες εξισώσεις με παραγώγους μέχρι n τάξης.

2) Λύνουμε το σύστημα των n αυτών εξισώσεων που προέκυψαν ως προς τις αυθαίρετες σταθερές $c_1,\ c_2, \dots,\ c_n$. (Το σύστημα αυτό είναι πάντα γραμμικό ως προς τις αυθαίρετες αυτές σταθερές).

3) Αντικαθιστούμε τις τιμές των $c_1,\ c_2, \dots,\ c_n$ στην αρχική n – παραμετρική οικογένεια καμπύλων, $y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ ή $g(x, y, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) = 0$, οπότε προκύπτει τελικά μια σχέση που περιέχει την μεταβλητή x, την συνάρτηση y, και τις παραγώγους αυτής μέχρι n τάξης, χωρίς να υπάρχουν πλέον αυθαίρετες σταθερές. (Ουσιαστικά, απαλείφουμε τις n αυθαίρετες σταθερές). Η τελική σχέση που προκύπτει (δηλαδή η απαλείφουσα του συστήματος των $n+1$ εξισώσεων μαζί με την αρχική), είναι και η διαφορική εξίσωση που ζητείται.

Παρατήρηση

Είναι δυνατόν, με την εύρεση των παραγώγων στο πρώτο στάδιο, να “εξαφανιστούν” όλες οι αυθαίρετες σταθερές. Τότε, η σχέση που προκύπτει (χωρίς την ύπαρξη αυθαίρετων σταθερών), είναι και η διαφορική εξίσωση που ζητάμε.

Παραδείγματα

5) Να βρεθεί η ΔΕ της τριπαραμετρικής οικογένειας των καμπύλων:
$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + 1$, όπου c_1, c_2, c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Λύση

Επειδή η οικογένεια των καμπύλων είναι τριπαραμετρική, παραγωγίζουμε τρεις φορές τα μέλη της οικογένειας ως προς x. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} y' = 3c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3 & (1) \\ y'' = 6c_1 x + 2c_2 & (2) \\ y''' = 6c_1 & (3) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή της $6c_1$ απ’ την (3) στη (2), οπότε η (2) δίνει

$$2c_2 = y'' - y''' x \qquad (4)$$

Η (1) μετά την αντικατάσταση των c_1 και $2c_2$ από τις (3) και (4) αντίστοιχα, αν λυθεί ως προς c_3 δίνει:

$$c_3 = y' - 3\frac{y'''}{6}x^2 - (y'' - y'''x)x$$ ή μετά τις πράξεις:

$$c_3 = y' + \frac{y'''}{2}x^2 - y''x \qquad (5)$$

Τέλος, αν αντικατασταθούν στην αρχική οικογένεια οι τιμές των c_1, c_2 και c_3 που βρήκαμε απ τις (3), (4) και (5) αντίστοιχα, προκύπτει η ΔΕ (απαλείφουσα) της δοθείσας τριπαραμετρικής οικογένειας των καμπύλων που είναι:

$$y = \frac{y'''}{6}x^3 + \frac{y'' - y'''x}{2}x^2 + \left(y' + \frac{y'''}{2}x^2 - y''x\right)x + 1$$ ή μετά τις πράξεις:

$$y'''x^3 - 3y''x^2 + 6y'x - 6y + 6 = 0.$$

6) Να βρεθεί η ΔΕ της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων με τυχαία ακτίνα R και κέντρο το σημείο $K(-1,2)$.

Λύση

Ως γνωστό, η εξίσωση κύκλου με ακτίνα R και κέντρο $K(\alpha, \beta)$ είναι:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

Άρα η εξίσωση της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων με $K(-1,2)$ γίνεται:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = R^2$, όπου αυθαίρετη σταθερή είναι η ακτίνα R.

Παραγωγίζουμε τα μέλη της εξίσωσης αυτής ως προς x και έχουμε (το y είναι συνάρτηση του x):

$2(x+1) + 2(y-2)y' = 0$, ή $x + 1 + (y-2)y' = 0$.

Στην τελευταία σχέση που βρήκαμε παρατηρούμε ότι έχει “εξαφανιστεί” η αυθαίρετη σταθερή R (βλέπε παρατήρηση της παραγράφου 1.2.2). Άρα η

$$x + 1 + (y-2)y' = 0$$

είναι η ΔΕ της οικογένειας των ομοκέντρων κύκλων με κέντρο το σημείο $K(-1, 2)$.

7) Να βρεθεί η ΔΕ της οικογένειας όλων των κύκλων του επιπέδου.

Λύση

Παραγωγίζουμε τρεις φορές τη γνωστή εξίσωση κύκλου $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$:

1^{η} φορά: $2(x-\alpha)(x-\alpha)'+2(y-\beta)(y-\beta)'=0$ ή $x-\alpha+(y-\beta)y'=0$ (1)

2^{η} φορά: $1+(y-\beta)'y'+(y-\beta)y''=0$ ή $1+y'^2+(y-\beta)y''=0$ (2)

3^{η} φορά: $2y'y''+y'y''+(y-\beta)y'''=0$ ή $3y'y''+(y-\beta)y'''=0$ (3)

Η (3) αν λυθεί ως προς β δίνει: $\beta=\dfrac{3y'y''}{y'''}+y$. Η τιμή αυτή του β αν αντικατασταθεί στην σχέση (2) θα δώσει τη ζητούμενη διαφορική εξίσωση (απαλείφουσα), εφόσον η αυθαίρετη σταθερή α έχει χαθεί (παρατήρηση παραγράφου 1.2.2). Έτσι προκύπτει:

$$1+y'^2+\left(y-\frac{3y'y''}{y'''}-y\right)y''=0 \text{ ή } (1+y'^2)y'''=3y'y''^2.$$

Γενική παρατήρηση για τις διαφορικές εξισώσεις

Σε πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες η ολοκλήρωση στη λύση μιας ΔΕ δίνει $\ln x$, ή $\varepsilon\varphi x$, ή e^x, για να πετύχουμε μια απλούστερη έκφραση της γενικής λύσης, όπως θα φανεί παρακάτω, αντικαθιστούμε την αυθαίρετη σταθερή c της ολοκλήρωσης με lnc (νεπέρειο λογάριθμο του c) ή $\varepsilon\varphi c$ ή e^c αντίστοιχα, εφόσον βέβαια δεν μειώνεται η γενικότητα της λύσης.

Πρέπει να αναφερθεί ακόμα, ότι ορισμένες ΔΕ πρώτης τάξης έχουν επιπλέον και λύση (πέραν της γενικής), η οποία δεν εξαρτάται από αυθαίρετη σταθερή (δεν υπάρχει δηλαδή στη λύση αυτή αυθαίρετη σταθερή), και που ωστόσο η λύση αυτή **δεν** είναι μερική λύση, (δηλαδή δεν προκύπτει από οποιαδήποτε γενική λύση). Μία τέτοια λύση λέγεται **ιδιάζουσα.** Σε τέτοιες λύσεις θα αναφερθούμε διεξοδικά στα επόμενα.

Ασκήσεις

1) Να δειχτεί ότι καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύση της ΔΕ που γράφεται δίπλα:

α) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}\ :\ y''-2y'-3y=0$,

β) $y=c_1\sigma\upsilon\nu 4x+c_2\eta\mu 4x\ :\ y''+16y=0$,

γ) $y=e^{-x}(c_1\sigma\upsilon\nu\, x+c_2\eta\mu\, x)\ :\ y''+2y'+2y=0$,

δ) $y^2=cx-x\ln|x|\ :\ 2xyy'-y^2+x=0$,

ε) $y=\ln|\sigma\upsilon\nu(x-c_1)+c_2|\ :\ y''+(y')^2+1=0$ όπου c_1, c_2, c, είναι αυθαίρετες σταθερές των οικογενειών συναρτήσεων που δίνονται.

2) Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = e^{-x}$ (*Απάντηση*: $y = -e^{-x} + c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$),

β) $\dfrac{dy}{dx} = \ln^2 x$ (*Απάντηση*: $y = x\ln^2 x - 2\ln x + 2x + c$),

γ) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -3t^2 + 1$ (*Απάντηση*: $x = -\dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$),

δ) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2\sigma\upsilon\nu\, x + 3\eta\mu\, x$ (*Απ.*: $y = -2\eta\mu\, x + 3\sigma\upsilon\nu\, x + \dfrac{x^2}{2}c_1 + xc_2 + c_3$),

ε) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + \ln x,\ x > 0$ (*Απάντηση*: $y = \dfrac{x^3}{3} + x\ln x - x + c$),

στ) $\dfrac{dy}{dx} = x\sigma\upsilon\nu\, x$ (*Απάντηση*: $y = \sigma\upsilon\nu\, x + x\eta\mu\, x + c$),

ζ) $\dfrac{dy}{dx} = (2 - x^2)e^{-x}$ (*Απάντηση*: $y = xe^{-x}(x+2) + c$),

3) Να βρεθεί η ΔΕ καθεμιάς από τις παρακάτω οικογένειες καμπύλων:

α) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x/2}$ (*Απάντηση*: $2y'' - 5y' + 2y = 0$),

β) $y = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{-x/4}$ (*Απάντηση*: $12y'' - y' - y = 0$),

γ) $y = e^{-x}(c_1\sigma\upsilon\nu\, 4x + c_2\eta\mu\, 4x)$ (*Απάντηση*: $y'' + 2y' + 17y = 0$),

δ) $y = e^{-2x/3}(c_1 x + c_2)$ (*Απάντηση*: $9y'' + 12y' + 4y = 0$),

ε) $y = c_1 e^{5x}\eta\mu(2x + c_2)$ (*Απάντηση*: $y'' - 10y' + 29y = 0$),

4) Να βρεθεί η ΔΕ της οικογένειας:

α) όλων των παραλλήλων προς την ευθεία $y = 3x$ ευθειών του επιπέδου (*Απάντηση*: $y' = 3$),

β) όλων των ευθειών του επιπέδου που περνούν απ' το σημείο Α(3, 4) (*Απάντηση*: $y - 3 = y'(x - 4)$),

γ) όλων των ίσων κύκλων του επιπέδου με ακτίνα 2, των οποίων το κέντρο βρίσκεται i) πάνω στην ευθεία $y = 1$ και ii) πάνω στην ευθεία $x = 3$

(*Απάντηση*: i) $(y-1)^2(y'^2 + 1) = 2$), ii) $(x-3)^2(1 + 1/y'^2) = 2$),

δ) όλων των παραβολών που περνούν απ' την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και έχουν άξονα συμμετρίας: i) τον άξονα Οx, ii) τον άξονα Οy.

(*Απάντηση*: i) $y = 2y'x$, ii) $xy' = 2y$),

ε) όλων των κύκλων, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$ και οι οποίοι εφάπτονται των αξόνων Ox και Oy

(*Απάντηση*: $\left(x - \dfrac{x+yy'}{y'+1}\right)^2 + \left(y - \dfrac{x+yy'}{y'+1}\right)^2 = \left(\dfrac{x+yy'}{y'+1}\right)^2$)

1.3 ΔΕ πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών

Μέχρι τώρα εξετάσαμε διαφορικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης στην πιο απλή τους μορφή (το $2^{ο}$ μέλος είναι συνάρτηση μόνο του *x*), που επιλύονται με μια απλή ολοκλήρωση. Η κατηγορία διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης χωριζομένων μεταβλητών περιλαμβάνει διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{1}$$

όπου το $2^{ο}$ μέλος είναι γινόμενο μιας συνάρτησης μόνο του *x* και μιας συνάρτησης μόνο του *y*. Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση της ΔΕ (1) θα υπενθυμίσουμε ότι το $\dfrac{dy}{dx}$ είναι προφανώς το σύμβολο της παραγώγου y' ή y'_x, αλλά από τον Διαφορικό Λογισμό μπορεί επίσης να θεωρηθεί και ως πηλίκο των δύο διαφορικών *dy* και *dx*. Με την θεώρηση αυτή η ΔΕ (1) γράφεται:

$dy = f(x)g(y)dx$ ή $\dfrac{1}{g(y)}dy = f(x)\,dx$, δηλαδή παίρνει τη μορφή:

$$h(y)dy = f(x)dx, \text{ (όπου } 1/g(y) = h(y)\text{)}. \tag{2}$$

Στην τελευταία διαφορική εξίσωση (2) οι μεταβλητές χωρίζονται. Δηλαδή στο πρώτο μέλος εμφανίζεται μόνο συνάρτηση ως προς *y* με το διαφορικό *dy* και στο άλλο συνάρτηση μόνο ως προς *x* με το διαφορικό *dx*. Μια ΔΕ πρώτης τάξης η οποία μπορεί να τροποποιηθεί με αλγεβρικές πράξεις και να πάρει την τελευταία μορφή (2), λέγεται **ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.** Στο στάδιο αυτό, η γενική λύση αυτής προκύπτει με απλή ολοκλήρωση και των δύο μελών της, δηλαδή:

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

(Να σημειωθεί ότι στο ολοκλήρωμα του $1^{ου}$ μέλους, εφόσον το *y* είναι μέσα στο διαφορικό, θεωρείται, ως γνωστό, σαν ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως το *x*).

Πρέπει να τονιστεί ότι στη διαδικασία επίλυσης μιας ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών συχνά υπάρχει και διαίρεση με μια ή και με περισσότερες παραστάσεις, επομένως, από τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, θα πρέπει να εξαιρεθούν οι τιμές των μεταβλητών x και y που μηδενίζουν τις παραστάσεις αυτές. Για τις τιμές αυτές θα πρέπει να γίνει ιδιαίτερος έλεγχος, γιατί είναι ενδεχόμενο είτε για τις τιμές αυτές τα αποτελέσματα να μην ισχύουν, είτε να οδηγούν σε ιδιάζουσες λύσεις που θα αναφερθούμε στα επόμενα.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $y' = xy$.

Λύση

Η ΔΕ που δόθηκε γράφεται $\frac{dy}{dx} = xy$. Με απαλοιφή παρονομαστών και διαίρεση με $y \neq 0$, γίνεται ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών $\frac{dy}{y} = xdx$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε: $\int \frac{1}{y} dy = \int xdx + c$. (Στις περιπτώσεις που το ολοκλήρωμα ως προς y δίνει λογάριθμο μιας παράστασης, – όπως εδώ συμβαίνει, – αντικαθιστούμε την αυθαίρετη σταθερή c με ln$c$ (c > 0), όπως τονίστηκε στη γενική παρατήρηση των ΔΕ, για να πάρουμε πιο απλοποιημένο αποτέλεσμα). Έτσι έχουμε:

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln c\,, \quad \ln\frac{|y|}{c} = \frac{x^2}{2}\,, \quad \frac{|y|}{c} = e^{\frac{x^2}{2}}\,, \quad |y| = ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad y = \pm ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Επειδή $c > 0$, προκύπτει ότι $\pm c \in R - \{0\}$, άρα μπορεί να αντικατασταθεί με την ‘τελική’ αυθαίρετη σταθερή $c \in R - \{0\}$. Έτσι η γενική λύση είναι η $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$ (πιο απλοποιημένη από αυτή που θα παίρναμε διαφορετικά). Τονίζεται ακόμα ότι, εφόσον διαιρέθηκε η αρχική ΔΕ με $y \neq 0$, δεν μπορεί να πάρει η αυθαίρετη σταθερή την τιμή μηδέν, γιατί τότε θα προέκυπτε και $y = 0$ (κάτι που αποκλείσαμε).

2) Να λυθεί η ΔΕ $y(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$.

Λύση

Η ΔΕ που δόθηκε γράφεται $y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = -x(1+y^2)$ ή $\frac{ydy}{1+y^2} = -\frac{xdx}{1+x^2}$.

Η τελευταία είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών και η γενική της λύση είναι:

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = -\int \frac{xdx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln c\,, \text{ ή } \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln c\,.$$

(βλέπε κεφ. 8 παράρτημα, παράγρ. 8.2, 3^{η} παρατήρηση). Θέσαμε ως αυθαίρετη σταθερή αντί c το $1/2\ln c$ για να έχουμε πιο απλοποιημένο αποτέλεσμα της λύσης. Έτσι:

$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln c$, ή[1] $\ln\left[\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)\right] = \ln c$ και τελικά

$$\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right) = c$$

που αποτελεί και τη λύση της ΔΕ που δόθηκε. Προφανώς δεν υπάρχει κανείς περιορισμός κατά τη διαίρεση με τις παραστάσεις $1+y^2, 1+x^2$ γιατί αυτές είναι πάντα διάφορες του μηδενός.

(Τονίζεται ακόμα, ότι δεν είναι υποχρεωτικό η γενική λύση y που βρίσκουμε, να είναι λυμένη ως προς y). Θυμίζουμε ότι αυτή μπορεί να είναι της μορφής:

$y = f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ ή $g(x, y, c_1, c_2, c_3, ..., c_n) = 0$ (πεπλεγμένη ως προς x, y).

3) Να λυθεί η ΔΕ $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y + 2$.

Λύση

Η ΔΕ γράφεται σε μορφή χωριζομένων μεταβλητών: $\frac{dy}{y^2 - 2y + 2} = dx$. Άρα

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 2} = \int dx + c.$$

Στο αριστερό ολοκλήρωμα ο παρονομαστής γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων (διακρίνουσα αρνητική):

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2 + 1} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\,(y-1).$$

(Βλέπε κεφ. 8 παράρτημα, παράγρ. 8.4 ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων με παρονομαστή τριώνυμο και διακρίνουσα $\Delta < 0$).

Συνεπώς, $\tau o\xi\varepsilon\varphi(y-1) = x + c$. Άρα $y - 1 = \varepsilon\varphi(x+c)$.

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $y' = y^2 + 4y + 5$ (*Απάντηση*: $y = \varepsilon\varphi(x+c) - 2$)

---

[1] Από τις ιδιότητες λογαρίθμων: $1)\ln x + \ln y = \ln(xy)$, $2)\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $3)\ln x^n = n\ln x$, με $x, y > 0$

β) $y' = (y\ln x)^2$ (*Απάντηση*: $y = -1/(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c)$)

2) Να λυθεί η ΔΕ $xdy - \sqrt{1+y^2}\,dx = 0$. (*Απάντηση*: $y + \sqrt{1+y^2} = cx$)

3) Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της διαφορικής εξίσωσης: $ydy = e^x dx$ που περνάει απ' το σημείο Α(0, 1). (*Απάντηση*: $y^2 = 2e^x - 1$)

4) Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $y' = 6y$ (*Απάντηση*: $y = ce^{6x}$),

β) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y^4+1}$ (*Απάντηση*: $\dfrac{y^5}{5} + y = \dfrac{x^2}{2} + x + c$),

γ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1+x^2}$ (*Απάντηση*: $-\dfrac{1}{y} = τοξεφx + c$),

δ) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ (*Απάντηση*: $e^{-y} + e^x + c = 0$),

ε) $xydy = (y-1)(x+1)dx$ (*Απάντηση*: $y + \ln|y-1| = x + \ln|x| + c$),

στ) $(x^2+1)ημy dy + 2xσυν y dx = 0$ (*Απάντηση*: $συν y + c(x^2+1)$),

ζ) $dx + ydy = x^2 ydy$ (*Απάντηση*: $y^2 = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + c$),

η) $(y^2 - 6y + 13)dx = dy$ (*Απάντηση*: $τοξεφ\left(\dfrac{y-3}{2}\right) = 2x + c$),

θ) $2yy' = xe^x$ (*Απάντηση*: $y^2 = e^x(x-1) + c$),

ι) $y' + xy^2 = 0$ (*Απάντηση*: $y = \dfrac{2}{x^2+c}$),

ια) $(t^2+1)dt + (x^2+x)dx = 0$ (*Απάντηση*: $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{t^3}{3} - t + c$)

5) Να βρεθεί η μερική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη που γράφεται δίπλα:

α) $y^2(1+x)dx = x^3 dy \ :\ y(1) = 2$ (*Απάντηση*: $y = -\dfrac{2x^2}{2x^2 - 2x - 1}$),

β) $y\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2+y^2} \ :\ y(\sqrt{\ln 2}) = 0$ (*Απάντηση*: $e^{x^2} + e^{-y^2} = 3$),

γ) $ημ\,xdx + ydy = 0 \ :\ y(0) = -2$ (*Απάντηση*: $y^2 = 2(συν\,x + 1)$),

δ) $(y+1)y' = x^2 y - y \ :\ y(3) = 1$ (*Απάντηση*: $ye^y = e^{\frac{x^3}{3} - x - 5}$),

6) Να δειχθεί ότι η γενική λύση της ΔΕ $1+y^2+(1+x^2)y'=0$ παίρνει τη μορφή $y=\dfrac{c-x}{1+cx}$, αν αντικατασταθεί η αυθαίρετη σταθερή c με τοξεφc. Στη συνέχεια να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη που περνάει απ' το σημείο $(1, 2/3)$.

(*Υπόδειξη*: Στη γενική λύση $\textit{τοξεφ}\,x+\textit{τοξεφ}\,y=\textit{τοξεφ}\,c$ (1) θέτουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{τοξεφ}\,x=\alpha \Rightarrow x=\varepsilon\varphi\,\alpha \\ \textit{τοξεφ}\,y=\beta \Rightarrow y=\varepsilon\varphi\,\beta \\ \textit{τοξεφ}\,c=\gamma \Rightarrow c=\varepsilon\varphi\,\gamma \end{array}\right\} \text{ οπότε η (1) γίνεται } \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=\gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi\,\gamma, \\ \Rightarrow \dfrac{\varepsilon\varphi\,\alpha+\varepsilon\varphi\,\beta}{1-\varepsilon\varphi\,\alpha\cdot\varepsilon\varphi\,\beta}=\varepsilon\varphi\,\gamma \end{array}\right.$$

απ' την οποία με αντικατάσταση προκύπτει η ζητούμενη μορφή).

7) Να δειχτεί ότι, με αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής $z=\alpha x+\beta y+\gamma$, η ΔΕ $\dfrac{dy}{dx}=f(\alpha x+\beta y+\gamma)$ μετασχηματίζεται σε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών της συνάρτησης $z=z(x)$. Στη συνέχεια να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y-3)^2-2(x+y-3)$ (*Απάντηση*: $-\dfrac{1}{x+y-4}=x+c$),

β) $\dfrac{dy}{dx}=(x-y)^2$ (*Απάντηση*: $\ln\left|\dfrac{1+x-y}{1-x+y}\right|^{1/2}=x+c$),

γ) $\dfrac{dy}{dx}=-2+e^{2x+y-1}$ (*Απάντηση*: $-e^{-(2x+y-1)}=x+c$),

1.4 Ομογενείς Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Η ταξινόμηση των διάφορων μορφών των διαφορικών εξισώσεων που ακολουθούν, είναι τέτοιες ώστε να βασίζονται συνήθως σε προηγουμένως αναφερθείσες, όπως θα φανεί και στην παρούσα περίπτωση των ομογενών ΔΕ 1ης τάξης.

Μια ΔΕ 1ης τάξης λέγεται **ομογενής** αν μετά από κάποιες αλγεβρικές τροποποιήσεις μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

όπου το 2ο μέλος της ΔΕ είναι συνάρτηση *f* μόνο του πηλίκου $\dfrac{y}{x}$ και $y=y(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση *y* που θέλουμε να βρούμε.

Π.χ. η ΔΕ $(3x-2y)dx+(5x+6y)dy=0$ είναι ομογενής, γιατί γράφεται διαδοχικά

$$(5x+6y)dy=-(3x-2y)dx\,,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{3x-2y}{5x+6y}\,.$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή του 2ου μέλους με $x\neq 0$ προκύπτει

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{3x-2y}{x}}{\dfrac{5x+6y}{x}}=-\frac{3-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}{5+6\left(\dfrac{y}{x}\right)}=f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (2)$$

Η ονομασία των ομογενών διαφορικών εξισώσεων δεν είναι τυχαία και προέρχεται από τις ‘ομογενείς συναρτήσεις’ (όπως εξηγείται στην παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου). Δεν σχετίζεται με τις ομογενείς ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2ο μέλος, που θα συναντήσουμε στην παράγραφο 1.6.

Ως γνωστό, μία συνάρτηση $F(x,y)$ δύο μεταβλητών *x* και *y*, (ή πολλών) λέγεται **ομογενής βαθμού *n*,** αν επαληθεύει την ταυτότητα

$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y)$ για κάθε *λ, x, y* (*n* είναι ο βαθμός ομογένειας).

Π.χ. η συνάρτηση $F(x,y)=x^3+2xy^2$ είναι ομογενής βαθμού $n=3$, διότι:

$$F(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^3+2(\lambda x)(\lambda y)^2=\lambda^3(x^3+2xy^2)=\lambda^3 F(x,y)\,.$$

Όλες οι ομογενείς συναρτήσεις είναι τέτοιες ώστε κάθε όρος αυτών είναι του <u>ιδίου βαθμού</u> (βαθμός ομογένειας *n*) ως προς τις μεταβλητές που περιέχει. Στο παραπάνω παράδειγμα κάθε όρος είναι 3ου βαθμού (βαθμός ομογένειας $n=3$).

Ομογενείς συναρτήσεις θα συναντήσουμε και στο δεύτερο κεφάλαιο.

Για να λύσουμε τη ΔΕ (1) κάνουμε **αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής** (αντικατάσταση που συναντάται πολύ συχνά στις ΔΕ, όπως ακριβώς τη γνωρίζουμε και στα ολοκληρώματα). Εισάγουμε δηλαδή μια νέα συνάρτηση $z=z(x)$ (άγνωστη), η οποία συνδέεται με την ζητούμενη συνάρτηση $y=y(x)$ με τη σχέση:

$$z=\frac{y}{x}\,. \qquad (3)$$

Η σχέση (3) αν λυθεί ως προς *y* δίνει: $y=xz$.

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση $y=xz$ ως προς *x* έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=(xz)'_x=1\cdot z+x\frac{dz}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}\,. \qquad (4)$$

Τις τιμές των $\dfrac{dy}{dx}$ και $\dfrac{y}{x}$ απ’ τις τελευταίες σχέσεις (4) και (3) που βρήκαμε, τις αντικαθιστούμε τώρα, στην αρχική ΔΕ (1), οπότε η (1) μετασχηματίζεται στην ΔΕ:

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z)\,. \tag{5}$$

Έτσι, η (5) γράφεται: $x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$ ή $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z)-z}$.

η τελευταία είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται κατά τα γνωστά.

Αν γράψουμε την αυθαίρετη σταθερή ολοκλήρωσης ως $\ln c$, (όπως τονίζεται στη γενική παρατήρηση για τις ΔΕ της παρ. 1.2.2), έχουμε διαδοχικά:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{f(z)-z} + \ln c\,,\ (c > 0) \text{ ή } \ln|x| - \ln c = \int\frac{dz}{f(z)-z} \text{ ή}$$

$\ln\frac{|x|}{c} = \int\frac{dz}{f(z)-z}$. Άρα $|x| = ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}$, οπότε $x = \pm ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}$.

Το τελευταίο ζεύγος των λύσεων είναι ισοδύναμο με την λύση

$$x = ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}\,,\ c \in R - \{0\}\,, \tag{6}$$

όπου όμως η αυθαίρετη σταθερή c μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές. Η επίλυση του ολοκληρώματος στον εκθέτη της (6) δίνει τη γενική λύση της ΔΕ (5). Στην επίλυση της (6) θέτουμε $z = \frac{y}{x}$ και έχουμε τη γενική λύση της ΔΕ (1).

Παρατήρηση

Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι μια ΔΕ 1ης τάξης που μας έχει δοθεί είναι ομογενής. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε όρος της ΔΕ είναι του ίδιου βαθμού ως προς τις μεταβλητές *x, y* που περιέχει. Τότε, αφού λύσουμε την ΔΕ ως προς dy/dx, διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με x^n, όπου *n* είναι ο βαθμός ομογένειας, οπότε την τροποποιούμε στη μορφή $f(z)$, όπου $z = y/x$.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

Λύση

Η δοθείσα ΔΕ είναι προφανώς ομογενής, γιατί κατά την παραπάνω παρατήρηση κάθε όρος της είναι του ιδίου βαθμού ($n = 1$), όπως και το ριζικό της. Έτσι, διαιρούμε τα δύο μέλη της με x^1dx, όπου ο εκθέτης 1 του *x* είναι ο βαθμός ομογένειας, με $x \neq 0$, οπότε η αρχική ΔΕ γίνεται:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$ Άρα

$f(z)=z+\sqrt{1+z^2}$, $f(z)-z=\sqrt{1+z^2}$ (όπου $z=\frac{y}{x}$) και επομένως

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right),$$

(βλέπε στο τέλος του βιβλίου Τυπολόγιο, Δ. Ολοκληρώματα (21°), για $k=1$).

Έτσι, ο τύπος (6) της γενικής λύσης δίνει:

$x=ce^{\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)}=c\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$, (διότι ως γνωστό: $e^{\ln x}=x$).

Αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση όπου z το ίσο του $\frac{y}{x}$ έχουμε:

$$x=c\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=c\,\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad \text{ή} \quad x^2=c\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

που αποτελεί και την τελική λύση της ΔΕ που δόθηκε.

2) Να λυθεί η ΔΕ $xy^3dy=(2y^4+x^4)dx$.

Λύση

Προφανώς η ΔΕ είναι ομογενής 1ης τάξης, επειδή κάθε όρος αυτής είναι 4ου βαθμού ως προς τις μεταβλητές x, y που περιέχει. Έτσι αυτή μετασχηματίζεται στην

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}=\frac{\frac{2y^4+x^4}{x^4}}{\frac{xy^3}{x^4}}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^4+1}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}=\frac{2z^4+1}{z^3}=f(z),\ (z=y/x).$$

Είναι $f(z)-z=\frac{2z^4+1}{z^3}-z=\frac{2z^4+1-z^4}{z^3}=\frac{z^4+1}{z^3}$. Άρα

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{z^3dz}{z^4+1}=\frac{1}{4}\int\frac{d(z^4+1)}{z^4+1}=\frac{1}{4}\ln(z^4+1)=\ln(z^4+1)^{1/4}.$$

Επομένως $x=ce^{\ln(z^4+1)^{1/4}}=c(z^4+1)^{1/4}=c\left(\frac{y^4}{x^4}+1\right)^{1/4}$.

Η τελευταία αν μετασχηματισθεί δίνει:

$$x^4=c^4\left(\frac{y^4+x^4}{x^4}\right)=k\left(\frac{y^4+x^4}{x^4}\right).$$

Άρα $x^8 = k(y^4 + x^4)$, (όπου $k = c^4$ η νέα αυθαίρετη σταθερή).

3) Να λυθεί η ΔΕ $xy' = y + 2xe^{-y/x}$

Λύση

Η δοθείσα ΔΕ είναι ομογενής με βαθμό ομογένειας $n = 1$.

Αυτή γράφεται $y' = \dfrac{y}{x} + 2e^{-y/x} = z + 2e^{-z} = f(z)$, όπου $z = y/x$.

Είναι $f(z) - z = z + 2e^{-z} - z = 2e^{-z}$.

Άρα $\displaystyle\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{1}{2e^{-z}}dz = \frac{1}{2}\int e^z dx = \frac{1}{2}e^z$. Επομένως

$x = ce^{1/2e^z} = ce^{1/2e^{y/x}} \Rightarrow \ln|x| = \ln c + \ln(e^{1/2e^{y/x}}) = \ln c + \dfrac{1}{2}e^{y/x}\ln e$ ή

$2(\ln|x| - \ln c) = e^{y/x} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{|x|}{c}\right)^2 = e^{y/x}$.

Άρα $\dfrac{y}{x} = \ln\left(\ln\left(\dfrac{|x|}{c}\right)^2\right) \Rightarrow y = x\ln(2\ln|x| + c_1)$, όπου $c_1 = -2\ln c$

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

α) $(x^2 - y^2)dy = 2xydx$ (*Απάντηση*: $x^2 + y^2 = cy$),

β) $xydy = (x^2 + y^2)dx$ (*Απάντηση*: $y^2 = x^2\ln x^2 + cx^2$),

γ) $(x^2 + 2y^2)dx = xydy$ (*Απάντηση*: $y^2 = cx^4 - x^2$),

δ) $xdy = (y + x)dx$ (*Απάντηση*: $y = x\ln|cx|$),

ε) $xdy = (y - x)dx$ (*Απάντηση*: $y = x\ln|c/x|$),

στ) $xdy = (2y + x)dx$ (*Απάντηση*: $y = cx^2 - x$),

ζ) $(x^3 + y^3)dx = 3xy^2dy$ (*Απάντηση*: $x^3 - 2y^3 = cx$),

η) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$ (*Απάντηση*: $cx = e^{\text{τοξημ}(y/x)}$),

θ) $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$

(*Απάντηση*: $\ln(y^2+2xy+2x^2)-4\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+y}{x}\right)=c$),

ι) $(x^4+3x^2y^2+y^4)dx=x^3ydy$ (*Απάντηση*: $y^2=-x^2\left(1+1/\ln\left|cx^2\right|\right)$),

ια) $(y^2-2xy)dx=(x^2-2xy)dy$ (*Απάντηση*: $xy(y-x)=c$),

ιβ) $x^2+y^2-xyy'=0$ (*Απάντηση*: $y^2=2x^2(\ln|x|+c)$),

ιγ) $2xydx=(x^2+y^2)dy$ (*Απάντηση*: $y=c(x^2-y^2)$),

2) Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη καθεμιάς από τις επόμενες ΔΕ, η οποία περνάει από το σημείο που γράφεται δίπλα της:

α) $ydy=(2x+y)dx:(2,1)$ (*Απάντηση*: $x\left(\frac{y+x}{x}\right)^{1/3}=2\left(\frac{y-2x}{x}\right)^{2/3}$),

β) $xydx=x^2dy-y^2dx:(1,1)$ (*Απάντηση*: $x=e^{1-\frac{x}{y}}$),

γ) $(x^4+y^4)dx=2x^3ydy:(1,0)$ (*Απάντηση*: $x=e^{\frac{y^2}{x^2-y^2}}$),

δ) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(y/x)}+\frac{y}{x}:(2,\pi)$ (*Απάντηση*: $x=2e^{\eta\mu\frac{y}{x}-1}$).

3) Να δειχτεί ότι η ΔΕ $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma}\right)$ όπου $\alpha\mathrm{B}-\beta\mathrm{A}\neq 0$,

μετασχηματίζεται σε ομογενή ΔΕ κάνοντας αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases}\mathrm{Y}=\alpha x+\beta y+\gamma\\ \mathrm{X}=\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma\end{cases}.$$

Στη συνέχεια να λυθούν οι ΔΕ:

α) $y'=\frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$ (*Απάντηση*: $(4y-x-3)(y+2x-3)^2=c$),

β) $y'=\frac{x-y-1}{x+4y-1}$ (*Απάντηση*: $\ln(4y^2+x^2-2x+1)+\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{2y}{x-1}=c$).

(*Υπόδειξη:* Διαφορίζουμε τις ισότητες νέων μεταβλητών και μετά λύνουμε το σύστημα που προκύπτει , δηλαδή το σύστημα: $\begin{cases}d\mathrm{Y}=\alpha dx+\beta dy\\ d\mathrm{X}=\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy\end{cases}$ ως προς $dx,\ dy$).

4) Να δειχτεί ότι η ΔΕ $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\alpha\, x+\beta\, y+\gamma}{\mathrm{A}\, x+\mathrm{B}\, y+\Gamma}\right)$ όπου $\alpha\,\mathrm{B}-\beta\,\mathrm{A}=0$,

μετασχηματίζεται σε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών με την αλλαγή συνάρτησης

$$z=\alpha\, x+\beta\, y.$$

Κατόπιν, να λυθεί η ΔΕ $y'=\frac{x+y}{3x+3y-4}$ (*Απάντηση*: $x+3y+2\ln(2-x-y)=c$).

(*Υπόδειξη*: Διαφορίζουμε την ισότητα της νέας μεταβλητής *z* και λύνουμε ως προς *dy*. Μετά αντικαθιστούμε το *z* στη συνάρτηση f και το *dy* στην y', οπότε καταλήγουμε σε έκφραση της z'_x).

1.5 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης είναι της μορφής:

$$\mathrm{A}(x)\frac{dy}{dx}+\mathrm{B}(x)y+\Gamma(x)=0, \qquad (1)$$

όπου Α, Β, Γ είναι συναρτήσεις <u>μόνο</u> της ανεξάρτητης μεταβλητής *x*. Η ονομασία «γραμμικές» προέρχεται από το γεγονός ότι το πρώτο μέλος αυτών, όπως φαίνεται απ' την (1), είναι γραμμική σχέση των *y*, και *y΄*, δηλαδή 1ου βαθμού ως προς *y* και *y΄*. Οι γραμμικές ΔΕ της μορφής (1) μπορούν να πάρουν απλούστερη μορφή, αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) δια $\mathrm{A}(x)\neq 0$, οπότε η (1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \qquad (2)$$

όπου θέσαμε $\frac{\mathrm{B}(x)}{\mathrm{A}(x)}=P(x),\ \frac{\Gamma(x)}{\mathrm{A}(x)}=-Q(x)$.

Για να λύσουμε την ΔΕ (2) εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε πρώτα στη ΔΕ (2) όπου $Q(x)=0$, λύνουμε τη ΔΕ

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \qquad (3)$$

και υπολογίζουμε μια μερική λύση αυτής.. Η (3) γράφεται:

$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y\text{, ή }\frac{dy}{y}=-P(x)dx.$$

Η τελευταία ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και η γενική της λύση είναι:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx + \ln c$$ ($c > 0$) (βλέπε γενική παρατήρηση για τις ΔΕ), ή

$\ln|y| - \ln c = -\int P(x)dx$ ή $\ln\frac{|y|}{c} = -\int P(x)dx$, οπότε

$\frac{|y|}{c} = e^{-\int P(x)dx}$ και $|y| = ce^{-\int P(x)dx}$. Άρα $y = \pm ce^{-\int P(x)dx}$ και τελικά

$y = ce^{-\int P(x)dx}$, όπου όμως $c \in R - \{0\}$.

Αν θέσουμε στην τελευταία γενική λύση $c = 1$, παίρνουμε τη συνάρτηση

$$y_1 = e^{-\int P(x)dx}$$

η οποία είναι μια μερική λύση της (3).

Στη συνέχεια εισάγουμε μια νέα συνάρτηση $z = z(x)$ (όπως κάναμε και στην περίπτωση της επίλυσης των ομογενών ΔΕ 1ης τάξης στην παράγραφο 1.4). Η άγνωστη αυτή συνάρτηση $z(x)$ συνδέεται με τη ζητούμενη συνάρτηση $y(x)$ με τη σχέση

$$y = z\,y_1. \tag{4}$$

Διαφορίζοντας την (4) έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}y_1 + z\frac{dy_1}{dx} \tag{5}$$

Θέτοντας τώρα τις τιμές των y και $\frac{dy}{dx}$ από τις (4) και (5) στην (2), βρίσκουμε:

$\frac{dz}{dx}y_1 + z\frac{dy_1}{dx} + P(x)zy_1 = Q(x)$ ή

$\frac{dz}{dx}y_1 + z\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right] = Q(x)$ ή

$$\frac{dz}{dx}y_1 = Q(x).$$

(η αγκύλη είναι μηδέν, εφόσον η y_1 αποτελεί μερική λύση της ΔΕ (3)).

Έτσι, η τελευταία σχέση γράφεται

$\frac{dz}{dx} = \frac{Q(x)}{y_1} = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ ή $dz = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$.

Η τελευταία ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών με γενική λύση

$$z = c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία όπου z το ίσον του που προκύπτει από την (4):

$z = y/y_1$ βρίσκουμε

$$\frac{y}{y_1} = c + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \ \text{ ή } \ y = y_1 \left[c + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right]$$

και επομένως η γενική λύση της (2) είναι

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[c + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right]. \qquad (6)$$

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $x^4 y' + 4x^3 y = x^8$.

Λύση

Η δοθείσα ΔΕ γράφεται (διαιρούμε με x^4): $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4}{x} \cdot y = x^4$. Είναι επομένως

$P(x) = \dfrac{4}{x}$, $Q(x) = x^4$. Άρα

$$\int P(x)dx = \int \frac{4dx}{x} = 4\ln|x| \ \text{ και}$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-4}} = |x|^{-4} = x^{-4} = 1/x^4 \,,$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{4\ln|x|} = e^{\ln|x|^4} = |x|^4 = x^4 .$$

Επίσης $\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx = \int x^4 \cdot x^4 dx = x^9/9$. Έτσι η γενική λύση είναι η

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[c + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right] \ \text{ ή } \ y = \frac{1}{x^4}\left(c + \frac{x^9}{9} \right) = \frac{c}{x^4} + \frac{x^5}{9} .$$

2) Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ η οποία περνάει απ’ το σημείο (0, 1).

Λύση

Αν διαιρέσουμε την αρχική ΔΕ με $1+x^2$ αυτή παίρνει τη μορφή

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot y = 1 + x^2$. Άρα είναι γραμμική 1ης τάξης με

$P(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$ και $Q(x) = 1 + x^2$.

Έχουμε: $\displaystyle\int P(x)dx = -\int \frac{2xdx}{1+x^2} = -\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = -\ln(1+x^2)$. Άρα

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2 \text{ και}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = e^{\ln(1+x^2)^{-1}} = (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Επίσης: $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int (1+x^2)\frac{1}{1+x^2}dx = x$.

Αντικαθιστούμε κατόπιν στον τύπο $y = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$ τις τιμές των ολοκληρωμάτων που βρήκαμε και έχουμε τη γενική λύση:

$$y = (1+x^2)(c+x).$$

Η ολοκληρωτική καμπύλη περνάει απ' το σημείο (0, 1), άρα $y(0)=1$, δηλ.

$$1 = (1+0^2)(c+0) \text{ άρα } c = 1.$$

Επομένως η ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ είναι η $y = (1+x^2)(1+x)$.

3) Να λυθεί η ΔΕ $y' + y = \eta\mu\, x$.

Λύση

Είναι γραμμική με $P(x) = 1,\ Q(x) = \eta\mu\, x$.

Έτσι $\int P(x)dx = \int 1\cdot dx = x$. Άρα $e^{-\int P(x)dx} = e^{-x}$ και $e^{\int P(x)dx} = e^{x}$.

Επίσης $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int \eta\mu\, x\cdot e^x dx$.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες (βλέπε παράρτημα απλών ολοκληρωμάτων στο τέλος του βιβλίου, παράγραφος 8.3.3, λυμένο παράδειγμα μετά την παρατήρηση). Είναι

$$\int \eta\mu\, x\cdot e^x dx = \frac{e^x(\eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu\, x)}{2}.$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$y = e^{-x}\left[c + \frac{e^x(\eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu\, x)}{2}\right] = \frac{c}{e^x} + \frac{\eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu\, x}{2}.$$

4) Να λυθεί η ΔΕ $dy + \frac{y}{x}dx = e^{2x}dx$.

Λύση

Αυτή γράφεται (διαιρώντας και τα δύο μέλη με dx): $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = e^{2x}$.

Είναι γραμμική με $P(x)=\dfrac{1}{x}$, $Q(x)=e^{2x}$. Έχουμε

$\int P(x)dx=\int \dfrac{1}{x}dx=\ln x$ ($x>0$). Άρα

$e^{\int P(x)dx}=e^{\ln x}=x$ και $e^{-\int P(x)dx}=e^{-\ln x}=\dfrac{1}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{x}$. Επίσης

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int e^{2x}xdx=\frac{1}{2}\int e^{2x}xd(2x)=\frac{1}{2}\int xd(e^{2x}).$$

Εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση (βλέπε παράγρ. 8.3.2 παράδ. 2).

$$\frac{1}{2}\int xd(e^{2x})=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)\right]=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$$

Έτσι, η γενική λύση $y=e^{-\int P(x)dx}\left[c+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$ είναι

$$y=\frac{1}{x}\left(c+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right).$$

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $x^2dy+(2xy-x+1)dx=0$ (*Απάντηση*: $y=cx^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3x}$),

β) $xy'+(1+x)y=e^{-x}$ (*Απάντηση*: $y=\dfrac{c+x}{xe^x}$),

γ) $xy'+2y=\ln x$ (*Απάντηση*: $y=\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{\ln x}{2}-\dfrac{1}{4}$),

δ) $xy'+2y=7x^5$ (*Απάντηση*: $y=x^5+cx^{-2}$),

ε) $x^3y'+2y=e^{x^{-2}}$ (*Απάντηση*: $y=ce^{x^{-2}}-\dfrac{e^{x^{-2}}}{2x^2}$),

ζ) $y^2dx+(3xy-4y^3)dy=0$ (*Απάντηση*: $x=cy^3+4y^2$).

(*Υπόδειξη*: Στην ζ) να θεωρηθεί το x ως συνάρτηση και το y ως ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή η (ζ) να μετασχηματιστεί στη μορφή $\dfrac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$).

2) Να βρεθεί η μερική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη που γράφεται δίπλα:

α) $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=\frac{2}{3}x^4 : y(1)=1$ (*Απάντηση*: $y=\frac{7x^2+2x^5}{9}$),

β) $\frac{dy}{dx}+2xy=2x^3 : y(0)=1$ (*Απάντηση*: $y=2e^{-x^2}+x^2-1$),

γ) $\frac{dy}{dx}-7y=e^x : y(0)=1$ (*Απάντηση*: $y=\frac{7e^{7x}-e^x}{6}$),

δ) $y'+(1+2x)y=e^{-x^2} \; : \; y(0)=2$ (*Απάντηση*: $y=\frac{e^x+1}{e^{x+x^2}}$)

ε) $xdy=(3y-x^2)dx \; : \; y(-1)=1$ (*Απάντηση*: $y=x^2$).

3) Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $2xy'-3y=x^2 \; (x>0)$ (*Απάντηση*: $y=cx^{3/2}+x^2$),

β) $y'-y=xe^x$ (*Απάντηση*: $y=ce^x+e^x x^2/2$),

γ) $xdy+3ydx=2x^2dx$ (*Απάντηση*: $y=cx^{-3}+\frac{2}{5}x^2$).

1.5.1 Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις **Bernoulli** θεωρούνται επέκταση των γραμμικών εξισώσεων 1ης τάξης, όπου το δεύτερο μέλος αυτών $Q(x)$ περιέχει τον παράγοντα y^n (όπου n τυχαίος) και ανάγονται όπως θα δούμε σε γραμμικές ΔΕ 1ης τάξης.
Δηλαδή η γενική μορφή των ΔΕ Bernoulli είναι

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \tag{7}$$

Για να επιλύσουμε τη ΔΕ Bernoulli εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1) Αν $n = 0$ ($y^0=1$), τότε η ΔΕ (7) είναι γραμμική.

2) Αν $n = 1$, τότε η (7) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{dy}{dx}+(P(x)-Q(x))y=0 \text{ ή } \frac{dy}{dx}+P_1(x)y=0 \;\; (P(x)-Q(x)=P_1(x)),$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, όπως είδαμε πριν.

3) Αν τέλος, $n \neq 0$ και $n \neq 1$, τότε για την επίλυσή της, εισάγουμε μια νέα ά-γνωστη συνάρτηση $z=z(x)$ (όπως κάναμε και στις γραμμικές ΔΕ), η οποία συνδέε-ται με την ζητούμενη συνάρτηση $y=y(x)$ με τη σχέση:

$$z = y^{1-n} \tag{8}$$

Ο σκοπός μας είναι να εκφράσουμε την *y* και την παράγωγό της $\frac{dy}{dx}$ συναρτήσει της *z* και της παραγώγου της $\frac{dz}{dx}$ αντίστοιχα.

Διαφορίζοντας την (8) έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \ ,$$

η οποία , αν λυθεί ως προς $\frac{dy}{dx}$, δίνει

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n-1} y^n \frac{dz}{dx} \tag{9}$$

Επίσης, η (8) γράφεται διαφορετικά $z = y \cdot y^{-n} = \frac{y}{y^n}$ και αν λυθεί ως προς *y* δίνει

$$y = z y^n \tag{10}$$

Έτσι, αντικαθιστούμε τις τιμές των (9) και (10) στην (7) και έχουμε:

$$-\frac{1}{n-1} y^n \frac{dz}{dx} + P(x)zy^n = Q(x)y^n \, .$$

Στην τελευταία σχέση ο παράγοντας y^n υπάρχει σ' όλους τους όρους άρα μπορεί να απλοποιηθεί. Επίσης, πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της με $-(n-1)$ προκύπτει:

$$\frac{dz}{dx} - (n-1)P(x)z = -(n-1)Q(x) \ \text{ή}$$

$$\frac{dz}{dx} + P_1(x)z = Q_1(x) \tag{11}$$

όπου $P_1(x) = -(n-1)P(x),\ Q_1(x) = -(n-1)Q(x)$

Έτσι, η τελευταία ΔΕ (11) που προέκυψε είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης όπου αντί της *y* έχουμε τη νέα συνάρτηση *z*, με $P_1(x) = -(n-1)P(x)$, $Q_1(x) = -(n-1)Q(x)$ τις νέες συναρτήσεις του *x*, και λύνεται κατά τα γνωστά. Αν λοιπόν $z = z(x,c)$ είναι η γενική της (11), τότε η γενική λύση της αρχικής ΔΕ Bernoulli (7) θα προκύψει με αντικατάσταση της *z* από την (8), δηλαδή:

$$z = y^{1-n} = z(x,c) \ \text{ή} \ y^{n-1} = 1/z(x,c) \, .$$

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $y' + \frac{x}{1-x^2} y = x^2\sqrt{y}$.

Λύση

Η δοθείσα ΔΕ γράφεται $y' + \frac{x}{1-x^2} y = x^2 y^{1/2}$, άρα είναι ΔΕ Bernoulli με $n = 1/2$.

Εισάγουμε λοιπόν τη νέα συνάρτηση

$z = y^{1-n} = y^{1-1/2} = y^{1/2}$. Είναι

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} y^{1/2 - 1} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} y^{-1/2} \frac{dy}{dx}$, ή αν λυθεί ως προς $\frac{dy}{dx}$ δίνει

$$\frac{dy}{dx} = 2y^{1/2} \frac{dz}{dx} \tag{i}$$

Επίσης η σχέση $z = y^{1-n} = y^{1-1/2} = y \cdot y^{-1/2}$ αν λυθεί ως προς y δίνει

$$y = zy^{1/2} \tag{ii}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των (i) και (ii) στην ΔΕ παίρνουμε

$$2y^{1/2} \frac{dz}{dx} + \frac{x}{1-x^2} zy^{1/2} = xy^{1/2}.$$

Έτσι, μετά την απλοποίηση του $y^{1/2}$ και διαίρεση με 2 έχουμε:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{2(1-x^2)} z = \frac{x}{2}.$$

Η τελευταία είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης με $P(x) = \frac{x}{2(1-x^2)}$, $Q(x) = \frac{x}{2}$. Είναι

$\int P(x)dx = \int \frac{xdx}{2(1-x^2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{(x^2-1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = -\frac{1}{4}\ln(x^2-1)$. Άρα,

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\frac{1}{4}\ln(x^2-1)} = e^{\ln(x^2-1)^{-1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}},$$

$e^{-\int P(x)dx} = e^{\frac{1}{4}\ln(x^2-1)} = e^{\ln(x^2-1)^{1/4}} = \sqrt[4]{x^2-1}$. Επίσης

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}} dx.$$

Για την επίλυση αυτού θέτουμε $x^2 - 1 = t$ οπότε $2xdx = dt$ και τούτο γίνεται:

$$\int \frac{dt}{4t^{1/4}} = \frac{1}{4}\int t^{-1/4}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1/4+1}}{-1/4+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{3/4}}{3/4} = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4}.$$

Έτσι, ο τύπος (6) της γενικής λύσης δίνει

$$z = y^{1/2} = \sqrt{y} = \sqrt[4]{x^2-1}\left[c + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4}\right] = c\sqrt[4]{x^2-1} + \frac{x^2-1}{3}.$$

2) Να λυθεί η ΔΕ $xy' + y = y^2 \ln x$.

Λύση

Η δοθείσα ΔΕ γράφεται: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2\frac{\ln x}{x}$ και είναι ΔΕ Bernoulli με $n = 2$.

Η νέα συνάρτηση που εισάγουμε θα είναι: $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$ Άρα

$\frac{dz}{dx} = (-1)y^{-1-1}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$ και λύνοντας ως προς $\frac{dy}{dx}$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = -y^2\frac{dz}{dx}. \qquad \text{(i)}$$

Επίσης η σχέση $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y\cdot y^{-2}$ αν λυθεί ως προς y δίνει

$$y = zy^2 \qquad \text{(ii)}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των (i) και (ii) στην ΔΕ παίρνουμε

$$-y^2\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}zy^2 = y^2\frac{\ln x}{x}.$$

Έτσι, μετά την απλοποίηση του y^2 και πολλαπλασιασμό με (-1) έχουμε:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}.$$

Η τελευταία είναι γραμμική 1ης τάξης με $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Είναι

$\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln x$. Άρα

$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$ και $e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln x} = x$. Επίσης:

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int -\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = -\int x^{-2}\ln x dx.$$

Για την επίλυση αυτού εισάγουμε τον όρο x^{-2} μέσα στο διαφορικό ως ολοκλήρωμα και εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση (βλ. παράρτημα 8.3.3). Έτσι

$$-\int \frac{1}{x^2}\ln x dx = -\int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) = \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = \kappa.\pi.o. =$$

$$\frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x} d(\ln x) = \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{x}\ln x - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{x}(\ln x + 1)$$

και με αντικατάσταση στον τύπο (6) προκύπτει η γενική λύση

$$z = y^{-1} = x\left[c + \frac{1}{x}(\ln x + 1)\right] = cx + \ln x + 1\,.$$

Ασκήσεις

Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ Bernoulli:

α) $y' + xy = 6x\sqrt{y}$ (*Απάντηση*: $y^{1/2} = 6 + ce^{-x^2/2}$),

β) $xy' + y = xy^3$ (*Απάντηση*: $y^{-2} = 2x + cx^2$),

γ) $y' + y = y^{-2}$ (*Απάντηση*: $y^3 = 1 + ce^{-3x}$),

δ) $y' + y = y^2$ (*Απάντηση*: $y^{-1} = ce^x + 1$),

ε) $y' + y = y^2 e^x$ (*Απάντηση*: $y^{-1} = (c - x)/e^{-x}$),

στ) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ (*Απάντηση*: $y^{-2} = ce^{2x^2} + x^2 + 1/2$),

ζ) $xy' + y = y^2 \ln x$ (*Απάντηση*: $y^{-1} = 1 + \ln x + cx$),

η) $y' + (2/x)y = -x^9 y^5$ (*Απάντηση*: $y^{-4} = x^8(c + 2x^2)$),

θ) $y' + xy = xy^2$ (*Απάντηση*: $y^{-1} = ce^{x^2/2} + 1$).

1.5.2 Διαφορικές εξισώσεις Ricatti

Η εξίσωση Ricatti είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

(επέκταση της γραμμικής $y' + Py + Q = 0$, με δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς *y*), όπου *P*, *Q*, *R* είναι συναρτήσεις μόνο του *x*. Η διαφορική αυτή εξίσωση γενικά δεν είναι δυνατόν να λυθεί. Όμως, αν γνωρίζουμε μια μερική λύση αυτής, τότε μπορούμε να βρούμε τη γενική της λύση. Πράγματι, έστω y_1 μια μερική της λύση.

Θέτουμε $y = y_1 + z$, οπότε η αρχική εξίσωση Ricatti γράφεται

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{dz}{dx}+P(y_1^2+2y_1z+z^2)+Q(y_1+z)+R=0 \text{ ή}$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx}+Py_1^2+Qy_1+R\right)+\frac{dz}{dx}+(2y_1P+Q)z+Pz^2=0.$$

Όμως, επειδή η $y=y_1$ είναι μια μερική λύση αυτής, θα την επαληθεύει, δηλαδή η παρένθεση είναι μηδέν. Άρα

$$\frac{dz}{dx}+(2y_1P+Q)z+Pz^2=0 \qquad (1)$$

η οποία όπως προκύπτει είναι ΔΕ Bernoulli με $n=2$ και λύνεται κατά τα γνωστά.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $y'=y^2+\frac{1}{x}y-\frac{3}{x^2}$, αν γνωρίζουμε μια μερική της λύση, την $y_1=\frac{1}{x}$.

Λύση

Η δοθείσα ΔΕ γράφεται: $y'-y^2-\frac{1}{x}y+\frac{3}{x^2}=0$ και είναι προφανώς ΔΕ Ricatti με

$$P(x)=-1,\ Q(x)=-\frac{1}{x},\ R(x)=\frac{3}{x^2}.$$

Θέτουμε $y=y_1+z=\frac{1}{x}+z$.

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε πριν, η εξίσωση (1) γράφεται

$$\frac{dz}{dx}+(2y_1P+Q)z+Pz^2=0\Rightarrow\frac{dz}{dx}+\left(2\cdot\frac{1}{x}\cdot(-1)-\frac{1}{x}\right)z+(-1)z^2=0,$$

$\frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z=z^2$ η οποία είναι ΔΕ Bernoulli με $n=2$.

Για τη λύση της θέτουμε ως γνωστό $u=z^{1-n}=z^{1-2}=z^{-1}$, οπότε

$$\frac{du}{dx}=-z^{-2}\frac{dz}{dx},\ \Rightarrow\frac{dz}{dx}=-z^2\frac{du}{dx}.$$

Επίσης από την $u=z\cdot z^{-2}$, $\Rightarrow z=z^2u$.

Αντικαθιστώντας τα $\frac{dz}{dx}$ και z στην τελευταία σχέση $\frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z=z^2$ προκύπτει

$$-z^2\frac{du}{dx}-\frac{3}{x}z^2u=z^2 \text{ ή } \frac{du}{dx}+\frac{3}{x}u=-1.$$

Η τελευταία είναι γραμμική ΔΕ 1ης τάξης με $P(x)=\dfrac{3}{x}$ και $Q(x)=-1$. Είναι

$\int P(x)dx=\int \dfrac{3}{x}dx=3\ln|x|=\ln|x|^3$, άρα

$e^{\int P(x)dx}=e^{\ln|x|^3}=x^3\quad (x>0)$, και $e^{-\int P(x)dx}=\dfrac{1}{x^3}$.

Επίσης, $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int(-1)\cdot x^3dx=-\dfrac{x^4}{4}$. Άρα η γενική λύση είναι

$$u=z^{-1}=e^{-\int Pdx}\left[c+\int Qe^{\int Pdx}dx\right]=\frac{1}{x^3}\left(c-\frac{x^4}{4}\right)=\frac{4c-x^4}{4x^3}\ \text{ και }\ z=\frac{4x^3}{4c-x^4}.$$

Επομένως η τελική λύση είναι $y=y_1+z=\dfrac{1}{x}+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4x^3}{4c-x^4}$

2) Να λυθεί η ΔΕ Ricatti $(1-x^3)y'=y^2-x^2y-2x$, αφού βρεθεί μια μερική λύση αυτής, της μορφής $y_1=ax^2$, όπου a σταθερά.

Λύση

Θέτουμε στη δοθείσα ΔΕ όπου *y* το $y_1=ax^2\ \ (y_1'=2ax)$ και έχουμε

$(1-x^3)2ax=a^2x^4-ax^4-2x$.

Θα ζητήσουμε να ορίσουμε το *a*, έτσι ώστε να πληρούται εκ ταυτότητος (για κάθε τιμή του *x*) η τελευταία ισότητα. Αυτή γράφεται:

$x^4(a^2+a)-2x((a+1)=0$.

Το τελευταίο πολυώνυμο είναι εκ ταυτότητος μηδέν, άρα θα πρέπει όλοι οι συντελεστές των όρων του να είναι μηδέν, Δηλαδή:

$a^2+a=0$ και $a+1=0$.

Απ' τη δεύτερη έχουμε $a=-1$ και η τιμή αυτή πληροί και την πρώτη. Ώστε μερική λύση της δοθείσας ΔΕ Ricatti είναι η $y_1=-x^2$.

Εκτελούμε τώρα την αλλαγή μεταβλητής

$y=y_1+z=-x^2+z$, $(y'=-2x+z')$.

Θέτουμε την τιμή αυτή στην αρχική ΔΕ και έχουμε:

$(1-x^3)(-2x+z')=(-x^2+z)^2-x^2(-x^2+z)-2x$ ή

$(1-x^3)(-2x+z')=x^4+z^2-2x^2z+x^4-x^2z-2x$ ή

$-2x+2x^4+(1-x^3)z'=2x^4+z^2-3x^2z-2x$ ή τελικά

$(1-x^3)z' + 3x^2 z - z^2 = 0$. Η τελευταία παίρνει τη μορφή:

$z' + \dfrac{3x^2}{1-x^3} z = \dfrac{1}{1-x^3} z^2 \quad (x \neq 1)$, και είναι ΔΕ Bernoulli με $n = 2$.

Έτσι, για τη λύση της θέτουμε, ως γνωστό, $u = z^{1-n} = z^{1-2} = z^{-1}$ και έχουμε

$$\frac{du}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}, \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2\frac{du}{dx}.$$

Επίσης από την $u = z \cdot z^{-2}$, $\Rightarrow z = z^2 u$.

Αντικαθιστώντας τα $\dfrac{dz}{dx}$ και z στην ΔΕ Bernoulli προκύπτει

$$-z^2\frac{du}{dx} + \frac{3x^2}{1-x^3} z^2 u = \frac{1}{1-x^3} z^2$$

ή μετά την απλοποίηση του z^2 και πολλαπλασιασμό με (-1) έχουμε:

$$\frac{du}{dx} - \frac{3x^2}{1-x^3} z^2 u = -\frac{1}{1-x^3},$$

(γραμμική ΔΕ 1ης τάξης με $P(x) = -\dfrac{3x^2}{1-x^3}$, $Q(x) = -\dfrac{1}{1-x^3}$). Είναι

$\displaystyle\int P(x)dx = \int -\frac{3x^2}{1-x^3}dx = \int \frac{d(1-x^3)}{1-x^3} = \ln(1-x^3)$ και

$-\displaystyle\int P(x)dx = -\ln(1-x^3) = \ln(1-x^3)^{-1}$. Άρα:

$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(1-x^3)} = 1-x^3$ και

$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\ln(1-x^3)} = e^{\ln(1-x^3)^{-1}} = (1-x^3)^{-1} = \dfrac{1}{1-x^3}$. Ακόμη:

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int -\frac{1}{1-x^3}\cdot(1-x^3)dx = -x.$$

Επομένως, η γενική λύση της ΔΕ Bernoulli είναι:

$u = z^{-1} = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] = \dfrac{1}{1-x^3}(c-x)$ ή

$z = \dfrac{1-x^3}{c-x}$ και η τελική γενική λύση της δοθείσας ΔΕ Ricatti είναι

$$y = -x^2 + z = -x^2 + \frac{1-x^3}{c-x}.$$

Ασκήσεις

Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ Ricatti αν γνωρίζουμε μια μερική λύση αυτών που αναγράφεται δίπλα τους:

α) $y' = y^2 - (2x+1)y + (x^2 + x + 1)$: $y_1 = x$ ($A\pi.$: $y = x + e^{-x} \big/ (e^{-x} + c)$),

β) $xy' = (y-1)(xy - x + 1)$: $y_1 = 1$ ($A\pi.$: $y = 1 - \dfrac{2x}{x^2 + c}$),

γ) $xy' = (x-y)^2 + x$: $y_1 = x$ ($A\pi.$: $y = x - \dfrac{1}{\ln x + c}$),

δ) $x^2 y' = x^2 y^2 - xy - 1$: $y_1 = \dfrac{1}{x}$ ($A\pi.$: $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x^2 + c}$).

1.5.3 Διαφορικές εξισώσεις Lagrange

Μέχρι τώρα εξετάσαμε διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης οι οποίες ήταν λυμένες ως προς y'. Οι ΔΕ Lagrange που θα εξετάσουμε τώρα, καθώς επίσης και οι επόμενες ΔΕ Clairaut είναι της μορφής $F(x, y, y') = 0$ και δεν είναι λυμένες ως προς y'.

Οι ΔΕ Lagrange είναι της μορφής:

$y = x\varphi(y') + f(y')$ όπου φ και f είναι συναρτήσεις της y'.

1.5.4 Το πρόβλημα των ορθογωνίων τροχιών

Ας θεωρήσουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων του επιπέδου με εξίσωση (μη λυμένη ως προς y):

$$f(x, y, \alpha) = 0. \qquad (1)$$

Μία καμπύλη κ του επιπέδου λέγεται **ορθογώνια τροχιά** της οικογένειας (1), αν τέμνει κάθε καμπύλη της οικογένειας (1) ορθογώνια, δηλ. αν τέμνει κάθε καμπύλη της οικογένειας και οι εφαπτόμενες στο κοινό σημείο τους είναι κάθετες μεταξύ τους.

Θεωρούμε τώρα την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων του επιπέδου

$$g(x, y, \beta) = 0 \qquad (2)$$

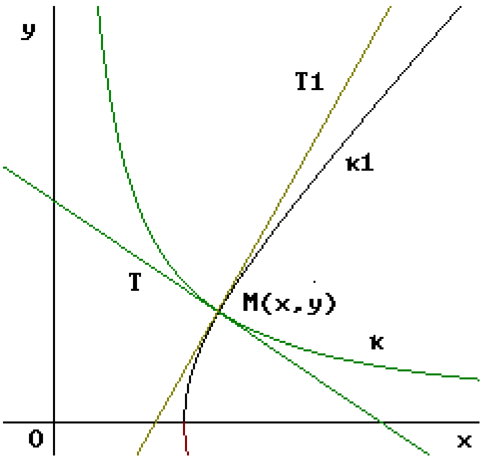
Η (2) λέγεται **οικογένεια των ορθογωνίων τροχιών** της οικογένειας (1), αν κάθε καμπύλη της είναι ορθογώνια τροχιά της οικογένειας (1). Στην περίπτωση αυτή, επειδή ισχύει και το αντίστροφο, λέμε επίσης ότι **οι δύο οικογένειες είναι ορθογώνιες.**

Παράδειγμα ορθογωνίων τροχιών αποτελεί η οικογένεια των ομόκεντρων περιφερειών με κέντρο την αρχή Ο του συστήματος συντεταγμένων, και η οικογένεια των ευθειών του επιπέδου που περνούν από την αρχή Ο. Δηλαδή οι οικογένειες καμπύλων του επιπέδου με εξισώσεις αντίστοιχα:

$$f(x,y,\alpha)=x^2+y^2-\alpha^2=0,\ g(x,y,\beta)=y-\beta x=0$$

Το πρόβλημα των ορθογωνίων τροχιών είναι το εξής:
«Δίνεται μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων του επιπέδου και ζητείται να βρεθεί η οικογένεια των ορθογωνίων τροχιών της».

Η λύση του προβλήματος αυτού διευκολύνεται όταν γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση $F(x,y,y')=0$ της οικογένειας $f(x,y,\alpha)=0$ που δόθηκε. Θεωρούμε ένα σημείο τομής $M(x,y)$ μιας από τις καμπύλες της οικογένειας που δόθηκε, της κ_1, και



μιας ορθογώνιας τροχιάς, της κ (διπλανό σχήμα). Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης MT_1 της κ_1 στο σημείο Μ είναι ίσος με y'. Επειδή η εφαπτομένη ΜΤ της κ στο σημείο Μ είναι κάθετη προς τη MT_1, ο συντελεστής διεύθυνσής της θα είναι ίσος με $-1/y'$ (είναι γνωστό ότι η συνθήκη καθετότητας δύο ευθειών είναι $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$). Από την παρατήρησή μας αυτή προκύπτει, ότι η ΔΕ της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών που ζητάμε είναι η $F(x,y,-1/y')=0$. Η γενική λύση της τελευταίας ΔΕ δίνει την εξίσωση της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών.

Παραδείγματα

1) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ισοσκελών υπερβολών με εξίσωση:

$$x^2-y^2=\alpha^2.$$

Λύση

Βρίσκουμε τη ΔΕ της οικογένειας που μας δόθηκε. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ως προς x θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x. Έχουμε:

$$2x-2yy'=0 \text{ ή } x-yy'=0 \qquad (1)$$

Απαλείφουμε την αυθαίρετη σταθερή α από την εξίσωση που μας δόθηκε και την τελευταία (1). (Βασικά, επειδή κατά την παραγώγιση ‘εξαφανίστηκε’ η αυθαίρετη σταθερή α, η τελευταία σχέση $x - yy' = 0$ αποτελεί και την ΔΕ της οικογένειας των ισοσκελών υπερβολών).

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε το y' με το $-1/y'$ στη ΔΕ (1) και βρίσκουμε τη ΔΕ της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών. Είναι

$$x - y(-1/y') = 0 \text{ ή } x + \frac{y}{y'} = 0 \tag{2}$$

Στο τελευταίο στάδιο, λύνουμε τη ΔΕ (2). Αυτή γράφεται:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}, \text{ ή } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \text{ ή } \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Η τελευταία σχέση είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών. Η γενική της λύση

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln c, \quad c > 0 \text{ γράφεται}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c, \text{ ή } \ln|xy| = \ln c, \text{ ή } |xy| = c, \text{ ή } xy = \pm c.$$

Τελικά, $xy = \beta$ είναι η γενική εξίσωση της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών της αρχικής οικογένειας, όπου όμως η αυθαίρετη σταθερή β παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Από την τελευταία εξίσωση $xy = \beta$ προκύπτει ότι, οι ορθογώνιες τροχιές της αρχικής οικογένειας των ισοσκελών υπερβολών είναι επίσης ισοσκελείς υπερβολές, οι οποίες έχουν ασύμπτωτες τους άξονες των συντεταγμένων.

2) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \tag{1}$$

με κέντρο την αρχή Ο του συστήματος συντεταγμένων.

Λύση

Παραγωγίζοντας όπως και πριν, βρίσκουμε τη ΔΕ της οικογένειας (1).

Είναι $2x + 2yy' = 0$ ή $y' = -x/y$.

Θέτουμε όπου y' το $-1/y'$ και βρίσκουμε τη ΔΕ της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών. Έτσι προκύπτει

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}, \text{ ή } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Αυτή μετασχηματίζεται στη ΔΕ : $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$ (χωριζομένων μεταβλητών).

Η γενική της λύση $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln c, \quad c > 0$ γράφεται

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c \text{ , ή } \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln c \text{ , ή } \left|\frac{y}{x}\right| = c, \text{ ή } \frac{y}{x} = \pm c \text{ .}$$

Τελικά, η $y = \beta x$ είναι η γενική εξίσωση της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών της οικογένειας (1), όπου όμως η αυθαίρετη σταθερή β παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Από την τελευταία εξίσωση $y = \beta x$ προκύπτει ότι οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ομόκεντρων κύκλων (1) είναι οικογένεια ευθειών που διέρχονται από την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων.

3) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των παραβολών

$$y = \alpha x^2$$

που έχουν κορυφή την αρχή O των συντεταγμένων και άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Λύση

Παραγωγίζουμε την εξίσωση της οικογένειας. Είναι $y' = 2\alpha x$.

Στη συνέχεια απαλείφουμε την αυθαίρετη σταθερή α μεταξύ των

$$y = \alpha x^2 \qquad (1) \qquad \text{και } y' = 2\alpha x \qquad (2).$$

Η (2) δίνει $\alpha = y'/2x$ και για την τιμή αυτή του α η (1) γίνεται $y = y'x/2$ που είναι η ΔΕ της οικογένειας των παραβολών.

Θέτουμε τώρα όπου y' το $-1/y'$ στην τελευταία σχέση $y = y'x/2$ και βρίσκουμε τη ΔΕ της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών που είναι η $y = -\dfrac{x}{2y'}$. Αυτή γράφεται

$$y' = -\frac{x}{2y} \text{ ή } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \text{ ή } 2ydy = -xdx$$

που είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών. Η γενική της λύση είναι

$$\int 2ydy = -\int xdx + c \text{ , } y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \text{ . Αυτή γράφεται}$$

$$\frac{y^2}{c} + \frac{x^2}{2c} = 1$$

που αποτελεί την οικογένεια ελλείψεων με μεγάλο άξονα στον x΄x και μικρό άξονα στον y΄y.

4) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπύλων

$$x^2 + y^2 = cx \text{ .}$$

Λύση

Εργαζόμενοι όπως και πριν, βρίσκουμε τη ΔΕ της οικογένειας των καμπύλων.

Παραγωγίζουμε την οικογένεια των καμπύλων: $2x + 2yy' = c$.

Αντικαθιστούμε το c στη αρχική $x^2 + y^2 = cx$, οπότε προκύπτει

$$x^2 + y^2 = (2x + 2yy')x \text{ ή } x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xyy' \text{ ή } y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

που είναι η ΔΕ της δοθείσας οικογένειας.

Αν θέσουμε όπου y' το $-1/y'$ προκύπτει

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \text{ ή } y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Η τελευταία σχέση είναι η ΔΕ της οικογένειας των ορθογωνίων τροχιών της δοθείσας οικογένειας και είναι ομογενής ΔΕ.

Για τη γενική της λύση $x = ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}$ εφαρμόζουμε τα περί ομογενών ΔΕ. Είναι

$$y' = \frac{2xy/x^2}{(x^2 - y^2)/x^2} = \frac{2\,y/x}{1-(y/x)^2} = \frac{2z}{1-z^2} = f(z), \text{ όπου } z = y/x.$$

Επίσης, $f(z) - z = \dfrac{2z}{1-z^2} - z = \dfrac{2z - z + z^3}{1-z^2} = \dfrac{z+z^3}{1-z^2}$. Άρα

$$\frac{1}{f(z)-z} = \frac{1-z^2}{z+z^3}.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{1-z^2}{z+z^3}dz$,

αναλύουμε το κλάσμα $\dfrac{1-z^2}{z+z^3}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων (βλέπε παράρτημα ολοκληρωμάτων κεφ. 8. παρ. 8.4). Είναι

$$\frac{1-z^2}{z+z^3} = \frac{1-z^2}{z(1+z^2)} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta z + \gamma}{1+z^2} = \frac{\alpha(1+z^2) + (\beta z + \gamma)z}{z(1+z^2)}.$$

Εξισώνουμε αριθμητές του πρώτου και τελευταίου κλάσματος.

Δίνουμε στο z διάφορες τιμές για να υπολογίσουμε τις τιμές των α, β, γ. Έτσι,

Για $z = 0$: $1 - 0^2 = \alpha(1+0^2) + (\beta \cdot 0 + \gamma)\cdot 0$ ή $\alpha = 1$.

Για $z = 1$: $1 - 1^2 = \alpha(1+1^2) + (\beta \cdot 1 + \gamma)\cdot 1$. Με $\alpha = 1 \Rightarrow \beta + \gamma = -2$.

Για $z = -1$: $1 - (-1)^2 = \alpha(1+1) + (\beta \cdot (-1) + \gamma)\cdot(-1) \Rightarrow \beta - \gamma = -2$.

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει $\beta = -2, \gamma = 0$.

Έτσι $\dfrac{1-z^2}{z+z^3}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{2z}{1+z^2}$. Άρα

$$\int \frac{1-z^2}{z+z^3}dz=\int\frac{dz}{z}-\int\frac{2zdz}{1+z^2}=\ln|z|-\ln(1+z^2)=\ln\frac{|z|}{1+z^2}.$$

Επομένως η γενική λύση της ΔΕ είναι $x=ce^{\ln\frac{|z|}{1+z^2}}=c\dfrac{|z|}{1+z^2}$.

Για $z=y/x$ προκύπτει $x=c\dfrac{|y/x|}{1+(y/x)^2}=\pm c\dfrac{yx}{x^2+y^2}$.

Άρα, η τελική γενική λύση είναι η $x^2+y^2=cy$ που αποτελεί την οικογένεια των ορθογωνίων τροχιών της $x^2+y^2=cx$ ($c\in R$).

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπύλων:

α) $y^2=4cx$. (*Απάντηση*: $x^2+\frac{1}{2}y^2=c,\ (c>0)$),

β) $x^2-y^2=cx$. (*Απάντηση*: $x^2y+\frac{1}{3}y^3=c$)

2) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας

α) των παραβολών: $y^2=4(x-c)$ (*Απάντηση*: $y=ce^{-x/2}$)

β) των περιφερειών: $x^2+y^2=2cx$ (*Απάντηση*: $y=c(x^2+y^2)$)

γ) των κισσοειδών: $(2c-x)y^2=x^3$ (*Απάντηση*: $(x^2+y^2)^2=c(y^2+2x^2)$).

1.6 Γραμμικές ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2ο μέλος

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}+\beta y=0, \tag{1}$$

όπου $\alpha,\ \beta\in R$ είναι σταθερές, λέγεται γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2ο μέλος.

Παρατηρούμε ότι, αν $y_1 = y_1(x)$ και $y_2 = y_2(x)$ είναι δύο μερικές λύσεις της (1), τότε και η συνάρτηση $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης μερική λύση της (1). Πράγματι:

$$\begin{aligned} & y'' + \alpha\, y' + \beta\, y = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + \alpha(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + \beta(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \\ & = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \alpha\, c_1 y_1' + \alpha\, c_2 y_2' + \beta\, c_1 y_1 + \beta\, c_2 y_2 = \\ & = c_1(y_1'' + \alpha\, y_1' + \beta\, y_1) + c_2(y_2'' + \alpha\, y_2' + \beta\, y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Δύο μερικές λύσεις της ΔΕ (1)

$$y_1 = y_1(x) \text{ και } y_2 = y_2(x)$$

λέγονται *γραμμικά ανεξάρτητες*, αν οι μόνες σταθερές c_1, c_2 που επαληθεύουν τη σχέση (ταυτότητα ως προς *x*):

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \ \ \forall x \text{ (για κάθε } x) \in R,$$

είναι $c_1 = 0$ και $c_2 = 0$.

Επίσης, δύο μη μηδενικές συναρτήσεις

$$y_1 = y_1(x) \text{ και } y_2 = y_2(x)$$

είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* αν, και μόνο αν, (δηλ. ισχύει και το αντίστροφο)

ο λόγος τους $y_1(x)/y_2(x)$

δεν είναι σταθερός, αλλά μεταβάλλεται μαζί με το *x*.

Π.χ. οι συναρτήσεις

$$y_1 = e^x \text{ και } y_2 = e^{3x}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γιατί ο λόγος τους

$$y_1/y_2 = e^x/e^{3x} = e^{-2x}$$

δεν είναι σταθερός αλλά συνάρτηση του *x*, ενώ οι συναρτήσεις

$$z_1 = e^x \text{ και } z_2 = 3e^x$$

δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γιατί ο λόγος τους

$y_1/y_2 = e^x/3e^x = 1/3$ είναι σταθερός.

Αποδεικνύεται τώρα στις ΔΕ ότι αν $y_1 = y_1(x)$ και $y_2 = y_2(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ΔΕ (1), τότε η γενική λύση της (1) δίνεται από τον τύπο:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ όπου } c_1,\ c_2 \text{ είναι αυθαίρετες σταθερές.}$$

Με βάση το θεώρημα αυτό, η εύρεση της γενικής λύσης της (1) ανάγεται στην εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων μερικών της λύσεων.

Εξετάζουμε τώρα, πότε μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $y = e^{\rho x}$ όπου ρ είναι σταθερή, είναι μερική λύση της ΔΕ (1)[2].

Επειδή $\dfrac{dy}{dx} = \rho e^{\rho x}$ και $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \rho^2 e^{\rho x}$ η διαφορική εξίσωση (1) γίνεται

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha \frac{dy}{dx} + \beta y = \rho^2 e^{\rho x} + \alpha \rho e^{\rho x} + \beta e^{\rho x} = e^{\rho x}(\rho^2 + \alpha \rho + \beta) = 0 \ \ \forall x .$$

Και επειδή $e^{\rho x} \neq 0 \ \ \forall x$, άρα $\rho^2 + \alpha \rho + \beta = 0$.

Επομένως η συνάρτηση $y = e^{\rho x}$ είναι μερική λύση της ΔΕ (1) αν, και μόνο αν, το ρ είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\rho^2 + \alpha \rho + \beta = 0 \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της ΔΕ (1).

Συνεπώς, για τη λύση της ΔΕ (1) διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2).

Α) Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους ρίζες ρ_1 και ρ_2.

Τότε οι συναρτήσεις $e^{\rho_1 x}$ και $e^{\rho_2 x}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1) και επομένως η γενική λύση της (1) είναι η $y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η μερική λύση της ΔΕ $y'' - 5y' + 6y = 0$ η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = -1$ και $y'(0) = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 - 5\rho + 6 = 0$ έχει πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 3$. Άρα η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \qquad \text{(i).}$$

Για να βρούμε τη μερική λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, θέτουμε στην (i)

$x = 0,\ \ y = -1$ και έχουμε $-1 = c_1 + c_2$. (ii).

Παραγωγίζουμε τα μέλη της (i) και στην εξίσωση που προκύπτει

---

[2] Η ιδέα οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό μαθηματικό Leonhard Euler (1707 – 1783).

$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$ θέτουμε

$x = 0,\ y' = 0$ και έχουμε $0 = 2c_1 + 3c_2$ (iii).

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (ii) και (iii) βρίσκουμε $c_1 = -3,\ c_2 = 2$.

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y = -3e^{2x} + 2e^{3x}$.

Β) Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει πραγματικές και ίσες μεταξύ τους ρίζες τις $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, δηλαδή έχει διπλή ρίζα την ρ.

Τότε οι συναρτήσεις $e^{\rho x}$ και $xe^{\rho x}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ΔΕ (1) και άρα η γενική λύση της (1) είναι η

$$y = c_1 e^{\rho x} + c_2 x e^{\rho x} = (c_1 + c_2 x)e^{\rho x}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική της εξίσωση $\rho^2 + 6\rho + 9 = 0$ έχει διπλή ρίζα την $\rho = -3$. Άρα η γενική της λύση είναι η $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$

Γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις $\rho_1 = \lambda + i\mu$ και $\rho_2 = \lambda - i\mu$ όπου $\lambda,\ \mu \in R$.

Τότε οι συναρτήσεις $e^{(\lambda + i\mu)x}$ και $e^{(\lambda - i\mu)x}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ΔΕ (1) και άρα η γενική λύση της (1) είναι

$$y = c_1 e^{(\lambda + i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x}.$$

Θα τροποποιήσουμε τη λύση αυτή για να αποφύγουμε τις μιγαδικές ρίζες.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Euler

$$e^{i\mu x} = \sigma\upsilon\nu(\mu x) + i\eta\mu(\mu x),$$

οπότε η γενική λύση που βρήκαμε γράφεται:

$$y = c_1 e^{\lambda x} e^{i\mu x} + c_2 e^{\lambda x} e^{-i\mu x} = e^{\lambda x}(c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}) =$$

$$= e^{\lambda x}\left[c_1\left[\sigma\upsilon\nu(\mu x) + i\eta\mu(\mu x)\right] + c_2\left[\sigma\upsilon\nu(\mu x) - i\eta\mu(\mu x)\right]\right] =$$

$$= e^{\lambda x}\left[(c_1 + c_2)\sigma\upsilon\nu(\mu x) + i(c_1 - c_2)\eta\mu(\mu x)\right]$$

Αν πάρουμε ως νέες αυθαίρετες σταθερές τις $A = c_1 + c_2$ και $B = i(c_1 - c_2)$, τότε η γενική λύση παίρνει την τελική της μορφή

$y = e^{\lambda x}\left[A\sigma\upsilon\nu(\mu x) + B\eta\mu(\mu x)\right]$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $p^2 - 4p + 13 = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες, τις $\rho_1 = 2 + 3i$ και $\rho_2 = 2 - 3i$. Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι η $y = e^{2x}[A\sigma\upsilon\nu(3x) + B\eta\mu(3x)]$.

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $y'' + y' - 2y = 0$ (*Απάντηση*: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$),

β) $y'' - 9y = 0$ (*Απάντηση*: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$),

γ) $y'' - 9y' = 0$ (*Απάντηση*: $y = c_1 + c_2 e^{9x}$),

δ) $9y'' - 12y' + 4y = 0$ (*Απάντηση*: $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{2}{3}x}$),

ε) $y'' + 10y' + 26y = 0$ (*Απάντηση*: $y = e^{5x}(A\sigma\upsilon\nu\, x + B\eta\mu\, x)$,

στ) $k^2 y'' - 4k^2 y' + (4k^2 + 1)y = 0$ (*Απάντηση*: $y = e^{2x}(A\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{k} + B\eta\mu\dfrac{x}{k})$,

ζ) $y'' - 2my' + m^2 y = 0$ (*Απάντηση*: $y = (c_1 + c_2 x)e^{mx}$),

2) Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις $y_1 = e^{px}\sigma\upsilon\nu(qx)$ και $y_2 = e^{px}\eta\mu(qx)$ είναι λύσεις της ΔΕ $y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$.

3) Αν η εξίσωση $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$ έχει πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους ρίζες m_1, m_2, τότε να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y = \dfrac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{m_1 - m_2}$ είναι μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$.

4) Να βρεθεί η μερική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ, η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες που γράφονται δίπλα:

α) $y'' + 3y' - 4y = 0$: $y(0) = 4,\ y'(0) = -2$ (*Απ.*: $y = 14/5 e^x + 6/5 e^{-4x}$),

β) $25y'' + 20y' + 4y = 0$: $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ (*Απ.*: $y = xe^{-\frac{2}{5}x}$),

γ) $y'' - 5y' + 6y = 0$: $y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2$ (*Απ.*: $y = e^{3x-1}$),

δ) $y'' + 2y' + 5y = 0 \ : \ y(0) = 1, \ \ y'(\pi) = 0 \ \ (A\pi.: \ y = e^{-x}(\sigma\upsilon\nu(2x) + \frac{1}{2}\eta\mu(2x))$

ε) $6y'' - 5y' + y = 0 \ : \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = -1 \ \ (A\pi.: \ y = -8e^{x/2} + 9e^{x/3})$,

5) Να δειχτεί ότι η γενική λύση της ΔΕ $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \ \omega \in R,$ γράφεται εκτός της κανονικής λύσης και με τη μορφή $x = k\sigma\upsilon\nu(\omega t + \omega_0)$.

1.6.1 Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης του Euler

Στις γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές ανάγονται και οι ΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0 \tag{3}$$

οι οποίες λέγονται **ΔΕ δεύτερης τάξης του Euler.** Η αναγωγή αυτή γίνεται με την αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής από την *x* στην *t* που ορίζεται από την σχέση:

$x = e^t$ ή την ισοδύναμή της $t = \ln x$.

Θα εκφράσουμε συνεπώς τις $x\frac{dy}{dx}, \ x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ με τις αντίστοιχες παραγώγους ως προς τη νέα μεταβλητή *t*.

Επειδή $\frac{dt}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$, έχουμε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Άρα $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$. Επίσης

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4}$$

Άρα $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$. (5)

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές των $x\frac{dy}{dx}, \ x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ από τις (4) και (5) στην ΔΕ (3), οπότε αυτή γίνεται

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \alpha\frac{dy}{dt} + \beta y = 0 \ \text{ή} \ \frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dt} + \beta y = 0 \tag{6}$$

Η τελευταία σχέση (6) που προέκυψε είναι γραμμική ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και εξαρτημένη μεταβλητή *t* και λύνεται κατά τα γνωστά. Στη γενική λύση $y = y(t, c_1, c_2)$ της ΔΕ (6) θέτουμε $t = \ln x$ και βρίσκουμε τη γενική λύση της ΔΕ (3) που θα είναι $y = y(\ln x, c_1, c_2)$.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ του Euler $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 9x \dfrac{dy}{dx} + 21y = 0$

Λύση

Θέτουμε $x = e^t$ και έχουμε κατά τα γνωστά

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{ και } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} .$$

Η ΔΕ που δόθηκε μετασχηματίζεται τότε στην ΔΕ $\dfrac{d^2 y}{dt^2} - 10 \dfrac{dy}{dt} + 21y = 0$ της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 - 10\rho + 21 = 0$ έχει πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους ρίζες $\rho_1 = 3,\ \rho_2 = 7$ και άρα η γενική της λύση είναι η

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{7t} = c_1 (e^t)^3 + c_2 (e^t)^7 .$$

Θέτουμε σ' αυτή $e^t = x$ και παίρνουμε τη γενική λύση $y = c_1 x^3 + c_2 x^7$ της ΔΕ.

Ασκήσεις

Να λυθούν οι ΔΕ του Euler:

α) $2x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 5x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ (*Απάντηση*: $y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1}$),

β) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ (*Απάντηση*: $y = c_1 \dfrac{1}{x} + c_2 \dfrac{1}{x} \ln x$),

γ) $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - (2\alpha - 1)x \dfrac{dy}{dx} + \alpha^2 y = 0$ (*Απάντηση*: $y = (c_1 + c_2 \ln x) x^{\alpha}$).

1.6.2 Γραμμικές ΔΕ ν-στής τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2ο μέλος (γενίκευση των αντίστοιχων ΔΕ 2ης τάξης)

Αν γενικεύσουμε τις ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2ο μέλος που εξετάσαμε πριν, τότε η γενική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι

$$y^{(\nu)} + \alpha_{\nu-1} y^{(\nu-1)} + \ldots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \qquad (1)$$

όπου α_i, (i =0, 1, 2, …, $\nu - 1$) είναι σταθεροί συντελεστές.

Η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει προφανώς με αντικατάσταση των $y^{(i)}$ με ρ^i όπου i =0, 1, 2, …, $\nu - 1$ και είναι βεβαίως πολυώνυμο ν βαθμού το

$$\rho^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho = 0$$

Να τονιστεί ότι χαρακτηριστικές εξισώσεις ορίζονται **μόνο** για γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2^{o} μέλος (ομογενείς).

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ορίζουν τη γενική λύση της (1), και βεβαίως η λύση αυτή εξαρτάται από ν αυθαίρετες σταθερές τις c_1, c_2, ... c_ν. Έτσι,

1. Αν οι ρίζες ρ_1, ρ_2, ..., ρ_ν είναι όλες πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους τότε η γενική λύση θα είναι η

$$y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} + \ldots + c_\nu e^{\rho_\nu x}.$$

2. Αν η ρίζα ρ_κ είναι πολλαπλότητας p, δηλαδή η ρίζα ρ_κ είναι p φορές η ίδια, οπότε στην παραγοντοποίηση του πολυωνύμου θα υπάρχει ο παράγοντας $(\rho - \rho_\kappa)^p$, τότε στη γενική λύση θα εμφανίζονται όροι που σχετίζονται με τη ρίζα ρ_κ της μορφής

$$c_{\kappa_1} e^{\rho_\kappa x} + c_{\kappa_2} x e^{\rho_\kappa x} + c_{\kappa_3} x^2 e^{\rho_\kappa x} + \ldots + c_{\kappa_p} x^{p-1} e^{\rho_k x}.$$

3. Τέλος, αν η χαρακτηριστική εξίσωση περιέχει και συζυγείς μιγαδικές ρίζες πάντα ανά ζεύγη π.χ. τις $\rho_{\kappa,\kappa+1} = \lambda \pm i\mu$, τότε στη γενική λύση θα εμφανίζονται και όροι της μορφής

$$e^{\lambda x}(c_\kappa \sigma\upsilon\nu(\mu x) + c_{\kappa+1}\eta\mu(\mu x)).$$

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η ΔΕ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^3 - 6\rho^2 + 11\rho - 6 = 0$ παραγοντοποιείται στην

$(\rho - 1)(\rho - 2)\rho - 3) = 0$ με ρίζες $\rho_1 = 1, \rho_2 = 2, \rho_3 = 3$.

Άρα η γενική λύση της είναι

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

2) Να λυθεί η ΔΕ $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 4y' + 6y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^4 - 4\rho^3 + 7\rho^2 - 4\rho + 6 = 0$, αν παραγοντοποιηθεί δίνει

$(\rho^2 + 1)(\rho^2 - 4\rho + 6) = 0$ με ρίζες $\rho_{1,2} = \pm i$ και $\rho_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{2}$. Άρα

$$y = c_1\sigma\upsilon\nu\, x + c_2\eta\mu\, x + e^{2x}\left(c_3\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}x) + c_4\eta\mu\,(\sqrt{2}x)\right).$$

3) Να λυθεί η ΔΕ $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^5 - \rho^4 - 2\rho^3 + 2\rho^2 + \rho - 1 = 0$, γίνεται

$(\rho - 1)^3(\rho + 1)^2 = 0$ με ρίζες:

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ (τριπλή με p =3) και $\rho_4 = \rho_5 = -1$ (διπλή, με p = 2).

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4e^{-x} + c_5xe^{-x}$$

Ασκήσεις

Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$ ($A\pi.$: $y = c_1e^{-2x} + e^{4x}\left(c_2\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}x + c_3\eta\mu\sqrt{2}x\right)$)

β) $y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$ ($A\pi.$: $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{-2x}$)

γ) $y^{(4)} + y'' - 2y = 0$ ($A\pi.$: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}x + c_4\eta\mu\sqrt{2}x$)

δ) $y''' - 5y'' + 25y' - 125y = 0$ ($A\pi.$: $y = c_1e^{5x} + c_2\sigma\upsilon\nu 5x + c_3\eta\mu 5x$)

1.7 Γραμμικές ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το 2ο μέλος

Μια ΔΕ της μορφής:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}+\beta y=F(x) \qquad (1)$$

όπου α και β είναι σταθερές και $F(x)$ μη μηδενική συνάρτηση, λέγεται **γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό 2ο μέλος.**

Παρατηρούμε ότι, αν $y_1=y_1(x)$ είναι μια μερική λύση της (1), τότε έχουμε

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+\alpha\frac{dy_1}{dx}+\beta y_1=F(x) \qquad (2)$$

και αν αφαιρέσουμε τις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}+\beta y-\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+\alpha\frac{dy_1}{dx}+\beta y_1\right)=0 \text{ ή}$$

$$\frac{d^2(y-y_1)}{dx^2}+\alpha\frac{d(y-y_1)}{dx}+\beta(y-y_1)=0 \text{ ή}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\alpha\frac{dz}{dx}+\beta z=0,\ (\text{όπου } z=y-y_1) \qquad (3)$$

Αν $z=z(x,c_1,c_2)$ είναι γενική λύση της ομογενούς ΔΕ (3), τότε λύνοντας την εξίσωση $z=y-y_1$ ως προς y, η συνάρτηση $y=z(x,c_1,c_2)+y_1(x)$ είναι λύση της ΔΕ (1) και επειδή εξαρτάται από δύο αυθαίρετες σταθερές είναι γενική της λύση.

Επομένως, η γενική λύση της (1) αποτελείται από την γενική λύση της αντίστοιχης ΔΕ με μηδενικό δεύτερο μέλος (ομογενούς), και μιας μερικής λύσης αυτής.

Είναι φανερό λοιπόν, ότι η επίλυση της ΔΕ (1) ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης αυτής. Η μορφή της μερικής λύσης της ΔΕ (1) εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης $F(x)$.

Εμείς θα ασχοληθούμε εδώ μόνο με τις περιπτώσεις όπου:

- **Α)** $F(x)=p(x)$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο n βαθμού,
- **Β)** $F(x)=p(x)e^{\lambda x}$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο n βαθμού και $\lambda\in R$,
- **Γ)** $F(x)=A\sigma\upsilon\nu(\mu x)+B\eta\mu(\mu x)$, και
- **Δ)** $F(x)$ είναι άθροισμα n συναρτήσεων της μορφής (Α), ή (Β), ή (Γ).

Α) Η συνάρτηση $F(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού

Διακρίνουμε **τρεις υποπεριπτώσεις:**

Α.1) Αν $\beta\neq 0$.

Τότε η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση

$$y_1 = q(x),$$

όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο *n* βαθμού. Οι συντελεστές του πολυωνύμου $q(x)$ υπολογίζονται αν θέσουμε $y_1 = q(x)$, $y_1' = q'(x)$, $y_1'' = q''(x)$ στην αρχική ΔΕ (1) και εξισώσουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων δυνάμεων του *x* και στα δύο μέλη.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

Λύση

Επειδή $\beta = 9 \neq 0$ και το 2^o μέλος είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, η ΔΕ δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1 = ax^2 + bx + c\,.$$

Έχουμε $y_1' = 2ax + b,\; y_1'' = 2a$. Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των $y_1,\; y_1',\; y_1''$ στη δοθείσα ΔΕ και παίρνουμε την ισότητα:

$$2a - 6(2ax + b) + 9(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - x + 3, \quad \forall x \text{ ή την}$$

$$9ax^2 + (9b - 12a)x + 9c - 6b + 2a = 2x^2 - x + 3\,.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοβάθμιων δυνάμεων του *x* στα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας και έχουμε

$9a = 2, \quad 9b - 12a = -1, \quad 9c - 6b + 2a = 3$. Η λύση του συστήματος αυτού δίνει

$$a = \frac{2}{9},\quad b = \frac{5}{27},\quad c = \frac{11}{27} \text{ και άρα } y_1 = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης γραμμικής ΔΕ με μηδενικό 2^o μέλος, δηλ. της

$z'' - 6z + 9z = 0$ είναι η συνάρτηση $z = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ που δόθηκε είναι

$$y = z + y_1 = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

A.2) Αν β = 0, και α ≠ 0.

Τότε, η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1 = xq(x)$$

όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο *n* βαθμού.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - y' = -x + 2$.

Λύση

Επειδή $\beta = 0$ και $\alpha = -1 \neq 0$ ενώ το 2ο μέλος της ΔΕ που δόθηκε είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, αυτή δέχεται τη μερική λύση

$$y_1 = x(ax+b) = ax^2 + bx.$$

Έχουμε $y_1' = 2ax + b$ και $y_1'' = 2a$. Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των y_1', y_1'' στη δοθείσα ΔΕ και παίρνουμε την ισότητα (ταυτότητα ως προς x):

$$2a - (2ax+b) = -x + 2 \ \forall x \text{ ή } -2ax + 2a - b = -x + 2 \text{ .Άρα } a = 1/2,\ b = -1.$$

Έτσι, η μερική λύση της ΔΕ είναι η $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x$.

Η γενική λύση της αντίστοιχης γραμμικής ΔΕ με μηδενικό 2ο μέλος

$z'' - z' = 0$ είναι η $z = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} = c_1 + c_2 e^{x}$.

Επομένως η γενική λύση της ΔΕ που δόθηκε είναι η

$$y = z + y_1 = c_1 + c_2 e^{x} + \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Α.3) Αν β = 0 και α = 0.

Τότε, η ΔΕ (1) γίνεται $y'' = F(x)$ και η γενική της λύση βρίσκεται με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις (βλέπε παράδειγμα 2, παράγραφος 1.2).

Ασκήσεις

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω ΔΕ

α) $y'' - y = x^2 + x$ (*Απ.*: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - x^2 - x - 2$),

β) $y'' - y' - 2y = 2x^3 - 4x - 1$ (*Απ.*: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}$),

γ) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 3$ (*Απ.*: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 2$),

δ) $y'' - y = x^3 + x$ (*Απ.*: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - x^3 - 7x$),

ε) $y'' + y = x^4$ (*Απ.*: $y = c_1 \sigma\upsilon\nu\, x + c_2 \eta\mu\, x + x^4 - 12x^2 + 24$),

στ) $y'' + y' = x + 2$ (*Απ.*: $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x$),

ζ) $y'' = 12x^2 + e^{2x} + \eta\mu(3x)$ (*Απ.*: $y = x^4 + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\eta\mu(3x) + c_1 x + c_2$),

Β) Η συνάρτηση $F(x)$ είναι της μορφής $F(x)=p(x)e^{\lambda x}$, όπου $p(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού

Διακρίνουμε και εδώ **τρεις υποπεριπτώσεις:**

Β.1) Αν το λ <u>δεν</u> είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2+\alpha\rho+\beta=0$.

Τότε, η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1=q(x)e^{\lambda x}$$

όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y''-3y'+2y=e^{-x}$.

Λύση

Το $\lambda=-1$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2-3\rho+2=0$. (ρίζες αυτής είναι $\rho_1=1,\ \rho_2=2$) και το $p(x)=1$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Συνεπώς η ΔΕ δέχεται ως μερική λύση συνάρτηση της μορφής $y_1=q(x)e^{-x}$, όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού, δηλαδή

$$y_1=ae^{-x}.$$

Έχουμε $y_1'=-ae^{-x}$, $y_1''=ae^{-x}$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των $y_1,\ y_1',\ y_1''$ στην ΔΕ και παίρνουμε

$$ae^{-x}-3(-ae^{-x})+2ae^{-x}=e^{-x}\quad \forall x \ \text{ή}\ (6a-1)e^{-x}=0$$

και επειδή το $e^{-x}\neq 0,\ \forall x$ προκύπτει αναγκαστικά $6a-1=0$, $a=1/6$.

Άρα η $y_1=1/6e^{-x}$ είναι μερική λύση. Επομένως η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y=z+y_1=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}.$$

Β.2) Αν το λ είναι <u>απλή</u> ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2+\alpha\rho+\beta=0$.

Τότε, η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1=xq(x)e^{\lambda x},$$

όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 2y' - 3y = xe^x$.

Λύση

Το $\lambda = 1$ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + 2\rho - 3 = 0$ (ρίζες αυτής είναι $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = -3$) και $p(x) = x$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Άρα η ΔΕ δέχεται ως μερική λύση συνάρτηση της μορφής $y_1 = xq(x)e^x$, όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, δηλαδή

$y_1 = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$. Έχουμε

$y_1' = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x = [ax^2 + (2a+b)x + b]e^x$ και

$y_1'' = [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b]e^x$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των $y_1,\ y_1',\ y_1''$ στην ΔΕ και παίρνουμε

$[ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b]e^x + 2[ax^2 + (2a+b)x + b]e^x - 3(ax^2+bx)e^x = xe^x$,

$[(a + 2a - 3a)x^2 + (4a + b + 4a + 2b - 3b)x + 2a + 2b + 2b]e^x$, ή

$$[(8a-1)x + 2a + 4b]e^x = 0,\ \forall x.$$

Η τελευταία ισότητα, επειδή $e^x \neq 0,\ \forall x$ είναι ισοδύναμη με την

$$(8a-1)x + 2a + 4b = 0\ \ \forall x,$$

(πολυώνυμο εκ ταυτότητος μηδέν, που σημαίνει ότι όλοι οι συντελεστές του x και ο σταθερός όρος θα είναι μηδέν). Επομένως προκύπτει

$$8a - 1 = 0,\ 2a + 4b = 0 \text{ ή } a = 1/8 \text{ και } b = -1/16.$$

Άρα $y_1 = \left(1/8\,x^2 - 1/16\,x\right)e^x$ και η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = z + y_1 = c_1e^x + c_2e^{-3x} + (1/8\,x^2 - 1/16\,x)e^x.$$

Β.3) Αν το λ είναι <u>διπλή</u> ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0$.

Τότε, η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1 = x^2q(x)e^{\lambda x},$$

όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο *n* βαθμού.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$.

Λύση

Το $\lambda = 3$ είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 - 6\rho + 9 = 0$ (διπλή ρίζα αυτής είναι $\rho_{1,2} = \rho = 3$) και το $p(x) = 2$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Άρα η ΔΕ δέχεται ως μερική λύση συνάρτηση της μορφής $y_1 = x^2 q(x) e^{3x}$, όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού, δηλαδή της μορφής

$y_1 = ax^2 e^{3x}$. Έχουμε

$y_1' = a(2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x}) = a(3x^2 + 2x)e^{3x}$ και

$y_1'' = a(6x + 2)e^{3x} + a(3x^2 + 2x)3e^{3x} = a(9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των y_1, y_1', y_1'' στην ΔΕ παίρνουμε

$[a(9x^2 + 12x + 2) - 6a(3x^2 + 2x) + 9ax^2]e^{3x} = e^{3x} \quad \forall x$ ή

$[(9a - 18a + 9a)x^2 + (12a - 12a)x + 2a - 2]e^{3x} = 0$ ή

$(2a - 2)e^{3x} = 0$. Άρα $a = 1$.

Επομένως $y_1 = x^2 e^{3x}$. Συνεπώς η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$y = z + y_1 = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + x^2 e^{3x}$

Ασκήσεις

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω ΔΕ

α) $y'' + y = 2xe^x$ (*Απάντηση*: $y = c_1 \sigma\upsilon\nu\, x + c_2 \eta\mu\, x + (x-1)e^x$)

β) $y'' + 2y' + y = x^2 e^x$ (*Απ.*: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right)e^x$)

γ) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ (*Απ.*: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + xe^{2x}$)

δ) $y'' - 2y' + y = e^x$ (*Απ.*: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$)

ε) $y'' - 2y' + y = xe^x$ (*Απ.*: $y = c_1 e^x + c_2 xe^x + \frac{1}{6}x^3 e^x$)

Γ) Η συνάρτηση $F(x)$ είναι της μορφής

$$F(x) = A\sigma\upsilon\nu(\mu x) + B\eta\mu(\mu x)$$

Διακρίνουμε **δύο υποπεριπτώσεις**:

Γ.1) Αν το *iμ* <u>δεν</u> είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0$.

Τότε, η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση της μορφής $y_1 = a\sigma\upsilon\nu(\mu x) + b\eta\mu(\mu x)$, όπου *a* και *b* είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές βρίσκονται αν αντικαταστήσουμε τα y_1, y_1', y_1'' στη ΔΕ (1) και εξισώσουμε τους συντελεστές του *συν*(*μx*) και του *ημ*(*μx*) και στα δύο μέλη.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + y = -8\sigma\upsilon\nu(3x)$.

Λύση

Επειδή το $i\mu = 3i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + 1 = 0$ με ρίζες $\rho_{1,2} = 0 \pm i$, η δοθείσα ΔΕ δέχεται μερική λύση της μορφής

$y_1 = a\sigma\upsilon\nu(3x) + b\eta\mu(3x)$. Έχουμε

$y_1' = -3a\eta\mu(3x) + 3b\sigma\upsilon\nu(3x)$, $y_1'' = -9a\sigma\upsilon\nu(3x) - 9b\eta\mu(3x)$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των y_1, y_1', y_1'' στην ΔΕ και παίρνουμε

$$-9a\sigma\upsilon\nu(3x) - 9b\eta\mu(3x) + a\sigma\upsilon\nu(3x) + b\eta\mu(3x) = -8\sigma\upsilon\nu(3x) \quad \forall x,$$

$$-8a\sigma\upsilon\nu(3x) - 8b\eta\mu(3x) = -8\sigma\upsilon\nu(3x)$$

απ' την οποία προκύπτει ότι $-8a = -8$ και $-8b = 0$, δηλ. $a = 1$ και $b = 0$.

Άρα $y_1 = \sigma\upsilon\nu(3x)$.

Η λύση της $z'' + z = 0$ είναι

$$z = e^{0x}(A\sigma\upsilon\nu(1 \cdot x) + B\eta\mu(1 \cdot x) = c_1\sigma\upsilon\nu x + c_2\eta\mu x.$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = z + y_1 = c_1\sigma\upsilon\nu x + c_2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(3x)$$

Γ.2) Αν το *iμ* είναι <u>απλή</u> ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0$.

Τότε, η ΔΕ (1) δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1 = x[a\sigma\upsilon\nu(\mu x) + b\eta\mu(\mu x)],$$

όπου *a* και *b* είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές υπολογίζονται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' + 9y = 2\eta\mu(3x)$.

Λύση

Επειδή το $i\mu = 3\iota$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + 9 = 0$ με ρίζες $\rho_{1,2} = 0 \pm 3i$, η δοθείσα ΔΕ δέχεται μερική λύση της μορφής

$y_1 = x[a\sigma\upsilon\nu(3x) + b\eta\mu(3x)]$. Έχουμε

$y_1' = (a + 3bx)\sigma\upsilon\nu(3x) + (b - 3ax)\eta\mu(3x)$,

$y_1'' = (6b - 9ax)\sigma\upsilon\nu(3x) - (6a + 9bx)\eta\mu(3x)$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των y_1, y_1', y_1'' στην ΔΕ και παίρνουμε

$(6b - 9ax)\sigma\upsilon\nu(3x) - (6a + 9bx)\eta\mu(3x) + 9ax\sigma\upsilon\nu(3x) + 9bx\eta\mu(3x) = 2\eta\mu(3x)$,

$6b\sigma\upsilon\nu(3x) - 6a\eta\mu(3x) = 2\eta\mu(3x) \quad \forall x$, απ' την οποία προκύπτει ότι

$6b = 0$ και $-6a = 2$, δηλ. $b = 0$ και $a = -1/3$. Άρα

$$y_1 = -\frac{x}{3}\sigma\upsilon\nu(3x).$$

Η λύση της $z'' + 9z = 0$ είναι

$$z = e^{0x}(A\sigma\upsilon\nu(3\cdot x) + B\eta\mu(3\cdot x) = c_1\sigma\upsilon\nu(3x) + c_2\eta\mu(3x).$$

Άρα η γενική λύση της δοθείσας ΔΕ είναι

$$y = z + y_1 = c_1\sigma\upsilon\nu(3x) + c_2\eta\mu(3x) - \frac{x}{3}\sigma\upsilon\nu(3x).$$

Παρατήρηση

Η έκφραση $i\mu$ δεν μπορεί να είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0$, επειδή, αν αυτές είναι μιγαδικές, θα είναι συζυγείς.

Ασκήσεις

Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω ΔΕ

α) $y'' + y = \eta\mu 2x$ (*Απ.*: $y = c_1\sigma\upsilon\nu\, x + c_2\eta\mu\, x - \frac{1}{3}\eta\mu\, 2x$),

β) $y'' + 4y' + 13y = \sigma\upsilon\nu(3x) - \eta\mu(3x)$

(*Απ.*: $y = e^{-2x}(c_1\sigma\upsilon\nu\,(3x) + c_2\eta\mu\,(3x)) + \frac{1}{10}\sigma\upsilon\nu\,(3x) + \frac{1}{20}\eta\mu\,(3x)$),

γ) $y'' + y = \eta\mu\, x$ ($A\pi$.: $y = c_1 \sigma\upsilon\nu\, x + c_2 \eta\mu\, x - \frac{1}{2} x \sigma\upsilon\nu\, x$),

Δ) Η συνάρτηση $F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)$ είναι άθροισμα n συναρτήσεων, $n \in N$, $n \geq 2$ της μορφής Α, Β ή Γ.

Τότε η ΔΕ δέχεται μερική λύση της μορφής

$$y_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$

όπου z_1, z_2, ..., z_n είναι αντίστοιχα μερικές λύσεις των ΔΕ:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = F_1(x),\ y'' + \alpha y' + \beta y = F_2(x),\ \ldots,\ y'' + \alpha y' + \beta y = F_n(x).$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y'' - 3y' + 2y = 6x + 5 + 2e^{5x}$.

Λύση

Αν εργαστούμε κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι η

$z_1 = 3x + 7$ είναι μερική λύση της ΔΕ $y'' - 3y' + 2y = 6x + 5$ και η

$z_2 = \frac{1}{6} e^{5x}$ είναι μερική λύση της ΔΕ $y'' - 3y' + 2y = 2e^{5x}$.

Άρα η $y_1 = z_1 + z_2 = 3x + 7 + \frac{1}{6} e^{5x}$ είναι μερική λύση της ΔΕ.

Η λύση της $z'' - 3z' + 2z = 0$ είναι $z = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ που δόθηκε είναι

$$y = z + y_1 = z + z_1 + z_2 = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3x + 7 + \frac{1}{6} e^{5x}.$$

Ασκήσεις

1) Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ

α) $2y'' + y' - y = e^{2x} - x^2$ ($A\pi$.: $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x} + x^2 + 2x + 6$),

β) $y'' - y' - 2y = \eta\mu\, x + 2x + 3$

($A\pi$.: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sigma\upsilon\nu\, x - \frac{3}{10} \eta\mu\, x - x - 1$),

γ) $y'' + y = e^x - x$ ($A\pi$.: $c_1 \sigma\upsilon\nu\, x + c_2 \eta\mu\, x + \frac{1}{2} e^x - x$).

2) Να βρεθεί η μερική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ, η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες που γράφονται δίπλα

α) $y'' + y = x^2 + 3 \;:\; y(0) = 1,\; y'(0) = 0$ (*Απάντηση*: $y = x^2 + 1$),

β) $y'' + y = 2e^x \;:\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1$ (*Απάντηση*: $y = e^x - \sigma\upsilon\nu\, x$),

γ) $y'' - y = \eta\mu\, x \;:\; y(0) = 0,\; y'(0) = -1/2$ (*Απάντηση*: $y = -\frac{1}{2}\eta\mu\, x$),

δ) $y'' + 2y' + y = x \;:\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0$ (*Απάντηση*: $y = (x+2)e^{-x} + x - 2$)

ε) $y'' - y' - 2y = e^{3x} \;:\; y(0) = 1,\; y'(0) = 2$ (*Απάντηση*: $y = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{2e^{2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{4}$)

στ) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sigma\upsilon\nu 2t + \eta\mu 2t \;:\; y(0) = 0,\; \dot{y}(0) = 1$

(*Απάντηση*: $y = e^{-t}\left(\frac{3}{10}\sigma\upsilon\nu\, t + \frac{11}{10}\eta\mu\, t\right) + \frac{1}{10}\eta\mu\, 2t - \frac{3}{10}\sigma\upsilon\nu 2t$)

ζ) $y'' - y' - 2y = 4x^2 \;:\; y(0) = 1,\; y'(0) = 4$

(*Απάντηση*: $y = 2e^{-x} + 2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$).

1.7.1 Γραμμικές ΔΕ ν-στής τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το 2ο μέλος (γενίκευση των αντίστοιχων ΔΕ 2ης τάξης)

Στην παράγραφο 1.6.2. εξετάστηκε η γενίκευση των ΔΕ ν-στής τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2$^{\text{ο}}$ μέλος. Η γενίκευση αυτή ισχύει και για ΔΕ ν-στής τάξης με σταθερούς συντελεστές και **μη** μηδενικό το 2$^{\text{ο}}$ μέλος. Ισχύουν δε ακριβώς οι ίδιοι όροι και περιορισμοί που ισχύουν στις ΔΕ 2$^{\text{ης}}$ τάξης της παραγράφου 1.7., οποιασδήποτε περίπτωσης Α ή Β ή Γ ή Δ.

Αξίζει να τονιστεί ότι η μεθοδολογία της γενίκευσης αυτής ισχύει προφανώς και για ΔΕ 1$^{\text{ης}}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το 2$^{\text{ο}}$ μέλος, δηλαδή της μορφής

$$y' + \alpha\, y = F(x),$$

η οποία προφανώς μπορεί να θεωρηθεί επίσης και ως γραμμική ΔΕ 1$^{\text{ης}}$ τάξης (βλ. παράγρ. 1.5), με $P(x) = \alpha$ και $Q(x) = F(x)$.

Παράδειγμα

Να λυθεί η ΔΕ $y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\rho - 5 = 0$ με ρίζα $\rho = 5$.
Άρα η γενική λύση της ομογενούς $y' - 5y = 0$ είναι $z = ce^{5x}$.

Επίσης $F(x) = F_1(x) + F_2(x) = 3e^x + (-2x+1)$,

όπου $F_1(x) = 3e^x$ και $F_2(x) = -2x+1$.

Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι μερικές λύσεις είναι οι

$$z_1 = -\frac{3}{4}e^x \text{ και } z_2 = \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$$

επομένως η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = z + y_1 = z + z_1 + z_2 = ce^{5x} - \frac{3}{4}e^x + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}.$$

2ος τρόπος :

Αν τη ΔΕ τη δούμε ως γραμμική ΔΕ 1ης τάξης με
$P(x) = -5$ και $Q(x) = 3e^x - 2x + 1$ θα έχουμε εργαζόμενοι κατά τα γνωστά,

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-5x},\ e^{-\int P(x)dx} = e^{5x}. \text{ Επίσης}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int (3e^x - 2x + 1)e^{-5x}dx = \underbrace{\int 3e^{-4x}dx}_{I_1} + \underbrace{\int (-2x+1)e^{-5x}dx}_{I_2}. \text{ Είναι}$$

$$I_1 = -\frac{3}{4}\int e^{-4x}d(-4x) = -\frac{3}{4}e^{-4x} \text{ και}$$

$$I_2 = -\frac{1}{5}\int (-2x+1)e^{-5x}d(-5x) = -\frac{1}{5}\underbrace{\int (-2x+1)d(e^{-5x})}_{I_3} \text{ Είναι}$$

(εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση για το I_3 (1.3.3 παράρτημα))

$$I_3 = \int (-2x+1)d(e^{-5x}) = \kappa.\pi.o. = (-2x+1)e^{-5x} - \int e^{-5x}d(-2x+1) =$$

$$= (-2x+1)e^{-5x} + 2\int e^{-5x}dx = (-2x+1)e^{-5x} - \frac{2}{5}\int e^{-5x}d(-5x) =$$

$$= (-2x+1)e^{-5x} - \frac{2}{5}e^{-5x}. \text{ Επομένως}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = I_1 + I_2 = -\frac{3}{4}e^{-4x} - \frac{1}{5}\left[(-2x+1)e^{-5x} - \frac{2}{5}e^{-5x}\right] =$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-4x} + \frac{2x}{5}e^{-5x} - \frac{1}{5}e^{-5x} + \frac{2}{25}e^{-5x} = -\frac{3}{4}e^{-4x} + \frac{2x}{5}e^{-5x} - \frac{3}{25}e^{-5x}$$

Τελικά η γενική λύση είναι

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] =$$

$$= e^{5x}\left[c + \left(-\frac{3}{4}e^{-4x} + \frac{2x}{5}e^{-5x} - \frac{3}{25}e^{-5x}\right)\right] = ce^{5x} - \frac{3}{4}e^{x} + \frac{2x}{5} - \frac{3}{25}.$$

Ασκήσεις

Να λυθούν οι ΔΕ:

α) $y' - 5y = x^2e^x - xe^{5x}$ (*Απ.*: $y = c_1e^{5x} + \left(-\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{32}\right)e^x - \dfrac{1}{2}x^2e^{5x}$),

(*Υπόδειξη*: Θέτουμε $F_1(x) = x^2e^x,\ F_2(x) = -xe^{5x}$ και βρίσκουμε τις $z_1,\ z_2$)

β) $y' + 3y = 3 + 12e^{-3x}$

(*Υπόδειξη*: Να θέσετε $F_1(x) = 3,\ F_2(x) = 12e^{-3x}$) (*Απ.*: $y = ce^{-3x} + 12xe^{-3x} + 1$),

γ) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$

(*Υπόδειξη*: Εύκολα διαπιστώνεται ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής ρ = 1, 2, και 3, είναι διάφορες της τιμής λ = –1 του εκθετικού. Επομένως ακολουθείται η γνωστή διαδικασία Β.1 της παρ. 1.7.) (*Απ.*: $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \left(-\dfrac{1}{12}x - \dfrac{13}{144}\right)e^{-x}$),

δ) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - 1$

(*Υπόδειξη*: Εδώ η χαρακτηριστική έχει την ρ = 1 τριπλή ρίζα. Επομένως η μερική λύση, εφόσον το πολυώνυμο του e^x είναι το σταθερό πολυώνυμο $p(x) = 1$, θα είναι η $q(x) = x^3a$). (*Απ.*: $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + \dfrac{1}{6}x^3e^x - 1$),

1.8 ΔΕ της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Όταν έχουμε μια συνάρτηση στη μορφή $y = f(x)$, το y εκφράζεται με έναν τύπο συναρτήσει του x, ή, όταν είναι στη μορφή $x = g(y) = f^{-1}(y)$, το x εκφράζεται συναρτήσει του y (αντίστροφη της πρώτης). Όμως, υπάρχουν και συναρτήσεις της μορφής $f(x, y) = 0$, στις οποίες το y δεν εκφράζεται ή δεν μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του x, όπως το ίδιο και για το x. Αυτές λέγονται *πεπλεγμένες συναρτήσεις*. Π.χ. η συνάρτηση $e^x\eta\mu(2y^2 + 1) + e^{-2y}\sigma\upsilon\nu(3x) + 1 = 0$ είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση της μορφής $f(x, y) = 0$.

Οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

που θα εξετάσουμε στη συνέχεια προϋποθέτουν ότι οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι πεπλεγμένες συναρτήσεις των *x* και *y*.

Έτσι, αν θεωρήσουμε το *y* ως συνάρτηση του *x* θα πρέπει να λύσουμε τη ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y) \qquad (2)$$

ενώ, αν θεωρήσουμε το *x* ως συνάρτηση του *y* θα πρέπει να λύσουμε τη ΔΕ

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \frac{1}{f(x,y)}. \qquad (3)$$

Η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (1) ή (2) ή (3) συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης (πεπλεγμένης) $\Phi(x,y)$ τέτοιας ώστε αν την παραγωγίσουμε ως προς *x* ή ως προς *y*, να πάρουμε την έκφραση (2) ή (3) αντίστοιχα.

Η πλήρης ανάλυση της επεξεργασίας διαφορικών εξισώσεων της μορφής (1) θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο 2 στην παράγραφο 2.5 όπου αναπτύσσεται η ολοκλήρωση ολικών διαφορικών η οποία και δίνει την επίλυση ΔΕ της μορφής (1). Απαιτούνται προφανώς νέες έννοιες και συνθήκες, ώστε να γίνει δυνατή και κατανοητή η γενική λύση αυτών των διαφορικών εξισώσεων.

1.9 Τεχνολογικές εφαρμογές Διαφορικών Εξισώσεων

1.9.1 Ταχύτητα ψύξης υγρών

Όταν υγρό θερμοκρασίας $\theta^\circ C$ τοποθετηθεί σε περιβάλλον με σταθερή θερμοκρασία θ_0, όπου $\theta_0 < \theta$, τότε αρχίζει να ψύχεται. Η θερμοκρασία θ του υγρού είναι συνάρτηση $\theta = \theta(t)$ του χρόνου. Η ταχύτητα μεταβολής της θερμοκρασίας είναι ίση με την παράγωγο $\theta'(t)$ και άρα η ταχύτητα ψύξης είναι ίση με $-\theta'(t)$. Επειδή η ταχύτητα ψύξης είναι κάθε χρονική στιγμή ανάλογη της διαφοράς των θερμοκρασιών, έχουμε την εξίσωση :

$-\dfrac{d\theta}{dt} = k(\theta - \theta_0)$, όπου *k* είναι σταθερή ποσότητα.

Εφαρμογή

Δοχείο που περιέχει νερό θερμοκρασίας 100° C τοποθετείται σε δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 20° C. Αν μετά πάροδο 5 λεπτών η θερμοκρασία του νερού είναι 60° C, να βρεθεί η θερμοκρασία του μετά από 10 λεπτά.

Λύση

Θέτουμε $\theta_0 = 20$ στη ΔΕ και έχουμε:

$$-\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - 20).$$

Αυτή είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών. Η γενική της λύση

$$\int \frac{d\theta}{\theta - 20} = -\kappa \int dt + \ln c, \quad c > 0 \text{ γράφεται}$$

$$\ln|\theta - 20| = -kt + \ln c\,, \quad \ln\left|\frac{\theta - 20}{c}\right| = -kt\,,$$

$$\left|\frac{\theta - 20}{c}\right| = e^{-kt}\,, \quad \frac{\theta - 20}{c} = \pm e^{-kt}\,,$$

Άρα $\theta = 20 \pm ce^{-kt} = 20 + ce^{-kt}, \ c \in R$.

Στην αρχή του χρόνου, δηλαδή όταν $t = 0$, έχουμε $\theta = 100$.

Αν θέσουμε $t = 0$ και $\theta = 100$ στη γενική λύση, έχουμε

$100 = 20 + c \cdot 1$, ή $c = 80$.

Επομένως η συνάρτηση $\theta = \theta(t)$ είναι η $\theta(t) = 20 + 80e^{-kt}$.

Γνωρίζουμε ότι $\theta = 60°$ όταν $t = 5$ λεπτά.

Θέτουμε $t = 5$, $\theta = 60°$ στην παραπάνω ισότητα και υπολογίζουμε το k. Έχουμε

$$60 = 20 + 80e^{-5k}, \ e^{-5k} = 1/2, \ -5k = \ln(1/2), \ k = -1/5\ln(1/2) = 1/5\ln 2.$$

(Ως γνωστό, από τη θεωρία των λογαρίθμων ισχύει η σχέση: $-a\ln x = a\ln(1/x)$).

Συνεπώς, η θερμοκρασία του νερού μετά από 10 λεπτά, από 100° C θα γίνει

$$\theta(10) = 20 + 80e^{-k\cdot 10} = 20 + 80(e^{-5k})^2 = 20 + 80(1/2)^2 = 40°\ C.$$

1.9.2 Ραδιενεργός διάσπαση

Το φαινόμενο της ραδιενεργού διάσπασης διέπεται από τον παρακάτω νόμο:

«Η ταχύτητα διάσπασης, δηλαδή η ταχύτητα ελάττωσης της ποσότητας ενός ραδιενεργού σώματος είναι οποιαδήποτε χρονική στιγμή ανάλογη της ποσότητας του σώματος».

Η ποσότητα Q του ραδιενεργού σώματος είναι συνάρτηση $Q = Q(t)$ του χρόνου t. Η ταχύτητα μεταβολής του Q ως προς t δίνεται από την παράγωγο $Q'(t)$. Άρα η ταχύτητα διάσπασης είναι ίση με $-Q'(t)$, και επειδή αυτή είναι ανάλογη της ποσότητας Q, έχουμε τη διαφορική εξίσωση που δίνει και τη μαθηματική έκφραση της ραδιενεργού διάσπασης:

$-\dfrac{dQ}{dt} = kQ$, όπου k είναι σταθερή.

Εφαρμογή

Το χημικό στοιχείο ράδιο χάνει 0,5% της μάζας του σε 12 χρόνια. Να βρεθούν: α) Ποιο ποσοστό της μάζας του χάνει σε 1000 χρόνια, β) Η περίοδος υποδιπλασιασμού του ραδίου.

Λύση

Η ΔΕ διάσπασης είναι προφανώς ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.

Η γενική της λύση $\displaystyle\int \frac{dQ}{Q} = -\int k dt + \ln c$ γράφεται κατά τα γνωστά

$\ln\dfrac{|Q|}{c} = -kt$, $\dfrac{|Q|}{c} = e^{-kt}$, $|Q| = ce^{-kt}$, $Q = \pm ce^{-kt}$, $(c > 0)$ και τελικά

$Q = ce^{-kt}$, $(c \in R)$.

Υποθέτουμε ότι η αρχική ποσότητα του ραδίου είναι Q_0.

Αν θέσουμε $t = 0$ και $Q = Q_0$ στην τελευταία ισότητα βρίσκουμε $c = Q_0$.

Άρα $Q = Q_0 e^{-kt}$.

Σε 12 χρόνια χάνεται ποσότητα $0{,}005Q_0$ ραδίου άρα παραμένει $0{,}995Q_0$.

Θέτουμε $t = 12$, $Q = 0{,}995Q_0$ στην τελευταία ισότητα και έχουμε

$0{,}995Q_0 = Q_0 e^{-12k}$ ή $e^{-12k} = 0{,}995$, ή $k = -1/12\ln(0{,}995) \approx 0{,}000418$.

Άρα $Q = Q_0 e^{-0{,}000418\cdot t}$.

α) Αν θέσουμε $t = 1000$ στην παραπάνω ισότητα έχουμε την ποσότητα ραδίου που παραμένει μετά από 1000 χρόνια

$Q = Q_0 e^{-0{,}418} = 0{,}658Q_0$.

Άρα, σε 1000 χρόνια χάνεται ποσότητα:

$Q_0 - 658Q_0 = 0{,}342Q_0$, δηλαδή ποσοστό 34,2% της μάζας του.

β) Η περίοδος υποδιπλασιασμού του ραδίου είναι ίση με το χρόνο που απαιτείται για να χαθεί το 50% της μάζας του. Άρα πρέπει να βρούμε την τιμή του t για την οποία έχουμε $Q = 0{,}5Q_0$.

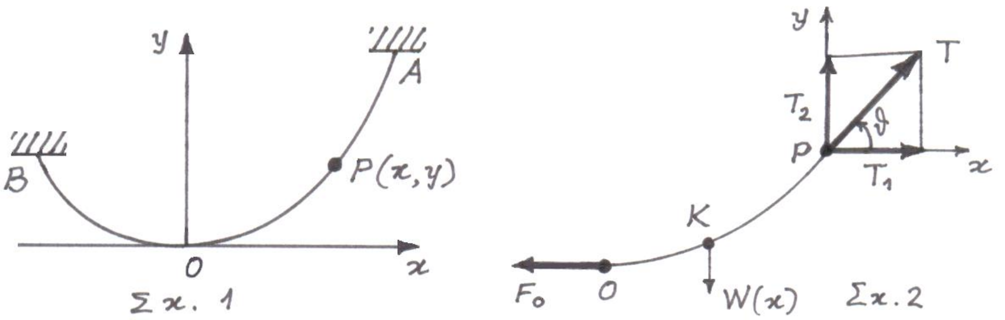
Θέτουμε $Q = 0{,}5Q_0$ στην ισότητα $Q = Q_0 e^{-0{,}000418 \cdot t}$ και έχουμε

$0{,}5Q_0 = Q_0 e^{-0{,}000418 \cdot t}$ ή $-0{,}000418 \cdot t = \ln(1/2) = -\ln 2$.

Άρα $t = (\ln 2)/0{,}000418 \approx 1660$ χρόνια.

1.9.3 Κρεμασμένο σχοινί

Θεωρούμε ένα εύκαμπτο σχοινί που κρέμεται από δύο σταθερά σημεία Α και Β, που δεν βρίσκονται υποχρεωτικά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Υποθέτουμε ότι το σχοινί φορτιζόμενο από το βάρος του ή και από εξωτερικά φορτία παίρνει τη μορφή που έχει το σχήμα 1. Επιλέγουμε ως αρχή Ο του συστήματος συντεταγμένων το σημείο του σχοινιού που βρίσκεται χαμηλότερα από όλα τα άλλα και τον άξονα Οx οριζόντιο και στο επίπεδο ΑΟΒ.



Στο τμήμα του σχοινιού από το Ο ως το Ρ, όπου Ρ είναι το σημείο του σχοινιού με συντεταγμένες (x, y), ενεργούν οι εξής δυνάμεις (σχ.2):

α) η οριζόντια δύναμη F_0 στο Ο,

β) η τάση T του σχοινιού στο σημείο Ρ,

γ) η συνολική κατακόρυφη φόρτιση $W = W(x)$ σε κάποιο σημείο Κ του τμήματος ΟΡ, που δεν είναι αναγκαστικά το κέντρο βάρους του. Τη φόρτιση αυτή θεωρούμε συνάρτηση του x.

Επειδή το τμήμα ισορροπεί, τα αλγεβρικά αθροίσματα των δυνάμεων F_0, T, και W κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Οx και Οy είναι ίσα με μηδέν. Άρα έχουμε

$T_1 = T\sigma\upsilon\nu\theta = F_0$ και $T_2 = T\eta\mu\theta = W$.

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι $\varepsilon\varphi\theta = W/F_0$. Επειδή η τάση Τ έχει την διεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης ΟΡ στο Ρ έχουμε

$\varepsilon\varphi\theta = y'_x = W/F_0$.

Αν παραγωγίσουμε ως προς *x* τα μέλη της τελευταίας ισότητας και λάβουμε υπόψη μας ότι η F_0 είναι σταθερή (ανεξάρτητη του *x*) παίρνουμε τη ΔΕ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{F_0}\frac{dW}{dx}$$

όπου η παράγωγος $\frac{dW}{dx}$ παριστάνει τη μεταβολή του φορτίου *W* ανά μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση του άξονα Οx.

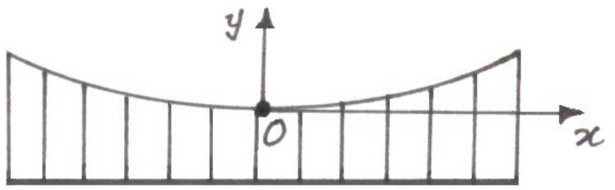
Εφαρμογή

Να βρεθεί το σχήμα που παίρνει ένα εύκαμπτο σχοινί με αμελητέο βάρος, το οποίο υποστηρίζει μια γέφυρα που το φορτίο της κατανέμεται ομοιόμορφα. (Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στις κρεμαστές γέφυρες και έχει τεράστιες εφαρμογές στη σύγχρονη γεφυροποιία).

Λύση

Προφανώς η ΔΕ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{F_0}\frac{dW}{dx}$ ισχύει και εδώ, όμως η παράγωγος $\frac{dW}{dx}$ είναι σταθερή και ισούται με το βάρος της γέφυρας ανά μονάδα μήκους της.

Έτσι, αν καλέσουμε *p* τη σταθερή αυτή ποσότητα, τότε η ΔΕ γίνεται



Σx. 3

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{F_0}$. Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης βρίσκεται με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις και είναι, όπως εύκολα προκύπτει:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{p}{F_0}dx + c_1 = \frac{p}{F_0}x + c_1 ,$$

$$y = \int\left(\frac{p}{F_0}x + c_1\right)dx + c_2 = \frac{p}{F_0}\cdot\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 .$$

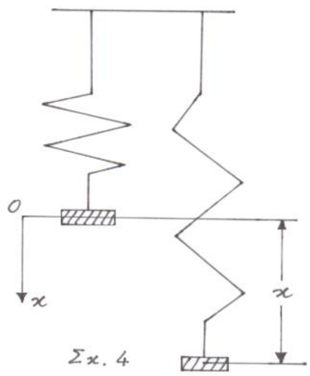
Επειδή η καμπύλη, το σχήμα της οποίας παίρνει το σχοινί, περνάει από την αρχή O του συστήματος, και η εφαπτομένη της στο σημείο O είναι ο άξονας Οx, προκύπτουν ως αρχικές συνθήκες $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Αν λάβουμε υπόψη μας τις συνθήκες αυτές, βρίσκουμε ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = 0$.

Έτσι, η καμπύλη γίνεται $y = \frac{p}{2F_0}x^2$ και άρα το σχοινί παίρνει το σχήμα της παραβολής, όπως φαίνεται σε όλες τις κρεμαστές γέφυρες του κόσμου.

1.9.4 Η ταλάντωση ελατηρίου

Προσδένουμε σώμα μάζας m Kgr στο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου και τοποθετούμε το όλο σύστημα σε μέσο του οποίου η αντίσταση είναι ανάλογη με την ταχύτητα του σώματος. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο. Τότε το ελατήριο τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας και το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται.

Για λόγους ευκολίας, επιλέγουμε την καθοδική κατεύθυνση ως θετική, και ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο βάρους της μάζας στη θέση ισορροπίας.



Η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι συνάρτηση $x = x(t)$ του χρόνου t. Οι δυνάμεις που καθορίζουν την κίνηση του σώματος είναι δύο:

α) Η δύναμη του ελατήριου $F_1(t)$, που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Η δύναμη αυτή έχει αλγεβρική τιμή αντίθετη της απομάκρυνσης $x = x(t)$ και το μέτρο της είναι ανάλογο με το μέτρο της απομάκρυνσης, δηλ.

$$F_1(t) = -\beta x(t),$$

όπου β η σταθερή του ελατηρίου ή σταθερή του Hooke.

β) Η δύναμη αντίστασης του μέσου $F_2(t)$, που έχει αλγεβρική τιμή αντίθετη της ταχύτητας $v(t) = \frac{dx}{dt}$ και μέτρο ανάλογο με το μέτρο της ταχύτητας,

$$F_2 = -av(t) = -a\frac{dx}{dt},$$

όπου a είναι η σταθερή της αντίστασης του μέσου. Οι α και β είναι θετικές.

Οι παραπάνω δυνάμεις προσδίνουν επιτάχυνση

$$\gamma(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

στο σώμα και ανά πάσα στιγμή έχουμε την ισότητα

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dx}{dt} - \beta x \text{ ή } m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + \beta x = 0\,,$$

που είναι και η ΔΕ της κίνησης του ελατηρίου.

Αν όλο το σύστημα τοποθετηθεί στο κενό ($F_2(t) = 0$), τότε η κίνηση του ελατηρίου λέγεται *αρμονική ταλάντωση*. Στη περίπτωση αυτή η ΔΕ γίνεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta x = 0\,.$$

Όταν τώρα στο σώμα ενεργεί και κατακόρυφη εξωτερική δύναμη $F(t)$, η οποία εξαρτάται από το χρόνο *t*, τότε η ΔΕ της κίνησης γίνεται

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + \beta x = F(t) \text{ ή } m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = F(t) \qquad (1)$$

που είναι ΔΕ $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το $2^{ο}$ μέλος.

Εφαρμογή

Σώμα με μάζα $m = 3/16$ kgr προσδένεται στο άκρο ενός ελατηρίου με σταθερή β = 12 *N*/*m* και το όλο σύστημα τοποθετείται σε μέσο, του οποίου η αντίσταση είναι αριθμητικά ίση με τα 3/2 της ταχύτητας του σώματος, που μετριέται σε *m*/*sec*. Απομακρύνεται το σώμα κατακόρυφα σε απόσταση 1/5 *m* από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται ελεύθερο.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης του σώματος.

β) Υποθέτουμε τώρα, ότι στο σώμα ενεργεί και κατακόρυφη εξωτερική δύναμη $F(t) = 24\sigma\upsilon\nu(8t)$ *N*. Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης του σώματος.

Λύση

α) Η ΔΕ παίρνει τη μορφή:

$$\frac{3}{16}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{dx}{dt} + 12x = 0 \text{ ή } \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 0\,.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 + 8\rho + 64 = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες

$$\rho_{1,2} = -4 \pm i4\sqrt{3}\,.$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$x = e^{-4t}[A\sigma\upsilon\nu(4\sqrt{3}t) + B\eta\mu(4\sqrt{3}t)]\,.$$

Αν λάβουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1/5$ και $x'(0) = 0$, βρίσκουμε

$A = 1/5$, $B = 1/5\sqrt{3}$.

Επομένως, η εξίσωση της κίνησης του σώματος είναι η

$$x = \frac{1}{5}e^{-4t}[\sigma\upsilon\nu(4\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta\mu(4\sqrt{3}t)].$$

β) Η ΔΕ στην περίπτωση αυτή γίνεται:

$$\frac{3}{16}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{dx}{dt} + 12x = 24\sigma\upsilon\nu(8t) \text{ ή } \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 128\sigma\upsilon\nu(8t).$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση, επειδή το $8i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, δέχεται ως μερική λύση της μορφής:

$$x_1 = a\sigma\upsilon\nu(8t) + b\eta\mu(8t).$$

Βρίσκουμε κατά τα γνωστά ότι $a = 0$, $b = 2$ και άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$x = e^{-4t}[A\sigma\upsilon\nu(4\sqrt{3}t) + B\eta\mu(4\sqrt{3}t)] + 2\eta\mu(8t).$$

Αν τέλος λάβουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1/5$ και $x'(0) = 0$, βρίσκουμε

$A = 1/5$, $B = -19/5\sqrt{3}$.

Επομένως, η εξίσωση της κίνησης του σώματος είναι η

$$x = \frac{1}{5}e^{-4t}[\sigma\upsilon\nu(4\sqrt{3}t) - \frac{19}{\sqrt{3}}\eta\mu(4\sqrt{3}t)] + 2\eta\mu(8t).$$

1.9.5 Ηλεκτρικά κυκλώματα

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα (σχ. 5), στο οποίο συνδέονται σε σειρά μια πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη *E* (*Volt*), μια αντίσταση *R* (*Ohm*) και ένα πηνίο αυτεπαγωγής *L* (*Henry*). Σύμφωνα με το νόμο του *Kirchhoff*, η ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι οποιαδήποτε στιγμή ίση με το άθροισμα της πτώσης τάσης $L\frac{dI}{dt}$ στο πηνίο και της πτώσης τάσης RI στην αντίσταση, όπου $I = I(t)$ είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα όταν κλειστεί ο διακόπτης, δηλαδή έχουμε

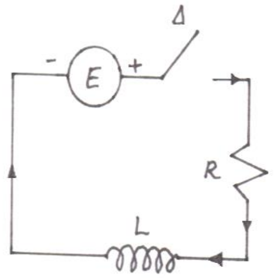
$$L\frac{dI}{dt} + RI = E. \tag{1}$$

Θεωρούμε τώρα ένα ηλεκτρικό κύκλωμα (σχ. 6), στο οποίο συνδέονται σε σειρά μια πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη *E* (*Volt*), μια αντίσταση *R* (*Ohm*) και ένας πυκνωτής χωρητικότητας *C* (*Farad*). Η πτώση τάσης στον πυκνωτή είναι ίση με $\frac{Q}{C}$, όπου $Q = Q(t)$ είναι το φορτίο του πυκνωτή. Σύμφωνα με το νόμο του *Kirchhoff*, έχουμε

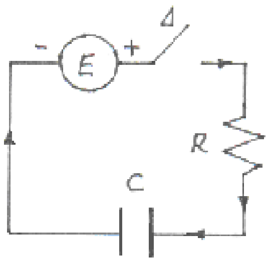
$$RI + \frac{Q}{C} = E\,.$$

Επειδή η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι ίση με την ταχύτητα μεταβολής του φορτίου Q του πυκνωτή ως προς το χρόνο, δηλαδή $I = \frac{dQ}{dt}$, η προηγουμένη εξίσωση γίνεται

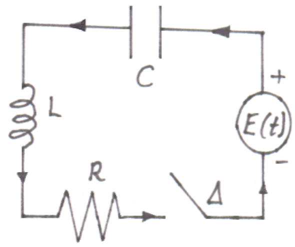
$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E\,. \qquad (2)$$



Σχ. 5



Σχ. 6



Σχ. 7

Τέλος, θεωρούμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα (σχ. 7), στο οποίο συνδέονται σε σειρά μια πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη που εξαρτάται από το χρόνο $E = E(t)$ (*Volt*), μια αντίσταση R (*Ohm*), ένα πηνίο αυτεπαγωγής L (*Henry*) και ένας πυκνωτής χωρητικότητας C (*Farad*). Όταν ο διακόπτης Δ κλειστεί, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I = I(t)$ (*Ampere*). Ο νόμος του *Kirchhoff*, δίνει

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)\,,$$

όπου $Q = Q(t)$ είναι το φορτίο του πυκνωτή. Επειδή

$$I = \frac{dQ}{dt},\ \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}\,,$$

η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)\,. \qquad (3)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό 2^{ο} μέλος και αποτελεί τη ΔΕ ενός γενικού κυκλώματος

Παρατηρούμε ότι η τελευταία ΔΕ (3) είναι ανάλογη με την ΔΕ (1) της παραγράφου 1.9.4. $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + \beta x = F(t)$ της ταλάντωσης ελατηρίου που υπόκειται σε εξωτερική δύναμη $F(t)$. Οι εξισώσεις αυτές ταυτίζονται, αν τα μηχανικά μεγέθη της ΔΕ ταλάντωσης αντιστοιχηθούν με τις ηλεκτρικές ποσότητες της (3). Η αναλογία των μηχανικών και ηλεκτρικών μεγεθών φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αναλογία μηχανικών και ηλεκτρικών μεγεθών			
Θέση	x	*Φορτίο*	Q
Ταχύτητα	$v = \dot{x}$	*Ρεύμα*	$I = \dot{Q}$
Μάζα	m	*Αυτεπαγωγή*	L
Συντελεστής αντίστασης	α	*Αντίσταση*	R
Σταθερά ελατηρίου (Hook)	β	*Αντίστροφη χωρητικότητα*	$1/C$
Εξωτερική δύναμη	$F(t)$	*Ηλεκτρεγερτική δύναμη*	$E(t)$

Εφαρμογή

Πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E = 20\sigma\upsilon\nu(5t)\,Volt$ συνδέεται σε σειρά με μια αντίσταση $R = 10$ *Ohm* και ένα πηνίο αυτεπαγωγής $L = 2$ *Henry*. Να βρεθεί η ένταση $I = I(t)$ του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Ο διακόπτης κλείνεται όταν $t = 0$.

Λύση

Η ΔΕ που βρήκαμε στην αρχή (1), στην περίπτωση αυτή γίνεται:

$$2\frac{dI}{dt} + 10I = 20\sigma\upsilon\nu(5t) \text{ ή } \frac{dI}{dt} + 5I = 10\sigma\upsilon\nu(5t)$$

η οποία είναι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης με

$P(t) = 5$ και $Q(t) = 10\sigma\upsilon\nu(5t)$. Έχουμε

$$\int P(t)dt = \int 5dt = 5t,\ e^{-\int P(t)dt} = e^{-5t},\ e^{\int P(t)dt} = e^{5t} \text{ και}$$

$$\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt = \int 10\sigma\upsilon\nu(5t)e^{5t}dt = 10\int \sigma\upsilon\nu(5t)e^{5t}dt.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες (βλέπε παράρτημα ολοκληρωμάτων, παράγραφο 1.3.3). Έτσι,

$$\int \sigma\upsilon\nu(5t)e^{5t}dt = e^{5t}\left(\sigma\upsilon\nu(5t) + \eta\mu(5t)\right)/10.$$

Άρα, η γενική λύση της ΔΕ που δόθηκε $I = e^{-\int P(t)dt}\left[c + \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt\right]$ γράφεται

$$I = e^{-5t}\left(c + e^{5t}\left(\sigma\upsilon\nu(5t) + \eta\mu(5t)\right)\right) = \sigma\upsilon\nu(5t) + \eta\mu(5t) + ce^{-5t}.$$

Από την αρχική συνθήκη $I(0) = 0$ βρίσκουμε ότι $c = -1$ και άρα

$$I = \sigma\upsilon\nu(5t) + \eta\mu(5t) - e^{-5t} \ \textit{Ampere}.$$

Εφαρμογή

Πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E = 200e^{-5t}$ *Volt* συνδέεται σε σειρά με μια αντίσταση *R* = 20 *Ohm* και έναν πυκνωτή χωρητικότητας *C* =0,01 *Farad*. Να εκφραστούν το φορτίο *Q* του πυκνωτή και η ένταση *I* του ρεύματος, που διαρρέει το κύκλωμα συναρτήσει του χρόνου *t*. Υποθέτουμε ότι, όταν *t* = 0 είναι *Q* = 0. Στη συνέχεια να βρεθεί η μέγιστη τιμή του φορτίου *Q*.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση (2), στην περίπτωση αυτή γίνεται

$$20\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0{,}01} = 200e^{-5t} \ \text{ ή } \ \frac{dQ}{dt} + 5Q = 10e^{-5t}$$

η οποία είναι γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης.

Η λύση της κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι είναι

$$Q = e^{-5t}(c + 10t)$$

Από την αρχική συνθήκη $Q(0) = 0$ βρίσκουμε ότι $c = 0$. Άρα

$$Q = 10te^{-5t}$$

Για τη μέγιστη τιμή του φορτίου εργαζόμαστε ως εξής:

Είναι $\frac{dQ}{dt} = 10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 10e^{-5t}(1 - 5t)$

και η εξίσωση $\frac{dQ}{dt} = 0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $t = \frac{1}{5}$ *sec*. Είναι ακόμα,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = 50e^{-5t}(5t - 2) \ \text{ και } \ \left[\frac{d^2Q}{dt^2}\right]_{t=\frac{1}{5}} = -50e^{-1} < 0.$$

Άρα η συνάρτηση $Q = Q(t)$ παίρνει μέγιστη τιμή για $t = 1/5$, την

$$Q\left(\frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{5}} = 2e^{-1} \ \textit{Coulomb}.$$

Εφαρμογή

Πηγή με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E = 24\eta\mu(10t)$ *Volt* συνδέεται σε σειρά με μια αντίσταση *R* = 6 *Ohm*, ένα πηνίο αυτεπαγωγής *L* =0,5 *Henry* και ένα πυκνωτή χωρητικότητας *C* = 0,02 *Farad*. Υποθέτουμε ότι κλείνουμε τον διακόπτη όταν *t* = 0 και ότι το φορτίο *Q* του πυκνωτή είναι τότε ίσο με μηδέν. Να εκφραστεί το φορτίο *Q* του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου *t*.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση (3) στην περίπτωση αυτή γίνεται

$$0{,}5\frac{d^2Q}{dt^2} + 6\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0{,}02} = 24\eta\mu(10t) \text{ ή } \frac{d^2Q}{dt^2} + 12\frac{dQ}{dt} + 100Q = 48\eta\mu(10t).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 + 12\rho + 100 = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες τις

$\rho_{1,2} = -6 \pm 8i$ και επειδή το $10i$ δεν είναι ρίζα της,

η παραπάνω ΔΕ δέχεται μερική λύση της μορφής

$$Q_1 = a\sigma\upsilon\nu(10t) + b\eta\mu(10t).$$

Βρίσκουμε κατά τα γνωστά ότι $a = -2/5$ και $b = 0$.

Έτσι, η γενική λύση της ΔΕ είναι $Q = e^{-6t}\left(A\sigma\upsilon\nu(8t) + B\eta\mu(8t)\right) - \frac{2}{5}\sigma\upsilon\nu(10t)$.

Από τις αρχικές συνθήκες $Q(0) = 0$ και $Q'(0) = 0$, βρίσκουμε ότι

$$A = \frac{2}{5},\ B = \frac{3}{10}.$$

Άρα $Q = \frac{1}{10}e^{-6t}\left(4\sigma\upsilon\nu(8t) + 3\eta\mu(8t)\right) - \frac{2}{5}\sigma\upsilon\nu(10t)$ *Coulomb*.

Ασκήσεις

1) Μάζα 0,5 *Kg* αναρτάται από ελατήριο με σταθερά 8 *N/m*. Η μάζα τίθεται σε κίνηση, αρχικά με μετατόπιση προς τα επάνω κατά 10 *cm* από τη θέση ισορροπίας της, και στη συνέχεια με εφαρμογή αρχικής ταχύτητας 2 *m/sec* με ανοδική φορά. Προσδιορίστε την κίνηση που θα προκύψει αν το μέσο που περιβάλλει το σύστημα προβάλλει αντίσταση ίση με $-4\dot{x}$ *N* (*Newton*).

(*Απάντηση*: $x = -0{,}1e^{-4t} - 2{,}4te^{-4t}$)

2) Μάζα 0,5 *Kg* αναρτάται από ελατήριο με σταθερά 6 *N/m* και ηρεμεί. Η μάζα τίθεται σε κίνηση, με εφαρμογή μιας εξωτερικής δύναμης $F(t) = 24\sigma\upsilon\nu 3t - 33\eta\mu 3t$.

Να προσδιοριστεί η κίνηση που θα προκύψει, αν το μέσο που περιβάλλει το σύστημα προβάλλει αντίσταση ίση με $-3\dot{x}\ N$.

(*Απάντηση*: $x = -4e^{-3t}\sigma\upsilon\nu\sqrt{3}t - 6\sqrt{3}e^{-3t}\eta\mu\sqrt{3}t + 4\sigma\upsilon\nu 3t + 2\eta\mu 3t$)

3) Σε κύκλωμα *RCL* (αντίστασης, πυκνωτή, πηνίου) με συνδεδεμένα σε σειρά μια αντίσταση 4 *Ohm*, έναν πυκνωτή 1/26 *Farad* και ένα πηνίο 0,5 *Henry*, εφαρμόζεται τάση $E(t) = 16\sigma\upsilon\nu 2t$. Θεωρώντας το αρχικό ρεύμα μηδέν και τον πυκνωτή χωρίς αρχική φόρτιση, βρείτε την έκφραση για το ρεύμα που ρέει το κύκλωμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή *t*.

(*Απάντηση*: $I = e^{-4t}\left(-\frac{2}{5}\sigma\upsilon\nu 6t + \frac{82}{15}\eta\mu 6t\right) + \frac{2}{5}\sigma\upsilon\nu 2t - \frac{6}{5}\eta\mu 2t$)

4) Μάζα 2 *Kg* αναρτάται από ελατήριο με σταθερά 10 *N/m*, και ηρεμεί. Στη συνέχεια τίθεται σε κίνηση με εφαρμογή μιας αρχικής ταχύτητας 150 *cm/sec*. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, βρείτε την έκφραση κίνησης της μάζας.

(*Απάντηση*: $x(t) = c_1\sigma\upsilon\nu\sqrt{5}t + c_2\eta\mu\sqrt{5}t$, $c_1 = 0,\ c_2 = \frac{3}{2\sqrt{5}}$)

1.10 Συστήματα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

Τα *συστήματα* ΔΕ είναι σχέσεις στις οποίες εμφανίζονται περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις, καθώς και οι παράγωγοί τους μέχρι μια ορισμένη τάξη, που καθορίζει και την τάξη του διαφορικού συστήματος.

Έτσι, π.χ., ένα διαφορικό σύστημα πρώτης τάξης με δύο αγνώστους (δύο άγνωστες συναρτήσεις) έχει τη μορφή

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ενώ ένα διαφορικό σύστημα δεύτερης τάξης με δύο άγνωστες συναρτήσεις γράφεται

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'') = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, το πλήθος των εξισώσεων είναι ίσο με το πλήθος των αγνώστων συναρτήσεων για να έχει μοναδική λύση όταν συνοδεύεται από κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Τα συστήματα (1) και (2) μπορούν να γραφούν και στη *λυμένη μορφή*:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned}\right\} \text{ και παρόμοια } \left.\begin{aligned} y_1'' &= f_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2') \\ y_2'' &= f_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2') \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

όπου οι ανώτερης τάξης παράγωγοι εμφανίζονται μόνο στο πρώτο μέλος.

Αν οι συναρτήσεις στα δεύτερα μέλη των συστημάτων (3) είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους, τότε το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων λέγεται *γραμμικό*.

Έτσι, για ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, η γενική λυμένη μορφή του είναι

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 \\ y_2' &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

στην οποία οι συντελεστές α_1, α_2, β_1, β_2, μπορεί να είναι σταθερές – οπότε λέμε ότι πρόκειται για σύστημα με *σταθερούς* συντελεστές, ή να εξαρτώνται απ' το x, – οπότε θα έχουμε ένα σύστημα με *μεταβλητούς* συντελεστές. Όσο για τους σταθερούς όρους γ_1, γ_2, αυτοί μπορεί να είναι μηδέν, – οπότε το σύστημα ονομάζεται *ομογενές*, ή να μη μηδενίζονται, – οπότε το σύστημα καλείται *μη ομογενές*. Στην περίπτωση ενός μη ομογενούς συστήματος, τα γ_1, γ_2 θεωρούνται γενικά συναρτήσεις του x.

Εμείς εδώ, θα ασχοληθούμε με γραμμικά διαφορικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές ομογενή, ή μη ομογενή.

Για την επίλυσή τους θα εφαρμόσουμε την *μέθοδο της απαλοιφής* που είναι και η απλούστερη, σε αντίθεση με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης.

1.10.1 Επίλυση γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο της απαλοιφής

Τα παραδείγματα που θα αναφέρουμε περιέχουν διάφορες μορφές ομογενών ή μη ομογενών συστημάτων ΔΕ, 1ης ή 2ης τάξης, με λυμένη ή μη λυμένη μορφή.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί το σύστημα ΔΕ: $\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{aligned}\right\}$

Λύση

Το σύστημα ΔΕ που δόθηκε είναι γραμμικό 1ης τάξης, ομογενές (επειδή λείπουν οι όροι γ_1, γ_2) και με σταθερούς συντελεστές α_1, α_2, β_1, β_2.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απαλοιφής, λύνουμε την πρώτη των εξισώσεων ως προς y_2 και αφού την παραγωγίσουμε την αντικαθιστούμε στη δεύτερη των εξισώσεων. Έτσι, η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$(y_1' - 3y_1)' = y_1 + 3(y_1' - 3y_1) \text{ ή } y_1'' - 6y_1' + 8y_1 = 0.$$

Η τελευταία ΔΕ που προέκυψε είναι 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το δεύτερο μέλος (ομογενής). Αν τη λύσουμε κατά τα γνωστά βρίσκουμε

$$y_1 = y_1(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x} \text{ και } y_1' = 4c_1 e^{4x} + 2c_2 e^{2x}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις y_1, y_1' στη πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$y_2 = y_2(x) = 4c_1 e^{4x} + 2c_2 e^{2x} - 3(c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}) = c_1 e^{4x} - c_2 e^{2x}.$$

Οι συναρτήσεις y_1 και y_2 που βρήκαμε αποτελούν τη γενική λύση του συστήματος. Ας σημειωθεί ότι κάθε μια εξ' αυτών έχει δύο αυθαίρετες σταθερές. Έτσι, αν μας δοθούν δύο αρχικές συνθήκες της μορφής $y_1(\alpha_0) = \beta_1$, $y_2(\alpha_0) = \beta_2$, (εφόσον έχουμε σύστημα ΔΕ 1ης τάξης), υπολογίζουμε τις σταθερές c_1, c_2 και έχουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες (μερική λύση) του συστήματος των ΔΕ.

2) Να βρεθεί η μερική λύση του συστήματος των ΔΕ: $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 + 3 \end{aligned}\right\}$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$.

Λύση

Το σύστημα των ΔΕ που δόθηκε είναι 1ης τάξης γραμμικό και με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενές (είναι $\gamma_1 = e^x$ και $\gamma_2 = 3$) και η διαδικασία επίλυσής του είναι η ίδια με την προηγούμενη. Έτσι, λύνουμε πάλι την πρώτη των εξισώσεων του συστήματος των ΔΕ ως προς y_2, και αφού την παραγωγίσουμε, την αντικαθιστούμε στη δεύτερη των εξισώσεων οπότε παίρνουμε

$$(y_1' - y_1 - e^x)' = 4y_1 + (y_1' - y_1 - e^x) + 3 \text{ ή } y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 3$$

Η τελευταία είναι ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μη μηδενικό το 2ο μέλος της (το σταθερό πολυώνυμο $p(x) = 3$).

Αν τη λύσουμε κατά τα γνωστά παίρνουμε τη γενική της λύση

$y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - 1$ της οποίας η παράγωγος είναι

$$y_1' = 3c_1 e^{3x} - c_2 e^{-x}.$$

Αντικαθιστούμε κατόπιν, όπως και πριν, τις y_1, y_1' στη πρώτη εξίσωση του συστήματος που δόθηκε και παίρνουμε για τη άγνωστη συνάρτηση $y_2(x)$ την έκφραση

$$y_2(x) = y_1' - y_1 - e^x = (3c_1e^{3x} - c_2e^{-x}) - (c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - 1) - e^x \text{ ή}$$

$$y_2(x) = 2c_1e^{3x} - 2c_2e^{-x} + 1 - e^x .$$

Απ' τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$ (μία για κάθε εξίσωση, εφόσον έχουμε σύστημα ΔΕ 1ης τάξης), προκύπτει σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τις αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2. Έτσι, με αντικατάσταση όπου $x = 0$ παίρνουμε

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - 1 = 0 \text{ και } y_2(0) = 1 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 + 1 - 1 = 1,$$

απ' όπου προκύπτουν οι τιμές $c_1 = 3/4$, $c_2 = 1/4$.

Άρα η ζητούμενη λύση θα είναι οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = \frac{3}{4}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{-x} - 1 \text{ και } y_2(x) = \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} + 1 - e^x .$$

3) Να λυθεί το σύστημα ΔΕ: $\left.\begin{array}{l} 2y_1' - y_2' - y_1 + y_2 = 0 \\ 3y_1' - 4y_2' + 11y_1 - 6y_2 = 0 \end{array}\right\}$

που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 3$.

Λύση

Στο σύστημα αυτό παρατηρούμε ότι κάθε εξίσωση περιέχει παραγώγους της πρώτης και δεύτερης συνάρτησης, δηλαδή δεν έχει τη λυμένη μορφή όπως τα προηγούμενα. Μπορούμε όμως να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία αν λύσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y_2' και την αντικαταστήσουμε στη δεύτερη εξίσωση.

Έτσι, απ' την πρώτη εξίσωση προκύπτει

$y_2' = 2y_1' - y_1 + y_2$, οπότε η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$3y_1' - 4(2y_1' - y_1 + y_2) + 11y_1 - 6y_2 = 0 \Rightarrow y_1' = 3y_1 - 2y_2 .$$

Παρόμοια, αν λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς y_1' και την αντικαταστήσουμε στην πρώτη εξίσωση θα έχουμε

$y_1' = (4y_2' - 11y_1 + 6y_2)/3$ οπότε η πρώτη εξίσωση δίνει

$$2 \cdot \frac{(4y_2' - 11y_1 + 6y_2)}{3} - y_2' - y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2' = 5y_1 - 3y_2 .$$

Άρα, το αρχικό σύστημα ΔΕ μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο με λυμένη μορφή

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - 3y_2 \end{aligned}\right\}$$

Λύνουμε το σύστημα αυτό με το γνωστό τρόπο του πρώτου παραδείγματος. Έτσι, η δεύτερη εξίσωση με αντικατάσταση του y_2 απ' την πρώτη εξίσωση δίνει

$$\begin{aligned} &\big((3y_1 - y_1')/2\big)' = 5y_1 - 3\cdot(3y_1 - y_1')/2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3y_1' - y_1'' = 10y_1 - 9y_1 + 3y_1' \Rightarrow y_1'' + y_1 = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία ΔΕ έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 + 1 = 0$ με ρίζες $\rho_{1,2} = \pm i$. Άρα

$$y_1 = e^{0x}(c_1\sigma\upsilon\nu(1\cdot x) + c_2\eta\mu(1\cdot x)) = c_1\sigma\upsilon\nu x + c_2\eta\mu x \text{ με}$$

$$y_1' = -c_1\eta\mu x + c_2\sigma\upsilon\nu x.$$

Έτσι, η πρώτη εξίσωση με αντικατάσταση των $y_1,\ y_1'$ δίνει

$$-c_1\eta\mu x + c_2\sigma\upsilon\nu x = 3(c_1\sigma\upsilon\nu x + c_2\eta\mu x) - 2y_2 \text{ ή}$$

$$y_2 = \frac{3c_1 - c_2}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{3c_2 + c_1}{2}\eta\mu x.$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος των ΔΕ είναι

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_1\sigma\upsilon\nu x + c_2\eta\mu x \\ y_2 &= \frac{3c_1 - c_2}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{3c_2 + c_1}{2}\eta\mu x \end{aligned}\right\}.$$

Θέτοντας στη γενική λύση τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 3$ παίρνουμε τις τιμές για τα $c_1,\ c_2:\ c_1 = 2,\ c_2 = 0$. Άρα

$$y_1 = 2\sigma\upsilon\nu x,\ y_2 = 3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$$

4) Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ: $\left.\begin{aligned} y_1'' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2'' &= 3y_1 - 2y_2 \end{aligned}\right\}$ $2^{\text{ης}}$ τάξης.

Λύση

Το δοσμένο σύστημα ΔΕ είναι γραμμικό και ομογενές $2^{\text{ης}}$ τάξης με λυμένη μορφή. Και εδώ μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της απαλοιφής. Έτσι, λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y_2, και αντικαθιστούμε την y_2 και την δεύτερη παράγωγό της στην δεύτερη εξίσωση. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος ΔΕ γίνεται τότε

$$(2y_1 - y_1'')'' = 3y_1 - 2y_2, \text{ ή } 2y_1'' - y_1^{(4)} = 3y_1 - 2(2y_1 - y_1'') \text{ ή}$$

$$y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση που προέκυψε είναι ΔΕ τέταρτης τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό το 2ο μέλος. (βλέπε παράγραφο 1.6.2).

Έτσι, η χαρακτηριστική εξίσωση της $y_1^{(4)} - y_1 = 0$ είναι η $\rho^4 - 1 = 0$. Αυτή γράφεται $(\rho^2 + 1)(\rho^2 - 1) = 0$ και έχει ρίζες $\rho_{1,2} = \pm i$, $\rho_{3,4} = \pm 1$. Άρα η γενική λύση της y_1 θα περιέχει προφανώς τέσσερες αυθαίρετες σταθερές και θα είναι

$y_1(x) = c_1\eta\mu x + c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$. Ακόμα

$$y_1' = c_1\sigma\upsilon\nu x - c_2\eta\mu x + c_3 e^x - c_4 e^{-x},$$

$$y_1'' = -c_1\eta\mu x - c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

Αν αντικαταστήσουμε την y_1 και y_1'' στην πρώτη εξίσωση του συστήματος των ΔΕ θα πάρουμε τη γενική λύση της δεύτερης άγνωστης συνάρτησης y_2. Έτσι,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 2(c_1\eta\mu x + c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}) - \\ &\quad - (-c_1\eta\mu x - c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}) = \\ &= 3c_1\eta\mu x + 3c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} \end{aligned}$$

Επειδή η γενική λύση του συστήματος

$$y_1(x) = c_1\eta\mu x + c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x},$$

$$y_2(x) = 3c_1\eta\mu x + 3c_2\sigma\upsilon\nu x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

περιέχει τέσσερες αυθαίρετες σταθερές, οι αρχικές συνθήκες για να πάρουμε μια μερική λύση, θα είναι τέσσερες συνθήκες της μορφής:

$$y_1(\alpha_0) = \beta_0,\ y_1'(\alpha_0) = \beta_1$$

$$y_2(\alpha_0) = \gamma_0,\ y_2'(\alpha_0) = \gamma_1$$

Οι συνθήκες αυτές θα δώσουν τις συγκεκριμένες τιμές των c_1, c_2, c_3, c_4.

1.10.2 Επίλυση συστήματος ΔΕ με τη μέθοδο της απαλοιφής χρησιμοποιώντας διαφορικούς τελεστές

Ως γνωστό, η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = y(x)$ παριστάνεται με

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy$$

όπου το σύμβολο D ονομάζεται *τελεστής παραγώγου*. Όμοια

$$y'' = (y')' = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y, \;\; y''' = D^3y \text{ κτλ.}$$

Αν το γραμμικό σύστημα ΔΕ που δίνεται δεν έχει τη λυμένη μορφή, τότε, αντί να το φέρουμε στη λυμένη μορφή όπως κάναμε στο παράδειγμα 3, χρησιμοποιούμε τελεστές παραγώγων που ενεργούν στις συναρτήσεις και εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής ενός αγνώστου όπως και στα συνήθη συστήματα, θεωρώντας ως συντελεστές των αγνώστων y_1, y_2 ολόκληρο τον τελεστή παραγώγου που δρα πάνω τους.

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος: $\left.\begin{aligned} 2y_1' - 3y_2' + 5y_1 - 4y_2 &= 0 \\ 5y_1' - 4y_2' + 2y_1 - 3y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο παράδειγμα 3, θα μπορούσαμε να φέρουμε το σύστημα στη λυμένη του μορφή ως προς y_1', y_2' και να το λύσουμε με το γνωστό τρόπο που αναπτύξαμε στα παραδείγματα 1 και 2.

Με το νέο τρόπο, ενοποιούμε τα δύο προηγούμενα βήματα. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον τελεστή παραγώγου *D*, το σύστημα γράφεται στη συμβολική μορφή

$$\left.\begin{aligned} (2D+5)y_1 - (3D+4)y_2 &= 0 \\ (5D+2)y_1 - (4D+3)y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Για να απαλείψουμε π.χ. την y_2, εφαρμόζουμε τη μέθοδο αντιθέτων συντελεστών. Πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με $(4D+3)$ και τη 2η με $(3D+4)$ και στη συνέχεια αφαιρούμε κατά μέλη. Έτσι προκύπτει

$$\{(2D+5)(4D+3) - (5D+2)(3D+4)\}y_1 = 0 \qquad (2)$$

η οποία, μετά την εκτέλεση των πράξεων γράφεται ως

$$\{-7(D^2-1)\}y_1 = 0 \text{ ή } -7(y_1'' - y_1) = 0 \text{ ή } y_1'' - y_1 = 0\,.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της τελευταίας, $\rho^2 - 1 = 0$ έχει ρίζες $\rho_{1,2} = \pm 1$, επομένως η γενική λύση της y_1 θα είναι $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$

Θα μπορούσαμε βέβαια να απαλείψουμε την y_1. Πάλι θα φτάσουμε στην ίδια αντίστοιχη ΔΕ εξίσωση $y_2'' - y_2 = 0$ με γενική λύση $y_2 = k_1e^x + k_2e^{-x}$.

Άρα η γενική λύση είναι του συστήματος είναι

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x} \text{ και } y_2 = k_1e^x + k_2e^{-x}\,. \qquad (3)$$

Εδώ συμβαίνει το εξής ‘παράδοξο’. Η γενική λύση παρατηρούμε ότι έχει τέσσερες αυθαίρετες σταθερές τις c_1, c_2, k_1, k_2 αντί των δύο που θα περιμέναμε. Αυτή η ‘διεύρυνση’ του χώρου των λύσεων οφείλεται στο γεγονός ότι κατά τη διαδικασία της απαλοιφής, πολλαπλασιάσαμε τις εξισώσεις (1) όχι με συνήθεις αριθμούς αλλά με διαφορικούς τελεστές, οπότε οι νέες εξισώσεις δεν είναι ισοδύναμες με τις αρχικές, αν και περιέχουν σίγουρα τη λύση τους. Στην προκειμένη περίπτωση οι σταθερές της γενικής λύσης (3) της δεύτερης εξίσωσης k_1, k_2 αντί να εκφράζονται συναρτήσει των c_1, c_2, όπως συνέβαινε μέχρι τώρα, εμφανίζονται ως ανεξάρτητες.

Η αδυναμία αυτή διορθώνεται αμέσως, αν απαιτήσουμε από τη γενική λύση (3) να ικανοποιεί μια οποιαδήποτε από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος. Έτσι, π.χ. αν εισάγουμε τις (3) στην πρώτη των εξισώσεων του αρχικού συστήματος, αφού υπολογίσουμε και τις παραγώγους αυτών, θα έχουμε:

$$2(c_1e^x - c_2e^{-x}) - 3(k_1e^x - k_2e^{-x}) + 5(c_1e^x + c_2e^{-x}) - 4(k_1e^x + k_2e^{-x}) = 0 \text{ ή}$$

$$7(c_1 - k_1)e^x + (3c_2 - k_2)e^{-x} = 0 \text{ οπότε } k_1 = c_1,\ k_2 = 3c_2$$

και η λύση για τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση γράφεται τελικά $y_2 = c_1e^x + 3c_2e^{-x}$, όπου οι σταθερές δεν είναι πια ελεύθερες, αλλά εκφράζονται συναρτήσει των σταθερών της πρώτης συνάρτησης $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

Έτσι, η τελική γενική λύση του συστήματος είναι

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x} \text{ και } y_2 = c_1e^x + 3c_2e^{-x}$$

Παρατήρηση

Να σημειωθεί ότι το περιεχόμενο της αγκύλης της σχέσης (2) είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας των συντελεστών του συστήματος (1), όποια από τις δύο συναρτήσεις y_1, y_2 και αν απαλείψουμε.

2) Να λυθεί το σύστημα ΔΕ: $\left.\begin{aligned} y_1'' + y_2' - 2y_1 + 2y_2 &= 0 \\ y_2'' - y_1' + 2y_1 - 4y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = 0$.

Λύση

Καταρχήν εδώ έχουμε ένα σύστημα ΔΕ $2^{ης}$ τάξης, όπου καμία από τις εξισώσεις του συστήματος δεν μπορεί να λυθεί ως προς τον ένα άγνωστο, και επομένως η απλοϊκή μέθοδος απαλοιφής που είδαμε πριν είναι ανεφάρμοστη. Χρησιμοποιώντας όμως την μέθοδο των διαφορικών τελεστών το σύστημα γράφεται

$$\left.\begin{array}{l}(D^2-2)y_1+(D+2)y_2=0\\(-D+2)y_1+(D^2-4)y_2=0\end{array}\right\}$$

απ' όπου προκύπτει, σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, ότι οι άγνωστες συναρτήσεις y_1, y_2 ικανοποιούν την κοινή εξίσωση $y_{1,2}$:

$$\{(D^2-2)(D^2-4)-(D+2)(-D+2)\}y_{1,2}=0 \text{ ή } (D^4-5D^2+4)y_{1,2}=0.$$

Η τελευταία σχέση είναι ΔΕ $4^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό $2^{ο}$ μέλος. Η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι $\rho^4-5\rho+4=0$ (διτετράγωνη εξίσωση) με ρίζες $\rho_1=1,\ \rho_2=-1,\ \rho_3=2,\ \rho_4=-2$. Άρα οι γενικές λύσεις για τις άγνωστες συναρτήσεις $y_{1,2}$ θα είναι κατά τα γνωστά οι:

$$y_1=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$$

$$y_2=k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3e^{2x}+k_4e^{-2x}$$

Υπολογίζουμε την $2^η$ παράγωγο της y_1 και την $1^η$ παράγωγο της y_2 και αντικαθιστούμε τις y_1, y_2, y_1'', y_2' στην $1^η$ των εξισώσεων του συστήματος ΔΕ που δόθηκε:

$$(c_1e^x+c_2e^{-x}+4c_3e^{2x}+4c_4e^{-2x})+(k_1e^x-k_2e^{-x}+2k_3e^{2x}-2k_4e^{-2x})-$$
$$-2(c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x})+2(k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3e^{2x}+k_4e^{-2x})=0$$

$$\text{ή } (-c_1+3k_1)e^k+(-c_2+k_2)e^{-x}+(2c_3+4k_3)e^{2x}+2c_4e^{-2x}=0$$

Απ' την τελευταία σχέση προκύπτει (επειδή τα εκθετικά είναι $\neq 0, \forall x\in R$)

$$-c_1+3k_1=0,\ -c_2+k_2=0,\ 2c_3+4k_3=0,\ 2c_4=0.$$

Οι τρεις πρώτες εξισώσεις μας δίνουν τα k_1, k_2, k_3 συναρτήσει των c_1, c_2, c_3, ενώ η τελευταία που δίνει $c_4=0$ δείχνει ότι το εκθετικό e^{-2x} δεν πρέπει να εμφανίζεται καθόλου στην y_1, ενώ μπορεί να εμφανίζεται στην y_2 με αυθαίρετο συντελεστή, αφού το k_4 δεν δεσμεύεται από καμία συνθήκη. Έτσι, η γενική λύση του συστήματος των ΔΕ που δόθηκε θα είναι

$$y_1=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x},$$

$$y_2=\frac{c_1}{3}e^x+c_2e^{-x}-\frac{c_3}{2}e^{2x}+c_4e^{-2x}$$

όπου στη δεύτερη εξίσωση y_2 χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο c_4 (αντί του k_4) για την αυθαίρετη σταθερά του τελευταίου εκθετικού, ώστε να διατηρηθεί η ενότητα του συμβολισμού μας.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις αρχικές συνθήκες (αφού υπολογίσουμε πρώτα τις παραγώγους y_1', y_2' της γενικής λύσης), σχηματίζουμε σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους τους c_1, c_2, c_3, c_4, με λύση

$$c_1 = \frac{3}{2},\ c_2 = -\frac{5}{6},\ c_3 = -\frac{2}{3},\ c_4 = 1.$$

Άρα η μερική λύση του αρχικού συστήματος ΔΕ είναι

$$y_1 = \frac{3}{2}e^x - \frac{5}{6}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x},\quad y_2 = \frac{1}{2}e^x - \frac{5}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + e^{-2x}.$$

3) Να λυθεί το σύστημα ΔΕ: $\left.\begin{array}{ll} y_1' = y_1 - y_2 + 4y_3 & (1) \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_3 & (2) \\ y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3 & (3) \end{array}\right\}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι αν λύσουμε οποιαδήποτε των εξισώσεων (1), (2), (3) π.χ. την (2) ως προς y_3 και την αντικαταστήσουμε στις υπόλοιπες δύο, θα πάρουμε ένα σύστημα ΔΕ 2ης τάξης ως προς τους δύο άλλους αγνώστους. Έτσι, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{array}{ll} y_3 = -y_2' + 3y_1 + 2y_2 & (4) \\ (1) \Rightarrow y_1' + 4y_2' - 13y_1 - 7y_2 = 0 & (5) \\ (3) \Rightarrow y_2'' - 3y_1' - y_2' - y_1 - y_2 = 0 & (6) \end{array}$$

Όμως το σύστημα των δύο εξισώσεων (5) και (6) δεν μπορεί να λυθεί ρητά ως προς τον ένα άγνωστο, γι' αυτό καταφεύγουμε αναγκαστικά στην μέθοδο των διαφορικών τελεστών. Έτσι, η συμβολική γραφή του συστήματος των (5), (6) είναι

$$\left.\begin{array}{l} (D-13)y_1 + (4D-7)y_2 = 0 \\ -(3D+1)y_1 + (D^2 - D - 1)y_2 = 0 \end{array}\right\}$$

οπότε οι συναρτήσεις y_1, y_2 ικανοποιούν την κοινή εξίσωση $y_{1,2}$:

$$\{(D-13)(D^2 - D - 1) + (3D+1)(4D-7)\}y_{1,2} = 0 \Rightarrow (D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y_{1,2} = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^3 - 2\rho^2 - 5\rho + 6 = 0$ με τη βοήθεια των διαιρετών του σταθερού όρου 6 και του σχήματος Horner δίνει ρίζες

$$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = -2,\ \rho_3 = 3$$

και άρα οι γενικές λύσεις για τους αγνώστους y_1, y_2 θα είναι

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} \qquad (7)$$

$$y_2 = k_1 e^x + k_2 e^{-2x} + k_3 e^{3x}.$$

Για τον υπολογισμό των k_1, k_2, k_3 συναρτήσει των c_1, c_2, c_3 αντικαθιστούμε τις τελευταίες γενικές λύσεις y_1, y_2 και τις παραγώγους αυτών στη (5) ή (6) και έχουμε

$$k_1 = -4c_1,\ k_2 = -c_2,\ k_3 = 2c_3$$

οπότε θα έχουμε για τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση τη λύση

$$y_2 = -4c_1 e^x - c_2 e^{-2x} + 2c_3 e^{3x} \qquad (8)$$

Η αντικατάσταση τέλος των (7) και (8) (με την παράγωγο της y_2) στην (4) δίνει την τιμή της άγνωστης συνάρτησης y_3:

$$y_3 = -c_1 e^x - c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}.$$

Ωστόσο όμως, η μέθοδος της απαλοιφής με χρήση διαφορικών τελεστών μπορεί να εφαρμοστεί κατ' ευθείαν στο αρχικό σύστημα ΔΕ. Έτσι, γράφουμε το σύστημα με μορφή διαφορικών τελεστών και παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} &(D-1)y_1 + y_2 - 4y_3 = 0 \\ &-3y_1 + (D-2)y_2 + y_3 = 0 \\ &-2y_1 - y_2 + (D+1)y_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Άρα η κοινή εξίσωση $y_{1,2,3}$ όλων των y_1, y_2, y_3 θα έχει ως διαφορικό τελεστή το ανάπτυγμα της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων y_1, y_2, y_3, (επέκταση της αναφερθείσας παρατήρησης του παραδείγματος 4, για σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους), δηλαδή την

$$\begin{vmatrix} D-1 & 1 & -4 \\ 3 & D-2 & 1 \\ -2 & -1 & D+1 \end{vmatrix} = (D-1)(D^2 - D - 6)$$

απ' όπου προκύπτει αμέσως η κοινή ΔΕ

$$\{(D-1)(D^2 - D - 6)\}y_{1,2,3} = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής $(\rho - 1)(\rho^2 - \rho - 6) = 0$ έχει ρίζες

$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = -2,\ \rho_3 = 3$ που είναι οι ίδιες μ' αυτές που βρήκαμε πριν. Έτσι, οι τρεις άγνωστες συναρτήσεις θα είναι επομένως

$$y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$$

$$y_2 = k_1 e^{x} + k_2 e^{-2x} + k_3 e^{3x}$$

$$y_3 = m_1 e^{x} + m_2 e^{-2x} + m_3 e^{3x}$$

με $k_1,\ k_2,\ k_3$ και $m_1,\ m_2,\ m_3$ σταθερές που θα προσδιοριστούν συναρτήσει των σταθερών $c_1,\ c_2,\ c_3$, αν οι τελευταίες γενικές λύσεις $y_1,\ y_2,\ y_3$ εισαχθούν σε δύο απ' τις αρχικές εξισώσεις του συστήματος. Τα αποτελέσματα θα είναι τα ίδια με αυτά που βρήκαμε προηγούμενα

Ασκήσεις

1) Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων, όπου $y_i = y_i(x)$ (i = 1, 2) είναι οι άγνωστες συναρτήσεις του *x* και $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt},\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ είναι οι παράγωγοι των αγνώστων συναρτήσεων *x*, *y*, του *t*.

α) $\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}\right\}$ *Απάντηση*: $\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} \\ y_2 &= -c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} \end{aligned}\right.$

β) $\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 - 1 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 + 5 \end{aligned}\right\}$ *Απάντηση*: $\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + 1 \\ y_2 &= -c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} - 2 \end{aligned}\right.$

γ) $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + e^{x} \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 - 2e^{x} \end{aligned}\right\}$ *Απάντηση*: $\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + 1/2\, e^{x} \\ y_2 &= -2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{3x} - e^{x} \end{aligned}\right.$

δ) $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - x^2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 + 2x \end{aligned}\right\}$ *Απ*: $\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{4}\left(3x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right) \\ y_2 &= -(c_1 + c_2)e^{2x} - c_2 x e^{2x} - \frac{1}{4}\left(x^2 + 4x + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}\right.$

ε) $\left.\begin{aligned} 5y_1' + 6y_1 - 8y_2 &= 0 \\ 5y_2' - 8y_1 - 6y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ *Απάντηση*: $\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} \\ y_2 &= -\frac{c_1}{2} e^{-2x} + 2c_2 e^{2x} \end{aligned}\right.$

στ) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + t \\ \dot{y} &= -5x + 3y + 1 \end{aligned}\right\}$ *Απ*: $\left\{\begin{aligned} x &= e^{t}(c_1 \sigma\upsilon\nu\, t + c_2 \eta\mu\, t) - \frac{1}{2}(3t + 1) \\ y &= e^{t}\{(2c_1 + c_2)\sigma\upsilon\nu\, t + (2c_2 - c_1)\eta\mu\, t\} + \frac{5}{2}t - 2 \end{aligned}\right.$

ζ) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = y + \sigma\upsilon\nu\, t\\ \dot{y} = -x\end{array}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} x = c_1\sigma\upsilon\nu\, t + c_2\eta\mu\, t + \dfrac{t}{2}\sigma\upsilon\nu\, t \\ y = c_2\sigma\upsilon\nu\, t - c_1\eta\mu\, t - \dfrac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu\, t + t\eta\mu\, t)\end{cases}$

η) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} + 3\dot{y} - 4x - 2y = 0\\ 2\dot{x} + \dot{y} - 3x - y = 0\end{array}\right\}$ *Απ.*: $\begin{cases} x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},\ \lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{6}}{5} \\ y = 5(\lambda_1 - 1)c_1 e^{\lambda_1 t} + 5(\lambda_2 - 1)c_2 e^{\lambda_2 t}\end{cases}$

2) Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα ΔΕ, όπου $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ είναι συναρτήσεις του *t*, με αρχικές συνθήκες δίπλα από κάθε σύστημα:

α) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = x + 2y\\ \dot{y} = -2x - 3y\end{array}\right\} : \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2\end{cases}$, *Απάντηση*: $\begin{cases} x = e^{-t} + 4te^{-t} \\ y = 2e^{-t} - 6te^{-t}\end{cases}$

β) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = -4x - y\\ \dot{y} = x - 2y\end{array}\right\} : \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1\end{cases}$, *Απάντηση*: $\begin{cases} x = te^{-3t} \\ y = -(t+1)e^{-3t}\end{cases}$

γ) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = -x + y + \sigma\upsilon\nu\, t\\ \dot{y} = -5x + 3y\end{array}\right\} : \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0\end{cases}$, *Απ.*: $\begin{cases} x = (e^t - 1)(\sigma\upsilon\nu\, t - \eta\mu\, t) \\ y = e^t(\sigma\upsilon\nu\, t - 3\eta\mu\, t) + 2\eta\mu\, t - \sigma\upsilon\nu\, t\end{cases}$

δ) $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = x - 2y\\ \dot{y} = x - y\end{array}\right\} : \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1\end{cases}$, *Απάντηση*: $\begin{cases} x = \sigma\upsilon\nu\, t - \eta\mu\, t \\ y = \sigma\upsilon\nu\, t\end{cases}$

3) Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

α) $\left.\begin{array}{l}2y_1' + y_2' = 6y_1 + 3y_2\\ y_1' - 2y_2' = -7y_1 - y_2\end{array}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \\ y_2 = -2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{3x}\end{cases}$

β) $\left.\begin{array}{l}y_1' - y_2' - 2y_1 + 2y_2 = 0\\ 2y_1' + y_2' - 7y_1 - 5y_2 = 0\end{array}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} \\ y_2 = -c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}\end{cases}$

γ) $\left.\begin{array}{l}y_1' = y_1 + y_2 + x\\ y_2' = y_1 - y_2 + 1 - x\end{array}\right\}$ *Απ.*: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} - 1 \\ y_2 = -(\sqrt{2}+1)c_1 e^{-\sqrt{2}x} + (\sqrt{2}-1)c_2 e^{\sqrt{2}x} + 1 - x\end{cases}$

δ) $\left.\begin{array}{l}y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3\\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3\\ y_3' = -y_1 - y_2 + 5y_3\end{array}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{6x} \\ y_2 = -c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{6x} \\ y_3 = 0 + c_2 e^{3x} - 2c_3 e^{6x}\end{cases}$

ε) $\left.\begin{array}{l}3y_1' = y_1 + 4y_2 - 2y_3\\ 3y_2' = 4y_1 + y_2 - 2y_3\\ 3y_3' = -2y_1 - 2y_2 + 7y_3\end{array}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{3x} \\ y_2 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{3x} \\ y_3 = 0 + c_2 e^{x} - 2c_3 e^{3x}\end{cases}$

στ) $\left.\begin{aligned} y_1'' + y_2' - y_1 + y_2 &= 1 \\ y_2'' + y_1' - y_1 + y_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 x + c_4 - \dfrac{1}{2} x^2 \\ y_2 = c_2 e^{-x} + (c_3 + 1)x + c_4 - c_1 - \dfrac{1}{2} x^2 \end{cases}$

ζ) $\left.\begin{aligned} & y_1'' - 3y_1' + 2y_1 + y_2' - y_2 = 0 \\ & y_1' - 2y_1 + y_2' + y_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ *Απάντηση*: $\begin{cases} y_1 = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} \\ y_2 = 2c_1 + \dfrac{1}{2} c_2 e^{x} \end{cases}$