ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ
Μαθηματικού

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(Θεωρία καὶ Ἀσκήσεις)

Κυρίως γιά τούς Σπουδαστές τῶν ΚΑΤΕΕ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ:

1. Σύνολα
2. Μαθηματική Ἐπαγωγή
3. Μιγαδικοί Ἀριθμοί
4. Πολυώνυμα
5. Συναρτήσεις-Ἀκολουθίες
6. Διανύσματα
7. Ἀναλυτική Γεωμετρία
8. Παράγωγοι Συναρτήσεων καί ἐφαρμογές τους

καί 333 λυμένες ἀσκήσεις

Λάρισα 78

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΛΟΚΚΑ
Μαθηματικοῦ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(Θεωρία καὶ Ἀσκήσεις)

Κυρίως γιά τούς Σπουδαστές τῶν ΚΑΤΕΕ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ:

1. Σύνολα
2. Μαθηματική Ἐπαγωγή
3. Μιγαδικοί Ἀριθμοί
4. Πολυώνυμα
5. Συναρτήσεις-Ἀκολουθίες
6. Διανύσματα
7. Ἀναλυτική Γεωμετρία
8. Παράγωγοι Συναρτήσεων καί ἐφαρμογές τους

καί 333 λυμένες ἀσκήσεις

Λάρισα 78

Ἀφιερώνεται στούς γονεῖς μου

Τό βιβλίο αὐτό, μέ τήν εὐλογία τοῦ πατρός Νικηφόρου Κοντογιάννη, προσφέρεται στήν πλούσια συλλογή τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Ἐνορίας τοῦ Ἱεροῦ Ναοῦ τοῦ Μεγαλομάρτυρος Ἁγίου Γεωργίου Λαρίσης. Λόγῳ τῶν πολλῶν καινοτόμων θεμάτων * πού περιέχει, ἡ μελέτη του παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον.

Θεόδωρος Γ. Λόκκας

Λάρισα, 5/7/2021

* π.χ. λύση πλήρους 3-βάθμιας καί 4-βάθμιας πολυωνυμικῆς ἐξίσωσης (σ. 62), ἀντιστοιχίες τύπων κυκλικῶν καί ὑπερβολικῶν συναρτήσεων (σ. 97), γραφική παράσταση συναρτήσεων σέ πολικές συντεταγμένες (σ. 254), $i^i = e^{-\pi/2}$! (σ. 269) κ.π.ἄ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό βιβλίο αὐτό γράφτηκε μέ βάση τό ἀναλυτικό πρόγραμμα τοῦ ὑπουργείου Παιδείας καί Θρησκευμάτων, πού ἀναφέρεται στά Μαθηματικά τοῦ Α΄ ἑξαμήνου τῆς Ἀνωτέρας Σχολῆς Τεχνολόγων Μηχανικῶν τῶν ΚΑΤΕΕ καί προορίζεται κυρίως γιά τούς σπουδαστές τῆς παραπάνω Σχολῆς, χωρίς βέβαια νά περιορίζεται ἡ γενικότητα τῆς χρησιμοποίησής του καί ἀπό σπουδαστές ἄλλων Τεχνικῶν Σχολῶν, ὑποψήφιους καί σπουδαστές τοῦ Πανεπιστημίου καί ἐκείνων γενικά πού ἀσχολοῦνται μέ τά Μαθηματικά.

Γιά τή συγγραφή του διάλεξα ἀπ' τό Γενικό μέρος ὡρισμένα κεφάλαια ὅπως Σύνολα, Μαθηματική Ἐπαγωγή, Πολυώνυμα καί Συναρτήσεις - Ἀκολουθίες, τά ὁποῖα ἔκρινα ἀπολύτως ἀπαραίτητα γιά τή σύνδεση τῶν ἑπόμενων κεφαλαίων καί τήν κατά τό δυνατό αὐστηρή θεμελίωσή τους. Ἀναφέρω ἀκόμη καί τή λύση τῶν ἐξισώσεων 3ου καί 4ου βαθμοῦ γιατί βρίσκουν ἐφαρμογή σέ ἄλλα ἑξάμηνα σπουδῶν.

Ἡ ἀνάπτυξη τόσο τοῦ Γενικοῦ ὅσο καί τοῦ Εἰδικοῦ μέρους ἔγινε μέ πολλή προσοχή, ὥστε νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ δύσκολες ἔννοιες καί νά δοθεῖ σέ κάθε κεφάλαιο μιά περιεκτική, πλήρης καί εὐκολονόητη μορφή. Χρησιμοποίησα τή δημοτική γλῶσσα γιατί πιστεύω ὅτι ἀνταποκρίνεται πιό πολύ στίς ἀνάγκες τοῦ Σπουδαστή καί ἐκφράζει πιό ζωντανά τά νοήματα. Ἰδιαίτερη προσπάθεια κατέβαλα στά σχήματα τοῦ βιβλίου, πού ἔκανα μέ σχολαστική ἀκρίβεια, γιατί εἶμαι σίγουρος, ὅτι ἐκτός τῶν ἄλλων συμβάλλουν κι αὐτά στήν πληρέστερη κατανόηση τοῦ ὅλου θέματος.

Στό τέλος κάθε κεφαλαίου ἔχουν λυθεῖ χαρακτηριστικά παραδείγματα ἀσκήσεων, πού ἔχουν ἐπιλεγεῖ μέ μεγάλη προσοχή, ὥστε νά καλύπτουν πλήρως τήν ἀντίστοιχη θεωρία καί νά δίνουν στό σπουδαστή μιά ὁλοκληρωμένη εἰκόνα τοῦ κεφαλαίου πού ἐξετάζεται.

Τέλος ξεχωριστή προσοχή δόθηκε στήν ὅλη ἐμφάνιση τοῦ βιβλίου καί στό σημεῖο αὐτό θά ἤθελα νά εὐχαριστήσω τόν σχεδιαστή κ. Ζυγόπουλο Ἰωάννη γιά τήν καλλιτεχνική ἐμφάνιση τοῦ ἐξώφυλλου.

Θέλω νά πιστεύω ὅτι τό βιβλίο αὐτό θά ἀποτελέσει ἕνα χρήσιμο βοήθημα γι᾽ αὐτούς πού θέλουν νά κάνουν μιά εἰσαγωγή στά Ἀνώτερα Μαθηματικά καί γιά ἐκείνους πού θέλουν νά δώσουν ἐξετάσεις στό μάθημα αὐτό.

Γιά μένα τότε ἡ συμβολή αὐτή θά εἶναι μιά μεγάλη ἠθική ἱκανοποίηση.

Θεόδωρος Γ. Λόκκας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΣΥΝΟΛΑ. — Σελίς

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 1

Πράξεις μεταξύ συνόλων 5

Διμελεῖς σχέσεις – Ἰσοδυναμίες 9

Ἀσκήσεις 11

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 21

Ἀσκήσεις 22

3. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 36

Ἰδιότητες συζυγῶν μιγαδικῶν 37

Ἰδιότητες τοῦ μέτρου μιγαδικῶν 38

Τριγωνομετρική μορφή μιγάδος 39

Ἀσκήσεις 43

4. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 53

Ἰδιότητες ἀκεραίων πολυωνύμων 55

Σχέσεις ριζῶν καί συντελεστῶν πολυωνύμου 56

Ἀνάλυση κλάσματος σέ ἄθροισμα κλασμάτων 57

Ὁμογενῆ καί συμμετρικά πολυώνυμα 58

Λύση ἐξισώσεων 1ου, 2ου, 3ου καί 4ου βαθμοῦ 61

Ἀσκήσεις 65

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 83

Ἀλγεβρικές συναρτήσεις 92
Ὑπερβατικές συναρτήσεις 96
Ἀκολουθίες 102
Πρόοδοι 107
Σειρές 109
Ὁ ἀριθμός e 111
Ὅριο συνάρτησης 113
Συνέχεια συνάρτησης 116
Ἀπόλυτες τιμές 118
Ἀσκήσεις 119

6. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 148
Συντεταγμένες σημείου καί διανύσματος στό χῶρο 150
Ἁπλός καί διπλός λόγος 153
Διανύσματα γραμμικῶς ἐξηρτημένα καί γραμμικῶς ἀνεξάρτητα 154
Ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων 158
Ἐξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων 160
Μικτό γινόμενο τριῶν διανυσμάτων 161
Διεξωτερικό γινόμενο τριῶν διανυσμάτων 162
Ἀσκήσεις 163

7. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 176
Πολικές συντεταγμένες 177
Εὐθεῖα 179
Ἐμβαδό τριγώνου ἀπό τίς συντεταγμένες του 182
Σχετική θέση δύο εὐθειῶν στό ἐπίπεδο 183

Ἐπίπεδη δέσμη εὐθειῶν 183
Γραμμική ἀνισότητα καί ἀπόστασι σημείου ἀπό εὐθεία 184
Ἐξίσωσι εὐθείας σέ πολικές συντεταγμένες 185
Κωνικές τομές 186
Κύκλος 186
Ἐξίσωσι κύκλου σέ πολικές συντεταγμένες 188
Ἔλλειψη 189
Ἐξίσωσι ἐλλείψης σέ πολικές συντεταγμένες 191
Ὑπερβολή 192
Ἐξίσωσι ὑπερβολῆς σέ πολικές συντεταγμένες 194
Παραβολή 195
Ἐξίσωσι παραβολῆς σέ πολικές συντεταγμένες 197
Ἀλλαγή συστήματος συντεταγμένων 198
Διερεύνησι κωνικῶν τομῶν 200
Ἐξίσωσι ἐπιπέδου 205
Ἐξίσωσι σφαίρας 206
Ἐξίσωσι ὑπερβολοειδοῦς 207
Ἐξίσωσι κώνου 207
Παραβολοειδῆ 209
Ἐξισώσεις κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν 209
Ἀσκήσεις 210

8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ.

Ὁρισμοί – Μεθοδολογία 233
Ἰδιότητες τῶν παραγώγων 236
Παράγωγος τῆς συνάρτησης $y = x^n$ 238

Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων 238
Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων 239
Παράγωγος της συνάρτησης $y = \log x$ 239
Παράγωγος εκθετικών συναρτήσεων 240
Παράγωγος υπερβολικών συναρτήσεων 240
Παράγωγος αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων 241
Διαφορικό μιας συνάρτησης 242
Έφαρμογές των παραγώγων 244
Τύπος του Taylor, Mac-Laurin 245
Κανόνας του L' Hospital 247
Άκρες τιμές 248
Σημεία καμπής 250
Ασύμπτωτοι 251
Ασκήσεις 254
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 301

1. ΣΥΝΟΛΑ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Ἡ ἔννοια τοῦ **συνόλου** στά Μαθηματικά εἶναι πρωταρχική, δηλαδή δέν ὁρίζεται μέ τή βοήθεια ἄλλων πιό ἁπλῶν ἐννοιῶν, ἀποκτᾶται ὅμως μέ τήν ἐμπειρία. Παραδείγματα τέτοιων ἐννοιῶν εἶναι τό σημεῖο, ὁ φυσικός ἀριθμός, ἡ λογική πρόταση κ.ἄ. Τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου εἶναι σαφῶς διακεκριμμένα μεταξύ τους· ἄν α εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου A γράφουμε $\alpha \in A$, ἄν δέν εἶναι γράφουμε $\alpha \notin A$. Ἕνα σύνολο παριστάνεται μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του, π.χ $A=\{1,2,3\}$ ἤ μέ περιγραφή αὐτῶν π.χ. $A=\{x \,/\, x$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης $x^2-1=0\}$.

Λογική πρόταση p ἐννοοῦμε (δέν ὁρίζομε) μία ἔκφραση μέ πλῆρες νόημα, πού ἐπιδέχεται ἕναν ἀκριβῶς ἀπ' τούς χαρακτηρισμούς "ἀληθής" ἤ "ψευδής", οἱ ὁποῖοι λέγονται **τιμές ἀληθείας** τῆς πρότασης p καί συμβολίζονται μέ $\tau(p)$. Εἶναι δέ $\tau(p)=\alpha$ ἄν ἡ πρόταση p εἶναι ἀληθής καί $\tau(p)=\psi$ ἄν p ψευδής.

Προτασιακός τύπος ἤ **ἀνοικτή πρόταση** μιᾶς μεταβλητῆς λέγεται κάθε ἔκφραση ἡ ὁποία περιέχει μία μόνο μεταβλητή καί ἡ ὁποία μετατρέπεται σέ πρόταση ὅταν ἡ μεταβλητή ἀντικατασταθεῖ ἀπό τυχόν στοιχεῖο ἑνός καθωρισμένου συνόλου. Τό στοιχεῖο πού ἀντικαθιστᾶ τή μεταβλητή λέγεται **τιμή** τῆς μεταβλητῆς. Τό σύνολο τιμῶν τῆς μεταβλητῆς λέγεται **σύνολο ἀναφορᾶς** τῆς μεταβλητῆς τοῦ προτασιακοῦ τύπου καί συμβολίζεται μέ Ω. Ἡ μεταβλητή συμβολίζεται μέ x. Π.χ. ἡ ἔκφραση "ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ 5" εἶναι προτασιακός τύπος. Γιά $x=2$ γίνεται λογική πρόταση ἡ ὁποία δέχεται τόν χαρακτηρισμό "ἀληθής" γιατί ἡ τιμή ἀληθείας αὐτῆς εἶναι α, ἐνῶ γιά $x=10$ γίνεται ψευδής. Ὡς σύνολο ἀναφορᾶς θεωρεῖται ἐδῶ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Στή Μαθηματική λογική δέν χρησιμοποιοῦμε μόνο ἁπλές προτάσεις. Τίς ἁπλές προτάσεις τίς συνδέουμε μεταξύ τους μέ διάφορες λέξεις ἤ ἐκφράσεις τούς **λογικούς συνδέσμους** καί σχηματίζουμε τίς σύνθετες προτάσεις. Οἱ τιμές ἀληθείας τῆς σύνθετης αὐτῆς πρότασης εἶναι πάλι τό σύνολο $\{α, ψ\}$.

Οἱ θεμελειώδεις λογικές πράξεις καί οἱ τιμές ἀληθείας αὐτῶν ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

1. Καλοῦμε **σύζευξη** δύο προτάσεων p καί q τήν πρόταση "p **καί** q" (συμβολικά "$p \wedge q$") πού τή δεχόμαστε ἀληθῆ μόνον ὅταν οἱ δύο προτάσεις p καί q εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς καί ψευδῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση. Ἤτοι: $\tau(p \wedge q) = α$ ἄν $\tau(p) = \tau(q) = α$ καί
$\tau(p \wedge q) = ψ$ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση.

2. Καλοῦμε **διάζευξη (ἐγκλειστική)** δύο προτάσεων p καί q τήν πρόταση "p **εἴτε** q" (συμβολικά "$p \vee q$") πού τή δεχόμαστε ψευδῆ μόνον ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p καί q εἶναι συγχρόνως ψευδεῖς καί ἀληθῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση. Ἤτοι $\tau(p \vee q) = ψ$ ἄν $\tau(p) = \tau(q) = ψ$ καί
$\tau(p \vee q) = α$ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση.

3. Καλοῦμε **ἀποκλειστική διάζευξη** δύο προτάσεων p καί q τήν πρόταση "**ἤ μόνο** p **ἤ μόνο** q" ἤ πιό ἁπλά "p **ἤ** q" (συμβολικά "$p \underline{\vee} q$") πού τή δεχόμαστε ψευδῆ ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p καί q ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀληθείας καί ἀληθῆ ὅταν ἔχουν διάφορες τιμές ἀληθείας. Ἤτοι:

$\tau(p \underline{\vee} q) = \psi$ ἄν $\tau(p) = \tau(q)$ καί

$\tau(p \underline{\vee} q) = \alpha$ ἄν $\tau(p) \neq \tau(q)$.

4. Καλοῦμε **ἄρνηση** μιᾶς πρότασης p τήν πρόταση "**ὄχι** p" (συμβολικά "$\sim p$" ἤ "$\bar{p}$") πού εἶναι ἀληθής ὅταν ἡ p εἶναι ψευδής καί ψευδής ὅταν ἡ p εἶναι ἀληθής. Ἤτοι: $\tau(\sim p) = \alpha$ ἄν $\tau(p) = \psi$ καί

$\tau(\sim p) = \psi$ ἄν $\tau(p) = \alpha$.

5. Καλοῦμε **συνεπαγωγή** δύο προτάσεων p καί q τήν πρόταση "**ἐάν** p, **τότε** q" ἤ "p **συνεπάγεται** q" (συμβολικά "$p \Rightarrow q$") πού τή δεχόμαστε ψευδῆ μόνον ὅταν ἡ p εἶναι ἀληθής καί ἡ q ψευδής καί ἀληθῆ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση. Ἤτοι: $\tau(p \Rightarrow q) = \psi$ ἄν $\tau(p) = \alpha$ καί $\tau(q) = \psi$

καί $\tau(p \Rightarrow q) = \alpha$ σέ κάθε ἄλλη περίπτωση.

6. Καλοῦμε **ἰσοδυναμία** δύο προτάσεων p καί q τήν πρόταση "p **τότε καί μόνον τότε, ἄν** q" ἤ "p **συνεπάγεται** q **καί ἀντιστρόφως**" (συμβολικά "$p \Leftrightarrow q$") πού τή δεχόμαστε ἀληθῆ μόνον ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις p καί q ἔχουν τήν ἴδια τιμή ἀληθείας καί ψευδῆ ὅταν οἱ p καί q ἔχουν διάφορες τιμές ἀληθείας. Ἤτοι: $\tau(p \Leftrightarrow q) = \alpha$ ἄν $\tau(p) = \tau(q)$

καί $\tau(p \Leftrightarrow q) = \psi$ ἄν $\tau(p) \neq \tau(q)$.

Τίς τιμές ἀληθείας τῶν παραπάνω λογικῶν πράξεων τίς ἀποδίδουμε συγκεντρωτικά μέ τόν ἀκόλουθο **πίνακα τῶν τιμῶν ἀληθείας.**

p	q	Σύζευξη	Έγκλ. Διά.	Άποκλ. Διά.	Συνεπαγ.	Ίσοδυναμ.	Άρνηση.	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

Άν μία πρόταση άποτελεῖται άπό πεπερασμένου πλήθους προτάσεις πού συνδέονται μεταξύ τους μέ τά σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ λέγεται **λογικός τύπος.**

Γιά νά γενικεύσουμε τώρα τήν έννοια τοῦ συνόλου ὁρίζουμε ὡς **κενό** τό σύνολο πού δέν έχει στοιχεῖα καί συμβολίζουμε τό σύνολο αὐτό μέ $\emptyset$ ή $\{\}$.

Ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ λέγεται **ὑποσύνολο** ένός άλλου συνόλου $B \neq \emptyset$ τότε καί μόνο τότε, άν κάθε στοιχεῖο τοῦ A εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ B. Δηλ. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall (\text{κάθε}) x : x \in A \Rightarrow x \in B$.

Ένα σύνολο A λέγεται **άπειροσύνολο** όταν έχει άπειρα τό πλῆθος στοιχεῖα καί **πεπερασμένο** όταν έχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεῖα.

Ένα σύνολο πού τά στοιχεῖα του εἶναι άριθμοί λέγεται **άριθμοσύνολο.** Στό έξῆς θά άσχοληθοῦμε μόνο μέ άριθμοσύνολα.

Ένα σύνολο A λέγεται **άριθμήσιμο** όταν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύνολο τῶν φυσικῶν άριθμῶν. Προφανῶς κάθε άριθμήσιμο σύνολο εἶναι άπειροσύνολο.

Άναφέρουμε μερικά παραδείγματα βασικῶν άριθμοσυνόλων:

N = τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, $\mathbf{N_o} = N \cup \{0\}$, **Z** = τό σύνολο τῶν ἀκεραίων, **Q** = τό σύνολο τῶν ρητῶν, **R** = τό σύνολο τῶν πραγματικῶν καί **C** τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Πληθικός ἀριθμός ἑνός συνόλου A λέγεται ὁ ἀριθμός πού ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ A.

Δύο σύνολα A καί B λέγονται **ἰσοδύναμα**, ὅταν ἔχουν τόν ἴδιο πληθικό ἀριθμό. Ἐνῶ **ἴσα** λέγονται δύο σύνολα A καί B τότε καί μόνον τότε, ὅταν ἔχουν τά ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα. Ἡ ἔκφραση "τότε καί μόνον τότε" σημαίνει ὅτι κάθε στοιχεῖο $x \in A$ νά εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ B καί κάθε στοιχεῖο $y \in B$ νά εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ A. Δηλ. ἄν $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Ἔστω σύνολο A. Καλεῖται **δυναμοσύνολο** τοῦ συνόλου αὐτοῦ, τό σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων του καί συμβολίζεται μέ $P(A)$. Π.χ. ἄν $A = \{1, 2, 3\}$ τότε θά εἶναι: $P(A) = \{\{\}, \{1\} \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἄν τό σύνολο A ἔχει ν τό πλῆθος στοιχεῖα, τότε τό δυναμοσύνολό του ἔχει 2^{ν} τό πλῆθος στοιχεῖα.

Πράξεις μεταξύ συνόλων (Ἄλγεβρα αὐτῶν).

Ἔστω δύο σύνολα A καί B διάφορα τοῦ κενοῦ συνόλου.

Ὁρίζουμε ὡς **ἕνωση** τῶν A καί B τό σύνολο Γ πού ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά καί μή κοινά στοιχεῖα τῶν A, B καί γράφουμε $\Gamma = A \cup B$.

Ὁρίζουμε ὡς **τομή** τῶν A καί B τό σύνολο Γ πού ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά στοιχεῖα τῶν A καί B καί μόνο αὐτά.

καί γράφουμε $\Gamma = A \cap B$.

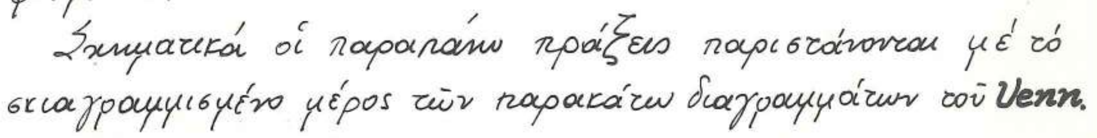
Ὁρίζουμε ὡς **διαφορά** τοῦ συνόλου B ἀπό τό σύνολο A τό σύνολο Γ πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A πού δέν ἀνήκουν στό B καί γράφουμε $\Gamma = A - B$.

Ὁρίζουμε ὡς **συμμετρική διαφορά** τῶν A καί B τό σύνολο Γ πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A πού δέν ἀνήκουν στό B καί ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ B πού δέν ἀνήκουν στό A καί γράφουμε $\Gamma = A \dot{+} B$. Ἀπ' τόν ὁρισμό τῆς συμμετρικῆς διαφορᾶς προκύπτει $\Gamma = (A-B) \cup (B-A)$.

Ἄν τά σύνολα A καί B δέν ἔχουν κανένα κοινό στοιχεῖο ὀνομάζονται **ξένα μεταξύ τους** καί γράφουμε $A \cap B = \phi$.

Ἔστω σύνολο A διάφορο τοῦ κενοῦ καί ἕνα σύνολο ἀναφορᾶς $\underline{\Omega}$. Ὁρίζουμε ὡς **συμπλήρωμα** τοῦ A ὡς πρός τό $\underline{\Omega}$ τό σύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ $\underline{\Omega}$ πού δέν ἀνήκουν στό A (ὑποσύνολο ἐν γένει τοῦ $\underline{\Omega}$) καί γράφουμε $A^c = \underline{\Omega} - A$

Σχηματικά οἱ παραπάνω πράξεις παριστάνονται μέ τό σκιαγραμμισμένο μέρος τῶν παρακάτω διαγραμμάτων τοῦ **Venn**.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A - B$ $\quad$ $A \dot{+} B$ $\quad$ A^c

Μέ λογικούς συνδέσμους θά μπορούσαμε νά ὁρίσουμε τίς πράξεις μεταξύ τῶν συνόλων ὡς ἑξῆς:

Ἔστω A καί B δύο τυχόντα σύνολα καί $\underline{\Omega}$ τό καθολικό σύνολο. Τότε λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τούς παραπάνω ὁρισμούς ἔχουμε:

Γιά τήν ἕνωση: $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \vee x \in B\}$

" " τομή $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B\}$

" " διαφορά $A - B = \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \notin B\}$

" " συμ. διαφ. $A \dotplus B = \{x \in \Omega : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

" τό συμπλήρωμα $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$

Ἀναφέρουμε μερικές ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν συνόλων πού ἀποδεικνύονται ὅλες εὔκολα ἀπ' τούς ὁρισμούς τῶν πράξεων συνόλων.

1. Τῆς τομῆς $A \cap B$:

1. $A \cap \Omega = A$ (Ω καθολικό σύνολο)
2. $A \cap B = B \cap A$ (ἀντιμεταθετική)
3. $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ (προσεταιριστική)
4. $A \cap B \subseteq A$ καί $A \cap B \subseteq B$ (A, B τυχόντα σύνολα)
5. Ἄν $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. Ἄν $A \cap B = \emptyset$ τότε A, B ξένα μεταξύ τους.

2. Τῆς ἕνωσης $A \cup B$:

1. $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup B = B \cup A$ (ἀντιμεταθετική)
3. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ (προσεταιριστική)
4. $A \cup A = A$, 5. $A \subseteq A \cup B$ καί $B \subseteq A \cup B$ (A, B τυχόντα σύνολα)
6. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

3. Ἐπιμερισμός τομῆς καί ἕνωσης:

1. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ (ἐπιμεριστικότητα τῆς τομῆς ὡς πρός τήν ἕνωση)
2. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ (ἐπιμεριστικότητα τῆς ἕνωσης ὡς πρός τήν τομή).

4. Τῆς διαφορᾶς $A - B$:

1. $A-B = A-(A\cap B) = (A\cup B)-B$

2. $B\cup(A-B) = A\cup B$, 3. $A-B=\emptyset \Leftrightarrow A\subseteq B$

4. $(A-B)\cap B=\emptyset$, 5. $A\cap B=\emptyset \Rightarrow A-B=A$ καί $B-A=B$.

6. $(A-B)-\Gamma = A-(B\cup\Gamma)$, 7. $A-(B-\Gamma)=(A-B)\cup(A\cap\Gamma)$

5. Τῆς συμμετρικῆς διαφορᾶς $A\dot{+}B$:

1. $A\dot{+}B = B\dot{+}A$ (ἀντιμεταθετική)

2. $A\dot{+}(B\dot{+}\Gamma) = (A\dot{+}B)\dot{+}\Gamma$ (προσεταιριστική)

3. $A\dot{+}\emptyset = A$, 4. $A\dot{+}\Omega = A^c$, 5. $A\dot{+}A=\emptyset$,

6. $A\dot{+}A^c=\Omega$, 7. $A^c\dot{+}B^c = A\dot{+}B$, 8. $A\dot{+}(A\dot{+}B)=B$

9. $A\cap(B\dot{+}\Gamma) = (A\cap B)\dot{+}(A\cap\Gamma)$ (Ἐπιμεριστικότητα τῆς τομῆς ὡς πρός τή συμμετρική διαφορά).

6. Τοῦ συμπληρωματικοῦ A^c:

1. $A\cap A^c=\emptyset$, 2. $A\cup A^c=\Omega$, 3. $A\subseteq B \Leftrightarrow B^c\subseteq A^c$

4. $\emptyset^c=\Omega$, 5. $\Omega^c=\emptyset$, 6. $B\subset A \Rightarrow B^c\neq\emptyset$.

Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι δύο σύνολα A καί B εἶναι ἴσα ἐργαζόμαστε συνήθως κατά τούς ἑξῆς τρόπους:

α). Ἀποδεικνύουμε ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά μέλη τῆς ἰσότητας εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου. Δηλ. θεωροῦμε τυχόν στοιχεῖο x μέ $x\in A$ καί ἀποδεικνύουμε ὅτι $x\in B$. Κατόπιν θεωροῦμε τό τυχόν στοιχεῖο y μέ $y\in B$ καί ἀποδεικνύουμε ὅτι $y\in A$.

β). Ξεκινώντας ἀπό ἕνα ἀπό τά μέλη τῆς συνολοϊσότητας καί μετασχηματίζοντας αὐτό μέ τή βοήθεια γνωστῶν ἰδιοτήτων ἤ προτάσεων καταλήγουμε στό δεύτερο μέλος.

γ). Χρησιμοποιώντας λογικές ἰσοδυναμίες στίς πράξεις μεταξύ τῶν συνόλων νά φθάσουμε ἀπ' τό πρῶτο μέλος στό δεύτερο, ἀποδεικνύοντας διαδοχικά ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία $x\in A \Leftrightarrow x\in B$.

Διμελεῖς σχέσεις - Ἰσοδυναμίες.

Ἕνα στοιχεῖο α πού δίδεται σάν πρῶτο καί ἕνα στοιχεῖο β πού δίδεται σάν δεύτερο σχηματίζουν ἕνα νέο στοιχεῖο πού γράφεται (α,β) καί καλεῖται **διατεταγμένο ζεῦγος.** Ἀπ' τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \Leftrightarrow \alpha=\gamma,\ \beta=\delta$. Π.χ. ἕνα κλάσμα μέ ἀριθμητή α καί παρονομαστή β μπορεῖ νά παρασταθεῖ σάν ζεῦγος (α,β)· ἕνας μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i$ μπορεῖ νά παρασταθεῖ σάν ζεῦγος (α,β).

Ἔστω τώρα δύο σύνολα A καί B. Τό σύνολο τῶν ζευγῶν (α,β) μέ $\alpha\in A$ καί $\beta\in B$ καλεῖται **καρτεσιανό γινόμενο** τοῦ A ἐπί τοῦ B καί γράφεται $A\times B=\{(x,y): x\in A \text{ καί } y\in B\}$.

Ἕνα ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A\times B$ λέγεται **διμελής σχέση** ἀπό τό A στό B· δηλ. κάθε διμελής σχέση εἶναι ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα ζεῦγος (x,y) ἀνήκει σέ μιά σχέση R γράφουμε xRy πού σημαίνει $(x,y)\in R$. Εἰδικώτερα κάθε σχέση ἀπό ἕνα σύνολο A στό ἴδιο σύνολο A, δηλ. κάθε ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A\times A$ λέγεται **σχέση μέσα** στό A.
Π.χ. Ἄν $A=\{2,3,4,6,8\}$ ἡ (διμελής) σχέση R πού ὁρίζεται ἀπό τό σύνολο $\{(x,y): x\in A \text{ διαιρέτης τοῦ } y\in A\}$ εἶναι:

$$R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(4,4),(4,8),(6,6),(8,8)\}.$$

Κατηγορίες σχέσεων.

1. Μία σχέση R σ' ἕνα σύνολο A λέγεται **ἀνακλαστική** τότε καί μόνον τότε ἄν $xRx\ \forall x\in A$ ($\forall$ σημαίνει "γιά κάθε").
Π.χ. $xRx \Leftrightarrow$ ὁ x διαιρεῖ τόν y εἶναι ἀνακλαστική γιατί $xRx\ \forall x\in A$ (ὅπου A ὁποιοδήποτε σύνολο πραγμ. ἀριθμῶν).

2. Μία σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **συμμετρική** τότε καί μόνον τότε άν $xRy \Leftrightarrow yRx$· π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ ό x καί ό y είναι συμμαθητές, είναι συμμετρική, γιατί άν xRy τότε καί yRx.

3. Μία σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **άντισυμμετρική** τότε καί μόνον τότε, άν άπ' τίς σχέσεις xRy καί yRx συνεπάγεται ότι $x=y$. Π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ ό x είναι διαιρέτης τοῦ y, είναι άντισυμμετρική, γιατί άν xRy, $yRx \Rightarrow x=y$.

4. Μία σχέση R σ' ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατική** τότε καί μόνον τότε, άν άπ' τίς σχέσεις xRy καί yRz συνεπάγεται ότι xRz. Π.χ. $xRy \Leftrightarrow$ ή εύθεῖα x καί ή εύθεῖα y έχουν τήν ίδια διεύθυνση. Ή R είναι μεταβατική, γιατί άπ' τίς σχέσεις xRy, $yRz \Rightarrow xRz$.

Μία σχέση σ' ένα σύνολο A ή όποία είναι:

α) άνακλαστική

β) συμμετρική

γ) μεταβατική

λέγεται **ίσοδυναμία ή σχέση ίσοδυναμίας** είς τό A καί συμβολίζεται μέ $\sim$. Π.χ. ένα σύνολο όμοίων τριγώνων είναι μία ίσοδυναμία, γιατί πληροῦνται οί σχέσεις α, β καί γ.

Έστω $\sim$ μία ίσοδυναμία είς τό A καί $\alpha \in A$. Τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A πού είναι ίσοδύναμα πρός τό α λέγεται **κλάση ίσοδυναμίας** τοῦ α καί συμβολίζεται μέ $[\alpha]$. Τό δέ σύνολο τῶν κλάσεων ίσοδυναμίας λέγεται **σύνολο πηλίκο** τοῦ A διά τῆς $\sim$ καί συμβολίζεται μέ $A/\sim$. Π.χ. Άν A τό σύνολο τῶν μαθητῶν ένός γυμνασίου καί ή ἰσοδυναμία ∼ πού ὁρίζεται ἀπ' τόν τύπο: $x \sim y \Leftrightarrow$ οἱ μαθητές x καί y φοιτοῦν στήν ἴδια τάξη, τότε ἡ κλάση ἰσοδυναμίας τοῦ μαθητοῦ α εἶναι τό σύνολο πού ἔχει στοιχεῖα τόν α καί τούς συμμαθητές του, δηλ ἡ τάξη τῶν μαθητῶν. Τό σύνολο πηλῖκο $A/\sim$ εἶναι ἐδῶ τό σύνολο τῶν τάξεων τοῦ γυμνασίου.

Μία σχέση σ' ἕνα σύνολο A ἡ ὁποία εἶναι:

α') ἀνακλαστική

β') ἀντισυμμετρική

γ') μεταβατική

λέγεται **διάταξη** ἤ **σχέση διάταξης** εἰς τό A καί συμβολίζεται συνήθως μέ $\prec$. Τό σύνολο A πού ἔχει ὁρισθεῖ μία διάταξη λέγεται **διατεταγμένο σύνολο** καί παριστάνεται μέ τό ζεῦγος $(A, \prec)$. Π.χ. ἡ σχέση $\leq$ εἶναι μία διάταξη στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν γιατί α') $\alpha \leq \alpha$ $(\alpha = \alpha)$, β') Ἄν $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ καί γ') Ἄν $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \gamma \Rightarrow$ καί $\alpha \leq \gamma$, δηλ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι διατεταγμένο ὡς πρός τή σχέση $\leq$.

Ἀσκήσεις.

1.1. Ἄν $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ καί $\Gamma = \{3, 4, 5, 6\}$ νά βρεθοῦν **α')** τό $(A \cup B) \cup \Gamma$, **β')** τό $A - B$, **γ')** τό $B - A$ **δ')** τό $A \cap B \cap \Gamma$ καί **ε')** τό $(A - B) \cap \Gamma$.

Λύση. **α')** Εἶναι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ καί $(A \cup B) \cup \Gamma =$

$\{1,2,3,4,5,6,8\}$, **β')** $A-B=\{1,3\}$, **γ')** $B-A=\{6,8\}$
δ') $A\cap B\cap \Gamma=\{4\}$ καί **ε')** $(A-B)\cap\Gamma=\{1,3\}\cap\{3,4,5,6\}=\{3\}$.

1.2. Νά δειχθεῖ ὅτι $(A-B)\cap B=\emptyset$.

Λύση. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς διαφορᾶς δύο συνόλων τό σύνολο $A-B$ ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ A πού δέν ἀνήκουν στό B· ἄρα τά σύνολα $A-B$ καί B δέν ἔχουν κοινά στοιχεῖα δηλ. εἶναι ξένα μεταξύ τους.

1.3. Ἄν A, B, Γ, Δ εἶναι τυχόντα σύνολα νά δειχθοῦν οἱ ἰσότητες: **α')** $(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)=A-(B\cup\Gamma\cup\Delta)$,
β') $(A\cap B-\Gamma)\cap(A\cap\Gamma-B)=\emptyset$,
γ') $(A\cup B)\cap(A-B)=A-B$,
δ') $(A\cup B\cup\Gamma)\cap(A\cup\Gamma-B)\cap(A\cup B-\Gamma)=A-(B\cup\Gamma)$.

Λύση. α'). Ἔστω $x\in(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)$· ἑπομένως κατά τόν ὁρισμό τῆς τομῆς $x\in(A-B)$ καί $x\in(A-\Gamma)$ καί $x\in(A-\Delta)$. Ἀπ' τήν $x\in(A-B)$ προκύπτει $x\in A$ καί $x\notin B$ (1), ἀπ' τήν $x\in(A-\Gamma)$ προκύπτει $x\in A$ καί $x\notin\Gamma$ (2) καί ἀπ' τήν $x\in(A-\Delta)$ προκύπτει $x\in A$ καί $x\notin\Delta$ (3). Ἀπ τίς (1), (2), (3), προκύπτει ὅτι $x\in A$ καί $x\notin B\cup\Gamma\cup\Delta$ ἑπομένως $x\in(A-B\cup\Gamma\cup\Delta)$. Δηλ. τό τυχόν στοιχεῖο τοῦ συνόλου $(A-B)\cap(A-\Gamma)\cap$ $\cap(A-\Delta)$ εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A-B\cup\Gamma\cup\Delta$, ἤτοι $(A-B)\cap$ $(A-\Gamma)\cap(A-\Delta)\subseteq(A-B\cup\Gamma\cup\Delta)$ (α). Ἀντίστροφα, ἔστω $y\in(A-B\cup\Gamma\cup\Delta)$· ἄρα $y\in A$ καί $y\notin B\cup\Gamma\cup\Delta$ (4). Ἀπ' τήν (4) προκύπτει $y\notin B$, $y\notin\Gamma$ καί $y\notin\Delta$. Τώρα ἀπ' τήν $y\in A$ καί $y\notin B$ προκύπτει ὅτι $y\in(A-B)$. Ἐπίσης ἀπ' τίς $y\in A$, $y\notin\Gamma$ προκύπτει ὅτι $y\in(A-\Gamma)$ καί ἀπ' τίς

$y \in A$, $y \notin \Delta$ προκύπτει ὅτι $y \in (A-\Delta)$, ἑπομένως καί στή τομή τους δηλ. $y \in (A-B) \cap (A-\Gamma) \cap (A-\Delta)$, δηλ. τό τυχόν στοιχεῖο y τοῦ συνόλου $A-B \cup \Gamma \cup \Delta$ εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ συνόλου $(A-B) \cap (A-\Gamma) \cap (A-\Delta)$, ἤτοι $A-B \cup \Gamma \cup \Delta \subseteq (A-B) \cap (A-\Gamma) \cap (A-\Delta)$ (β). Ἀπ' τίς σχέσεις (α) καί (β) προκύπτει ἡ ἰσότητα τῶν δύο συνόλων.

β'). Ἔστω $x \in (A \cap B - \Gamma)$· ἄρα $x \in A \cap B$ καί $x \notin \Gamma$ ἤ $x \in A$ καί $x \in B$ καί $x \notin \Gamma$. Ἐπειδή $x \in A$ καί $x \notin \Gamma$ προκύπτει $x \notin A \cap \Gamma$ ἄρα $x \notin$ $\notin (A \cap \Gamma - B)$, δηλ. τό σύνολο $A \cap \Gamma - B$ δέν περιέχει τό τυχόν στοιχεῖο x τοῦ συνόλου $A \cap B - \Gamma$ ἑπομένως δέν περιέχει κανένα στοιχεῖο αὐτοῦ, ἄρα τά σύνολα $A \cap B - \Gamma$ καί $A \cap \Gamma - B$ εἶναι ξένα μεταξύ τους ἑπομένως θά εἶναι $(A \cap B - \Gamma) \cap (A \cap \Gamma - B) = \emptyset$.

γ') Ἔστω $x \in (A \cup B) \cap (A-B)$· ἄρα $x \in (A \cup B)$ (1) καί $x \in (A-B)$ (2). Ἀπ' τή (1) προκύπτει ἤ $x \in A$, ἤ $x \in B$, ἤ $x \in A$ καί $x \in B$. Ἀπ' τή (2) προκύπτει $x \in A$ καί $x \notin B$ δηλ. τελικά $x \in A$ καί $x \notin B$ ἄρα $x \in (A-B)$ δηλ. $(A \cup B) \cap (A-B) \subseteq A-B$ (α). Ἔστω τώρα $y \in (A-B)$· ἄρα $y \in A$ καί $y \notin B$ ἤ ἀκόμα $y \in A \cup B$ καί $y \in (A-B)$ ἄρα καί στή τομή τους δηλ. $y \in (A \cup B) \cap (A-B)$ ἤτοι $A-B \subseteq (A \cup B) \cap (A-B)$ (β). Ἀπ' τίς (α) καί (β) προκύπτει ἡ συνολοϊσότητα.

δ'). Ἔστω $x \in (A \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma - B) \cap (A \cup B - \Gamma)$· ἤτοι $x \in A \cup B \cup \Gamma$ (1), $x \in (A \cup \Gamma - B)$ (2), $x \in (A \cup B - \Gamma)$ (3). Ἀπ' τίς (2) καί (3) προκύπτει ὅτι $x \in A \cup \Gamma$ καί $x \notin B$, καθώς καί $x \in A \cup B$ καί $x \notin \Gamma$ ἄρα $x \in A$ καί $x \notin B$, $x \notin \Gamma$, δηλ. $x \notin B \cup \Gamma$ ἤτοι $x \in (A - B \cup \Gamma)$ ἄρα $(A \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma - B) \cap$ $\cap (A \cup B - \Gamma) \subseteq A - B \cup \Gamma$ (α). Ἔστω τώρα $y \in (A - B \cup \Gamma)$· ἄρα $y \in A$ καί $y \notin B \cup \Gamma$, ἤ $y \notin B$, $y \notin \Gamma$. Ἐπειδή $y \in A$, $y \notin B$, $y \notin \Gamma$ προκύπτει $y \in A \cup B \cup \Gamma$, $y \in (A \cup B - \Gamma)$, $y \in (A \cup \Gamma - B)$ ἄρα καί στή τομή τους δηλ. $y \in (A \cup B \cup \Gamma) \cap$ $(A \cup \Gamma - B) \cap (A \cup B - \Gamma)$ δηλ. $(A - B \cup \Gamma) \subseteq (A \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma - B) \cap (A \cup B - \Gamma)$ (β).

Ἀπ' τὶς (α) καί (β) προκύπτει ἡ ἰσότητα.

1.4. Νά δειχθεῖ ὅτι $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (τύπος τοῦ **De Morgan**).

Λύση. Κατ' ἀρχάς τά σύνολα $(A \cup B)^c$, A^c, B^c εἶναι συμπληρωματικά τῶν $A \cup B$, A, B ὡς πρός τό ἴδιο σύνολο ἀναφορᾶς Ω. Ἔστω x τυχόν στοιχεῖο τοῦ $(A \cup B)^c$ δηλ. $x \in (A \cup B)^c$ ἄρα $x \notin (A \cup B)$ ἤ $x \notin A$ καί $x \notin B$ δηλ. $x \in A^c$ καί $x \in B^c$ ἄρα $x \in A^c \cap B^c$ δηλ. τό σύνολο $A^c \cap B^c$ περιέχει τό τυχόν στοιχεῖο τοῦ συνόλου $(A \cup B)^c$ ἄρα $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ (α). Ἔστω τώρα $y \in A^c \cap B^c$. ἄρα $y \in A^c$ καί $y \in B^c$ ἑπομένως $y \notin A$ καί $y \notin B$. Ἄρα $y \notin (A \cup B)$ δηλ. $y \in (A \cup B)^c$ καί ἄρα $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ (β). Ἀπ' τίς (α) καί (β) προκύπτει $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1.5. Νά δειχθεῖ ὅτι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (τύπος τοῦ **De Morgan**).

Λύση. Ἔστω $x \in (A \cap B)^c$ ἄρα $x \notin A \cap B$ (1). Ἀπ τήν (1) προκύπτει α') $x \notin A$, $x \notin B$, β') $x \in A$, $x \notin B$, γ') $x \notin A$, $x \in B$. Ἀπ' τήν (α') προκύπτει $x \in A^c$ καί $x \in B^c$ ἄρα $x \in A^c \cup B^c$. Ἀπ' τήν (β') προκύπτει $x \notin A^c$ καί $x \in B^c$ ἄρα $x \in A^c \cup B^c$. Ἀπ' τήν (γ') ὁμοίως $x \in A^c$ καί $x \notin B^c$ ἄρα $x \in A^c \cup B^c$. Δηλ. καί στίς τρεῖς δυνατές περιπτώσεις τό σύνολο $A^c \cup B^c$ περιέχει τό τυχόν στοιχεῖο x τοῦ συνόλου $(A \cap B)^c$ δηλ. $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ (α). Ἔστω τώρα $y \in A^c \cup B^c$ (2). Ἀπ' τή (2) προκύπτει δ') $y \in A^c$, $y \in B^c$, ε') $y \in A^c$, $y \notin B^c$, στ') $y \notin A^c$, $y \in B^c$. Ἀπ' τήν (δ') προκύπτει ὅτι $y \notin A$, $y \notin B$ ἄρα $y \notin (A \cap B)$ δηλ. $y \in (A \cap B)^c$. Ἀπ' τήν (ε') προκύπτει ὅτι $y \notin A$, $y \in B$ ἄρα $y \notin (A \cap B)$ δηλ. $y \in (A \cap B)^c$. Τέλος ἀπ' τήν (στ') προκύπτει ὅτι $y \in A$, $y \notin B$ ἄρα $y \notin (A \cap B)$ δηλ. $y \in (A \cap B)^c$. Ἤτοι γιά ὅλες τίς περιπτώσεις τό σύνολο $(A \cap B)^c$ περιέχει τό τυχόν $y \in A^c \cup B^c$. Ἄρα $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ (β). Ἀπ' τίς σχέσεις (α) καί (β) προκύπτει ὅτι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.6. Νά δειχθεῖ ὅτι $(A-B)^c = A^c \cup B$.

Λύση. Ἔστω $x \in (A-B)^c$· ἄρα $x \notin (A-B)$ (1). Ἀπ' τήν (1) προκύπτει α') $x \in A$, $x \in B$, β') $x \notin A$, $x \in B$, γ') $x \notin A$, $x \notin B$. Ἀπ' τήν (α') προκύπτει $x \notin A^c$, $x \in B$ ἤ $x \in A^c \cup B$. Ἀπ' τήν (β') προκύπτει $x \in A^c$, $x \in B$ ἤ $x \in A^c \cup B$. Ἀπ' τή (γ') προκύπτει $x \in A^c$, $x \notin B$ ἤ $x \in A^c \cup B$ δηλ. $(A-B)^c \subseteq A^c \cup B$ (α). Ἔστω τώρα $y \in A^c \cup B$ (2). Ἀπ' τή (2) προκύπτει δ') $y \in A^c$, $y \in B$, ε') $y \in A^c$, $y \notin B$, στ') $y \notin A^c$, $y \in B$. Ἀπ' τή (δ') προκύπτει $y \notin A$, $y \in B$ ἤ $y \notin (A-B)$ ἄρα $y \in (A-B)^c$. Ἀπ' τήν (ε') προκύπτει $y \notin A$, $y \notin B$ ἤ $y \notin (A-B)$ ἄρα $y \in (A-B)^c$. Καί ἀπ' τήν (στ') προκύπτει $y \in A$, $y \in B$ ἤ $y \notin (A-B)$ ἄρα $y \in (A-B)^c$. Δηλ. $A^c \cup B \subseteq (A-B)^c$ (β). Ἀπ' τίς (α), (β) προκύπτει $(A-B)^c = A^c \cup B$.

1.7. Νά δειχθεῖ ὅτι **α')** $(A^c)^c = A$, **β')** $A - B = A \cap B^c$ **γ')** $A \cap (B - \Gamma) = A \cap B - A \cap \Gamma$, **δ')** $A \dot{+} B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

Λύση. α'). Ἔστω $x \in (A^c)^c$· ἄρα $x \notin (A^c)$ δηλ. $x \in A$ ἑπομένως $(A^c)^c \subseteq A$ (α). Ἔστω τώρα $y \in A$· ἄρα $y \notin A^c$ δηλ. $y \in (A^c)^c$ ἤτοι $A \subseteq (A^c)^c$ (β). Ἀπ' τίς (α), (β) προκύπτει $(A^c)^c = A$.

β'). Ἔστω $x \in (A-B)$· δηλ. $x \in A$, $x \notin B$ ἤ $x \in A$, $x \in B^c$ ἄρα $x \in A \cap B^c$ δηλ. $(A-B) \subseteq A \cap B^c$ (α). Ἀντίστροφα ἔστω $y \in A \cap B^c$· τότε $y \in A$ καί $y \in B^c$ ἤ $y \in A$, $y \notin B$ δηλ. $y \in (A-B)$ ἤτοι $A \cap B^c \subseteq A - B$ (β). Ἀπ' τίς (α), (β) προκύπτει $A - B = A \cap B^c$.

γ'). Ἔστω $x \in A \cap (B - \Gamma)$· τότε $x \in A$ καί $x \in (B - \Gamma)$ ἤ $x \in A$, $x \in B$,

$x \notin \Gamma$. Ἀπ' τίς $x \in A$, $x \notin \Gamma$ προκύπτει $x \notin A \cap \Gamma$. Ἀπ' τίς $x \in A$, $x \in B$ προκύπτει $x \in A \cap B$. Ἀπ' τίς δύο τελευταῖες σχέσεις προκύπτει $x \in (A \cap B - A \cap \Gamma)$ δηλ. $A \cap (B - \Gamma) \subseteq A \cap B - A \cap \Gamma$ (α). Ἔστω τώρα $y \in (A \cap B - A \cap \Gamma)$· δηλ. $y \in A \cap B$ (1), $y \notin A \cap \Gamma$ (2). Ἀπ' τήν (1) προκύπτει $y \in A$, $y \in B$ (3) καί ἀπ' τή (2) προκύπτει $y \notin A$, $y \notin \Gamma$ ἤ $y \in A$, $y \notin \Gamma$ ἤ $y \notin A$, $y \in \Gamma$ (4). Ἀπ' τίς (3) καί (4) προκύπτει $y \in A$, $y \in B$, $y \notin \Gamma$ (Συναλήθευση τῶν (3), (4)). Ἄρα $x \in A \cap (B - \Gamma)$ δηλ. $A \cap B - A \cap \Gamma \subseteq A \cap (B - \Gamma)$ (β). Ἀπ' τίς (α) καί (β) προκύπτει ἡ πρός ἀπόδειξη ἰσότητα. δηλ. $A \cap (B - \Gamma) = A \cap B - A \cap \Gamma$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ πράξη "τομή $\cap$" ἐπιμερίζεται ὡς πρός τήν πράξη "διαφορά $-$".

δ'). Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι $A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A)$. Ἔστω $x \in (A - B) \cup (B - A)$. Τότε εἴτε $x \in (A - B)$ δηλ. $x \in A$ καί $x \notin B$ (1), εἴτε $x \in (B - A)$ δηλ. $x \in B$ καί $x \notin A$ (2). Ἀπ' τήν (1) προκύπτει $x \in A \cup B$ καί $x \notin A \cap B$ ἤ $x \in A \cup B$ καί $x \in (A \cap B)^c$ ἤ $x \in A \cup B$ καί $x \in A^c \cup B^c$ (Ἄσκ 1.5)· ἄρα $x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$. Ἀπ' τή (2) προκύπτει $x \in A \cup B$ καί $x \notin A \cap B$ ἄρα ὅμοια $x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ δηλ. $A \dotplus B \subseteq (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ (α). Ἔστω τώρα $y \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ δηλ. $y \in (A \cup B)$ καί $y \in (A^c \cup B^c)$ ἤ $y \in (A \cup B)$ καί $y \in (A \cap B)^c$ δηλ. $y \notin (A \cap B)$ δηλ. ἤ $y \in A$ καί $y \notin B$, ἤ $y \in B$ καί $y \notin A$. (Ἡ περίπτωση $y \notin A$, $y \notin B$ ἀποκλείεται ἀπ' τήν σχέση $y \in (A \cup B)$). Ἀπ' τίς τελευταῖες σχέσεις προκύπτει $y \in (A - B)$ καί $y \in (B - A)$ ἄρα $y \in (A - B) \cup (B - A)$ δηλ. $y \in (A \dotplus B)$ Ἄρα $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \subseteq A \dotplus B$ (β). Ἀπ' τίς (α), (β), προκύπτει ἡ ἰσότητα.

1.8. Νά δειχθεῖ ὅτι $A \cap B = A - (A - B)$.

Λύση. Ἔστω $x \in A \cap B$· ἄρα $x \in A$ καί $x \in B$. Ἐπειδή $x \in A$ καί $x \in B$ προκύπτει $x \notin (A - B)$ ἐπομένως $x \in (A - (A - B))$ δηλ. $A \cap B \subseteq$

$A-(A-B)$ (α). Έστω τώρα $y\in(A-(A-B))$· άρα $y\in A$ καί $y\notin(A-B)$ δηλ. $y\in B$. Επομένως $y\in A\cap B$ δηλ. $A-(A-B)\subseteq A\cap B$ (β). Άπ' τίς (α), (β) προκύπτει ή πρός απόδειξη ισότητα.

1.9. Νά δειχθεί ότι $(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)=A\cup B$.

Λύση. Έστω $x\in(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)$. Τότε άπ' τόν ορισμό τής συμμετροδιαφοράς, είτε $x\in(A\dotplus B)$, $x\notin A\cap B$ (1), είτε $x\notin(A\dotplus B)$, $x\in A\cap B$ (2). Άπ' τήν (1) προκύπτει είτε $x\in A$, $x\notin B$, είτε $x\notin A$, $x\in B$ καί $x\notin A\cap B$ άρα $x\in A\cup B$ δηλ. $(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)\subseteq A\cup B$ (α). Αντίστροφα έστω $y\in A\cup B$· τότε είτε $y\in A$, $y\in B$ (3), είτε $y\in A$, $y\notin B$ (4) είτε $y\notin A$, $y\in B$ (5). Άπ' τήν (3) προκύπτει $y\notin(A\dotplus B)$ καί $y\in(A\cap B)$ άρα $y\in(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)$. Άπ' τίς (4) καί (5) προκύπτει $y\in(A\dotplus B)$ καί $y\notin(A\cap B)$ άρα $y\in(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)$, δηλ. $A\cup B\subseteq(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)$ (β). Άπ' τίς (α), (β) προκύπτει ή ισότητα $(A\dotplus B)\dotplus(A\cap B)=A\cup B$.

1.10. Γιά τυχόντα σύνολα A, B, Γ δείξατε ότι:
$A-[B-(\Gamma-A)]=A-B$.

Λύση. Είναι (Άσκ 1.7β') $\Gamma-A=\Gamma\cap A^c$. Άρα
$B-(\Gamma-A)=B-(\Gamma\cap A^c)=B\cap(\Gamma\cap A^c)^c=$ (Άσκ 1.5) $B\cap(A\cup\Gamma^c)=$ (επιμεριστικότητα τής τομής ώς πρός τήν ένωση) $(B\cap A)\cup(B\cap\Gamma^c)$.
Άρα $A-[B-(\Gamma-A)]=A-[(B\cap A)\cup(B\cap\Gamma^c)]=A\cap[(B\cap A)\cup(B\cap\Gamma^c)]^c=$
$=$ (Άσκ 1.4) $A\cap[(B\cap A)^c\cap(B\cap\Gamma^c)^c]=A\cap[(A^c\cup B^c)\cap(\Gamma\cup B^c)]=$
$=[A\cap(A^c\cup B^c)]\cap(\Gamma\cup B^c)=[(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)]\cap(\Gamma\cup B^c)=$
$[\emptyset\cup(A\cap B^c)]\cap(\Gamma\cup B^c)=(A\cap B^c)\cap(\Gamma\cup B^c)=(A\cap B^c\cap\Gamma)\cup(A\cap B^c\cap B^c)=$

$=(A\cap B^c\cap\Gamma)\cup(A\cap B^c)$. Ἀλλά $A\cap\Gamma\cap B^c\subseteq A\cap B^c$ ἄρα $(A\cap\Gamma\cap B^c)\cup(A\cap B^c)=A\cap B^c=A-B$. Δηλ. $A-[B-(\Gamma-A)]=A-B$.

1.11. Γιά τυχόντα σύνολα A, B, Γ νά δειχθεῖ ὅτι: $(A-B)-\Gamma=A-(B\cup\Gamma)$.

Λύση. Εἶναι $(A-B)-\Gamma=(A\cap B^c)-\Gamma=(A\cap B^c)\cap\Gamma^c=$ (προσεταιρισμός στήν τομή) $A\cap(B^c\cap\Gamma^c)=A\cap(B\cup\Gamma)^c=A-(B\cup\Gamma)$. Ἄρα $(A-B)-\Gamma=A-(B\cup\Gamma)$.

1.12. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά τυχόντα σύνολα A, B, Γ ἰσχύουν οἱ σχέσεις: **α')** $A\times(B\cup\Gamma)=(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$,

β') $A\times(B\cap\Gamma)=(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$,

γ') $A\times(B-\Gamma)=(A\times B)-(A\times\Gamma)$

δηλ. ὅτι τό καρτεσιανό γινόμενο ἐπιμερίζεται ὡς πρός τήν ἕνωση, τομή καί διαφορά.

Λύση. α'). Ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

$(x,y)\in A\times(B\cup\Gamma)\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup\Gamma\Longleftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in\Gamma)\Longleftrightarrow$ $(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in\Gamma)\Longleftrightarrow(x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times\Gamma\Longleftrightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$.

β'). Ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες: $(x,y)\in A\times(B\cap\Gamma)\Longleftrightarrow$ $x\in A\wedge(y\in B\cap\Gamma)\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\in\Gamma\Longleftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge$ $\wedge(x\in A\wedge y\in\Gamma)\Longleftrightarrow(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times\Gamma\Longleftrightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times\Gamma)$.

γ'). Ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες: $(x,y)\in A\times(B-\Gamma)\Longleftrightarrow$ $x\in A\wedge y\in(B-\Gamma)\Longleftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin\Gamma\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin A \times \Gamma \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times \Gamma)$.

1.13. Γιά τυχόντα σύνολα νά δειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις: **α')** $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$,
β') $A \times B - \Gamma \times \Delta = [(A - \Gamma) \times B] \cup [A \times (B - \Delta)]$,
γ') $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$.

Λύση. α'). Ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες:
$(x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \Longleftrightarrow x \in A_1 \cap A_2 \wedge y \in B_1 \cap B_2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2) \wedge (y \in B_1 \wedge y \in B_2) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A_1 \wedge y \in B_1) \wedge (x \in A_2 \wedge y \in B_2) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in A_1 \times B_1 \wedge (x,y) \in A_2 \times B_2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

β'). Ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες: $(x,y) \in A \times B - \Gamma \times \Delta \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin \Gamma \times \Delta \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin \Gamma \vee y \notin \Delta) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin \Gamma) \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin \Delta) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in A - \Gamma \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in B - \Delta) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in (A - \Gamma) \times B \vee (x,y) \in A \times (B - \Delta) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in [(A - \Gamma) \times B] \cup [A \times (B - \Delta)]$.

γ'). Ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες: $(x,y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in (B \times A) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in B \wedge y \in A \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x,y) \in (A \cap B)^2$.

1.14. Στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζουμε τήν διμελῆ σχέση R μέ κανόνα $x R y \iff x^2 - y^2 = \text{πολλαπλ}3$. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ R εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

Λύση. Θά πρέπει ἡ R νά εἶναι ἀνακλαστική· δηλ xRx γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι· εἶναι $x^2 - x^2 = 0 = 3 \cdot 0 = \text{πολ}3$. Θά πρέπει ἡ R νά εἶναι συμμετρική· δηλ ἄν xRy τότε καί yRx γιά κάθε $x, y \in R$. Πράγματι· ἄν $x^2 - y^2 = \text{πολ}3$ τότε καί $y^2 - x^2 = \text{πολ}3$. Θά πρέπει ἡ R νά εἶναι μεταβατική· δηλ ἄν xRy καί yRz τότε xRz. Πράγματι· ἄν $x^2 - y^2 = \text{πολ}3$ καί $y^2 - z^2 = \text{πολ}3$ θά εἶναι $(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = \text{πολ}3$ ἤ $x^2 - z^2 = \text{πολ}3$. Ὡς γνωστό ἡ σχέση R ἐπειδή εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

1.15. Ἔστω X τυχόν μή κενό σύνολο καί $P(X)$ τό σύνολο τῶν ὑποσυνόλων αὐτοῦ. Ἡ σχέση $R = \subseteq$ ὡρισμένη στό $P(X)$ εἶναι σχέση διάταξης.

Λύση. Θά πρέπει ἡ σχέση $\subseteq$ νά εἶναι ἀνακλαστική, δηλ ARA γιά κάθε $A \in P(X)$. Πράγματι $A \subseteq A$ γιά κάθε A ὑποσύνολο τοῦ X (ἤ κάθε $A \in P(X)$). Ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρική. Πράγματι, ἔστω A, B ὑποσύνολα τοῦ X μέ $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A$. Τότε ὡς γνωστόν ἔχουμε $A = B$ δηλ πληροῦται ἡ ἀντισυμμετρική σχέση: ἄν xRy καί yRx τότε $x = y$ γιά κάθε $x, y \in A$. Ἡ σχέση R εἶναι μεταβατική. Πράγματι γιά τρία τυχόντα σύνολα A, B, Γ ὑποσύνολα τοῦ X μέ $A \subseteq B$ καί $B \subseteq \Gamma$ προκύπτει ὅτι $A \subseteq \Gamma$. Ὥστε ἡ σχέση $\subseteq$ (πού λέγεται καί σχέση ἐγκλεισμοῦ) εἶναι μία σχέση διάταξης στό $P(X)$.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Οἱ φυσικοί ἀριθμοί πού τό σύνολό τους τό παριστάνουμε μέ N εἰσάγονται μέ τή βοήθεια τῶν παρακάτω προτάσεων πού εἶναι γνωστές σάν **ἀξιώματα τοῦ Peano.**

I. Ὁ ἀριθμός 1 εἶναι φυσικός δηλ $1 \in N$.

II. Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ὑπάρχει ἕνας καί μόνο ἕνας ἑπόμενος φυσικός ἀριθμός, δηλ $\nu \in N \Rightarrow \nu+1 \in N$ πού συμβολίζεται μέ $\nu+1$. Ἀπό τό ἀξίωμα αὐτό προκύπτει ὅτι τό πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρο.

III. Δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν μέ ἑπόμενο τόν 1, δηλ ὁ $\nu+1$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 1 γιά κάθε $\nu \in N$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ 1 εἶναι ὁ πρῶτος ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς.

IV. Δύο φυσικοί ἀριθμοί πού ἔχουν τόν ἴδιο ἑπόμενο εἶναι ἴσοι. Δηλ ἄν $\mu+1=\nu+1 \Leftrightarrow \mu=\nu$. Δηλ κάθε φυσικός ἀριθμός προέρχεται ἀπό ἕνα καί μόνο ἕνα προηγούμενό του.

V. (Ἀρχή τῆς τελείας ἤ μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς). Ἄν Φ_1 εἶναι σύνολο φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλ $\Phi_1 \subseteq N$ τέτοιο ὥστε α') $1 \in \Phi_1$, β') $\forall k \in N$ δεχόμενοι ὅτι $k \in \Phi_1$ ἀποδεικνύουμε ὅτι καί ὁ $k+1 \in \Phi_1$, τότε τό σύνολο Φ_1 συμπίπτει μέ τό σύνολο τῶν φυσικῶν δηλ $\Phi_1 = N$.

Θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Ἄν $P(\nu)$ εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τέτοιος ὥστε $P(1)$ εἶναι ἀληθής πρόταση καί γιά κάθε $k \in N$, ἐκ τῆς $P(k)$ προκύπτει ὅτι καί ἡ $P(k+1)$

εἶναι ἀληθής τότε ὁ προτασιακός τύπος ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in N$. Ἄν σάν σύνολο ἀναφορᾶς ληφθεῖ τό $N_{\nu_0} = \{\nu \in N : \nu \geq \nu_0\}$ ὅπου $\nu_0 \in N$ καί ὁ $p(\nu_0)$ εἶναι ἀληθής, τότε ὁ προτασιακός τύπος ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν μέ $\nu \geq \nu_0$.

Στό θεώρημα αὐτό στηρίζεται ἡ μέθοδος τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπόδειξης. Ἔτσι γιά νά ἀποδείξουμε τήν ἀλήθεια μιᾶς πρότασης $p(\nu)$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1. Διαπιστώνουμε τήν ἀλήθεια τῆς πρότασης γιά $\nu=1$ (ἐφ' ὅσον αὐτή γιά $\nu=1$ ἔχει νόημα), ἤ γιά τόν ἐλάχιστο φυσικό ν_0 πού ἔχει νόημα ἡ πρόταση.

2. Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά $\nu=k$, $k \in N$, δηλ. $p(k)$ ἰσχύει, ἀποδεικνύουμε μέ τή βοήθεια τῆς $p(k)$ (ἐνδεχομένως δέ καί τῆς $p(1)$), τήν ἰσχύ τῆς $p(k+1)$.

3. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ πρόταση $p(\nu)$ ἀληθεύει γιά κάθε $\nu \in N$ ἤ γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$ ἐφ' ὅσον ν_0 εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικός, γιά τόν ὁποῖο ἡ $p(\nu)$ ἔχει νόημα.

Ἀσκήσεις.

2.1. Μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς νά δειχθεῖ ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύουν:

α') $1+3+5+\cdots+(2\nu-1) = \nu^2$,

β') $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2\nu-1)^2 = \frac{1}{3}\nu(4\nu^2-1)$,

γ') $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2\nu-1)^3 = \nu^2(2\nu^2-1)$,

δ') $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+1)^2$,

ε') $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^\nu = 2(2^\nu-1)$.

Λύση. α'). Είναι $p(1)$: $1=1^2=1$ δηλ. ἡ πρόταση ἰσχύει γιά $\nu=1$. Ἔστω ὅτι ἡ $p(k)$ ἰσχύει, δηλ. $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ (1). Θά δείξουμε ὅτι αὐτή ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$ δηλ. $p(k+1)$ ἰσχύει. Εἶναι $p(k+1)$: $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ (2). Ἀρκεῖ λοιπόν νά δειχθεῖ ἡ (2). Πράγματι ἐκ τῆς (1) προκύπτει γιά τήν (2): $k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$ δηλ. ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$.

β'). Εἶναι $p(1)$: $1^2=\frac{1}{3}\cdot 1(4\cdot 1^2-1)$ ἤτοι $1=1$ δηλ. ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ $p(k)$ ἰσχύει δηλ. $1^2+3^2+5^2+\cdots(2k-1)^2=\dfrac{k(4k^2-1)}{3}$ (1). Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ ἰσχύει δηλ. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\dfrac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3}$ (2). Πράγματι ἄν λάβουμε ὑπ' ὄψη τήν (1) πού δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει θά ἔχουμε: $\dfrac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)=$

$$\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}=\frac{4k^3+4k^2+8k^2+3k+3}{3}=$$

$$\frac{4k^2(k+1)+8k(k+1)+3k(k+1)}{3}=\frac{(k+1)[4k^2+8k+3]}{3}=\frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3}$$

δηλ. ἡ (2). Ἄρα ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ν.

γ'). Εἶναι $p(1)$: $1^3=1^2(2\cdot 1^2-1)$ δηλ. $1=1$ ἤτοι ἡ $p(1)$ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι καί ἡ $p(k)$ ἰσχύει δηλ. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$ (1). Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ ἰσχύει, δηλ. θά δείξουμε ὅτι $p(k+1)$: $1^3+3^3+5^3+(2k-1)^3+(2k+1)^3=(k+1)^2[2(k+1)^2-1]$ (2). Πράγματι, ἄν ληφθεῖ ὑπ' ὄψη ἡ (1) προκύπτει $k^2(2k^2-1)+(2k+1)^3=$

$2k^4-k^2+8k^3+12k^2+6k+1=2k^4+8k^3+12k^2+8k+2-(k^2+2k+1)=$

$2(k+1)^4-(k+1)^2=(k+1)^2[2(k+1)^2-1]$ δηλ. ἡ (2). Ἄρα ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ν.

δ'). Εἶναι $p(1)$: $2^3=2\cdot 1^2(1+1)^2$ ἤτοι $8=8$ δηλ. ἡ $p(1)$ ἰσχύει.

Έστω ότι ή $p(k)$ ισχύει δηλ. $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2k)^3=2k^2(k+1)^2$ (1). Θά δείξουμε τήν αλήθεια καί τής $p(k+1)$, δηλ θά δείξουμε ότι $2^3+4^3+6^3+(2k)^3+(2k+2)^3=2(k+1)^2[(k+1)+1]^2$ (2). Πράγματι λαμβάνοντας ύπ' όψη τήν (1) έχουμε: $2k^2(k+1)^2+[2(k+1)]^3=$
$=2k^2(k+1)^2+2^3(k+1)^3=2(k+1)^2[k^2+4(k+1)]=$
$2(k+1)^2(k+2)^2=2(k+1)^2[(k+1)+1]^2$ δηλ ή (2). Άρα ή $p(\nu)$ ισχύει γιά κάθε φυσικό αριθμό ν.

ε'). Είναι $p(1)$: $2^1=2(2^1-1)$ ήτοι $2=2$ δηλ ισχύει. Έστω ότι ή $p(k)$ ισχύει δηλ $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k=2(2^k-1)$ (1). Θά δείξουμε ότι καί ή $p(k+1)$ ισχύει δηλ $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=2(2^{k+1}-1)$ (2). Άπ' τήν (1) προκύπτει $2(2^k-1)+2^{k+1}=2^{k+1}-2+2^{k+1}=2\cdot 2^{k+1}-2=$
$=2(2^{k+1}-1)$ δηλ ή (2) καί άρα ή $p(\nu)$ ισχύει γιά κάθε $\nu\in N$.

2.2. Νά δειχθεί ότι γιά κάθε φυσικό ν ισχύουν οί έξής σχέσεις: **α')** $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1)=\frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$,

β') $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots+(\nu+1)\cdot 2^{\nu-1}=\nu\cdot 2^\nu$,

γ') $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}.$$

Λύση. α'). Είναι $p(1)$: $1\cdot 2=\frac{1}{3}1\cdot(1+1)(1+2)$ ήτοι $2=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3=$
$=2$ δηλ ισχύει. Έστω ότι $p(k)$ ισχύει δηλ. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=$
$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ (1). Θά δείξουμε ότι ισχύει καί ή $p(k+1)$ δηλ τήν $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ (2). Άπ' τήν (1) προκύπτει $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+\frac{3}{3}(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ δηλ ή (2) ήτοι ή $p(\nu)$ ισχύει γιά κάθε φυσικό ν.

β'). Είναι $p(1): 2\cdot 2^0 = 1\cdot 2^1$ ήτοι $2\cdot 1 = 1\cdot 2$ δηλ. ισχύει. Έστω ότι $p(\kappa)$ ισχύει δηλ. $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots+(\kappa+1)\cdot 2^{\kappa-1}=\kappa\cdot 2^\kappa$ (1). Θά δείξουμε ότι καί ή $p(\kappa+1)$ ισχύει δηλ. $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+$ $+(\kappa+1)\cdot 2^{\kappa-1}+(\kappa+2)\cdot 2^\kappa=(\kappa+1)\cdot 2^{\kappa+1}$ (2). Άπ' τήν (1) προκύπτει:

$\kappa\cdot 2^\kappa+(\kappa+2)\cdot 2^\kappa=\kappa\cdot 2^\kappa+\kappa\cdot 2^\kappa+2\cdot 2^\kappa=2\cdot\kappa\cdot 2^\kappa+2\cdot 2^\kappa=$
$=2^\kappa(2\kappa+2)=2^\kappa\cdot 2(\kappa+1)=(\kappa+1)\cdot 2^{\kappa+1}$ δηλ. ή (2). Άρα ή $p(\nu)$ ισχύει.

γ') Είναι $p(1): \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(1+1)(1+2)(1+3)}$ ήτοι

$\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ ή $\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{72}=\dfrac{1}{24}$ δηλ. ισχύει.

Έστω ότι ή $p(\kappa)$ ισχύει δηλ. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+$

$+\dfrac{1}{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}$ (1). Θά δείξουμε ότι ισχύει καί ή $p(\kappa+1)$ ήτοι $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+$

$+\dfrac{1}{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}+\dfrac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=$

$=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}$ (2). Πράγματι άπ' τήν (1) προκύπτει:

$$=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}+\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=$$
$$=\frac{1}{18}-\frac{\kappa+4}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}+\frac{3}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{3-\kappa-4}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=\frac{1}{18}-\frac{\kappa+1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}=$$
$=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{3(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}$ δηλ. ή (2). Άρα ή $p(\nu)$ ισχύει $\forall\nu\in N$.

2.3. Μέ τήν μέθοδο τής τελείας έπαγωγής νά δειχθεί ότι άν $\alpha\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ τό σύνολο τών πραγματικών άριθμών) μέ $0\leq\alpha\leq 1$, τότε γιά κάθε $\nu\in N$ ισχύουν (άνισότητες **Bernoulli**):

α') $(1-\alpha)^\nu \geq 1-\nu\alpha$, **β')** $(1-\alpha)^\nu \leq \dfrac{1}{1+\nu\alpha}$

Λύση. α'). Γιά $\nu=1$ εἶναι $p(1): (1-\alpha)^1 \geq 1-1\cdot\alpha$ ἤ $1-\alpha=1-\alpha$, δηλ. ἡ πρόταση $p(\nu)$ ἰσχύει σάν ἰσότητα. Ἔστω ὅτι γιά $\nu=k$ ἡ $p(k)$ ἀληθεύει δηλ. ἔστω ὅτι $(1-\alpha)^k \geq 1-k\alpha$ (1) ἰσχύει· θά δείξουμε ὅτι αὐτή ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$ δηλ. $p(\nu+1)$: $(1-\alpha)^{k+1} \geq 1-(k+1)\alpha$ (2). Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ τόν μή ἀρνητικό ἀριθμό $1-\alpha$ $(\alpha \leq 1)$ ἔχουμε: $(1-\alpha)^{k+1} \geq (1-k\alpha)(1-\alpha) = 1-(k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1-(k+1)\alpha$ γιατί ὁ $k\alpha^2 \geq 0$· δηλ. ἰσχύει ἡ (2). Ἄρα ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

β'). Γιά $\nu=1$ εἶναι $p(1): (1-\alpha)^1 \leq \dfrac{1}{1+1\cdot\alpha}$ ἤ $1-\alpha^2 \leq 1$ πού ἰσχύει γιατί ὁ $\alpha \leq 1$. Ἔστω τώρα ὅτι ἰσχύει ἡ $p(k)$ δηλ. $(1-\alpha)^k \leq \dfrac{1}{1+k\alpha}$ (1). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί ἡ $p(k+1)$ δηλ. $(1-\alpha)^{k+1} \leq \dfrac{1}{1+(k+1)\alpha}$ (2). Πράγματι ἀπ' τήν (1), ἄν πολ/με τά μέλη της μέ $(1-\alpha)$ (θετικό) προκύπτει $(1-\alpha)^{k+1} \leq \dfrac{1-\alpha}{1+k\alpha}$. Ἑπομένως ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\dfrac{1-\alpha}{1+k\alpha} \leq \dfrac{1}{1+(k+1)\alpha}$ ὁπότε κατά μείζονα λόγο θά ἰσχύει καί ἡ (2). Πράγματι θά πρέπει: $[1+(k+1)\alpha](1-\alpha) \leq 1+k\alpha$ ἤ $1+k\alpha-(k+1)\alpha^2 \leq 1+k\alpha$ πού ἰσχύει πράγματι γιατί $(k+1)\alpha^2 \geq 0$. Ἄρα θά ἰσχύει καί ἡ (2).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Οἱ σχέσεις α'), β') ἰσχύουν καί ἄν ἀλλαχθοῦν τά πρόσημα.

2.4. Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ εἶναι θετικοί ἀριθμοί $\neq$ τοῦ 1 νά δειχθεῖ ὅτι $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) > 2^\nu \sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$.

Λύση. Γιά $\nu=1$ ἡ $p(1)$: $1+\alpha_1 > 2^1\cdot\sqrt{\alpha_1}$ ἤ $1+\alpha_1-2\sqrt{\alpha_1}>0$ ἤ ἀκόμα $(1-\sqrt{\alpha_1})^2>0$ πού ἰσχύει δηλ. ἡ $p(1)$ ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ $p(k)$: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k) > 2^k\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}$ (1) ἰσχύει.

Μέ τή βοήθεια τώρα τῆς (1) καθώς καί τῆς $p(1)$ (όπως ὑποδεικνύεται στή μέθοδο τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπόδειξης 2.) μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τήν $p(k+1)$: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)(1+\alpha_{k+1}) > 2^{k+1}\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k\cdot\alpha_{k+1}}$ (2). Πράγματι ἔχουμε ἀπ' τήν $p(1)$ γιά τόν ἀριθμό α_{k+1}: $1+\alpha_{k+1} > 2\sqrt{\alpha_{k+1}}$ (3). Ἄν πολ/με τώρα τίς (1) καί (3) κατά μέλη θά ἔχουμε:

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)(1+\alpha_{k+1}) > 2^k\cdot 2\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}\cdot\sqrt{\alpha_{k+1}}$

ἤ $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_{k+1}) > 2^{k+1}\cdot\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}}$ δηλ ἡ (2).

2.5. Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ εἶναι θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί νά δειχθεῖ ὅτι $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\geq \nu^2$.

Λύση. Γιά $\nu=1$ ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει σάν ἰσότητα δηλ $\alpha_1\cdot\frac{1}{\alpha_1}\geq 1^2$ ἤ $1=1$. Γιά $\nu=2$ θά εἶναι $(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+1$ ἤ $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+2\geq 2^2$ πού ἰσχύει γιατί τό ἄθροισμα δύο ἀντίστροφων θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε $\geq$ τοῦ 2. (Πράγματι: ἄν $\alpha>0$ τότε $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ διότι $\alpha^2+1-2\alpha\geq 0$). Ἡ ἰσότητα ἰσχύει ἄν $\alpha=1$. Ἔστω τώρα ὅτι ἡ $p(k)$ ἰσχύει. δηλ ἔστω ὅτι $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}\right)\geq k^2$ (1). Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ ἰσχύει δηλ $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k+1})\cdot\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\geq(k+1)^2$ (2). Πράγματι ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στή (2) προκύπτει:

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}\right)+\frac{1}{\alpha_{k+1}}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots$
$\cdots+\alpha_k)+\alpha_{k+1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}\right)+1\geq$ (λόγω τῆς (1))

$$k^2+\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_1}\right)+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{k+1}}+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_2}\right)+\cdots+\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)+1\geq$$

(λόγω της $p(2)$) $k^2+2\cdot k+1=(k+1)^2$ δηλ. η (2) άρα η $p(k+1)$ ισχύει καί γιά $\nu=k+1$ δηλ. γιά κάθε ν φυσικό

2.6. Νά δειχθεί ότι $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{\nu}}{\nu}>\dfrac{2}{3}\sqrt{\nu}$.

Λύση. Γιά $\nu=1$ η $p(1)$ ισχύει: $\dfrac{\sqrt{1}}{1}>\dfrac{2}{3}\sqrt{1}$ δηλ. $1>\dfrac{2}{3}$.
Έστω ότι ισχύει γιά $\nu=k$ δηλ. $p(k)$:
$\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}}{k}>\dfrac{2}{3}\sqrt{k}$ (1). Θά δείξουμε ότι ισχύει καί η $p(k+1)$ δηλ. $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{k+1}>\dfrac{2}{3}\sqrt{k+1}$ (2).
Γιά νά πάρουμε τό πρώτο μέλος της (2) πολ/με την (1) μέ $\dfrac{k}{k+1}$, οπότε θά έχουμε: $\dfrac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k})\cdot k}{k\cdot(k+1)}>\dfrac{2}{3}\sqrt{k}\cdot\dfrac{k}{k+1}$.
Άν τώρα προσθέσουμε καί στά δύο μέλη της ανισότητας τόν παράγοντα $\dfrac{\sqrt{k+1}}{k+1}$ θά προκύψει $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{k+1}>$
$>\dfrac{2\cdot\sqrt{k}}{3}\cdot\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{\sqrt{k+1}}{k+1}$. Επομένως αρκεί νά ισχύει η
$\dfrac{2\cdot\sqrt{k}}{3}\cdot\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{\sqrt{k+1}}{k+1}>\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{k+1}$ οπότε κατά μείζονα λόγο θά ισχύει καί η (2). Η τελευταία σχέση γράφεται
$2k\sqrt{k}+3\sqrt{k+1}>2(k+1)\sqrt{k+1}$ ή $2k\sqrt{k}>(2k-1)\sqrt{k+1}$. Άν υψώσουμε στό τετράγωνο καί τά δύο μέλη της τελευταίας προκύπτει: $4k^2\cdot k>(k+1)(4k^2-4k+1)$ ή $4k^3>4k^3-4k^2+k+4k^2-$ $-4k+1$ ή τελικά $3k-1>0$ πού ισχύει γιατί $k>0$. Άρα ισχύει η (2).

2.7. Νά αποδειχθεί ότι γιά κάθε φυσικό $\nu\geq 4$ ισχύει η σχέση: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\nu}>\nu+1$.

Λύση. Γιά $\nu=\nu_0=4$ ἡ $p(4)$ ἰσχύει γιατί $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}>$ $>4+1=5$. Ἔστω ὅτι ἡ $p(k)$ ἰσχύει μέ $k>4$ δηλ. $\left(\frac{3}{2}\right)^k>k+1$ (1). Θά δείξουμε ὅτι θά ἰσχύει τότε καί ἡ $p(k+1)$: $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}>(k+1)+1$ (2). Ἄν πολ/με τήν (1) μέ $\frac{3}{2}$ προκύπτει: $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}>\frac{3}{2}(k+1)$. Ἑπομένως ἄν ἀποδείξουμε ὅτι $\frac{3}{2}(k+1)>$ $>(k+1)+1$ τότε κατά μείζονα λόγο θά εἶναι καί $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}>k+2$ δηλ θά ἰσχύει ἡ (2). Θά πρέπει νά δείξουμε $3k+3>2k+4$ ἤ $k>1$. Ἡ τελευταία σχέση ὅμως ἰσχύει γιατί ὑποθέσαμε ὅτι $k>4$. Ἄρα θά ἰσχύει καί ἡ (2) δηλ ἡ $p(k+1)$ θά ἰσχύει.

2.8. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ἰσχύει:

$$\left(1+x^{2^0}\right)\left(1+x^{2^1}\right)\left(1+x^{2^2}\right)\cdots\left(1+x^{2^\nu}\right)=\frac{1-x^{2^{\nu+1}}}{1-x}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Λύση. Γιά $\nu=0$ ἡ $p(0)$ γίνεται: $1+x^1=\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$.

Γιά $\nu=1$ εἶναι: $(1+x)(1+x^2)=\frac{1-x^4}{1-x}=\frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1-x}=$ $\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)}{1-x}=(1+x)(1+x^2)$ δηλ καί ἡ $p(1)$ ἰσχύει.

Ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ $p(k)$ δηλ ἔστω ὅτι:

$$(1+x)(1+x^2)\left(1+x^{2^2}\right)\cdots\left(1+x^{2^k}\right)=\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}\quad (1).$$

Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ ἰσχύει, δηλ.

$$(1+x)(1+x^2)\left(1+x^{2^2}\right)\cdots\left(1+x^{2^{k+1}}\right)=\frac{1-x^{2^{k+2}}}{1-x}\quad (2).$$

Πολ/ντας καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ $\left(1+x^{2^{k+1}}\right)$ ἔχουμε

$$(1+x)(1+x^2)\left(1+x^{2^2}\right)\cdots\left(1+x^{2^k}\right)\left(1+x^{2^{k+1}}\right)=\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}\cdot\left(1+x^{2^{k+1}}\right)=$$

$$\frac{1+x^{2^{k+1}}-x^{2^{k+1}}-x^{2^{k+1}+2^{k+1}}}{1-x}=\frac{1-x^{2\cdot 2^{k+1}}}{1-x}=\frac{1-x^{2^{k+2}}}{1-x}$$ δηλ. τή (2).

2.9. Νά δειχθεῖ ὅτι ὁσαδήποτε ριζικά καί ἄν ὑπάρχουν στό πολλαπλό ριζικό $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$ αὐτό εἶναι μικρότερο τοῦ 2.

Λύση. Γιά $\nu=1$ ἡ $p(\nu)$ γίνεται $\sqrt{2}<2$ δηλ ἰσχύει ($\nu=1$ ριζικό). Ἔστω ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu=k$ ἤτοι $p(k)$: $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{k \text{ ριζικά}} < 2$ (1). Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ ἰσχύει δηλ. $p(k+1)$: $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{k+1 \text{ ριζικά}} < 2$ (2).

Πράγματι· ἄν ἀπ' τή σχέση (1) ἐξαγάγουμε τήν τετραγωνική ρίζα ἀφοῦ προηγουμένως προσθέσουμε καί στά 2 μέλη της τόν ἀριθμό 2 θά ἔχουμε $2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} < 2+2=4$ ἤ $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{k+1 \text{ ριζικά}} < \sqrt{4}=2$ δηλ ἀληθεύει καί γιά $k+1$ ριζικά. ἑπομένως ἰσχύει ἡ (2) δηλ ἡ $p(\nu)$ ἀληθεύει γιά ὁσαδήποτε ριζικά.

2.10. Ἄν α εἶναι ἀριθμός θετικός $\neq 1$ νά δειχθεῖ ὅτι γιά $\forall \nu \in N$ ἰσχύει $\dfrac{1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2\nu}}{\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2\nu-1}} > 1+\dfrac{1}{\nu}$

Λύση. Γιά $\nu=1$ ἡ $p(1)$: $\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha} > 1+\dfrac{1}{1}$ δηλ $1+\alpha^2>2\alpha$ ἤ $1+\alpha^2-2\alpha>0$ ἤ $(1-\alpha)^2>0$ πού ἰσχύει προφανῶς. Ἔστω τώρα ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=k$· δηλ $p(k)$: $\dfrac{1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k}}{\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k-1}} > 1+\dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$ (1). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$ δηλ $p(k+1)$: $\dfrac{1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k+2}}{\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k+1}} > 1+\dfrac{1}{k+1}$ (2). Ἄν τήν ἀνισότητα (1) τήν ἀντιστρέψουμε θ' ἀλλάξη φορά δηλ. $\dfrac{\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k-1}}{1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k}} < \dfrac{k}{k+1}$ καί ἄν πολ/με καί διαιρέσουμε τό πρῶτο μέλος μέ $\alpha>0$:

$$\frac{\alpha(\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k-1})}{\alpha(1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k})} < \frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = 1-\frac{1}{k+1} \quad \text{ἤ}$$

ἄν ἀλλάξουμε τά σημεῖα τοῦ πρώτου καί δευτέρου μέλους τῆς τελευταίας ἀνισότητας θά ἀλλάξει καί ἡ φορά της δηλ.

$$-\frac{\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k}}{\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k+1}} > -1+\frac{1}{k+1} \quad (3).$$ Χρησιμοποιώντας τώρα τόν προτασιακό τύπο $p(1)$: $\frac{1+\alpha^2}{\alpha} > 2$ (4) πού διαπιστώσαμε προηγουμένως ὅτι ἰσχύει καί προσθέτοντας κατά μέλη τίς (3) καί (4) προκύπτει: $\frac{1+\alpha^2}{\alpha} - \frac{\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k}}{\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k+1}} > 2-1+\frac{1}{k+1}$ ἤ

$$\frac{\alpha+\cancel{\alpha^3}+\cdots+\cancel{\alpha^{2k+1}}+\alpha^3+\alpha^5+\cdots+\alpha^{2k+3}-\cancel{\alpha^3}-\cancel{\alpha^5}-\cdots-\alpha^{2k+1}}{\alpha(\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k+1})} > 1+\frac{1}{k+1}$$

ἤ $$\frac{\alpha(1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k+2})}{\alpha(\alpha+\alpha^3+\cdots+\alpha^{2k+1})} > 1+\frac{1}{k+1}$$ ἤ ἀκόμα

$$\frac{1+\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2k+2}}{\alpha+\alpha^3+\alpha^5+\cdots+\alpha^{2k+1}} > 1+\frac{1}{k+1}$$ δηλ ἡ (2). Ἄρα ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$

2.11. Ἄν ν φυσικός $\geqslant 3$ νά δειχθεῖ ὅτι $\nu^{\nu+1} > (\nu+1)^\nu$.

Λύση. Γιά $\nu=3$ ἡ ζητούμενη ἀνισότητα γίνεται $3^4>4^3$ δηλ $81>64$ καί εἶναι προφανῶς ἀληθής. Ἔστω τώρα ὅτι εἶναι ἀληθής γιά $\nu=k$ ($k>3$, φυσικός) Θά δείξουμε ὅτι ἡ ζητούμενη ἀνισότητα εἶναι ἀληθής καί γιά $\nu=k+1$. Ἔστω λοιπόν ὅτι ἡ $p(k)$: $k^{k+1} > (k+1)^k$ (1) ἰσχύει. Θά δείξουμε τήν ἰσχύ καί τῆς $p(k+1)$: $(k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}$ (2). Πρός τοῦτο θά προσπαθήσουμε νά δημιουργήσουμε μία ἀνισότητα $x>y$ (τῆς ὁποίας τά μέλη μᾶς εἶναι πρός τό παρόν ἄγνωστα) τέτοια ὥστε

διά πολλαπλασιασμοῦ τῆς (1) καί τῆς $x>y$ κατά μέλη νά προκύψῃ ἡ (2). Εἶναι φανερό ὅτι πρέπει νά ἔχουμε:
$k^{k+1}\cdot x=(k+1)^{k+2}$ καί $(k+1)^{k}\cdot y=(k+2)^{k+1}$ δηλ.
$x=\dfrac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}$ καί $y=\dfrac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k}}$. Ἑπομένως ἄν ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $x>y$ δηλ. ἡ $\dfrac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}>\dfrac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k}}$ (3) τότε ἡ (2) θά προκύψει διά πολ/μοῦ κατά μέλη τῆς (1) καί (3). Πολλαπλασιάζοντας τήν (3) χιαστί προκύπτει ὅτι ἀρκεῖ νά δειχθεῖ $(k+1)^{k+k+2}>k^{k+1}(k+2)^{k+1}$ ἤ $(k+1)^{2k+2}>k^{k+1}(k+2)^{k+1}$ (4) ἤτοι $\left[(k+1)^2\right]^{k+1}>\left[k(k+2)\right]^{k+1}$. Εἶναι ὅμως:
$(k+1)^2=k^2+2k+1>k^2+2k=k(k+2)$ καί ἄρα
$(k+1)^{2k+2}>k^{k+1}(k+2)^{k+1}$, δηλ. ἡ (4). Ἑπομένως διά πολ/μοῦ κατά μέλη τῆς (1) μέ τήν (3) προκύπτει $(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$ δηλ.ἡ(2).

2.12. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά $\forall \nu\in N$ καί $\alpha,\beta>0$ εἶναι: $\beta^{\nu+1}\geq\alpha^{\nu}\beta(\nu+1)-\nu\alpha^{\nu+1}$.

Λύση. Γιά $\nu=1$ εἶναι $p(1)$: $\beta^2\geq 2\alpha\beta-\alpha^2$ ἤ $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$ ἤ $(\alpha-\beta)^2\geq 0$ πού ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu=k$ δηλ. $p(k)$: $\beta^{k+1}\geq\alpha^{k}\beta(k+1)-k\alpha^{k+1}$ (1). Θά δείξουμε ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$ δηλ τήν $p(k+1)$: $\beta^{k+2}\geq\alpha^{k+1}\beta(k+2)-(k+1)\alpha^{k+2}$ (2). Πολ/με καί τά δύο μέλη τῆς (1) ἐπί β ὁπότε ἡ (1) παίρνει τή μορφή: $\beta^{k+2}\geq\alpha^{k}\beta^2(k+1)-k\beta\alpha^{k+1}$ (3) Ἄν ἀποδειχθεῖ ἑπομένως ὅτι $\alpha^{k}\beta^2(k+1)-k\beta\alpha^{k+1}\geq\alpha^{k+1}\beta(k+2)-(k+1)\alpha^{k+2}$ τότε κατά μείζονα λόγο θά ἰσχύει καί ἡ (2). Ἄν ἀπλοποιηθεῖ ἡ (3) μέ τό α^k ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ $\beta^2(k+1)-k\beta\alpha \geq \alpha\beta(k+2)-\alpha^2(k+1)$ ἤ $(k+1)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(2k+2)\geq 0$ ἤ $(k+1)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\geq 0$ πού ἰσχύει γιατί $k+1>0$ καί $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0$. Ἄρα θά ἰσχύει ἡ (3) καί ἑπομένως καί ἡ (2).

2.13. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu > 0$, ἰσχύει ἡ σχέση $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu \geq \nu\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$ **(Cauchy).**

Λύση. Γιά $\nu=1$ ἡ $p(1)$: $\alpha_1 \geq 1\cdot\sqrt[1]{\alpha_1}$ ἤ $\alpha_1=\alpha_1$ ἰσχύει σάν ἰσότητα. Γιά $\nu=2$ ἡ $p(2)$: $\alpha_1+\alpha_2 \geq 2\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2}$ ἰσχύει γιατί γράφεται: $\alpha_1+\alpha_2-2\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_2}\geq 0$ ἤ $(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2})^2\geq 0$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=k$ ἤτοι: $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k \geq k\sqrt[k]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}$ (1). Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=k+1$, δηλ. θά δείξουμε τήν $p(k+1)$: $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k+1} \geq (k+1)\sqrt[k+1]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}}$ (2). Ἄν στή πρόταση $p(\nu)$ τῆς προηγούμενης ἄσκησης θέσουμε $\nu=k$, $\beta=\sqrt[k+1]{\alpha_{k+1}}$ καί $\alpha=\sqrt[k(k+1)]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}$ γίνεται: $\alpha_{k+1}\geq (k+1)\sqrt[k+1]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}\cdot\sqrt[k+1]{\alpha_{k+1}}-k\sqrt[k]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}$ ἤ $\alpha_{k+1}\geq (k+1)\sqrt[k+1]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}}-k\sqrt[k]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_k}$ (3). Ἄν προσθέσουμε τώρα τίς (1) καί (3) κατά μέλη θά ἔχουμε: $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k+\alpha_{k+1}\geq (k+1)\sqrt[k+1]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}}$ δηλ. τήν (2).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ἡ ἰσότητα ἰσχύει ὅταν $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_\nu$. Ἡ ἀνισότητα τοῦ Cauchy γράφεται καί $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu}{\nu}\geq\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$ καί ἐκφράζει ὅτι: "Ὁ ἀριθμητικός μέσος $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu}{\nu}$ τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu>0$ εἶναι $\geq$ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου $\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$ αὐτῶν."

2.14. Μέ τή μέθοδο τῆς τελείας ἐπαγωγῆς νά δειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις **α')** $7^{2\nu}+16\nu-1=\pi o\lambda 64$,

β') $10^{\nu}+3\cdot 4^{\nu+2}+5=\pi o\lambda 9$,

γ') $2^{2\nu+1}-9\nu^2+3\nu-2=\pi o\lambda 54 \quad \forall \nu\in N$.

Λύση. α'). Γιά $\nu=1$ ἡ $p(1): 7^2+16\cdot1-1=6=1\cdot64=\pi o\lambda 64$. Ἔστω ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu=k$ ἤτοι $7^{2k}+16k-1=\pi o\lambda 64=$ $=\lambda\cdot 64$ (1) ὅπου $\lambda\in N$. Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ εἶναι ἀληθής, δηλ. $p(k+1): 7^{2(k+1)}+16(k+1)-1=\pi o\lambda 64$ (2). Ἄν λύσουμε τήν (1) ὡς πρός 7^{2k} προκύπτει: $7^{2k}=64\lambda-16k+1$ (3) Θέτοντας τώρα τό 7^{2k} μέ τό ἴσον του ἀπ' τήν (3) στήν (2) ἔχουμε: $(64\lambda-16k+1)\cdot7^2+16k+15=49\cdot64\lambda-49\cdot16k+49+$ $+16k+15=64\cdot49\lambda-16\cdot48k+64=64\cdot49\lambda-12\cdot64k+64=$ $=64(49\lambda-12k+1)=64\cdot\rho=\pi o\lambda 64$ ἄρα ἰσχύει καί ἡ $p(k+1)$.

β'). Γιά $\nu=1$ ἡ $p(1)$ γίνεται: $10^1+3\cdot4^3+5=23\cdot9=\pi o\lambda 9$ Ἔστω ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu=k$ ἤτοι $10^k+3\cdot4^{k+2}+5=\pi o\lambda 9=9\lambda$ (1). Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί ἡ $p(k+1): 10^{k+1}+3\cdot4^{k+3}+5=\pi o\lambda 9$ (2). Ἄν πολ/με καί τά δύο μέλη τῆς (1) ἐπί 10 θά πάρουμε: $10^{k+1}+30\cdot4^{k+2}+50=90\lambda$ ἤ $10^{k+1}+(3\cdot4+2\cdot9)\cdot4^{k+2}+5+45=90\lambda$. ἤ $10^{k+1}+3\cdot4^{k+3}+5=90\lambda-2\cdot9\cdot4^{k+2}-5\cdot9=9(10\lambda-2\cdot4^{k+2}-5)=\pi o\lambda 9$ δηλ. ἡ (2) ἰσχύει ἄρα ἡ $p(\nu)$ ἰσχύει γιά κάθε $\nu\in N$.

γ'). Γιά $\nu=1$ ἡ $p(1)$ γίνεται: $2^3-9\cdot1^2+3\cdot1-2=0=0\cdot54=\pi o\lambda 54$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu=k$ ἤτοι $2^{2k+1}-9k^2+3k-2=\pi o\lambda 54$ (1). Θά δείξουμε ὅτι καί ἡ $p(k+1)$ ἰσχύει δηλ. $2^{2(k+1)+1}-9(k+1)^2+3(k+1)-2=\pi o\lambda 54$ ἤ $2^{2k+3}-9(k+1)^2+3(k+1)-2=\pi o\lambda 54$ (2). Ἡ σχέση (1) γίνεται: $2^{2k+1}=54\cdot\lambda+9k^2-3k+2$. Ἡ (2) γίνεται: $2^{2k+3}-9k^2-18k-9+3k+3-2=$

$= 4(2^{2k+1}) - 9k^2 - 15k - 8$ ή θέτοντας τό 2^{2k+1} μέ τό ίσον του $54\lambda + 9k^2 - 3k + 2$ ή σχέση (2) παίρνει τή μορφή:

$4(54\lambda + 9k^2 - 3k + 2) - 9k^2 - 15k - 8 = 54\cdot 4\lambda + 36k^2 - 12k + 8 - 9k^2 - 15k - 8 =$
$= 54\cdot 4\lambda + 27k^2 - 27k = 54\cdot 4\lambda + 27k(k-1)$. Ὁ προσθετέος $54\cdot 4\lambda$ εἶναι προφανῶς πολ54. Ὁ προσθετέος $27k(k-1)$ εἶναι ἐπίσης πολ54 γιατί ἄν k ἄρτιος τότε $27k = 54\mu =$ πολ54· ἄν k περιττός τότε $k-1$ ἄρτιος ὁπότε πάλι $27(k-1) =$ πολ54. Ἑπομένως ή σχέση $54\cdot 4\lambda + 27k(k-1)$ σάν ἄθροισμα ὅρων πολλαπλασίων τοῦ 54 εἶναι πολ54, δηλ ή σχέση (2) ἰσχύει. Ἄρα ή $p(\nu)$ ἰσχύει γιά $\nu = k+1$.

2.15. Ἄν ν φυσικός τότε καί ὁ $A_\nu = \frac{\nu^5}{5} + \frac{\nu^3}{3} + \frac{7\nu}{15}$ εἶναι φυσικός.

Λύση. Γιά $\nu = 1$ εἶναι $A_1 = \frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} + \frac{7\cdot 1}{15} = \frac{15}{15} = 1$ (φυσικός) ἄρα ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ή πρόταση ἰσχύει γιά $\nu = k$ δηλ ἔστω ὅτι:

$A_k = \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15}$ εἶναι φυσικός. Θά δείξουμε ὅτι καί ὁ

$A_{k+1} = \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15}$ εἶναι ἐπίσης φυσικός.

Παίρνουμε κάθε ἕνα ὅρο τοῦ A_{k+1} χωριστά ὁπότε θά ἔχουμε:

$$\frac{(k+1)^5}{5} = \frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} = \frac{k^5}{5} + \frac{1}{5} + (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \quad (1)$$

$$\frac{(k+1)^3}{3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} = \frac{k^3}{3} + \frac{1}{3} + (k^2 + k) \quad (2)$$

$\frac{7(k+1)}{15} = \frac{7k}{15} + \frac{7}{15}$ (3). Προσθέτοντας τώρα τίς (1), (2) καί (3) κατά μέλη θά ἔχουμε: $A_{k+1} = \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15} =$

$= \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15} +$ (φυσικό ἀριθμό) $= A_k +$ (φυσικό ἀριθμό) $=$ φυσικός ἀριθμός. Δηλ ή πρόταση $p(\nu)$ ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$.

3. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Ἡ ἀνάγκη τῆς εἰσαγωγῆς τῶν νέων αὐτῶν ἀριθμῶν προέκυψε ἀπ' τήν ἐπίλυση στήν Ἄλγεβρα, σέ κάθε περίπτωση, τῶν δευτεροβάθμιων ἐξισώσεων καί μάλιστα τῆς ἐξίσωσης $x^2+1=0$ ἡ ὁποία δέν ἔχει λύση στούς πραγματικούς ἀριθμούς. Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται $x^2=-1$ (1)· ἄν ὁρίσουμε τώρα $-1=i^2$ τότε ἀπ' τήν (1) προκύπτει $x^2=i^2$ ἤ $x=\pm i$ Τό σύμβολ i τό καλοῦμε **φανταστική μονάδα**. Κάθε ἀριθμό πού προκύπτει ἀπ' τόν πολλαπλασιασμό τῆς φανταστικῆς μονάδας μ' ἕνα πραγματικό ἀριθμό τόν καλοῦμε **φανταστικό ἀριθμό**. Ἐξ ὁρισμοῦ προκύπτει $i^0=1$, $i^1=i$ καί $i^2=-1$. Οἱ ἑπόμενες δυνάμεις τοῦ i καθορίζονται ἀπ' τίς ἰδιότητες τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν. Ἔτσι ἔχουμε $i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$ καί

$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1$. Γενικά δέ

γιά κάθε $\nu\in N$: $i^{4\nu}=(i^4)^\nu=1^\nu=1$,

$$i^{4\nu+1}=i^{4\nu}\cdot i=1\cdot i=i,$$

$$i^{4\nu+2}=i^{4\nu}\cdot i^2=1\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$$

$i^{4\nu+3}=i^{4\nu}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$. Δηλαδή γιά ὁποιαδήποτε δύναμη τοῦ i οἱ δυνατές τιμές εἶναι $1, i, -1, -i$.

Ὀνομάζουμε **μιγαδικό ἀριθμό** τό ζεῦγος (α,β) πού παριστάνει τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῆς μορφῆς $\alpha+\beta i$ $(\alpha,\beta\in R)$ καί συμβολίζουμε αὐτό μέ z ἤτοι $z=\alpha+\beta i$ ὅπου α ἀποτελεῖ τό πραγματικό μέρος τοῦ z καί συμβολίζεται $\alpha=Re(z)$ καί β ἀποτελεῖ τό φανταστικό τοῦ z καί συμβολίζεται $\beta=Im(z)$.

Ὀνομάζουμε **συζυγῆ** ἑνός μιγαδικοῦ $z=\alpha+\beta i$ καί τόν συμβολίζουμε μέ $\bar{z}$ τόν μιγαδικό $\bar{z}=\alpha-\beta i$

Τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τό γινόμενο καί τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπίσης μιγαδικός ἀριθμός.

Πράγματι ἔστω $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$ μέ $\bar{z}_2=\gamma-\delta i$. τότε

1. $z_1+z_2=\alpha+\beta i+\gamma+\delta i=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$
2. $z_1-z_2=\alpha+\beta i-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$
3. $z_1\cdot z_2=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=$
$=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$ (ὅπου $i^2=-1$).
4. $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}*=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma i-\alpha\delta i-\beta\delta i^2}{\gamma^2-\delta^2 i^2}=$$
$$=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

* Γιά νά βροῦμε τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν πρέπει νά πολ/με καί νά διαιρέσουμε τό κλάσμα μέ τόν συζυγῆ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἰδιότητες τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν.

1. Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο συζυγῶν μιγαδικῶν εἶναι πραγματικός ἀριθμός

Πράγματι· εἶναι $z+\bar{z}=\alpha+\beta i+(\alpha-\beta i)=2\alpha$ πραγματικός. καί $z\cdot\bar{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-(\beta i)^2=\alpha^2+\beta^2$ πραγματικός.

2. Ὁ συζυγής ἀθροίσματος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν συζυγῶν των (ὅμοια καί γιά τή διαφορά τους) ἤτοι $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$.

Πράγματι· εἶναι $z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ ἄρα $\overline{z_1+z_2}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i$ (1). Ἐπίσης $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i$ (2). Ἀπ' τίς (1) καί (2) προκύπτει $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
Ὅμοια ἀποδεικνύεται καί γιά τή διαφορά.

3. Ὁ συζυγὴς γινομένου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῶν συζυγῶν των ἤτοι: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Πράγματι· εἶναι $z_1 \cdot z_2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\beta\gamma + \alpha\delta)i$ καί ἄρα $\overline{z_1 \cdot z_2} = (\alpha\gamma - \beta\delta) - (\beta\gamma + \alpha\delta)i$ (1). Ἐπίσης $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) - (\beta\gamma + \alpha\delta)i$ (2). Ἀπ' τίς (1) καί (2) προκύπτει ὅτι: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Οἱ ἰδιότητες 1. 2. καί 3. ἀποδεικνύονται ἐπαγωγικά καί γιά ν τό πλῆθος μιγαδικούς.

4. Ὁ συζυγὴς πηλίκου δύο μιγαδικῶν ἰσοῦται μέ τό πηλίκο τῶν συζυγῶν των δηλ. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Πράγματι· εἶναι $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$ ἄρα

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$ (1) Ἐπίσης $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \dfrac{\alpha - \beta i}{\gamma - \delta i} =$

$$= \frac{(\alpha - \beta i)(\gamma + \delta i)}{(\gamma - \delta i)(\gamma + \delta i)} = \frac{\alpha\gamma - \beta\gamma i + \alpha\delta i - \beta\delta i^2}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i \quad (2).$$

Ἀπ' τίς (1) καί (2) προκύπτει: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Ὀνομάζουμε **μέτρο** ἤ **ἀπόλυτη τιμή** ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha + \beta i$ τόν ἀριθμό $+\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ καί τό συμβολίζουμε μέ ρ ἤ $|z|$ ἤτοι $\rho = |z| = |\alpha + \beta i| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Ἰδιότητες τοῦ μέτρου μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

1. Ἄν $z = \alpha + \beta i$ τότε $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

Πράγματι· εἶναι $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (1) $|-z| = \sqrt{(-\alpha)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (2) καί $|\overline{z}| = \sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (3). Ἀπ' τίς (1), (2), (3) προκύπτει $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

2. Ἄν $z = \alpha + \beta i$ τότε $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Πράγματι· εἶναι $|z|^2 = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 = \alpha^2+\beta^2$ (1) $z\cdot\bar{z} = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2+\beta^2$ (2). Ἐκ τῶν (1), (2) προκύπτει $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

3. Ἄν $z_1 = \alpha+\beta i$, $z_2 = \gamma+\delta i$ τότε $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

Πράγματι· εἶναι $z_1\cdot z_2 = (\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$ καί $|z_1\cdot z_2| = \sqrt{(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)^2} = \sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}$ (1) Ἐπίσης $|z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2} = \sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}$ (2). Ἀπ' τίς (1), (2) προκύπτει $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

4. Ἄν $z_1 = \alpha+\beta i$, $z_2 = \gamma+\delta i$ τότε $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Πράγματι· εἶναι $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$ καί

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)^2}{(\gamma^2+\delta^2)^2}+\frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}{(\gamma^2+\delta^2)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}{(\gamma^2+\delta^2)^2}} =$$

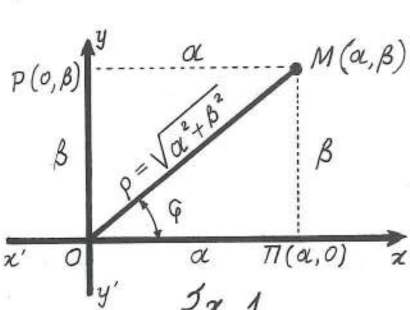
$$= \sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}{(\gamma^2+\delta^2)^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} \quad (1).$$ Ἐπίσης $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$ (2).

Ἀπ τίς (1) καί (2) προκύπτει ὅτι $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Τριγωνομετρική μορφή μιγάδος.

Ἔστω ὁ μιγαδικός $z = \alpha+\beta i$. Ὡς γνωστόν τά διατεταγμένα ζεύγη (x,y) τοῦ συνόλου τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $R\times R = R^2$ ἀπεικονίζονται ἀμφιμονοσήμαντα στά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων (Καρτεσιανό ἐπίπεδο). Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί σάν διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν, μποροῦν κι αὐτοί νά παρασταθοῦν ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων. Πράγματι· ὁ μιγαδικός $z = \alpha+\beta i$ ἀπεικονίζεται σ' ἕνα μόνο σημεῖο $M(\alpha,\beta)$ μέ τετμημένη α καί τεταγμένη β

καί ἀντίστροφα. Σ' ἕνα τέτοιο σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ὁ ἄξονας τῶν τετμημένων ὀνομάζεται καί ἄξονας τῶν πραγματικῶν ὁ δέ ἄξονας τῶν τεταγμένων ἄξονας τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν καί τό ἐπίπεδο μιγαδικό ἐπίπεδο. Ἡ παράσταση ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ τή μορφή $z = \alpha+\beta i$ λέγεται **καρτεσιανή μορφή**. Ὁ z μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς $z = \alpha+\beta i = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} i\right)$.



Σχ. 1

Ἐπειδή εἶναι $-1 \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq 1$, $-1 \leq \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq 1$ καθώς καί $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1$ σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί μποροῦν νά εἶναι τό συνημίτονο καί τό ἡμίτονο μιᾶς γωνίας φ δηλ νά εἶναι:

$$\text{συν}\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{καί} \quad \text{ημ}\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{μέ } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Τή γωνία αὐτή φ τή λέμε **ὅρισμα** τοῦ μιγάδος $z=\alpha+\beta i$. Ὁ z ἑπομένως παίρνει τή μορφή $z = \rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$ πού λέγεται **τριγωνομετρική μορφή** (ὅπου ρ βεβαίως εἶναι τό μέτρο $|z|$ τοῦ μιγάδος).

Γεωμετρικά τό ὅρισμα μιγαδικοῦ z παριστάνει τήν κυρτή γωνία πού σχηματίζει ὁ θετικός ἡμιάξονας Ox μέ τή διανυσματική ἀκτίνα OM, πού παριστάνει τόν μιγαδικό z. Δύο μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1 = \alpha+\beta i$, $z_2 = \gamma+\delta i$ σέ καρτεσιανή μορφή εἶναι ἴσοι ἄν καί μόνο ἄν $\alpha=\gamma$ καί $\beta=\delta$.

σέ τριγωνομετρική μορφή ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσα μέτρα καί τά ὀρίσματά τους διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο περιφέρειας, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 1.

Ἡ τριγωνομετρική μορφή τῶν μιγάδων μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐκτελέσουμε ἁπλούστερα τόν πολλαπλασιασμό, διαίρεση καί ἐξαγωγή ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ τή βοήθεια τῶν ἑπόμενων θεωρημάτων:

1. Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν εἶναι μιγαδικός καί ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν μιγάδων, ὄρισμα δέ τό ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων των· δηλ. ἄν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$ τότε $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2)]$

Τό θεώρημα αὐτό ἰσχύει ἐπαγωγικά καί γιά ν μιγάδες· ἤτοι:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_\nu[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\nu) + i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_\nu)]$$

2. Τό πηλίκο δύο μιγάδων εἶναι μιγαδικός ἀριθμός καί ἔχει μέτρο τό πηλίκο τῶν μέτρων των, ὄρισμα δέ τή διαφορά τῶν ὀρισμάτων των. Δηλ ἄν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$ τότε $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2) + i\eta\mu(\varphi_1-\varphi_2)]$.

3. (Θεώρημα τοῦ **De Moivre**). Ἡ νιοστή δύναμη μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι μιγαδικός πού ἔχει μέτρο τή νιοστή δύναμη τοῦ μέτρου τοῦ μιγάδος καί ὄρισμα τό ν-πλάσιο τοῦ ὀρίσματος αὐτοῦ (Τό θεώρημα ἰσχύει καί ὅταν ὁ ν εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος). Δηλ ἄν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ τότε $z^\nu = [\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)]^\nu = \rho^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi)]$

4. (Θεώρημα ὑπάρξεως νιοστῆς ρίζας μιγάδος). Ἄν $\alpha = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ εἶναι τυχών μιγαδικός ἀριθμός, τότε υπάρχουν ν ακριβώς διάφορες μεταξύ τους ρίζες αυτού, δηλ. η εξίσωση $z^\nu = \alpha$ έχει ν ακριβώς διάφορες μεταξύ τους ρίζες πού δίδονται από τόν τύπο:

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right)\right]$$

όπου $k = 0, 1, 2, \cdots, \nu-1$. Επειδή τά μέτρα τών ριζών z_k είναι όλα τά ίδια, ενώ τά ορίσματά τους τέτοια ώστε από μιά αρχική τιμή $\frac{\varphi}{\nu}$ αυξάνουν διαρκώς κατά $\frac{2\pi}{\nu}$, άν παραστήσουμε γεωμετρικά τίς νιοστές αυτές ρίζες τοῦ α, οἱ εικόνες αυτών $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}$ στό μιγαδικό επίπεδο θά βρίσκονται πάνω σέ κύκλο μέ κέντρο O τήν αρχή τών αξόνων καί μέ ακτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$, θά είναι δέ κορυφές κανονικοῦ ν-πολυγώνου πού είναι εγγεγραμμένο στόν κύκλο αυτό.

Σέ πολλές εφαρμογές όταν θέλουμε νά μετατρέψουμε ένα μιγαδικό αριθμό z από τήν καρτεσιανή του μορφή $z=\alpha+\beta i$ στήν τριγωνομετρική του μορφή $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ τά ρ καί φ πού χρειαζόμαστε τά παίρνουμε από τούς τύπους:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho},\ \ \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} \quad \textbf{(3.1)}$$

ενώ όταν θέλουμε νά μετατρέψουμε ένα μιγαδικό αριθμό z από τήν τριγωνομετρική του μορφή $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ στήν καρτεσιανή του μορφή $z=\alpha+\beta i$, τότε τά α καί β πού χρειαζόμαστε τά παίρνουμε από τούς τύπους:

$$\alpha = \rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \text{καί} \quad \beta = \rho\,\eta\mu\varphi \quad \textbf{(3.2)}$$

(μέ $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ ή $-\pi < \varphi \leq \pi$ σέ ακτίνια, ή μέ $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ ή $0 \leq \varphi < 2\pi$ σέ ακτίνια) καί λαμβάνεται σάν συναλήθευση τών ισοτήτων $\sigma\upsilon\nu\varphi = \alpha/\rho$ καί $\eta\mu\varphi = \beta/\rho$.

Ἀσκήσεις.

3.1. Γιά ποιές πραγματικές τιμές τῶν x καί y ἰσχύει ἡ ἰσότητα $(1-2i)x+(3+5i)y=1+3i$.

Λύση. Ἐκτελῶντας τίς πράξεις ἔχουμε (χωρίζοντας πραγματικά καί φανταστικά μέρη): $(x+3y)+(-2x+5y)i=1+3i$
Ἐπειδή τώρα δύο μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι ὅταν ἔχουν τά πραγματικά μέρη τους ἴσα καί τά φανταστικά τους ἐπίσης ἴσα, προκύπτει $x+3y=1$, $-2x+5y=3$ ἀπ' τίς ὁποῖες προκύπτει $x=-\frac{4}{11}$ καί $y=\frac{5}{11}$.

3.2. Ἄν οἱ ἀριθμοί $k, \lambda, \mu, \nu \in N$ διαιρούμενοι διά 4 ἀφήνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο νά δειχθεῖ:

$$\alpha')\ i^k=i^\lambda=i^\mu=i^\nu, \quad \beta')\ i^{k+\lambda+\mu+\nu}=1$$

Λύση. α'). Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο καί $\pi_k, \pi_\lambda, \pi_\mu, \pi_\nu$ τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν ἀριθμῶν k, λ, μ, ν διά 4 ἀντίστοιχα τότε ἔχουμε:

$i^k=i^{4\pi_k+\upsilon}=i^{4\pi_k}\cdot i^\upsilon=1\cdot i^\upsilon=i^\upsilon\ (1)$, $i^\lambda=i^{4\pi_\lambda+\upsilon}=i^{4\pi_\lambda}\cdot i^\upsilon=1\cdot i^\upsilon=i^\upsilon\ (2)$

$i^\mu=i^{4\pi_\mu+\upsilon}=i^{4\pi_\mu}\cdot i^\upsilon=1\cdot i^\upsilon=i^\upsilon\ (3)$, $i^\nu=i^{4\pi_\nu+\upsilon}=i^{4\pi_\nu}\cdot i^\upsilon=1\cdot i^\upsilon=i^\upsilon\ (4)$

Ἀπ' τίς (1), (2), (3), (4) προκύπτει $i^k=i^\lambda=i^\mu=i^\nu$

β'). Εἶναι $i^{k+\lambda+\mu+\nu}=i^k\cdot i^\lambda\cdot i^\mu\cdot i^\nu=i^\upsilon\cdot i^\upsilon\cdot i^\upsilon\cdot i^\upsilon=i^{4\upsilon}=(i^4)^\upsilon=1$.

3.3. Ἄν $z=\alpha+\beta i$ καί $\bar{z}=\alpha-\beta i$, τοῦ δέ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z_1=x+yi$ τό μέτρο εἶναι ἴσο μέ 1, δηλ $|z_1|=1$ νά δειχθεῖ ὅτι $\left|\frac{z-z_1}{1-\bar{z}\cdot z_1}\right|=1$ ὅπου $\bar{z}\cdot z_1\neq 1$.

Λύση. Ἐπειδή $|z_1| = 1 = \sqrt{x^2+y^2} = 1$ προκύπτει $x^2+y^2=1$

Ἐπίσης $z - z_1 = \alpha+\beta i - (x+yi) = (\alpha - x)+(\beta - y)i$ καί $1 - \bar{z}\cdot z_1 =$
$= 1 - (\alpha - \beta i)(x+yi) = 1 - (\alpha x - \beta x i + \alpha y i - \beta y i^2) =$
$= 1 - (\alpha x + \beta y + (\alpha y - \beta x)i) = (1 - \alpha x - \beta y) + (\beta x - \alpha y)i$. ἄρα:

$$\left|\frac{z - z_1}{1 - \bar{z}\cdot z_1}\right| = \frac{|z - z_1|}{|1 - \bar{z}\cdot z_1|} = \frac{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2}}{\sqrt{(1 - \alpha x - \beta y)^2 + (\beta x - \alpha y)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x + \beta^2 + y^2 - 2\beta y}}{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\alpha\beta x y + \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - 2\alpha\beta x y}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y}}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y}} = 1$$ γιατί $x^2+y^2=1$ καί στόν παρονομαστή τοῦ μεγάλου κλάσματος θά ἔχουμε:
$\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2(x^2+y^2) = \alpha^2$ καί $\beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \beta^2(x^2+y^2) = \beta^2$.

3.4. Ἄν $z = \alpha + \beta i$ καί $|2z - 1| = |z - 2|$ νά δειχθεῖ ὅτι $\alpha^2+\beta^2=1$.

Λύση. Εἶναι $2z - 1 = 2(\alpha+\beta i) - 1 = (2\alpha - 1) + 2\beta i$ καί
$|2z - 1| = \sqrt{(2\alpha-1)^2 + 4\beta^2}$. Ἐπίσης $z - 2 = \alpha + \beta i - 2 = (\alpha - 2) + \beta i$
καί $|z - 2| = \sqrt{(\alpha-2)^2 + \beta^2}$ Ἐπειδή $|2z - 1| = |z - 2|$ προκύπτει
$\sqrt{(2\alpha-1)^2 + 4\beta^2} = \sqrt{(\alpha-2)^2+\beta^2}$ ἤ $(2\alpha - 1)^2 + 4\beta^2 = (\alpha-2)^2+\beta^2$ ἤ
$4\alpha^2 + 1 - 4\alpha + 4\beta^2 = \alpha^2 + 4 - 4\alpha + \beta^2$ ἤ $3\alpha^2 + 3\beta^2 = 3$ ἤ $\alpha^2+\beta^2=1$.

3.5. Ἄν u καί v εἶναι τυχόντες μιγαδικοί, θέτουμε:
$x = \dfrac{1+uv}{u+v}$, $y = \dfrac{1-uv}{u+v}\cdot i$, $z = \dfrac{u-v}{u+v}$. Νά δειχθεῖ ὅτι: **α')** $x^2+y^2+z^2=1$, **β')** Ἄν οἱ ἀριθμοί u καί $\frac{1}{v}$ εἶναι συζυγεῖς μιγάδες νά δειχθεῖ ὅτι οἱ x, y, z εἶναι πραγματικοί.

Λύση. α'). Έχουμε: $x^2+y^2+z^2=\dfrac{(1+uv)^2-(1-uv)^2+(u-v)^2}{(u+v)^2}=$

$$=\frac{1+u^2v^2+2uv-1-u^2v^2+2uv+u^2+v^2-2uv}{(u+v)^2}=\frac{u^2+2uv+v^2}{(u+v)^2}=1$$

β'). Άν u καί $\dfrac{1}{v}$ είναι συζυγείς μιγαδικοί, μπορούμε νά θέσουμε $u=\alpha+\beta i$ καί $\dfrac{1}{v}=\alpha-\beta i$ όπου α καί β πραγματικοί καί νά γράψουμε: $x=\dfrac{\frac{1}{v}+u}{\frac{u}{v}+1}=\dfrac{\alpha-\beta i+\alpha+\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)+1}=$

$=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}$. Ώστε ό x είναι πραγματικός.

Όμοια έχουμε: $y=\dfrac{\frac{1}{v}-u}{\frac{u}{v}+1}i=\dfrac{\alpha-\beta i-\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)+1}i=\dfrac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}=$πρ.

καί $z=\dfrac{\frac{u}{v}-1}{\frac{u}{v}+1}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2+1}=$ πραγματικός.

3.6. Άν $\alpha>0$ καί $\lambda>1$, τότε κάθε μιγαδικός z πού πληροί τήν έξίσωση $\dfrac{z+\frac{\alpha\lambda^2}{\lambda^2-1}}{z+\frac{\alpha}{\lambda^2-1}}=\lambda$ έχει μέτρο $=\dfrac{\alpha\lambda}{\lambda^2-1}$

Λύση. Θέτουμε $z=x+yi$ όπότε, άν πάρουμε τά μέτρα καί τών δύο μελών τής έξίσωσης θά έχουμε:

$$\left|\frac{x+yi+\frac{\alpha\lambda^2}{\lambda^2-4}}{x+yi+\frac{\alpha}{\lambda^2-1}}\right|=\frac{\left|x+yi+\frac{\alpha\lambda^2}{\lambda^2-4}\right|}{\left|x+yi+\frac{\alpha}{\lambda^2-1}\right|}=\frac{\sqrt{\left(x+\frac{\alpha\lambda^2}{\lambda-1}\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{\alpha}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2}}=\lambda \quad (1)$$

Άν ύψώσουμε στό τετράγωνο καί τά δύο μέλη τής (1) καί έξαλείψουμε τούς παρονομαστές βρίσκουμε μετά τίς πράξεις:

$$x^2+y^2=\frac{\alpha^2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}\quad \text{άρα}\quad |z|=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\alpha\lambda}{\lambda^2-1}$$

(Ό λ πραγματικός, μπορεί νά θεωρηθεί μιγαδικός άν γραφεί $\lambda+0i$).

3.7. Νά τεθοῦν σέ τριγωνομετρική μορφή οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί **α')** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, **β')** $3\sqrt{3}+3i$, **γ')** $\frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}$, **δ')** $1+\sigma\upsilon\nu t+i\eta\mu t$.

Λύση. α'). Εἶναι $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=$ $=1$ καί $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{\rho}=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$ ἤ $-\frac{\pi}{3}$ (1). καί $\eta\mu\varphi=\frac{\beta}{\rho}=\frac{-\sqrt{3}/2}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{3}$ ἤ $-\frac{2\pi}{3}$ (2). Ἀπ τίς (1) καί (2) προκύπτει $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. Ἑπομένως ἡ τριγωνομετρική μορφή θά εἶναι $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

β'). Εἶναι $\rho=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6$ Ἐπίσης $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$ ἤ $-\frac{\pi}{6}$ (1) καί $\eta\mu\varphi=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$ ἤ $\frac{5\pi}{6}$ (2) Ἀπ' τίς (1),(2) προκύπτει $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ἄρα $3\sqrt{3}+3i=6\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$.

γ'). $\frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}=\frac{-\sqrt{3}-3i-i-i^2\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2-i^2}=$ $\frac{-\sqrt{3}-3i-i+\sqrt{3}}{3+1}=-i$ Καί ἄρα $\rho=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$ καί $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{0}{1}=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$ ἤ $-\frac{\pi}{2}$ (1) καί $\eta\mu\varphi=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow\varphi=$ $=-\frac{\pi}{2}$ (2). Ἀπ' τίς (1),(2) προκύπτει $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ Ἄρα θά ἔχουμε:

$$-i=\frac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}=1\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

δ'). Εἶναι $\rho=\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu t)^2+\eta\mu t^2}=\sqrt{2+2\sigma\upsilon\nu t}$ (1). Ἀπ' τήν Τριγωνομετρία ἔχουμε (ἔκφραση τοῦ συνημιτόνου συναρτήσει τοῦ τοῦ μισοῦ τόξου): $\sigma\upsilon\nu t=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2}-1$ ἤ $\sigma\upsilon\nu t+1=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2}$ ἤ $2\sigma\upsilon\nu t+2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2}$ ὁπότε ἡ (1) γίνεται $\sqrt{2\sigma\upsilon\nu t+2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}$.

Ἐπίσης $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu t}{2\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}} = \dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}} = \sigma\upsilon\nu\dfrac{t}{2}$ Παρόμοια

$\eta\mu\varphi = \dfrac{\eta\mu t}{2\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}} = \dfrac{2\eta\mu\frac{t}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}} = \eta\mu\dfrac{t}{2}$. Ἄρα θά εἶναι:

$$(1+\sigma\upsilon\nu t) + i\eta\mu t = 2\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2} + i\eta\mu\frac{t}{2}\right).$$

3.8. Νά ὑπολογισθοῦν μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ De Moivre οἱ παραστάσεις: **α')** $(1+i)^{12}$, **β')** $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13}$, καί **γ')** $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$.

Λύση. α'). Γιά νά ὑπολογίσουμε τίς παραστάσεις αὐτές θά φροντίσουμε πρῶτα νά τίς μεταφέρουμε σέ τριγωνομετρική μορφή μέ τούς γνωστούς τύπους (3.1) καί ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 3. τοῦ De Moivre νά πετύχουμε μιά ἄλλη τριγωνομετρική ἔκφραση ἀπ' τήν ὁποία τελικά νά ἐπιστρέψουμε στήν καρτεσιανή μορφή χρησιμοποιώντας τώρα τούς τύπους (3.2).

Κατ' ἀρχάς μετατρέπουμε τόν $1+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή: Εἶναι $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ καί $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ἤ $-\dfrac{\pi}{4}$ (1). Ἐπίσης $\eta\mu\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ἤ $\dfrac{3\pi}{4}$ (2). Ἀπ' τίς (1), (2) προκύπτει $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Ἄρα $1+i = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} + i\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\right)$ καί ἑπομένως $(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} + i\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\right)^{12} =$ (ἀπ' τόν τύπο τοῦ De Moivre) $2^6\left(\sigma\upsilon\nu 12\cdot\dfrac{\pi}{4} + i\eta\mu 12\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) = 64(\sigma\upsilon\nu 3\pi + i\eta\mu 3\pi) =$
$= 64(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi) = 64(-1+i\cdot 0) = -64.$

β'). Ὅμοια μετασχηματίζουμε τόν $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ σέ τριγωνομετρική μορφή. Εἶναι $\rho = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}} = 1$

καί $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1} \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}$ ἤ $-\dfrac{\pi}{6}$ (1) καί $\eta\mu\varphi = \dfrac{1/2}{1} =$ $= \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}$ ἤ $\dfrac{5\pi}{6}$ (2) Ἀπ' τίς (1), (2) προκύπτει $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ καί ἄρα

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right).$$ Ἑπομένως $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} =$

$$\left[1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)\right]^{13} = (\text{τύπος De Moivre})\ 1^{13}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu 13\cdot\frac{\pi}{6} + i\eta\mu 13\cdot\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

γ'). Ὁμοίως ἔχουμε $\rho = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

Ἐπίσης εἶναι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{-1/2}{1} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ ἤ $\dfrac{4\pi}{3}$ (1) καί $\eta\mu\varphi = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ἤ $\dfrac{2\pi}{3}$ (2) Ἀπ' τίς (1), (2) προκύπτει $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ Ἄρα $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} + i\eta\mu\dfrac{2\pi}{3}\right)$ καί ἄρα

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17} = \sigma\upsilon\nu\frac{17\cdot 2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{17\cdot 2\pi}{3} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot 5 + \frac{4\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(2\pi\cdot 5 + \frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3} =$$

$= -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Ἄρα $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

3.9. Νά ἐκφραστῆ τό ημ3θ καί συν3θ συναρτήσει τοῦ ημθ καί συνθ ἀντίστοιχα μέ ἐφαρμογή τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

Λύση. Ἔχουμε $(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta)^3 = \sigma\upsilon\nu 3\vartheta + i\eta\mu 3\vartheta$ ἀπ' τόν τύπο τοῦ De Moivre ἤ ἄν ἀναπτύξουμε τό πρῶτο μέλος:

$\sigma\upsilon\nu^3\vartheta + 3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\cdot i\eta\mu\vartheta + 3\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot i^2\eta\mu^2\vartheta + i^3\eta\mu^3\vartheta = \sigma\upsilon\nu 3\vartheta + i\eta\mu 3\vartheta$ ἤ

$\sigma\upsilon\nu^3\vartheta - 3\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu^2\vartheta + i(3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\,\eta\mu\vartheta - \eta\mu^3\vartheta) = \sigma\upsilon\nu 3\vartheta + i\eta\mu 3\vartheta$ (1).

Ἀπ' τήν (1) προκύπτει $\eta\mu 3\vartheta = 3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\,\eta\mu\vartheta - \eta\mu^3\vartheta = 3\eta\mu\vartheta(1-\eta\mu^2\vartheta) - \eta\mu^3\vartheta = 3\eta\mu\vartheta - 4\eta\mu^3\vartheta$ καί $\sigma\upsilon\nu 3\vartheta = \sigma\upsilon\nu^3\vartheta - 3\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu^2\vartheta =$

$= συν^3\vartheta - 3συν\vartheta(1-συν^2\vartheta) = 4συν^3\vartheta - 3συν\vartheta$. δηλ. οἱ γνωστοί τύποι τῶν ἐκφράσεων ημ3ϑ καί συν3ϑ τῆς Τριγωνομετρίας.

3.10. Νά εὑρεθοῦν **α')** οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας.
β') οἱ τέταρτες ρίζες τοῦ $-8+8i\sqrt{3}$
γ') οἱ πέμπτες ρίζες τῆς μονάδας.

Λύση. α'). Εἶναι $1 = 1+0i$ ἄρα $\rho = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ καί $συν\varphi = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ (1) Ἐπίσης $ημ\varphi = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ἤ π (2). Ἀπ' τίς (1),(2) προκύπτει $\varphi = 0$ δηλ. $1 = 1\cdot(συν0 + iημ0) = συν2k\pi + iημ2k\pi$. Ἐφαρμόζοντας τώρα τόν τύπο τοῦ θεωρήματος 4. : $Z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[συν\left(\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right) + iημ\left(\frac{\varphi+2k\pi}{\nu}\right)\right]$ γιά $k = 0,1,2$, $\rho = 1$, $\varphi = 0$ καί $\nu = 3$ προκύπτουν οἱ 3 ρίζες τῆς ἐξίσωσης $z^3 = 1 = 1\cdot(συν2k\pi + iημ2k\pi)$ οἱ ἑξῆς:

$$z_0 = συν\left(\frac{2\cdot0\cdot\pi}{3}\right) + iημ\left(\frac{2\cdot0\cdot\pi}{3}\right) = συν0 + iημ0 = 1.$$

$$z_1 = συν\left(\frac{2\cdot1\cdot\pi}{3}\right) + iημ\left(\frac{2\cdot1\cdot\pi}{3}\right) = συν\frac{2\pi}{3} + iημ\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = συν\left(\frac{2\cdot2\cdot\pi}{3}\right) + iημ\left(\frac{2\cdot2\cdot\pi}{3}\right) = συν\frac{4\pi}{3} + iημ\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

β'). Ἔχουμε $z^4 = -8+8i\sqrt{3}$. Μετασχηματίζουμε τόν $-8+8i\sqrt{3}$ σέ τριγωνομετρική μορφή. Εἶναι $\rho = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$. Ἐπίσης εἶναι $συν\varphi = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$ ἤ $\frac{4\pi}{3}$ (1) καί $ημ\varphi = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$ ἤ $\frac{2\pi}{3}$ (2) Ἀπ τίς (1),(2) προκύπτει $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Ἄρα $-8+8i\sqrt{3} = 16\cdot\left(συν\frac{2\pi}{3} + iημ\frac{2\pi}{3}\right)$ καί κατά συνέπεια:

$$z_k = \sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16}\left[συν\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + iημ\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

ὁπότε γιά $k = 0,1,2,3$:

$z_0 = 2\left(συν\frac{\pi}{6} + iημ\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$z_1 = 2\left(συν\frac{2\pi}{3} + iημ\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 2\left(συν\frac{7\pi}{6} + iημ\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

$z_3 = 2\left(συν\frac{5\pi}{3} + iημ\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

γ'). Ἡ ἐξίσωση εἶναι $z^5 = 1 = 1(συν 0 + iημ 0) = συν 2k\pi + iημ 2k\pi$

ἄρα $z_k = \sqrt[5]{1}\left(συν\frac{2k\pi}{5} + iημ\frac{2k\pi}{5}\right)$ καί γιά $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$z_0 = συν 0^\circ + iημ 0^\circ = 1$

$z_1 = συν 72^\circ + iημ 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

$z_2 = συν 144^\circ + iημ 144^\circ = -συν 36^\circ + iημ 36^\circ = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} + i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

$z_3 = συν 216^\circ + iημ 216^\circ = -συν 36^\circ - iημ 36^\circ = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} - i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

$z_4 = συν 288^\circ + iημ 288^\circ = συν 72^\circ - iημ 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} - i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

γιατί ἀπ' τήν Τριγωνομετρία ξέρουμε ὅτι: $ημ 18^\circ = συν 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, $συν 18^\circ = ημ 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$, $ημ 36^\circ = συν 54^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$, καί $συν 36^\circ = ημ 54^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

3.11. Νά δειχθεῖ ὅτι $\frac{(συν 70^\circ + iημ 70^\circ)^5}{(συν 40^\circ + iημ 70^\circ)^5} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$

Λύση. Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 2. ἔχουμε διαδοχικά:

$$\left[\frac{συν 70^\circ + iημ 70^\circ}{συν 40^\circ + iημ 40^\circ}\right]^5 = \left[συν(70^\circ - 40^\circ) + iημ(70^\circ - 40^\circ)\right]^5 =$$

$$= (συν 30^\circ + iημ 30^\circ)^5 = (\text{θ. De Moivre})\ συν(5\cdot 30^\circ) + iημ(5\cdot 30^\circ) =$$

$$= συν 150^\circ + iημ 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right).$$

3.12. Ἄν ϑ εἶναι τυχοῦσα γωνία καί z τυχών μιγαδικός, νά δειχθεῖ ὅτι τό πραγματικό μέρος τοῦ μιγαδικοῦ $|z|-z(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)$ εἶναι μή ἀρνητικό (δηλ θετικό ἤ μηδέν).

Λύση. Ἄν $z=x+yi$ τότε $|z|-z(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)=$
$=\sqrt{x^2+y^2}-(x+yi)(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)=\sqrt{x^2+y^2}-x\sigma\upsilon\nu\vartheta+y\eta\mu\vartheta-$
$-(y\sigma\upsilon\nu\vartheta+x\eta\mu\vartheta)i$ μέ πραγματικό μέρος τό $\sqrt{x^2+y^2}-x\sigma\upsilon\nu\vartheta+y\eta\mu\vartheta$.
Ἑπομένως θά δείξουμε ὅτι $\sqrt{x^2+y^2}-x\sigma\upsilon\nu\vartheta+y\eta\mu\vartheta\geq 0$ ἤ
$\sqrt{x^2+y^2}\geq x\sigma\upsilon\nu\vartheta-y\eta\mu\vartheta$. (1). Ἄν τό δεύτερο μέλος τῆς (1) εἶναι ≤ 0 ἡ (1) προφανῶς ἰσχύει. Ἄν εἶναι >0 τότε ὑψώνουμε στό τετράγωνο τήν (1) καί ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:
$x^2+y^2\geq x^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+y^2\eta\mu^2\vartheta-2xy\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta$ ἤ
$x^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)+y^2(1-\eta\mu^2\vartheta)+2xy\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta\geq 0$ ἤ
$x^2\eta\mu^2\vartheta+y^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+2xy\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta\geq 0$ ἤ $(x\eta\mu\vartheta+y\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2\geq 0$ πού ἰσχύει.

3.13. Νά λυθεῖ τριγωνομετρικά ἡ ἐξίσωση $x^6+64=0$. Νά σημειωθοῦν τά ὀρίσματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικά οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς;

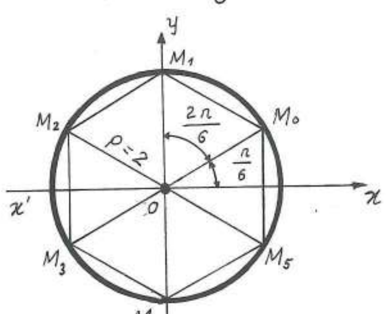
Λύση. Ἔχουμε $x^6=-64=-64\cdot 1=64(-1)=64(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)$.
γιατί $-1=-1+0i$ καί $\rho=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow\varphi=\pi$ (1)
καί $\eta\mu\varphi=\frac{0}{1}=0\Rightarrow\varphi=0$ ἤ π (2). Ἀπ' τίς (1), (2) προκύπτει $\varphi=\pi$
ἄρα $-1=1\cdot(\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi)$ καί οἱ 6 ρίζες θά εἶναι (θεώρημα 4.):
$x_\kappa=\sqrt[6]{64}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{6}\right]$. Γιά $k=0,1,2,3,4,5$:
$x_0=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{6}\right)=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$,
$x_1=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{6}\right)=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)=2i$,

$$x_2 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi+2\cdot 2\cdot \pi}{6}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i,$$

$$x_3 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi+2\cdot 3\cdot \pi}{6}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{7\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i,$$

$$x_4 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi+2\cdot 4\cdot\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi+2\cdot 4\cdot \pi}{6}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{9\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{9\pi}{6}\right) = -2i,$$

$$x_5 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi+2\cdot 5\cdot\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi+2\cdot 5\cdot \pi}{6}\right) = 2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-i.$$



Σχ. 2

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ ρίζες x_k ἔχουν τό ἴδιο μέτρο γιά $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ καί ὀρίσματα τέτοια ὥστε ἀπό τῆς ἀρχικῆς τιμῆς $\frac{\pi}{6}$ αὐξάνουν διαρκῶς κατά $\frac{2\pi}{6}$. Ἑπομένως οἱ εἰκόνες αὐτῶν $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο θά βρίσκονται πάνω σέ κύκλο μέ κέντρο O καί ἀκτίνα $\rho = 2$ σέ κανονικό ἐγγεγραμμένο ἑξάγωνο.

3.14. Νά εὑρεθεῖ πάνω στό μιγαδικό ἐπίπεδο τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z, τέτοιων ὥστε ὁ ἀριθμός $\frac{z-i}{z+i}$ νά εἶναι καθαρά φανταστικός.

Λύση. Ἄν $M(x,y)$ εἶναι τό σημεῖο τοῦ ἀριθμοῦ z πάνω στό μιγαδικό ἐπίπεδο τότε $z = x+yi$ ὁπότε θά ἔχουμε:

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i} = \frac{[x+(y-1)i][x-(y+1)i]}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2}.$$

Ἑπομένως ὁ $\frac{z-i}{z+i}$ εἶναι καθαρός φανταστικός μόνον ὅταν $x^2+y^2-1=0$ ἤ $x^2+y^2=1$. Ἀλλά $x^2+y^2 = OM^2$ (τετράγωνο τῆς ἀπόστασης τοῦ $M(x,y)$ ἀπ' τήν ἀρχή O τῶν συντεταγμένων). Ὥστε $OM = 1$ καί συνεπῶς τό σύνολο τῶν εἰκόνων εἶναι περιφέρεια μέ κέντρο $O(0,0)$ καί ἀκτίνα 1.

4. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x λέγεται κάθε ἔκφραση τῆς μορφῆς $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ εἶναι σταθεροί ἀριθμοί καί ν φυσικός ἤ μηδέν, συμβολίζεται δέ μέ $f(x)$. Οἱ $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ λέγονται **συντελεστές** τοῦ $f(x)$.

Βαθμός πολυωνύμου λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς x, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστής εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Τό ἐπίθετο "ἀκέραιο" στή φράση "ἀκέραιο πολυώνυμο" χαρακτηρίζει μόνο τόν ἐκθέτη τοῦ x στόν κάθε ὅρο τοῦ πολυωνύμου καί δέν χαρακτηρίζει τό συντελεστή αὐτοῦ τοῦ ὅρου.

Μηδενικό λέγεται τό πολυώνυμο τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ συντελεστές εἶναι ἴσοι μέ μηδέν καί γράφεται $f(x) \equiv 0$ (ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ μηδέν)

Δύο πολυώνυμα $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι **ἐκ ταυτότητος ἴσα** ἄν καί μόνο ἄν οἱ συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων εἶναι ἴσοι. Δηλ $f(x) \equiv \varphi(x) \Longleftrightarrow \alpha_\kappa = \beta_\kappa \ \forall \kappa \in N$ ὅπου α_κ οἱ συντελεστές τοῦ $f(x)$ καί β_κ οἱ συντελεστές τοῦ $\varphi(x)$.

Ἔστω τό μή μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$. Ἄν γιά $x = \rho$ ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλ $f(\rho) = 0$ τότε ὁ ρ λέγεται **ρίζα** τοῦ πολυωνύμου. Ἄν τό παραπάνω πολυώνυμο τό ἐξισώσουμε μέ μηδέν, ἔχουμε μία **ἀλγεβρική ἐξίσωση.** Ἑπομένως ἡ μέν σχέση $f(x) \equiv 0$ παριστάνει τό μηδενικό πολυώνυμο, ἡ δέ σχέση $f(x) = 0$ παριστάνει μία ἀλγεβρική ἐξίσωση.

Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσης μέ ρητούς συντελεστές λέγεται **ἀλγεβρικός ἀριθμός**. Ἕνας ἀριθμός πού δέν εἶναι ἀλγεβρικός λέγεται **ὑπερβατικός**. π.χ. $\pi = 3{,}14159$, $e = 2{,}71828$.

Τό σύνολο ὅλων τῶν πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές ἐφοδιασμένο μέ δύο πράξεις, τήν συνήθη πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό ἀποτελεῖ τόν λεγόμενο **πολυωνυμικό δακτύλιο** πού συμβολίζεται μέ $R[x]$.

Θεώρημα τοῦ D'Alembert (θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας) Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο μέ συντελεστές πραγματικούς ἤ καί μιγαδικούς ἀριθμούς, βαθμοῦ $\nu \geq 1$, δέχεται στό σύνολο $\mathbb{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μία τουλάχιστον ρίζα.

Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ **διαιρεῖται** (ἀκριβῶς) μέ τό ἀκέραιο (καί ὄχι μηδενικό) πολυώνυμο $\varphi(x)$, ὅταν καί μόνον ὅταν, ὑπάρχει ἕνα τρίτο ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$, τέτοιο ὥστε $f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x)$. Λέμε ἀκόμα ὅτι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖ τό $f(x)$ καί γράφουμε συμβολικά $\varphi(x) / f(x)$. Ἡ πράξη μέ τή βοήθεια τῆς ὁποίας βρίσκουμε τό $\pi(x)$ λέγεται **τελεία διαίρεση** τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $\varphi(x)$. Τότε τά πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$, $\pi(x)$ λέγονται **διαιρετέος, διαιρέτης** καί **πηλίκο** ἀντίστοιχα τῆς τελείας διαίρεσης τοῦ $f(x)$ μέ τό $\varphi(x)$.
Ἄν τό $f(x)$ δέν διαιρεῖται (ἀκριβῶς) μέ τό $\varphi(x)$ $(\neq 0)$ τότε γράφουμε $\varphi(x) \nmid f(x)$. Στήν περίπτωση αὐτή θά ἔχουμε τή σχέση $f(x) = \varphi(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$ ὅπου $\upsilon(x)$ εἶναι ἕνα ἄλλο πολυώνυμο μέ $\beta\alpha\theta\,\upsilon(x) < \beta\alpha\theta\,\varphi(x)$. Τό πολυώνυμο $\upsilon(x)$ λέγεται **ὑπόλοιπο** τῆς διαίρεσης τοῦ $f(x)$ μέ τό $\varphi(x)$

Μία ρίζα ρ ἑνός πολυωνύμου $f(x)\not\equiv 0$ εἶναι **πολλαπλῆ** τάξεως k ἤ **βαθμοῦ πολλαπλότητας** k (ὅπου k ἀκέραιος ≥ 1) ἄν καί μόνο ἄν $(x-\rho)^k / f(x)$ καί συγχρόνως $(x-\rho)^{k+1} \not/ f(x)$. Ἄν $k=1$ ἡ ρίζα λέγεται **ἁπλή**, ἄν $k=2$ **διπλή** κ.ο.κ.

Ἰδιότητες ἀκεραίων πολυωνύμων.

I. Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $\alpha x+\beta$ μέ $\alpha,\beta\in R$, $\alpha\neq 0$ εἶναι $\upsilon=f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

II. Ἄν ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ τότε $(x-\rho)/f(x)$ ἤ ἀλλοιῶς ἄν $f(\rho)=0 \Leftrightarrow f(x)\equiv(x-\rho)\pi(x)$ μέ $\pi(x)\in R[x]$.

III. Ἄν ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται μέ καθένα ἀπό τά διώνυμα $x-\rho_1$, $x-\rho_2$, $\cdots$, $x-\rho_\nu$ ὅπου $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_\nu$ ἀριθμοί διάφοροι μεταξύ τους ἀνά δύο, τότε θά διαιρεῖται ἀκριβῶς καί μέ τό γινόμενο $(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$ καί ἀντίστροφα.

IV. Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο ν βαθμοῦ $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+$ $+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$ ἔχει ν τό πλῆθος ρίζες τίς $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_\nu$ καί ἰσχύει ἡ σχέση $f(x)\equiv\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$

V. Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots$ $\cdots+\alpha_0$ μηδενίζεται γιά $\nu+1$ τιμές τοῦ x, διάφορες μεταξύ τους τότε αὐτό εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

VI. Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots$ $\cdots\alpha_0$ $(\alpha_\nu\neq 0)$ μέ πραγματικούς συντελεστές $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\cdots,\alpha_0$ δέχεται σάν ρίζα τόν μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$, τότε θά δέχεται σάν ρίζα καί τόν συζυγή του $\alpha-\beta i$· καί μάλιστα, ἄν δέχεται σάν ρίζα τόν $\alpha+\beta i$ σέ βαθμό πολλαπλότητας k, θά δέχεται ἐπίσης σάν ρίζα καί τόν συζυγή του $\alpha-\beta i$ μέ τόν ἴδιο βαθμό πολ/τας k.

VII. Ἄν ἀκέραιο πολυώνυμο μέ ρητούς συντελεστές δέχεται σάν ρίζα τήν $\alpha+\sqrt{\beta}$ ($\alpha\in\mathbb{Q}$, $\beta\in\mathbb{Q}^+$ (θετικοί ρητοί), $\beta\neq\vartheta^2$, ὅπου $\vartheta\in\mathbb{Q}$) θά δέχεται ἐπίσης σάν ρίζα καί τήν $\alpha-\sqrt{\beta}$ καί μάλιστα μέ τόν ἴδιο βαθμό πολλαπλότητας.

VIII. Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots$ $\dots+\alpha_0$ μέ συντελεστές ἀκεραίους καί $\alpha_0\alpha_\nu\neq 0$ δέχεται μία ρίζα ρ ἀκεραία, τότε ὁ ἀριθμός ρ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 (Στήν ἰδιότητα αὐτή στηρίζεται ἡ τεχνική ὑπολογισμοῦ τῶν ἀκεραίων ριζῶν ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ μέ συντελεστές ἀκεραίους).

IX. Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots$ $\dots+\alpha_0$ μέ συντελεστές ἀκεραίους καί $\alpha_0\alpha_\nu\neq 0$ δέχεται μία ρίζα ρ ρητή τῆς μορφῆς $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ μέ $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\mu\in\mathbb{N}$ καί μέ Μ.Κ.Δ. $(\lambda,\mu)=1$ τότε ὁ ἀριθμητής λ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 καί ὁ παρονομαστής μ διαιρέτης τοῦ συντελεστή α_ν τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου.

X. Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ μέ πραγματικούς συντελεστές βαθμοῦ $\nu\geq 1$ μετασχηματίζεται πάντοτε σέ γινόμενο δυνάμεων πρωτοβάθμιων πολυωνύμων τῆς μορφῆς $x-\rho$ $\rho\in\mathbb{R}$ καί δευτεροβάθμιων πολυωνύμων τῆς μορφῆς $x^2+\alpha x+\beta$ μέ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ καί $\alpha^2-4\beta<0$ πού εἶναι διάφορα μεταξύ τους.

Σχέσεις ριζῶν καί συντελεστῶν πολ/μου.

Θεωροῦμε τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots$ $\dots+\alpha_0$ ν βαθμοῦ μέ $\nu\geq 1$ καί μέ ρίζες $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu$. Τότε ἀποδεικνύεται ὅτι μεταξύ τῶν ριζῶν καί συντελεστῶν τοῦ $f(x)$ ὑπάρχουν οἱ παρακάτω σχέσεις, γνωστές σάν σχέσεις **Vieta**:

$$S_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_\nu + \rho_2\rho_3 + \cdots + \rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu = \frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$S_3 = \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}$$

....

$$S_\nu = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdots \rho_\nu = (-1)^\nu \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Οἱ σχέσεις τοῦ Vieta ἰσχύουν ἀκόμα καί ὅταν ὁρισμένες ἤ καί ὅλες ἀπ' τίς ρίζες τοῦ $f(x)$ εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Μέ τή βοήθεια τῶν σχέσεων αὐτῶν μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἀκέραιο πολυώνυμο, ὅταν μᾶς εἶναι γνωστές οἱ ρίζες του.

Ἀνάλυση τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ σέ ἄθροισμα κλασμάτων, ὅπου $\beta\alpha\vartheta f(x) < \beta\alpha\vartheta \varphi(x)$.

Περίπτωση I. Ἄν τό $\varphi(x)$ ἔχει μόνο ἁπλές ρίζες πραγματικές τίς $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_\nu$ δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς: $\varphi(x) \equiv \beta_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$ ὅπου β_ν ὁ συντελεστής τοῦ x^ν τότε

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{A_\nu}{x-\rho_\nu}$$

ὅπου $A_1, A_2, \cdots, A_\nu \in R$ τούς ὁποίους μποροῦμε νά προσδιορίσουμε.

Περίπτωση II. Ἄν τό $\varphi(x)$ ἔχει πραγματικές ἁπλές καί πολλαπλές ρίζες, δηλ. εἶναι: $\varphi(x) \equiv \beta_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2) \cdot (x-\rho_3)^\kappa \cdots (x-\rho_\mu)^\lambda$ μέ $1+1+\kappa+\cdots+\lambda = \nu$ (ν τό πλῆθος τῶν ριζῶν), τότε:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \frac{B_1}{x-\rho_3} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \cdots + \frac{B_\kappa}{(x-\rho_3)^\kappa} + \cdots + \frac{M_1}{x-\rho_\mu} + \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \cdots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda}$$ ὅπου

$A_1, A_2, B_1, B_2, \cdots, B_\kappa, M_1, M_2, \cdots M_\lambda \in R$ πού πρέπει νά προσδιοριστοῦν.

Περίπτωση III. Ἄν τό κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς:

$\dfrac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}$, ὅπου ὁ βαθμός τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος τοῦ 2ν (ν ἀκέραιος ≥ 1) καί β, γ πραγματικοί μέ $\beta^2-4\gamma<0$

τότε $\dfrac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu} \equiv \dfrac{A_1 x+B_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\dfrac{A_2 x+B_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots+$

$+\dfrac{A_\nu x+B_\nu}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}$ ὅπου $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_\nu, B_\nu$ πρός προσδιορισμό.

Ὁμογενῆ καί συμμετρικά πολ/μα.

Ἕνα ἀκέραιο μή μηδενικό πολυώνυμο $f(x, y, z, \cdots)$ τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι μονώνυμα τοῦ ἴδιου βαθμοῦ ὡς πρός τίς μεταβλητές του $x, y, z, \cdots$ λέγεται **ὁμογενές**. Ὁ κοινός βαθμός τῶν ὅρων του λέγεται **βαθμός ὁμογένειας**. Ἀπ' τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει ὁ ἑπόμενος ἰσοδύναμος ὁρισμός γιά τά ὁμογενῆ πολυώνυμα.

Ἕνα ἀκέραιο μή μηδενικό πολυώνυμο $f(x, y, z, \cdots)$ μέ μεταβλητές $x, y, z, \cdots$ λέγεται ὁμογενές καί μάλιστα βαθμοῦ ὁμογένειας ν ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει:

$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \cdots) \equiv \lambda^\nu \cdot f(x, y, z, \cdots)$ μέ $\lambda \in R-\{0,1\}$ καί $\nu \in N$.

Στά ὁμογενῆ πολυώνυμα ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1. Τό γινόμενο δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο βαθμοῦ ὁμογένειας ἴσου μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν ὁμογένειας τῶν δύο πολυωνύμων.

2. Τό πηλίκο τῆς τελείας διαίρεσης δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο βαθμοῦ ὁμογένειας ἴσου μέ τή διαφορά τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

Πρίν δώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ συμμετρικοῦ καί κυκλικά συμμετρικοῦ πολυωνύμου, δίνουμε τούς παρακάτω ὁρισμούς:

Καλεῖται **μετάθεση** τῶν ν στοιχείων ἑνός συνόλου Ε κάθε ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου Ε στόν ἑαυτό του.

Ἐνῶ **κυκλική μετάθεση** εἶναι ἡ μετάθεση ἐκείνη στήν ὁποία κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ε ἀπεικονίζεται στό ἑπόμενό του, τό δέ τελευταῖο στοιχεῖο τοῦ Ε, στό πρῶτο.

Ἕνα ἀκέραιο μή μηδενικό πολυώνυμο δύο ἤ περισσότερων μεταβλητῶν καλεῖται **συμμετρικό**, ἄν γιά ὁποιαδήποτε μετάθεση τῶν μεταβλητῶν του προκύπτει προκύπτει πολυώνυμο ἐκ ταυτότητος ἴσο πρός τό ἀρχικό. Ἔτσι τό ἀκέραιο μή μηδενικό πολυώνυμο $f(x,y,z)$ μέ τρεῖς μεταβλητές x,y,z εἶναι συμμετρικό, ὅταν ἰσχύει $f(x,y,z)\equiv f(y,z,x)\equiv f(z,x,y)\equiv f(x,z,y)\equiv$ $\equiv f(y,x,z)\equiv f(z,y,x)$.

Εἰδικά τό ἀκέραιο μή μηδενικό πολυώνυμο καλεῖται **κυκλικά συμμετρικό**, ἄν γιά ὁποιαδήποτε κυκλική μετάθεση τῶν μεταβλητῶν του προκύπτει πολυώνυμο ἐκ ταυτότητος ἴσο πρός τό ἀρχικό. Ἔτσι γιά τό ἀκέραιο μή μηδενικό πολυώνυμο $f(x,y,z)$ μέ τρεῖς μεταβλητές x,y,z θά ἰσχύει: $f(x,y,z)\equiv f(y,z,x)\equiv f(z,x,y)$.

Καί στά συμμετρικά πολυώνυμα ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1α. Τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά καί τό γινόμενο δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων (τῶν ἰδίων μεταβλητῶν) εἶναι συμμετρικό πολυώνυμο.

2α. Τό πηλῖκο τῆς τελείας διαιρέσεως δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων (τῶν ἰδίων μεταβλητῶν) εἶναι συμμετρικό πολυώνυμο.

3α. Ἄν ἕνα κυκλικά συμμετρικό πολυώνυμο $f(x,y,z)$ εἶναι διαιρετό διά $x-y$, θά εἶναι διαιρετό καί μέ τό γινόμενο $(x-y)(y-z)\cdot(z-x)$, ἄν εἶναι διαιρετό μέ τό $x+y$ θά εἶναι διαιρετό καί μέ τό γινόμενο $(x+y)(y+z)(z+x)$, ἄν εἶναι διαιρετό μέ τό $x+y-z$ θά εἶναι διαιρετό καί μέ τό γινόμενο $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

Μορφές κυκλικά συμμετρικῶν πολυωνύμων

α'). Γιά δύο μεταβλητές x καί y.

1. Πρωτοβάθμια: $\alpha(x+y)+\beta$, $\alpha,\beta\in R$
2. Δευτεροβάθμια: $\alpha(x^2+y^2)+\beta xy+\gamma(x+y)+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$
3. Τριτοβάθμια: $\alpha(x^3+y^3)+\beta(x^2y+y^2x)+\gamma xy+\delta(x+y)+\varepsilon$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in R$.

β'). Γιά τρεῖς μεταβλητές x, y, z.

1. Πρωτοβάθμια: $\alpha(x+y+z)+\beta$, $\alpha,\beta\in R$
2. Δευτεροβάθμια: $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)+\gamma(x+y+z)+\delta$, μέ $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$
3. Τριτοβάθμια: $\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$ $+\gamma xyz+\delta(x^2+y^2+z^2)+\varepsilon(xy+yz+zx)+\vartheta(x+y+z)+\eta$ μέ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\vartheta,\eta\in R$.

Ἕνα πολυώνυμο $f(x,y,z)$ λέγεται **ὁμογενές καί κυκλικά συμμετρικό** ἄν εἶναι ὁμογενές καί συγχρόνως κυκλικά συμμετρικό.

Μορφές ὁμογενῶν καί κυκλικά συμμετρικῶν πολ/μων.

Οἱ μορφές αὐτές προκύπτουν ἀπό ἕνα κυκλικά συμμετρικό πολυώνυμο, ἄν παραλειφθοῦν οἱ ὅροι πού καταστρέφουν τήν ὁμογένεια. Π.χ γιά τρεῖς μεταβλητές τά μόνα ὁμογενῆ καί συγχρόνως κυκλικά συμμετρικά πολυώνυμα εἶναι:

1. Πρωτοβάθμια: $\alpha(x+y+z)$ $\alpha \in R$
2. Δευτεροβάθμια: $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$ $\alpha, \beta \in R$
3. Τριτοβάθμια: $\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$
$+\gamma xyz$ $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Λύση ἐξισώσεων $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$ καί $4^{ου}$ βαθμοῦ.

Οἱ πλήρεις ἐξισώσεις $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου}$ καί $4^{ου}$ βαθμοῦ μποροῦν νά λυθοῦν στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἐξισώσεις πλήρεις βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ $4^{ου}$ δέν λύνονται μέ στοιχειώδη Μαθηματικά. Θά λύσουμε τίς ἐξισώσεις (πλήρεις) μέχρι καί $4^{ου}$ βαθμοῦ.

$1^{ου}$ βαθμοῦ.

Ἡ γενική της μορφή εἶναι $\alpha x+\beta=0$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει ἡ μοναδική τιμή $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (Ἰδιότ. IV ἀκερ. πολ).

$2^{ου}$ βαθμοῦ.

Ἡ γενική της μορφή εἶναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1). Ἡ (1) γράφεται διαδοχικά $\alpha\left(x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(x^2+2\cdot\dfrac{\beta}{2\alpha}\cdot x+\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}-\right.$
$\left.-\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[\left(x^2+2\cdot\dfrac{\beta}{2\alpha}\cdot x+\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)-\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=$
$\alpha\left[\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=0$ καί ἐπειδή ὑποτίθεται $\alpha\neq 0$, ἐφ' ὅσον μέ $\alpha=0$ ἡ (1) γίνεται πρώτου βαθμοῦ, προκύπτει:
$\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0$ ἤ $x+\dfrac{\beta}{2\alpha}=\pm\dfrac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
καί $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ δηλ. δύο ρίζες σύμφωνα μέ τήν Ἰδιότ. IV τῶν ἀκερ. πολ., τίς $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

$3^{ου}$ βαθμοῦ.

Ἡ γενική της μορφή εἶναι $\alpha' x^3+\beta' x^2+\gamma' x+\delta'=0$ ἤ ἄν διαιρέσουμε κάθε ὅρο της μέ α' καί θέσουμε $\frac{\beta'}{\alpha'}=\alpha$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}=\beta$, $\frac{\delta'}{\alpha'}=\gamma$ παίρνει τή μορφή $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1).

Ἄν ἐκτελέσουμε τόν μετασχηματισμό $x=y-\frac{\alpha}{3}$ καί κάνουμε τίς ἀναγωγές ὁμοίων ὅρων θά προκύψει:

$y^3-\frac{\alpha^2-3\beta}{3}y+\frac{27\gamma-9\alpha\beta+2\alpha^3}{27}=0$ ἤ ἄν θέσουμε:

$p=-\frac{\alpha^2-3\beta}{3}$, $q=\frac{27\gamma-9\alpha\beta+2\alpha^3}{27}$ θά πάρει τήν μορφή:

$y^3+py+q=0$ (2). Διακρίνουμε τώρα τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. Ἄν $p=0$ δηλ $\alpha^2=3\beta$ ἡ (2) γίνεται $y^3+q=0$ πού εἶναι μιά διώνυμη ἐξίσωση $3^{ου}$ βαθμοῦ καί λύνεται κατά τά γνωστά.

II. Ἄν $q=0$ δηλ $27\gamma-9\alpha\beta+2\alpha^3=0$ ἡ (2) γίνεται $y^3+py=0$ πού εἶναι διώνυμη ἐξίσωση $2^{ου}$ βαθμοῦ καί λύνεται κανονικά.

III. Ἄν καμμία ἀπ' τίς περιπτώσεις I καί II δέν συμβαίνει δηλ ἄν $p\neq 0$ καί $q\neq 0$ τότε ἡ (2) στήν ὁποία λείπει ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος λύνεται ὡς ἑξῆς:

Θέτουμε $y=u+v$ (3) καί θά ζητήσουμε νά προσδιορίσουμε τά u καί v ὥστε τό $u+v$ νά εἶναι ρίζα τῆς (2). Ἡ (2) μετά τήν ἀντικατάσταση τοῦ y γίνεται: $(u+v)^3+p(u+v)+q=0$ ἤ $u^3+v^3+q+3uv(u+v)+p(u+v)=0$ ἤ ἀκόμη:

$(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p)=0$. Συνεπῶς θά πρέπει νά εἶναι: $u^3+v^3+q=0$ καί $3uv+p=0$ (ὁ ὅρος $u+v$ δέν εἶναι δυνατόν νά εἶναι μηδέν γιατί τότε θά ἦταν $y=0$ καί θά προέκυπτε ἀπ' τή (2) ὅτι καί $q=0$ πρᾶγμα πού ὑποθέσαμε ὅτι δέν συμβαίνει). Ἀπ' τίς τελευταῖες σχέσεις προκύπτει $u^3+v^3=-q$ (4) καί $uv=-\frac{p}{3}$ (5).

Ἐπειδή εἶναι $u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$ προκύπτει ὅτι τά u^3 καί v^3 εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $k^2+qk-\frac{p^3}{27}=0$ ἡ ὁποία ἄν λυθεῖ δίνει:

$$k_{1,2}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2} \quad \text{ἤ} \quad k_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

Ἄρα εἶναι $u^3=k_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, $v^3=k_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

ὁπότε $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ (6) καί ἡ (5) δίνει ἀμέσως

$v=-\frac{p}{3u}$ ὅπου τό u τώρα εἶναι γνωστό, ἀποφεύγοντας ἔτσι τήν εὕρεση τῶν κυβικῶν ριζῶν τῆς k_2. Ἡ (3) τώρα γίνεται:

$y=u-\frac{p}{3u}$. Ἀφοῦ ὑπολογιστῆ τό y ὑπολογίζεται τελικά καί τό x ἀπ' τόν ἀρχικό μετασχηματισμό $x=y-\frac{\alpha}{3}$.

Παρατήρηση: Ἀπ' τήν (6) εὑρίσκουμε τρεῖς τιμές γιά τό u τίς u_1, u_2, u_3 ἐπειδή ὡς γνωστόν ὁ ἀριθμός k_1 ἔχει τρεῖς κυβικές ρίζες. Οἱ τιμές αὐτές τοῦ u ἄν τεθοῦν στήν $y=u-\frac{p}{3u}$ θά δώσουν τρεῖς ρίζες y_1, y_2, y_3 τῆς ἐξίσωσης (2). (Ἴδ. IV ἀκ. πολ).

4ου βαθμοῦ.

Ἡ γενική της μορφή εἶναι $\alpha'x^4+\beta'x^3+\gamma'x^2+\delta'x+\varepsilon'=0$ ἤ ἄν διαιρέσουμε μέ α' κάθε ὅρο της καί θέσουμε $\frac{\beta'}{\alpha'}=\alpha$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}=\beta$, $\frac{\delta'}{\alpha'}=\gamma$, $\frac{\varepsilon'}{\alpha'}=\delta$ παίρνει τήν μορφή $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ (1).

Ἄν ἐκτελέσουμε τόν μετασχηματισμό $x=y-\frac{\alpha}{4}$ (γιά νά φύγει τώρα ὁ τριτοβάθμιος ὅρος) καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις, μετά τίς ἀναγωγές ὁμοίων ὅρων θά ἔχουμε:

$$y^4+\frac{16\beta-6\alpha^2}{16}y^2+\frac{\alpha^3-4\alpha\beta+8\gamma}{8}y+\frac{16\alpha^2\beta+256\delta-64\alpha\gamma-3\alpha^4}{256}=0$$

ἢ ἂν θέσουμε $\frac{16\beta-6\alpha^2}{16}=A$, $\frac{\alpha^2-4\alpha\beta+8\gamma}{8}=B$ καί $\frac{16\alpha^2\beta+256\delta-64\alpha\gamma-3\alpha^4}{256}=\Gamma$ θά πάρει τήν μορφή:

$y^4+Ay^2+By+\Gamma=0$ (2). Διακρίνουμε ὁμοίως τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. Ἄν $B=0$ δηλ. $\alpha^2-4\alpha\beta+8\gamma=0$ τότε ἡ (2) γίνεται διτετράγωνη καί λύνεται μέ τήν ἀντικατάσταση $y^2=z$ ὡς δευτεροβάθμια.

II. Ἄν $\Gamma=0$ δηλ. $16\alpha^2\beta+256\delta-64\alpha\gamma-3\alpha^4=0$ τότε ἡ (2) λύνεται σάν τριτοβάθμια ἐξίσωση γιατί θά εἶναι $y^4+Ay^2+By=0$ ἢ $y(y^3+Ay+B)=0$ καί λύνεται κατά τά γνωστά.

III. Ἄν εἶναι $A=0$, $B=0$ τότε ἡ (2) γίνεται $y^4+\Gamma=0$ καί λύνεται σάν διώνυμη κατά τά γνωστά.

IV. Ἄν καμμία ἀπ' τίς περιπτώσεις I II III δέν συμβαίνει δηλ. ἂν $A\neq0$, $B\neq0$, $\Gamma\neq0$ τότε ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Θέτουμε $y^4+Ay^2+By+\Gamma\equiv(y^2+\lambda y+\mu)(y^2-\lambda y+\nu)$ (3) καί θά ζητήσουμε νά προσδιορίσουμε τά λ,μ,ν ὥστε ἡ (3) νά εἶναι ταυτότητα ὡς πρός y, ὁπότε ἡ λύση τῆς ἐξίσωσης (2) ἀνάγεται στή λύση τῶν δευτεροβάθμιων ἐξισώσεων $y^2+\lambda y+\mu=0$, $y^2-\lambda y+\nu=0$.
Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στό δεύτερο μέλος τῆς (3) καί ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων τοῦ y θά πάρουμε τό σύστημα: $\nu+\mu-\lambda^2=A$, $\lambda\nu-\lambda\mu=B$ καί $\mu\nu=\Gamma$ ἢ ἀκόμη $\nu+\mu=\lambda^2-A$, $\nu-\mu=\frac{B}{\lambda}$, $\mu\nu=\Gamma$ (4). Ἀπ' τίς δύο πρῶτες τῶν (4) εὑρίσκουμε τά ν καί μ συναρτήσει τῶν A, B, λ. Εἶναι:

$\nu=\frac{1}{2}\left(\lambda^2+A+\frac{B}{\lambda}\right)$, $\mu=\frac{1}{2}\left(\lambda^2+A-\frac{B}{\lambda}\right)$ (5). Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές αὐτές τῶν ν καί μ στήν τρίτη σχέση τῶν (4) τήν $\mu\nu=\Gamma$ προκύπτει $(\lambda^2)^3+2A(\lambda^2)^2+(A^2-4\Gamma)\lambda^2-B^2=0$ (6). δηλ. μιά ἐξίσωση πλήρης τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός λ^2. Ἄν λυθεῖ αὐτή θά δώση τρεῖς τιμές γιά τό λ^2 ἀπ' τίς ὁποῖες ἡ μία τουλάχιστον θά εἶναι πραγματική – σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα VI τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων –. Κάθε τιμή τοῦ λ^2 δίνει δύο τιμές γιά τό λ, τίς $\pm\sqrt{\lambda^2}$. Ἔτσι γιά τό λ ἔχουμε συνολικά ἕξ τιμές. Οἱ 6 ὅμως αὐτές λύσεις μόνο κατά τρεῖς τρόπους δίνουν ἀνάλυση τῆς μορφῆς (3), γιατί ὅπως φαίνεται στήν (3) τά λ ἐμφανίζονται μόνο μέ ἀντίθετα πρόσημα καί ἑπομένως οἱ ἀναλύσεις ἀνά δύο συμπίπτουν. Ἔτσι ἡ λύση τῆς ἐξίσωσης $4^{ου}$ βαθμοῦ ἀνάγεται στή λύση μιᾶς τριτοβάθμιας ἐξίσωσης, τῆς (6) καί δύο δευτεροβάθμιων ἐξισώσεων, τῶν (3), ἀπ' τίς ὁποῖες παίρνουμε γιά κάθε ζεῦγος τιμῶν $+\sqrt{\lambda^2}$ καί $-\sqrt{\lambda^2}$ τέσσερες τιμές γιά τό y, τίς y_1, y_2, y_3, y_4 καί ἑπομένως ἀπ' τήν $x = y - \frac{\alpha}{4}$ τέσσερες τιμές τίς x_1, x_2, x_3, x_4 (Ἰδ IV ἀκ. πολ).

Ἀσκήσεις.

4.1. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, γ γιά νά εἶναι τό πολυώνυμο $f(x) \equiv (2\alpha+1)x^2 + (3\beta-1)x + (2\gamma+\beta-\alpha)$ ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Λύση. Γιά νά εἶναι τό $f(x) \equiv 0$ θά πρέπει ὅλοι οἱ συντελεστές τοῦ $f(x)$ νά εἶναι 0. δηλ: $2\alpha+1=0$, $3\beta-1=0$, $2\gamma+\beta-\alpha=0$ Λύνοντας τό σύστημα αὐτό τῶν τριῶν ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους ὑπολογίζουμε τά α, β, γ. Ἀπ' τίς δύο πρῶτες προκύπτει $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$ Ἄν τεθοῦν οἱ τιμές αὐτές στήν τρίτη θά δώσουν $\gamma = -\frac{5}{12}$. Γιά τίς τιμές αὐτές τῶν α, β, γ τό $f(x)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, δηλ μηδενίζεται γιά ὁποιαδήποτε τιμή τῆς μεταβλητῆς x.

4.2. Νά προσδιορισθοῦν τά α, β, γ ὥστε τό πολυώνυμο: $2x^2+4x+5$ νά εἶναι ἴσο ἐκ ταυτότητος μέ τό $\alpha(x+2)(x+3)+\beta x(x-1)+\gamma$.

Λύση. Θά πρέπει τά δύο πολυώνυμα νά εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα δηλ. $2x^2+4x+5 \equiv \alpha(x+2)(x+3)+\beta x(x-1)+\gamma$ ἤ ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στό δεύτερο μέλος καί διατάξουμε τό πολυώνυμο κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x:
$2x^2+4x+5 \equiv (\alpha+\beta)x^2+(5\alpha-\beta)x+6\alpha+\gamma$. Γιά νά εἶναι τώρα τά δύο αὐτά πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα, θά πρέπει σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, οἱ συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων τοῦ x νά εἶναι ἴσοι, δηλ. $\alpha+\beta=2$, $5\alpha-\beta=4$, $6\alpha+\gamma=5$. Λύνοντας τό σύστημα εὑρίσκουμε $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-1$.

Παρατήρηση. Ἐκτός ἀπ' αὐτή τή μέθοδο πού λέγεται καί "μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν" ὑπάρχει καί ἄλλη μέθοδος, πού στηρίζεται στό γεγονός ὅτι τά δύο πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, δηλ. εἶναι ἴσα γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῆς μεταβλητῆς x. Ἑπομένως μποροῦμε νά δώσουμε στό x τρεῖς αὐθαίρετες τιμές π.χ. $x=0$, $x=1$, $x=-2$ (συνήθως τιμές πού μηδενίζουν παράγοντες πού περιέχουν τό x (τοῦ β' μέλους)) ὁπότε προκύπτουν τρεῖς ἰσότητες δηλ.:

Γιά $x=0$: $2\cdot 0^2+4\cdot 0+5 \equiv \alpha(0+2)(0+3)+\beta\cdot 0(0-1)+\gamma$ (1)

-»- $x=1$: $2\cdot 1^2+4\cdot 1+5 \equiv \alpha(1+2)(1+3)+\beta\cdot 1(1-1)+\gamma$ (2)

-»- $x=-2$: $2(-2)^2+4(-2)+5 \equiv \alpha(-2+2)(-2+3)+\beta(-2)(-2-1)+\gamma$ (3)

Ἡ (1) γράφεται: $5 = 6\alpha+\gamma$
Ἡ (2) -»- : $11 = 12\alpha+\gamma$
Ἡ (3) -»- : $5 = 6\beta+\gamma$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= 6\alpha+\gamma \\ 11 &= 12\alpha+\gamma \\ 5 &= 6\beta+\gamma \end{aligned}\right\} (4)$$

Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (4) εὑρίσκουμε πάλι $\alpha=1$, $\beta=1$ καί $\gamma=-1$.

4.3. Τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο διά $x+2$ δίνει ὑπόλοιπο -3, διαιρούμενο διά $x+3$ δίνει ὑπόλοιπο -1 καί διαιρούμενο διά $x-3$ δίνει ὑπόλοιπο 5. Νά εὑρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ $f(x)$ διά $(x+2)(x+3)(x-3)$.

Λύση. Ἐπειδή ὁ διαιρέτης $(x+2)(x+3)(x-3)$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ, τό ὑπόλοιπο θά εἶναι τό πολύ δευτέρου βαθμοῦ δηλ. τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἑπομένως θά ἰσχύει ἡ ταυτότητα:
$f(x) \equiv (x+2)(x+3)(x-3)\,\pi(x) + \alpha x^2+\beta x+\gamma$ ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαίρεσης αὐτῆς. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι:
$f(-2)=-3$, $f(-3)=-1$, $f(3)=5$ (Ἰδιότ. I ἀκ. πολυωνύμων)
Ἀλλά ἀπ' τήν παραπάνω ταυτότητα προκύπτει:

$f(-2) \equiv 4\alpha-2\beta+\gamma=-3$ (1)
$f(-3) \equiv 9\alpha-3\beta+\gamma=-1$ (2)
$f(3) \equiv 9\alpha+3\beta+\gamma=5$ (3)

Λύνοντας τό σύστημα τῶν (1), (2), (3) εὑρίσκουμε: $\alpha=\frac{3}{5}$, $\beta=1$ καί $\gamma=-\frac{17}{5}$

Ἑπομένως τό ζητούμενο ὑπόλοιπο εἶναι:
$$v(x)=\frac{3}{5}x^2+x-\frac{17}{5}.$$

4.4. Νά δειχθεῖ ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός $7^{2\nu+1}+1$ ὅπου $\nu\in N$ εἶναι διαιρετός μέ τό 8.

Λύση. Γνωρίζουμε ὅτι τό διώνυμο $x^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετό διά $x+1$ γιά κάθε τιμή τοῦ φυσικοῦ ν, δηλ. ἔχουμε τήν ταυτότητα $x^{2\nu+1}+1 \equiv (x+1)\pi(x)$ ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαίρεσης. Κι αὐτό γιατί $f(-1)=(-1)^{2\nu+1}+1=$ $=-1+1=0$. Ἐπειδή ἡ παραπάνω ταυτότητα ἀληθεύει γιά κάθε τιμή τοῦ x θά ἀληθεύει καί γιά $x=7$ ὁπότε θά εἶναι: $7^{2\nu+1}+1 \equiv (7+1)\,\pi(1) = 8\cdot\pi(1)$ ὅπου $\pi(1)$ ἀκέραιος, καθόσον οἱ

συντελεστές τοῦ $\pi(x)$ εἶναι ἀριθμοί ἀκέραιοι, ἐπειδή κατά τήν εὕρεσή των λαμβάνουν χώρα ἀκέραιες πράξεις. Ἄρα:
$7^{2\nu+1}+1 = \pi o\lambda\, 8$ δηλ. ὁ 8 διαιρεῖ τόν $7^{2\nu+1}+1$.

4.5. Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο μέ τό γινόμενο $(x-1)(x+3)(x-2)$ δίνει ὑπόλοιπο $\upsilon(x) \equiv 3x^2+2x-1$, τί ὑπόλοιπο θά δώσει ἄν διαιρεθῇ μέ τό $x-1$, $x+3$ καί $x-2$ χωριστά;

Λύση. Ἔστω $\pi(x)$ τό πηλίκο τῆς διαίρεσης τοῦ $f(x)$ διά $(x-1)(x+3)(x-2)$. Θά ἔχουμε ὡς γνωστόν τήν ταυτότητα:
$f(x) \equiv (x-1)(x+3)(x-2)\,\pi(x) + 3x^2+2x-1$ (1). Τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f(x) : x-1$, $f(x) : x+3$, $f(x) : x-2$ εἶναι ὡς γνωστόν τά $f(1)$, $f(-3)$, $f(2)$ ἀντίστοιχα.
Ἄν ἑπομένως στήν (1) θέσουμε διαδοχικά $x=1$, $x=-3$, $x=2$ θά βροῦμε

$$f(1) \equiv 0\cdot\pi(x) + 3\cdot 1^2+2\cdot 1-1 = 4,$$
$$f(-3) \equiv 0\cdot\pi(x) + 3(-3)^2+2\cdot(-3)-1 = 20,$$
$$f(2) \equiv 0\cdot\pi(x) + 3\cdot 2^2+2\cdot 2-1 = 15.$$

4.6. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, γ γιά νά εἶναι τό πολυώνυμο $f(x) \equiv x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ τετράγωνο τοῦ τριωνύμου $x^2-x+\gamma$.

Λύση. Πρέπει νά ἰσχύει: $x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+4 \equiv (x^2-x+\gamma)^2$ ἤ ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις καί διατάξουμε τό πολυώνυμο (β' μέλος) ὡς πρός τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x θά προκύψει:
$x^4-2x^3+\alpha x^2+\beta x+4 \equiv x^4-2x^3+(2\gamma+1)x^2-2\gamma x+\gamma^2$ ὁπότε, ἐξισώνοντας τούς συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων δυνάμεων τοῦ x

προκύπτει τό σύστημα: $2\gamma+1=\alpha$, (1), $-2\gamma=\beta$ (2), $\gamma^2=4$ (3).
Ἡ (3) δίνει $\gamma=\pm 2$. Γιά $\gamma=2$ ἡ (1) δίνει $\alpha=5$ καί ἡ (2) $\beta=-4$.
Γιά $\gamma=-2$ ἡ (1) δίνει $\alpha=-3$ καί ἡ (2) $\beta=4$. Ὥστε ἔχουμε δύο λύσεις τίς:
$$x^4-2x^3+5x^2-4x+4\equiv(x^2-x+2)^2 \text{ καί}$$
$$x^4-2x^3-3x^2+4x+4\equiv(x^2-x-2)^2.$$

4.7. Ἔστω τό πολυώνυμο $f(x)\equiv x^2+x+1$. Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $f(f(x))-f(x)-2$ εἶναι διαιρετό διά τοῦ $f(x)-1$. Ποιό εἶναι τό πηλῖκο;

Λύση. Τό $f(f(x))$ σημαίνει νά θέσουμε στό $f(x)$ ἀντί τοῦ x τό $f(x)$. Τότε θά ἔχουμε:
$$f(f(x))-f(x)-2\equiv[f(x)]^2+f(x)+1-f(x)-2\equiv$$
$$\equiv[f(x)]^2-1\equiv[f(x)-1]\cdot[f(x)+1]$$
Ἑπομένως τό $f(f(x))-f(x)-2$ εἶναι διαιρετό διά τοῦ $f(x)-1$ καί δίνει πηλῖκο τό $f(x)+1$.

4.8. Ἄν α,β,γ εἶναι διάφοροι μεταξύ τους ἀριθμοί νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)\equiv(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+$ $+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Λύση. Ἔχουμε $f(\alpha)\equiv(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)+$ $+(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)[(\alpha-\beta)+(\gamma-\alpha)+(\beta-\gamma)]=0$
Παρόμοια βρίσκουμε ὅτι καί $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$ γιατί ἡ παράσταση εἶναι κυκλική ὡς πρός α,β,γ (δηλ. μέ κυκλική μετάθεση τῶν α,β,γ τό πολυώνυμο $f(x)$ παραμένει τό ἴδιο).
Ἐπειδή τό $f(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καί μηδενίζεται γιά τρεῖς

διαφορετικές τιμές τοῦ x, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα V τῶν ἀκερ. πολυωνύμων εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἤ τό μηδενικό πολυώνυμο.

4.9. Νά ὁρισθεῖ πολυώνυμο $f(x)$, τετάρτου βαθμοῦ τέτοιο ὥστε τό $f(x+1)$ νά εἶναι διαιρετό διά $(x-1)^2$ καί τό $f(x-1)$ διαιρετό διά $(x+1)^2$ καί τό ὁποῖο γιά $x=1$ γίνεται $f(1)=1$.

Λύση. Ἀπ' τήν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος θά ἔχουμε:
$f(x+1) \equiv (x-1)^2 \pi_1(x)$ (1) , $f(x-1) \equiv (x+1)^2 \pi_2(x)$ (2)
Θέτουμε τώρα ὅπου x τό $x-1$ ὁπότε ἀπ' τήν (1) ἔχουμε:
$f(x) \equiv (x-2)^2 \pi_1(x-1)$ (3). Τώρα θέτουμε ὅπου x τό $x+1$ ὁπότε ἀπ' τήν (2) προκύπτει $f(x) \equiv (x+2)^2 \pi_2(x+1)$ (4)
Ἀπ' τίς (3) καί (4) προκύπτει ὅτι τό $f(x)$ εἶναι διαιρετό καί μέ τό γινόμενο τῶν $(x-2)^2$ καί $(x+2)^2$ δηλ. τό $(x^2-4)^2$, ἐφ' ὅσον διαιρεῖται χωριστά μέ κάθε ἕνα ἀπ' αὐτούς (ἰδ. III ἀκ. πολ.) καί ἐπειδή εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ἐξ ὑποθέσεως, θά ἔχουμε: $f(x) \equiv A(x^2-4)^2$. Ἀλλά $f(1) \equiv 1$ καί ἑπομένως $f(1) \equiv A(1-4)^2 = 1$ ἤ $A = \frac{1}{9}$. Ἑπομένως τό ζητούμενο πολυώνυμο εἶναι $f(x) \equiv \frac{1}{9}(x^2-4)^2$.

4.10. Ἔστω τό πολυώνυμο $f(x) \equiv \alpha x^\nu + \beta x^{\nu-1} + 1$ ὅπου $\nu \in N$. Νά ὁρισθοῦν τά α καί β ὥστε τό $f(x)$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $(x-1)^2$.

Λύση. Κατ' ἀρχήν θά πρέπει τό $f(x)$ νά διαιρεῖται μέ τό $x-1$. Γιαυτό θά πρέπει $f(1) \equiv \alpha\cdot 1^\nu + \beta\cdot 1^{\nu-1}+1 = \alpha+\beta+1 = 0$. (1)
ἤ $1 = -\alpha-\beta$, ὁπότε τό $f(x)$ γράφεται $f(x) \equiv \alpha x^\nu + \beta x^{\nu-1} - \alpha - \beta \equiv$

$\equiv \alpha(x^{\nu}-1)+\beta(x^{\nu-1}-1)\equiv(x-1)\left[\alpha(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\cdots+x+1)+\right.$ $\left.+\beta(x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+\cdots+x+1)\right]\equiv(x-1)f_1(x)$ ὅπου $f_1(x)$ εἶναι τό πολυώνυμο τῆς ἀγκύλης. Τώρα πρέπει τό $f_1(x)$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $x-1$ (ἐφ' ὅσον θέλουμε τό $f(x)$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $(x-1)^2$). Ἑπομένως θά πρέπει νά εἶναι:

$$f_1(1)=\alpha(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\nu})+\beta(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\nu-1})=\alpha\nu+\beta\nu-\beta=0 \quad (2)$$

Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) παίρνουμε τίς τιμές τῶν α, β. Εἶναι $\alpha=\nu-1$, $\beta=-\nu$. Ἑπομένως τό πολυώνυμο εἶναι: $\qquad f(x)\equiv(\nu-1)x^{\nu}-\nu x^{\nu-1}+1.$

4.11. Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο (ἀκέραιο) $f(x)\equiv$ $\equiv(x+1)^{2\mu}-x^{2\mu}-2x-1$ ὅπου $\mu\in N$, διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $x(x+1)(2x+1)$.

Λύση. Οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)\equiv x(x+1)(2x+1)$ εἶναι προφανῶς $x=0$, $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$ (διάφορες μεταξύ τους). Γιά νά δείξουμε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι διαιρετό μέ τό $\varphi(x)$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό $f(x)$ εἶναι διαιρετό μέ κάθε ἕνα ὅρο τῶν x, $x+1$, $2x+1$. Εἶναι $f(0)=1^{2\mu}-1=0$, $f(-1)=-(-1)^{2\mu}-2(-1)-1=0$ καί $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\mu}-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$

4.12. Ἄν τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεῖται διά τοῦ $x-3$ νά δειχθεῖ ὅτι τό $f(4x-5)$ διαιρεῖται διά τοῦ $x-2$.

Λύση. Ἐφ' ὅσον τό $f(x)$ διαιρεῖται μέ τό $x-3$ θά εἶναι $f(3)=0$. Τό ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ $f(4x-5)$ διά τοῦ $x-2$ θά εἶναι $f(4\cdot2-5)=f(3)=0$. Ἄρα τό $f(4x-5)$ διαιρεῖται διά τοῦ $x-2$.

4.13. Νά προσδιοριστῆ πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμοῦ τό ὁποῖο νά δέχεται σάν ρίζα τόν ἀριθμό 0, τέτοιο ὥστε $f(x+1)-f(x)\equiv x^3$. Στή συνέχεια νά ὑπολογιστῆ τό ἄθροισμα: $1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3$.

Λύση. Τό ζητούμενο πολυώνυμο θά εἶναι τῆς μορφῆς: $f(x)\equiv\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$. Ἐπειδή $f(0)=0$ θά πρέπει $\varepsilon=0$ ὁπότε τό πολυώνυμο γίνεται: $f(x)\equiv\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x$. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχουμε: $f(x+1)-f(x)\equiv\{\alpha(x+1)^4+\beta(x+1)^3+\gamma(x+1)^2+\delta(x+1)\}-\{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x\}\equiv x^3$ (1). Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στήν (1) καί κάνουμε ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων, διατάσσοντας τό ἀριστερό μέλος τῆς (1) κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x προκύπτει: $4\alpha x^3+(6\alpha+3\beta)x^2+(4\alpha+3\beta+2\gamma)x+\alpha+\beta+\gamma+\delta\equiv x^3$ ὁπότε γιά νά εἶναι τά δύο αὐτά πολυώνυμα ἴσα, πρέπει οἱ συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων νά εἶναι ἴσοι δηλ.
$4\alpha=1,\ 6\alpha+3\beta=0,\ 4\alpha+3\beta+2\gamma=0,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ (2).
Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) προσδιορίζουμε τά $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Εἶναι $\alpha=\frac{1}{4},\ \beta=-\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{1}{4},\ \delta=0$. Ἄρα τό ζητούμενο πολυώνυμο εἶναι $f(x)\equiv\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$.
Αὐτό γράφεται ἀκόμα $f(x)\equiv\frac{1}{4}x^2(x^2-2x+1)=\frac{1}{4}x^2(x-1)^2$. (3)
Ἀπ' τήν ταυτότητα $f(x+1)-f(x)\equiv x^3$ θέτοντας διαδοχικά $x=1,\ x=2,\ \cdots,\ x=\nu$ εὑρίσκουμε: $f(2)-f(1)\equiv 1^3$, $f(3)-f(2)\equiv 2^3$, $f(4)-f(3)\equiv 3^3$, $\cdots$; $f(\nu+1)-f(\nu)\equiv\nu^3$.
Προσθέτοντας κατά μέλη θά ἔχουμε: $f(\nu+1)-f(1)\equiv 1^3+2^3+\cdots+\nu^3$ ἤ $\frac{1}{4}(\nu+1)^2(\nu+1-1)^2-\frac{1}{4}\cdot 1^2(1-1)^2\equiv 1^3+2^3+\cdots+\nu^3$ ὅπως προκύπτει ἀπ' τήν (3) ἤ τελικά $\frac{1}{4}(\nu+1)^2\cdot\nu^2=\left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2\equiv 1^3+2^3+\cdots+\nu^3$.

4.14. Νά προσδιορισθοῦν τά λ καί μ ἔτσι ὥστε τό κλάσμα $\dfrac{(\lambda-1)x^2+(\mu+1)x+1}{x^2+5x+1}$ νά ἔχει τιμή ἀνεξάρτητη τοῦ x.

Λύση. Ἔστω ὅτι τό κλάσμα εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ x. Δηλ. γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x τό κλάσμα ἰσοῦται μέ ἕνα ἀριθμό ἔστω k. Τότε θά ἔχουμε: $\dfrac{(\lambda-1)x^2+(\mu+1)x+1}{x^2+5x+1} \equiv k$ ἤ κάνοντας ἀπαλοιφή παρονομαστῶν προκύπτει:
$(\lambda-1)x^2+(\mu+1)x+1 \equiv kx^2+5kx+k$ ὁπότε ἐπειδή τά πολυώνυμα αὐτά εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα θά πρέπει νά εἶναι:
$\lambda-1=k$, $\mu+1=5k$, $1=k$. Ἀπ' τίς ἐξισώσεις αὐτές προκύπτει ἀμέσως $k=1$, $\lambda=2$ καί $\mu=4$. Γιά τίς τιμές λοιπόν $\lambda=2$, $\mu=4$ τό ἀρχικό κλάσμα παίρνει μόνιμα τήν τιμή $k=1$ γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x.

4.15. Ἄν -4 καί -164 εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διά $x+1$ καί $x-3$ ἀντίστοιχα, νά εὑρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ $f(x)$ μέ τό x^2-2x-3. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι $4^{ου}$ βαθμοῦ μέ ρίζες $0, 2, -2$ ποιά εἶναι ἡ ἄλλη ρίζα του;

Λύση. Ὁ διαιρέτης ἀναλύεται σέ γινόμενο παραγόντων καί εἶναι $x^2-2x-3 \equiv (x+1)(x-3)$. Ἐπειδή ὁ διαιρέτης εἶναι $2^{ου}$ βαθμοῦ, τό ὑπόλοιπο θά εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$ δηλ. $f(x) \equiv (x+1)(x-3)\pi(x)+\alpha x+\beta$ (1). ὅπου $\pi(x)$ τό πηλίκο τῆς διαίρεσης. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι: $f(-1)=-4$, $f(3)=-164$ (2). ἤ λόγω τῆς (1): $f(-1) \equiv 0\cdot\pi(x)+\alpha(-1)+\beta=-4$ ἤ $-\alpha+\beta=-4$ (3) καί $f(3) \equiv 0\cdot\pi(x)+\alpha\cdot 3+\beta=-164$ ἤ $3\alpha+\beta=-164$ (4)

λύνοντας τό σύστημα τῶν (3) καί (4) ἔχουμε $\alpha=-40$ καί $\beta=-44$ δηλ. τό ζητούμενο ὑπόλοιπο εἶναι τό $-40x-44$.

Ἐφ' ὅσον τώρα τό πολυώνυμο εἶναι $4^{ου}$ βαθμοῦ θά εἶναι τῆς μορφῆς: (Ἰδ. IV τῶν ἀκ. πολ). $f(x)\equiv\alpha_4(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$

Δίδεται ὅτι $\rho_1=0$, $\rho_2=2$, $\rho_3=-2$. Ἄρα θά εἶναι:

$f(x)\equiv\alpha_4 x\cdot(x-2)(x+2)(x-\rho_4)$ (5) Ἀπ' τήν (5) ἔχουμε γιά $x=-1$, $x=3$ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη καί τίς σχέσεις (2):

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)\equiv\alpha_4(-1)(-1-2)(-1+2)(-1-\rho_4)=-4 \text{ ἤ } -3\alpha_4(1+\rho_4)=-4 \\ f(3)\equiv\alpha_4\cdot 3(3-2)(3+2)(3-\rho_4)=-164 \text{ ἤ } 15\alpha_4(3-\rho_4)=-164 \end{array}\right\} (6)$$

Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (6) εὑρίσκουμε:

$\alpha_4=-\dfrac{12}{5}$, $\rho_4=-\dfrac{14}{9}$ καί $f(x)\equiv-\dfrac{12}{5}x(x-2)(x+2)\left(x+\dfrac{14}{9}\right)$

4.16. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ καί $\alpha\delta=\beta\gamma$, $\alpha\gamma>0$ νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)\equiv\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ ἔχει μία μόνο ρίζα πραγματική καί δύο ρίζες καθαρά φανταστικές.

Λύση. Ἀπ' τή σχέση $\alpha\delta=\beta\gamma$ προκύπτει $\delta=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$ καί τό $f(x)$ γίνεται: $f(x)\equiv\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\equiv$

$\equiv\dfrac{1}{\alpha}\left(\alpha^2x^3+\alpha\beta x^2+\alpha\gamma x+\beta\gamma\right)\equiv\dfrac{1}{\alpha}\left[\alpha x^2(\alpha x+\beta)+\gamma(\alpha x+\beta)\right]\equiv$

$\equiv\dfrac{1}{\alpha}(\alpha x+\beta)(\alpha x^2+\gamma)$. Ἀπ' τήν τελευταῖα σχέση προκύπτει ὅτι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$ εἶναι $x_1=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (πραγματική ρίζα) καί $x^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$ (ἐφ' ὅσον $\alpha\gamma>0$) ἄρα $x_{2,3}=\pm i\sqrt{\gamma/\alpha}$.

4.17. Δίδεται τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)\equiv x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τοῦ ὁποίου μία ρίζα εἶναι ὁ ἀριθμός $\gamma\neq 0$. Νά δειχθεῖ ὅτι ὁ γ εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f_1(x)\equiv x^2+\alpha x+\beta+1$.

Λύση. Ἀφοῦ γ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ θά εἶναι: $\gamma^3+\alpha\gamma^2+\beta\gamma+\gamma=0$ ἤ $\gamma(\gamma^2+\alpha\gamma+\beta+1)=0$ καί ἐπειδή $\gamma\neq 0$ θά εἶναι κατ' ἀνάγκη $\gamma^2+\alpha\gamma+\beta+1=0$, δηλ. τό γ εἶναι ρίζα τοῦ $f_1(x)$ ἀφοῦ $f_1(\gamma)=0$.

4.18. Νά κατασκευασθεῖ ἐξίσωση μέ ρίζες τά τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $x^3-x^2-5x+7=0$.

Λύση. Ἔστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης: $x^3-x^2-5x+7=0$. Τότε ἀπ' τίς σχέσεις μεταξύ ριζῶν καί συντελεστῶν ἑνός πολυωνύμου (σχέσεις τοῦ Vieta) θά ἔχουμε:

$S_1=\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}=-\dfrac{-1}{1}=1$, $S_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=$ $=\dfrac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}=\dfrac{-5}{1}=-5$, $S_3=\rho_1\rho_2\rho_3=-\dfrac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}=-\dfrac{7}{1}=-7$

Ἄν x_1, x_2, x_3 εἶναι οἱ ρίζες τῆς πρός κατασκευή ἐξίσωσης θά ἔχουμε: $S_1'=x_1+x_2+x_3=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-$ $-2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)=1-2\cdot(-5)=1+10=11$,

$S_2'=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\rho_1^2\rho_2^2+\rho_1^2\rho_3^2+\rho_2^2\rho_3^2=(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)^2-$ $-2\rho_1\rho_2\rho_3(\rho_1+\rho_2+\rho_3)=(-5)^2-2\cdot(-7)\cdot 1=39$ καί

$S_3'=x_1x_2x_3=\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2=(\rho_1\rho_2\rho_3)^2=(-7)^2=49$.

Ἑπομένως ἡ ζητούμενη ἐξίσωση εἶναι $x^3-11x^2+39x-49=0$.

419. Ὁμοίως ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ νά κατασκευασθεῖ ἐξίσωση τρίτου βαθμοῦ μέ ρίζες τίς $\dfrac{1}{\rho_1^2}, \dfrac{1}{\rho_2^2}, \dfrac{1}{\rho_3^2}$

Λύση. Ὁμοίως ἔχουμε $x_1=\dfrac{1}{\rho_1^2}$, $x_2=\dfrac{1}{\rho_2^2}$, $x_3=\dfrac{1}{\rho_3^2}$ ὁπότε θά ἔχουμε (σχέσεις Vieta):

$$x_1+x_2+x_3 = \frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{\rho_2^2\rho_3^2+\rho_1^2\rho_3^2+\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2} =$$

$$= \frac{(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)^2-2\rho_1\rho_2\rho_3(\rho_1+\rho_2+\rho_3)}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2} = \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\gamma^2}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{1}{\rho_1^2\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_2^2\rho_3^2}+\frac{1}{\rho_2^2\rho_3^2} = \frac{\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2} =$$

$$= \frac{(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)}{(\rho_1\rho_2\rho_3)^2} = \frac{\alpha^2-2\beta}{\gamma^2} \quad \text{καί}$$

$x_1x_2x_3 = \dfrac{1}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2} = \dfrac{1}{\gamma^2}$. Ἡ ζητούμενη ἐξίσωση ἑπομένως εἶναι ἡ $x^3 - \dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\gamma^2}x^2 + \dfrac{\alpha^2-2\beta}{\gamma^2}x - \dfrac{1}{\gamma^2} = 0$.

4.20. Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση μέ πραγματικούς συντελεστές πού νά ἔχει σάν ρίζες τούς $1+i\sqrt{2}$ καί $1-i\sqrt{3}$.

Λύση. Ἡ ζητούμενη ἐξίσωση θά ἔχει σάν ρίζες καί τούς συζυγεῖς τῶν $1+i\sqrt{2}$, $1-i\sqrt{3}$ δηλ. τούς $1-i\sqrt{2}$, $1+i\sqrt{3}$ σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα $\underline{VI}$ τῶν ἀκερ. πολυωνύμων. Ἑπομένως θά εἶναι: $f(x) \equiv [x-(1+i\sqrt{2})][x-(1-i\sqrt{2})]\cdot$
$\cdot[x-(1+i\sqrt{3})][x-(1-i\sqrt{3})] = (x-1-i\sqrt{2})(x-1+i\sqrt{2})\cdot$
$\cdot(x-1-i\sqrt{3})\cdot(x-1+i\sqrt{3}) = \{(x-1)^2+2\}\cdot\{(x-1)^2+3\} =$
$= x^4-4x^3+11x^2-14x+12=0$ ἡ ζητούμενη ἐξίσωση.

4.21. Νά σχηματισθεῖ πολυώνυμο μέ ἀκεραίους συντελεστές πού νά ἔχει σάν ρίζες τούς $1+\sqrt{2}$ καί $(1+\sqrt{2})^2$.

Λύση. Τό ζητούμενο πολυώνυμο θά ἔχει σάν ρίζες καί τούς $1-\sqrt{2}$, $(1-\sqrt{2})^2$ σύμφωνα μέ τήν ἰδ. $\underline{VII}$ τῶν ἀκ. πολυων.

Εἶναι $(1+\sqrt{2})^2 = 1+2+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$ καί

$(1-\sqrt{2})^2 = 1+2-2\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2}$ ἄρα τό πολυώνυμο

θά εἶναι: $f(x) \equiv (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2})(x-3-2\sqrt{2}) =$

$= \{(x-1)^2-2\}\{(x-3)^2-8\} = (x^2-2x-1)(x^2-6x+1) =$

$= x^4-8x^3+12x^2+4x-1=0.$

4.22. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\dfrac{3x-1}{x^2-5x+6}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Ἐπειδή $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, θά ἔχουμε (Περ. I):

$\dfrac{3x-1}{(x-2)(x-3)} \equiv \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{x-3}$ (1) Ἀπ' τήν (1) δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκουμε:

$3x-1 \equiv A_1(x-3)+A_2(x-2)$ (2). Ἄν θέσουμε στή (2) τιμές τοῦ x πού μηδενίζουν κάθε φορά ἕναν ἀπ' τούς παράγοντες τοῦ A_1, A_2 δηλ. $x=3$ καί $x=2$ θά πάρουμε:

$x=3$: $\quad 3\cdot 3-1 \equiv A_1(3-3)+A_2(3-2)$ ἤ $8=A_2$ καί

$x=2$: $\quad 3\cdot 2-1 \equiv A_1(2-3)+A_2(2-2)$ ἤ $-5=A_1$ Ἄρα θά εἶναι:

$$\frac{3x-1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{-5}{x+2} + \frac{8}{x-3}.$$

4.23. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Ἐδῶ ἔχουμε κλάσμα τύπου περίπτωσης II. Ἄρα:

$\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \dfrac{A_1}{x+2} + \dfrac{B_1}{x+3} + \dfrac{B_2}{(x+3)^2}$ (1). Ἄν ἀπαλείψουμε τούς παρονομαστές θά πάρουμε:

$x^2+4x+7 \equiv A_1(x+3)^2+B_1(x+2)(x+3)+B_2(x+2)$ (2) ἤ εκτελώντας τίς πράξεις στό 2° μέλος καί διατάσσοντας ώς πρός τίς κατιούσες δυνάμεις τοῦ x έχουμε:

$$x^2+4x+7 \equiv (A_1+B_1)x^2+(6A_1+5B_1+B_2)x+(9A_1+6B_1+2B_2).$$

ὁπότε προκύπτει (ἐξισώνοντας τίς δυνάμεις τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων) $A_1+B_1=1$, $6A_1+5B_1+B_2=4$, $9A_1+6B_1+2B_2=7$ λύνοντας τό σύστημα βρίσκουμε $A_1=3$, $B_1=-2$ καί $B_2=-4$.

Ἄρα εἶναι: $$\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{3}{x+2}-\frac{2}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2}.$$

Σημείωση. Θά μπορούσαμε, ἐννοεῖται, νά ὑπολογίσουμε τά A_1, B_1, B_2 ὅπως καί στήν προηγούμενη ἄσκηση θέτοντας π.χ. $x=-3$, $x=-2$ καί $x=-1$ στήν (2) ἐφ' ὅσον τά πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

4.24. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$ σε' ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι α') τό x^2-x+1 ἔχει μιγαδικές ρίζες διότι $1^2-4\cdot1<0$ καί β') ὁ βαθμός τοῦ x^5+1 διότι 5 εἶναι μικρότερος τοῦ $2\cdot3=6$· ἑπομένως πληροῦνται ὅλες οἱ προϋποθέσεις τῆς περίπτωσης III. Ἤτοι θά ἔχουμε:

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2-x+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2-x+1)^3} \quad (1).$$

ή $x^5+1 \equiv (A_1x+B_1)(x^2-x+1)^2+(A_2x+B_2)(x^2-x+1)+A_3x+B_3$

ή διατάσσοντας τό 2° μέλος κατά τίς κατιούσες δυνάμεις τοῦ x:

$$x^5+1 \equiv A_1x^5+(B_1-2A_1)x^4+(3A_1+A_2-2B_1)x^3+$$
$$+(3B_1-2A_1-A_2+B_2)x^2+(A_1-2B_1+A_2-B_2+A_3)x+B_1+B_2+B_3 \quad (2).$$

Ἀπ' τή (2) ἐξισώνοντας τούς συντελεστές ὁμοιοβάθμιων ὅρων ἔχουμε:

$\underline{A_1=1}$, $B_1-2A_1=0$ καί $\underline{B_1=2}$, $3A_1+A_2-2B_1=0$ καί $\underline{A_2=1}$, $3B_1-2A_1-A_2+B_2=0$ καί $\underline{B_2=-3}$, $A_1-2B_1+A_2-B_2+A_3=0$ καί $\underline{A_3=-1}$, $B_1+B_2+B_3=1$ καί $\underline{B_3=2}$ Ἄρα τελικά θά πάρουμε:

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{x+2}{x^2-x+1} + \frac{x-3}{(x^2-x+1)^2} - \frac{x-2}{(x^2-x+1)^3}.$$

4.25. Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύση. Ἐδῶ ἔχουμε συνδιασμό τῶν περιπτώσεων III καί II γιατί ἡ x^2+1 ἔχει μιγαδικές ρίζες ἐνῶ ἡ $(x-1)^2$ ἔχει μία ρίζα διπλῆ τήν $x=1$. Ἄρα θά εἶναι:

$$\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma}{x-1} + \frac{\Delta}{(x-1)^2} \quad (1).$$

ἤ $x^2-x+1 \equiv (Ax+B)(x-1)^2+\Gamma(x^2+1)(x-1)+\Delta(x^2+1)$ ἤ μετά τήν ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων καί διατάσσοντας ὡς πρός τίς δυνάμεις τοῦ x: $x^2-x+1 \equiv (A+\Gamma)x^3+(B+\Delta-\Gamma-2A)x^2+(\Gamma+A-2B)x+$
$+B+\Delta-\Gamma$ ὁπότε προκύπτει τό σύστημα:

$A+\Gamma=0$, $B+\Delta-\Gamma-2A=1$, $\Gamma+A-2B=-1$, $B+\Delta-\Gamma=1$ (2)

Ἀπ' τή λύση τοῦ (2) προκύπτει $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $\Gamma=0$, $\Delta=\frac{1}{2}$.

Ἑπομένως θά εἶναι: $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \dfrac{1}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

4.26. Νά προσδιορισθεῖ πολυώνυμο $f(x,y,z)$ ὁμογενές καί κυκλικά συμμετρικό $2^{ου}$ βαθμοῦ τέτοιο ὥστε: $f(0,1,1)=5$ καί $f(0,0,1)=6$.

Λύση. Ἀπ' τίς μορφές ὁμογενῶν καί κυκλικά συμμετρικῶν πολυωνύμων, ἐπειδή τό $f(x,y,z)$ εἶναι $2^{ου}$ βαθμοῦ θά εἶναι:

$f(x,y,z) \equiv \alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$

ὅπου α, β συντελεστές πού πρέπει νά προσδιοριστοῦν. Ἔχουμε:

$f(0,1,1) \equiv \alpha(0^2+1^2+1^2)+\beta(0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0)=5$ ἤ $2\alpha+\beta=5$ καί

$f(0,0,1) \equiv \alpha(0^2+0^2+1^2)+\beta(0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0)=6$ ἤ $\alpha=6$ ὁπότε

προκύπτει ἀμέσως $\beta=-7$. Ἄρα τό ζητούμενο πολυώνυμο εἶναι: $f(x,y,z) \equiv 6(x^2+y^2+z^2)-7(xy+yz+zx)$.

4.27. Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα παραγόντων οἱ παραστάσεις: **α')** $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ καί

β') $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

Λύση. α'). Παρατηροῦμε ὅτι γιά $x=y$ ἔχουμε:

$f(y,y,z) \equiv y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)=0$ Ἄρα τό πολυώνυμο $f(x,y,z)$ θά διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό $x-y$ (ἰδ. II τῶν ἀκ. πολ.) καί ἄρα θά διαιρεῖται καί μέ τό γινόμενο $(x-y)(y-z)(z-x)$ (ἰδ. 3α συμμ. πολ.). Ἐπειδή δέ ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι πολυώνυμα $3^{ου}$ βαθμοῦ, τό πηλίκο θά εἶναι σταθερός ἀριθμός α Ἔτσι θά ἔχουμε:

$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) \equiv \alpha(x-y)(y-z)(z-x)$ (1).

Θέτοντας τώρα στήν (1) τρεῖς αὐθαίρετες τιμές $x=0, y=1, z=-1$ (πού νά μή μηδενίζουν τά πολυώνυμα) εὑρίσκουμε $\alpha=-1$.

ἄρα $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) \equiv -(x-y)(y-z)(z-x)$.

β'). Παρατηροῦμε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x,y,z) \equiv$ $\equiv (x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$ μηδενίζεται γιά $x=y=z=0$ ἄρα θά διαιρεῖται μέ $x\cdot y\cdot z$ · καί ἐπειδή τό $f(x,y,z)$ εἶναι ὁμογενές καί συμμετρικό $5^{ου}$ βαθμοῦ, ὁ δέ διαιρέτης εἶναι $3^{ου}$ βαθμοῦ σημαίνει ὅτι (ἰδ. 2α συμμ. πολ.):

τό πηλίκο θά εἶναι ἐπίσης πολυώνυμο ὁμογενές καί συμμετρικό $2^{ου}$ βαθμοῦ δηλ. τῆς μορφῆς $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$.
Ἄρα θά εἶναι: $f(x,y,z) \equiv xyz\left[\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)\right]$ (1).
Ἡ (1) ἰσχύει γιά ὁποιαδήποτε τιμή τῶν x, y, z. Θέτοντας $x=y=z=1$ εὑρίσκουμε: $\alpha+\beta=80$. Θέτοντας τώρα μιά ἄλλη τριάδα τιμῶν $x=1$, $y=1$, $z=-1$ εὑρίσκουμε $3\alpha-\beta=240$.
Λύνοντας τό σύστημα τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων ἔχουμε $\alpha=80$ καί $\beta=0$ ἄρα $f(x,y,z)\equiv 80xyz(x^2+y^2+z^2)$.

4.28. Νά μετασχηματισθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων τό πολυώνυμο $f(x,y)\equiv(x+y)^7-x^7-y^7$.

Λύση. Τό $f(x,y)$ εἶναι πολυώνυμο συμμετρικό καί ὁμογενές ὡς πρός x καί y. Ἐπειδή ὅπως εὔκολα διαπιστώνεται: $f(0,y)=f(x,0)=f(-y,y)=0$ σημαίνει ὅτι διαιρεῖται διά x, διά y καί διά $x+y$ ἄρα καί μέ τό γινόμενό τους $xy(x+y)$. Τό πηλίκο θά εἶναι ὡς γνωστό πολυώνυμο ὁμογενές καί συμμετρικό $4^{ου}$ βαθμοῦ τῆς μορφῆς:
$A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+\Gamma x^2y^2$ ὁπότε θά εἶναι:
$f(x,y)\equiv(x+y)^7-x^7-y^7\equiv xy(x+y)\left[A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+\right.$
$\left.+\Gamma x^2y^2\right]$ ὁπότε γιά τρία διάφορα ζεύγη τιμῶν (πού νά μή μηδενίζουν τό $f(x,y)$) θά ἔχουμε:
Γιά $x=1$, $y=1$: $2A+2B+\Gamma=63$ (1)
-//- $x=2$, $y=-1$: $17A-10B+4\Gamma=63$ (2)
-//- $x=2$, $y=1$: $17A+10B+4\Gamma=343$ (3).
Εἶναι (3)-(2) : $20B=280$ ἄρα $B=14$ καί οἱ (1), (2) γίνονται $2A+\Gamma=35$, $17A+4\Gamma=203$. Ἀπ' αὐτές προκύπτει $A=7$, $B=21$.

Ἄρα $f(x,y) \equiv xy(x+y)\left[7(x^4+y^4)+14(x^3y+y^3x)+21x^2y^2\right]$. Ἡ ἐντός τῶν ἀγκυλῶν παράσταση ὅμως ἰσοῦται μέ: $7(x^2+xy+y^2)^2$ (4) ὡς ἀνάπτυγμα τῆς παράστασης (4). Ἄρα τελικά $f(x,y) \equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

4.29. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^3-9x+\sqrt{108}=0$.

Λύση. Ἐπειδή $p=-9$ καί $q=\sqrt{108}$ ἔχουμε:

$\frac{q^4}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ ὁπότε $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-\frac{\sqrt{108}}{2}=$

$=-\sqrt{27}=-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}\,(\text{συν}\,180^\circ+i\,\text{ημ}\,180^\circ)$ Ἑπομένως θά ἔχουμε $u=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\left[\text{συν}\,\frac{180^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}+i\,\text{ημ}\,\frac{180^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}\right]$

ὁπότε γιά $k=0,1,2$ ἔχουμε τίς κυβικές ρίζες τοῦ $-3\sqrt{3}$:

$u_0=\sqrt[6]{27}\,(\text{συν}\,60^\circ+i\,\text{ημ}\,60^\circ)=\frac{\sqrt[6]{27}}{2}\,(1+i\sqrt{3})$

$u_1=\sqrt[6]{27}\,(\text{συν}\,180^\circ+i\,\text{ημ}\,180^\circ)=\frac{\sqrt[6]{27}}{2}\,(1-i\sqrt{3})$

$u_2=\sqrt[6]{27}\,(\text{συν}\,300^\circ+i\,\text{ημ}\,300^\circ)=\sqrt[6]{27}\,(\text{συν}\,60^\circ-i\,\text{ημ}\,60^\circ)=\frac{\sqrt[6]{27}}{2}(1-i\sqrt{3})$

Ὁ τύπος τῶν ριζῶν εἶναι $x=u-\frac{p}{3u}=u+\frac{3}{u}$ (1).

Θέτοντας τώρα διαδοχικά στήν (1) τίς τιμές τῶν u_0, u_1, u_2. ἔχουμε τίς ρίζες $x_0=u_0+\frac{3}{u_0}$, $x_1=u_1+\frac{3}{u_1}$, $x_2=u_2+\frac{3}{u_2}$.

4.30. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^4-4x^2-x-2=0$.

Λύση. Εἶναι $A=-4$, $B=-1$, $\Gamma=-2$ ὁπότε ἡ (6) (σελ 64) γίνεται: $(\lambda^2)^3-8(\lambda^2)^2+8\lambda^2-1=0$ ἤ $(\lambda^2-1)(\lambda^4-7\lambda^2+1)=0$. Ἀπ' αὐτή προκύπτει $\lambda=\pm 1$. Γιά $\lambda=1$ οἱ τύποι (5) (σελ 64) δίνουν $\mu=-1$, $\nu=-2$ ἄρα οἱ (3) (σελ 64) γίνονται $y^2+y-1=0$, $y^2-y-2=0$ καί λύνονται σάν δευτεροβάθμ.

5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Καλοῦμε **συνάρτηση** μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $X \neq \emptyset$ καί τιμές στό σύνολο $\Psi \neq \emptyset$, κάθε μονότιμη ἀπεικόνιση τοῦ X εἰς τό Ψ, δηλ. κάθε ἀντιστοιχία f τοῦ X εἰς τό Ψ κατά τήν ὁποία κάθε στοιχεῖο τοῦ X ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα ἀντίστοιχο εἰς τό Ψ. Ἄν $x \in X$, τότε τό ἀντίστοιχο αὐτοῦ $y \in \Psi$ σημειώνεται μέ $f(x)$ καί ἡ συνάρτηση συμβολίζεται μέ: $f: X \to \Psi$ ἤ μόνο μέ f ἤ καί μέ $f(x)$.

Εἰδικώτερα λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f: X \to \Psi$ εἶναι συνάρτηση (ἤ ἀπεικόνιση) τοῦ X **ἐπί** τοῦ Ψ ἤ **ἐπίμορφη** συνάρτηση τοῦ X ἐπί τοῦ Ψ, τότε καί μόνο τότε, ὅταν γιά κάθε $y \in \Psi$ ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον $x \in X$ μέ $f(x) = y$. Κάθε συνάρτηση $f: X \to \Psi$ πού δέν εἶναι ἐπί τοῦ Ψ, θά λέγεται συνάρτηση τοῦ X **ἐντός** τοῦ Ψ. Οἱ παραπάνω συναρτήσεις συμβολίζονται μέ $f: X \xrightarrow{\text{ἐπί}} \Psi$, $f: X \xrightarrow{\text{ἐντός}} \Psi$ ἀντίστοιχα.

Θά λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f: X \to \Psi$ εἶναι **ἀμφιμονότιμη** (ἤ **ἀμφιμονοσήμαντη**) συνάρτηση τοῦ X εἰς τό Ψ τότε καί μόνο τότε, ὅταν γιά κάθε ζεῦγος στοιχείων $x_1, x_2 \in X$ μέ $x_1 \neq x_2$ ἕπεται ὅτι $f(x_1) \neq f(x_2)$ καί συμβολίζεται $f: X \leftrightarrow \Psi$. Εἰδικώτερα ἄν εἶναι ἀμφιμονότιμη συνάρτηση τοῦ X ἐπί τοῦ Ψ συμβολίζεται μέ $f: X \xleftrightarrow{\text{ἐπί}} \Psi$, ἄν δέ εἶναι ἀμφιμονότιμη τοῦ X ἐντός τοῦ Ψ συμβολίζεται μέ $f: X \xleftrightarrow{\text{ἐντός}} \Psi$.

Ἔστω $f: X \xleftrightarrow{\text{ἐπί}} \Psi$ ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση τοῦ X ἐπί τοῦ Ψ. Τότε κάθε στοιχεῖο $y \in \Psi$ εἶναι εἰκόνα ἑνός καί μόνο στοιχείου $x \in X$

(δηλ. ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα ἀρχέτυπο $x \in X$). Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία ἐκ τοῦ Ψ εἰς τό X κατά τήν ὁποία σέ κάθε $y \in \Psi$ ἀντιστοιχεῖ τό ἀρχέτυπο αὐτοῦ $x \in X$ ὑπό τῆς f, εἶναι ἐπίσης συνάρτηση τοῦ Ψ εἰς τό X. Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **ἀντίστροφη** τῆς $f: X \xleftrightarrow{\text{ἐπί}} \Psi$ καί συμβολίζεται μέ $f^{-1}: \Psi \xleftrightarrow{\text{ἐπί}} X$ ἤ ἁπλῶς μέ f^{-1}. Ἄν $y \in \Psi$, τότε τό στοιχεῖο $x \in X$ μέ $f(x) = y$ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ y ἀπό τήν f^{-1}. Ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία: $x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y$.

Ἄν $X \neq \emptyset$ ὁρίζουμε ὡς **ταυτοτική** συνάρτηση τοῦ X τήν συνάρτηση $I: X \to X$ μέ $I(x) = x$ γιά κάθε $x \in X$.

Ἐπίσης ὀνομάζουμε **χαρακτηριστική** συνάρτηση ἑνός συνόλου $A \subseteq X$ τήν συνάρτηση $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ μέ:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ἄν } x \in A \\ 0 & \text{-''- } x \notin A \end{cases}$$

Θεωροῦμε τρία σύνολα $X, \Psi, Z \neq \emptyset$ καί τίς συναρτήσεις: $f: X \to \Psi$ τοῦ X εἰς τό Ψ καί $g: \Psi \to Z$ τοῦ Ψ εἰς τό Z. Δηλ. $y = f(x)$ καί $z = g(y)$ τότε ἡ ἀντιστοιχία $h: X \to Z$ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση τοῦ X εἰς τό Z καί ὀνομάζεται **σύνθεση** τῆς f ὑπό τῆς g. συμβολίζεται δέ μέ $g \circ f$. δηλ. $h = g \circ f$. Ἡ εἰκόνα τυχόντος $x \in X$ ὑπό τῆς $g \circ f$ εἶναι τό στοιχεῖο $z = g(y) \in Z$ ὅπου $y = f(x)$. Ἄρα γιά κάθε $x \in X$ ἔχουμε $h = g \circ f = g(f(x))$. Ἀπ' τή σχέση αὐτή προκύπτει:
1) $g \circ f \neq f \circ g$, 2) $g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f$. δηλ. στή σύνθεση συναρτήσεων δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα, ἰσχύει ὅμως ἡ προσεταιριστική.

Ὅταν τά σύνολα X καί Ψ εἶναι ὑποσύνολα ἐν γένει τοῦ $\mathbb{R}$ (συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) τότε ἡ συνάρτηση λέγεται **πραγματική** συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς ἤ ἁπλῶς **ἀριθμητική** συνάρτηση.

Ἔστω f καί g δύο πραγματικές συναρτήσεις μέ κοινό σύνολο ὁρισμοῦ τό E. Ὁρίζουμε ὡς **ἄθροισμα**, **διαφορά**, **γινόμενο** καί **πηλῖκο** αὐτῶν τίς συναρτήσεις: $\sigma_1 = f+g$, $\sigma_2 = f-g$, $\sigma_3 = f\cdot g$ καί $\sigma_4 = \dfrac{f}{g}$ ὁρισμένες στό E μέ $\sigma_1(x) = f(x)+g(x)$, $\sigma_2(x) = f(x)-g(x)$, $\sigma_3(x) = f(x)\cdot g(x)$ καί $\sigma_4(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ γιά καθε $x \in E$ μέ $g(x) \neq 0$.

Μία συνάρτηση f πραγματική, πραγματικῆς μεταβλητῆς εἶναι **αὔξουσα** στό σύνολο $A \subseteq E$ (πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f) τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$ μέ $x_1 < x_2$ προκύπτει $f(x_1) \leq f(x_2)$· ἄν εἰδικά γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$ μέ $x_1 < x_2$ εἶναι $f(x_1) < f(x_2)$ τότε ἡ f εἶναι **γνησίως αὔξουσα**. Ἀνάλογα ἡ f εἶναι **φθίνουσα** στό $A \subseteq E$, τότε καί μόνο, ὅταν γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$ μέ $x_1 < x_2$ προκύπτει $f(x_1) \geq f(x_2)$· ἄν εἰδικά γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$ μέ $x_1 < x_2$ προκύπτει $f(x_1) > f(x_2)$ τότε ἡ f εἶναι **γνησίως φθίνουσα**. Οἱ αὔξουσες καί φθίνουσες συναρτήσεις ὀνομάζονται μ' ἕνα ὄνομα **μονότονες** συναρτήσεις.

Γιά νά διαπιστώσουμε ἄν μία συνάρτηση εἶναι μονότονη καί μάλιστα νά βροῦμε ἄν εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα σ' ἕνα διάστημα $A \subset R$, ἀρκεῖ νά μελετήσουμε τό πρόσημο τοῦ λόγου $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$. Ἔτσι ἄν $\lambda \geq 0$ προκύπτει ὅτι ἡ f εἶναι αὔξουσα· ἄν $\lambda \leq 0$ προκύπτει ὅτι ἡ f εἶναι φθίνουσα.

Έστω μία άριθμητική συνάρτηση $f: E\subset R \to R$. Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **ἄρτια**, ἄν γιά κάθε $x\in E$ προκύπτει ὅτι καί $-x\in E$ καί μάλιστα $f(-x)=f(x)$.

Ἡ συνάρτηση f λέγεται **περιττή** ἄν γιά κάθε $x\in E$ προκύπτει ὅτι καί τό $-x\in E$ καί μάλιστα $f(-x)=-f(x)$.

Ἡ συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** ἄν ὑπάρχει $T\in R$ ἔτσι ὥστε γιά κάθε $x\in R$ νά εἶναι $f(x+T)=f(x)$.
Ὁ μικρότερος ἀριθμός T ὁ ὁποῖος πληροῖ τήν ἰδιότητα αὐτή λέγεται **περίοδος** τῆς f.

Παραδείγματα: Οἱ συναρτήσεις $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$ εἶναι ἄρτιες, ἐπειδή $f_1(x)=x^2=(-x)^2=f_1(-x)$ καί $f_2(x)=\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(-x)=f_2(-x)$.

Οἱ συναρτήσεις $\varphi_1(x)=x^3$, $\varphi_2(x)=\eta\mu x$, $\varphi_3(x)=\varepsilon\varphi x$ εἶναι περιττές, ἐπειδή $\varphi_1(x)=x^3$ καί $-\varphi_1(x)=-x^3=$ $=(-x)^3=\varphi_1(-x)$, Ὁμοίως $\varphi_2(x)=\eta\mu x$ καί $-\varphi_2(x)=-\eta\mu x=$ $=\eta\mu(-x)=\varphi_2(-x)$, $\varphi_3(x)=\varepsilon\varphi x$ καί $-\varphi_3(x)=-\varepsilon\varphi x=$ $=\varepsilon\varphi(-x)=\varphi_3(-x)$.

Οἱ συναρτήσεις $\sigma_1(x)=\eta\mu x$, $\sigma_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma_3(x)=\varepsilon\varphi x$ $\sigma_4(x)=\sigma\varphi x$ εἶναι περιοδικές καί μάλιστα οἱ μέν σ_1, σ_2 μέ περίοδο 2π, ἐπειδή $\sigma_1(x+2\pi)=\eta\mu(x+2\pi)=\eta\mu x=$ $=\sigma_1(x)$ καί $\sigma_2(x+2\pi)=\sigma\upsilon\nu(x+2\pi)=\sigma\upsilon\nu x=\sigma_2(x)$, οἱ δέ σ_3, σ_4 μέ περίοδο π, ἐπειδή $\sigma_3(x+\pi)=\varepsilon\varphi(x+\pi)=\varepsilon\varphi x=$ $=\sigma_3(x)$ καί $\sigma_4(x+\pi)=\sigma\varphi(x+\pi)=\sigma\varphi x=\sigma_4(x)$.

Στίς ἀριθμητικές συναρτήσεις ἡ ὕπαρξη τῆς ἀντίστροφης συνάρτησης ἐξασφαλίζεται ἀπό τήν ἑξῆς πρόταση:

"Ἐάν μία συνάρτηση f ὁρισμένη στό σύνολο $A\subset E$ ὅπου

Ε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι γνησίως μονότονη, τότε ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της f^{-1} καί μάλιστα εἶναι κι αὐτή γνησίως μονότονη." Προφανῶς σέ μιά ἀντίστροφη συνάρτηση f^{-1} πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι τό $f(A)$ ἐνῶ πεδίο τιμῶν της εἶναι τό διάστημα A (ὅπου A διάστημα πού ἡ f εἶναι γνησίως μονότονη). Γιά νά πάρουμε τήν ἀντίστροφη συνάρτηση δοθείσης f, λύνουμε τήν f ὡς πρός τήν μεταβλητή πού περιέχει καί κατόπιν ἐναλλάσουμε τίς μεταβλητές μεταξύ τους (λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τήν παρακάτω πρόταση). π.χ τῆς συναρτήσεως $y=f(x)=2x+1$ ἡ ἀντίστροφή της εἶναι ἡ $x=f^{-1}(y)=\frac{y-1}{2}$ ἤ $y=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$. Τῆς $y=2x^2$ (ὅπου $x\in R^+$) εἶναι ἡ $x=+\sqrt{\frac{y}{2}}$ ἤ $y=+\sqrt{\frac{x}{2}}$ ἄν ληφθεῖ ὑπ' ὄψη ἡ μονοτονία της.

Εἶναι γνωστό ἀπ' τήν Ἀναλυτική Γεωμετρία, ὅπως θά δοῦμε, ὅτι σ' ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων xoy τοῦ ἐπιπέδου, κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (x,y) παριστάνεται μ' ἕνα σημεῖο $P(x,y)$. Τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου xoy πού προκύπτει ἀπ' τό σύνολο τῶν ζευγῶν $S=\{(x,f(x)):\forall x\in A\subset R\}$ λέγεται **γραφική παράσταση** ἤ **γράφημα** τῆς $f(x)$.

Ὅταν τό πεδίο ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἕνα διάστημα μεταξύ δύο ἀριθμῶν α,β πάνω στόν ὁριζόντιο ἄξονα ox, τότε ὁρίζεται τό διάστημα αὐτό ὡς **κλειστό** καί συμβολίζεται μέ $[\alpha,\beta]$ ὅταν $\alpha\le x\le\beta$· ὡς **ἀνοικτό** καί συμβολίζεται μέ (α,β) ὅταν $\alpha<x<\beta$· ὡς **ἡμιανοικτό πρός τά δεξιά** καί συμβολίζεται μέ $[\alpha,\beta)$ ὅταν $\alpha\le x<\beta$ καί τέλος ὡς **ἡμιανοικτό πρός τά ἀριστερά** καί συμβολίζεται μέ $(\alpha,\beta]$ ὅταν $\alpha<x\le\beta$.

Πρίν δώσουμε τούς ορισμούς τῶν ἀκροτάτων μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ δίνουμε τόν παρακάτω ὁρισμό:

Ἔστω $I=[\alpha,\beta]$ κλειστό διάστημα δύο ἀριθμῶν α, β καί $\gamma \in I$ μέ $\gamma \neq \alpha,\beta$. Καλεῖται **περιοχή** τοῦ σημείου γ κάθε ἀνοικτό διάστημα μέσου γ, ὑποδιάστημα τοῦ διαστήματος I. Ἄν $\varepsilon>0$ ὁσονδήποτε μικρός τότε ἡ περιοχή τοῦ σημείου γ εἶναι: $\pi(\gamma)=(\gamma-\varepsilon,\gamma+\varepsilon)$. Ἄν θέλουμε νά τονίσουμε τήν σημασία τοῦ $\varepsilon>0$ στήν περιοχή τοῦ α, λέμε ὅτι ἔχουμε μία ε-περιοχή τοῦ γ καί γράφουμε:

$$\pi(\gamma,\varepsilon)=(\gamma-\varepsilon,\gamma+\varepsilon).$$

Ἡ συνάρτηση $f(x)$ λέμε ὅτι ἔχει **σχετικό ἐλάχιστο** στό σημεῖο $x=\xi\in[a,\beta]$ ὅταν γιά κάθε $x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$, ὅπου $\varepsilon>0$ ὁσονδήποτε μικρός καί $x\neq\xi$, εἶναι $f(x)>f(\xi)$.

Ἡ συνάρτηση $f(x)$ λέμε ὅτι ἔχει **σχετικό μέγιστο** στό σημεῖο $\xi\in[\alpha,\beta]$, ὅταν γιά κάθε $x\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$ καί $x\neq\xi$ εἶναι $f(x)<f(\xi)$. Τό σχετικό ἐλάχιστο καί τό σχετικό μέγιστο μιᾶς συναρτήσεως λέγονται **τοπικά ἀκρότατα.**

Ἄν γιά τή συνάρτηση $f(x)$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A\subseteq R$ ἰσχύει: $f(x)>f(x_0)$ γιά κάθε $x\in A$ μέ $x_0\in A$ τότε αὐτή παρουσιάζει **ὁλικό ἐλάχιστο** στό σημεῖο $x=x_0$.

Ἐντελῶς ἀνάλογα ἄν γιά τήν $f(x)$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ της τό $A\subseteq R$ ἰσχύει: $f(x)<f(x_0)$ γιά κάθε $x\in A$ μέ $x_0\in A$ τότε αὐτή παρουσιάζει **ὁλικό μέγιστο** στό σημεῖο $x=x_0$.

Ὁ προσδιορισμός τῶν ἀκροτάτων τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως γίνεται πολύ εὔκολα μέ τή βοήθεια τῶν παραγώγων, καί χρησιμεύει στή κατασκευή τῆς καμπύλης σέ Καρτεσιανό σύστημα. Σ' αὐτό ὁ ἄξονας ox (ὁριζόντιος) πάνω στόν ὁποῖον παριστάνονται τά σημεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς συνάρτησης λέγεται ἄξονας τῶν **τετμημένων**· ὁ δέ ἄξονας oy (κατακόρυφος) πάνω στόν ὁποῖο παριστάνονται οἱ τιμές τῆς συνάρτησης (ἤ τό πεδίο τιμῶν) λέγεται ἄξονας τῶν **τεταγμένων**· Καί οἱ δύο ἄξονες μαζί λέγονται ἄξονες τῶν **συντεταγμένων.**

Ἀπ' τόν ὁρισμό τῆς συνάρτησης καί τά εἴδη συναρτήσεων πού γνωρίσαμε ὥς τώρα, προκύπτουν μερικές ἰδιότητες ὅσο ἀφορᾶ τήν γραφική τους παράσταση:

1. Ἡ εἰκόνα ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x, μέσω τῆς συνάρτησης f, εἶναι ὡς γνωστόν μοναδική. Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς f εἶναι μία γραμμή Γ, ἡ ὁποία τέμνεται ἀπό μιά εὐθεῖα παράλληλη πρός τόν ἄξονα y σέ ἕνα τό πολύ σημεῖο. Ἀντίθετα μία παράλληλη πρός τόν ἄξονα xx' μπορεῖ νά τέμνει σέ περισσότερα τοῦ ἑνός σημεῖα τήν καμπύλη

2. Τά σημεῖα τομῆς, ἄν ὑπάρχουν, τοῦ ἄξονα $x'x$ καί τῆς καμπύλης Γ ἔχουν τετμημένες $\alpha \in R$ πού πληροῦν τήν σχέση $f(\alpha)=0$ δηλ εἶναι οἱ πραγματικές λύσεις τῆς ἐξίσωσης $f(x)=0$.

3. Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι ἄρτια τότε ἐπειδή τά ζεύγη $(x, f(x))$ καί $(-x, f(x))$ εἶναι ταυτόχρονα σημεῖα τῆς καμπύλης, ἐφ' ὅσον x εἶναι σημεῖο πού ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f, προκύπτει ὅτι ἡ καμπύλη Γ ἔχει τόν ἄξονα yy' σάν ἄξονα συμμετρίας (ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ ἄξονες $x'x$, $y'y$ εἶναι $\perp$ μεταξύ των).

4. Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι περιττή τότε, ὡς γνωστόν, τά ζεύγη $(x, f(x))$, $(-x, -f(x))$ εἶναι σημεῖα τῆς καμπύλης Γ τῆς f, ἐφ' ὅσον x εἶναι σημεῖο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς f. Ἀπ' αὐτό προκύπτει ὅτι ἡ καμπύλη Γ ἔχει κέντρο συμμετρίας τήν ἀρχή Ο τῶν ἀξόνων.

5. Ἄν ἡ f εἶναι περιοδική, τότε ὡς γνωστόν, γιά κάθε $x \in A$ ὅπου A τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f, εἶναι $f(x+nT)=f(x)$ γιά κάθε $n \in Z$ (σύνολο ἀκεραίων) Ἑπομένως ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς: $(x+nT, f(x))$ παριστοῦν σημεῖα τῆς καμπύλης Γ. Δηλ ἡ καμπύλη Γ λαμβάνεται μέ παράλληλη μετατόπιση τοῦ τμήματός της, πού ἀντιστοιχεῖ στό διάστημα $[x_0, x_0+T)$ τῆς πραγματικῆς εὐθείας R, πρός τόν ἄξονα yy'.

6. Ἄν ἡ f^{-1} εἶναι ἀντίστροφη τῆς f, τότε, ὡς γνωστόν, τό ζεῦγος $(x, f(x))$ εἶναι σημεῖο τῆς καμπύλης Γ (γραφικῆς παράστασης τῆς f), ἐνῶ τό ζεῦγος $(f(x), x)$ εἶναι σημεῖο τῆς Γ′ (γραφικῆς παράστασης τῆς f^{-1}) καί εἶναι συμμετρικό τοῦ ζεύγους $(x, f(x))$ ὡς πρός τήν εὐθεία $y=x$ δηλ τήν διχοτόμο τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων.

Οἱ ἀριθμητικές συναρτήσεις διακρίνονται σέ δύο μεγάλες κατηγορίες συναρτήσεων: **α′) ἀλγεβρικές, β′) ὑπερβατικές.**

Οἱ ἀλγεβρικές διακρίνονται:

I. Σέ **ἀκέραιες πολυωνυμικές** τῆς μορφῆς:

$$f(x): a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{ὅπου } \mu \in N$$

II. σέ **ρητές** τῆς μορφῆς: $\dfrac{a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + a_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_0}$ καί

III. σέ **ἄρρητες** τῆς μορφῆς $\sqrt{q(x)}$ ὅπου $q(x)$ συνάρτηση ρητή ἐν γένει.

Οἱ ὑπερβατικές εἶναι οἱ μή ἀλγεβρικές συναρτήσεις, ὅπως π.χ $y=\eta\mu x$, $y=\log x$, $y=e^x$, $y=shx$ καί διακρίνονται:

1. σέ **τριγωνομετρικές**, **2.** σέ **ἀντίστροφες κυκλικές**, **3.** σέ **ὑπερβολικές**, **4.** σέ **ἐκθετικές**, καί **5.** σέ **λογαριθμικές.**

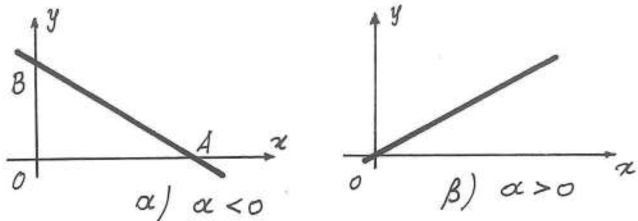
Μία συνάρτηση, πού εἶναι λυμένη ὡς πρός y, λέγεται **ἁπλή** καί εἶναι τῆς μορφῆς πού ξέρουμε $y=f(x)$ π.χ ἡ $y=x^2+1$, ἐνῶ ὅταν δέν εἶναι λυμένη ὡς πρός y λέγεται **πεπλεγμένη** καί εἶναι τῆς μορφῆς $f(x,y)=0$ π.χ $x^2-y^2+x-y+3=0$.

Μία ἀριθμητική συνάρτηση f δίδεται συνήθως χωρίς νά ὁρίζεται ἐξ ἀρχῆς τό πεδίο ὁρισμοῦ της· συνεπῶς ἕνα ἀπό τά προβλήματα πού συνδέονται μέ τή μελέτη μιᾶς συνάρτησης εἶναι νά εὑρεθῆ ἐπακριβῶς τό σύνολο ὁρισμοῦ της, δηλ τό μεγαλύτερο ὑποσύνολο A τοῦ R τέτοιο ὥστε γιά κάθε $x\in A$, ἡ ἔκφραση $f(x)$ νά ἔχει νόημα. Ὁ καθορισμός τοῦ συνόλου ὁρισμοῦ τῆς f συνίσταται τίς περισσότερες φορές στήν εὕρεση τῶν σημείων $x\in R$ γιά τά ὁποῖα μηδενίζονται οἱ τυχόν ὑπάρχοντες παρονομαστές ἤ γίνονται ἀρνητικές οἱ τυχόν ὑπάρχοντες α') ὑπόρριζοι ποσότητες ἄρτιας τάξης ριζῶν, β') παραστάσεις πού πρόκειται νά λογαριθμηθοῦν. Τά σημεῖα αὐτά πρέπει νά ἀποκλεισθοῦν ἀπ' τό πεδίο ὁρισμοῦ.

Στή συνέχεια δέν θά ἀσχοληθοῦμε μέ τή μελέτη τῆς γραφικῆς παράστασης τῶν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων. Τίς μεταβολές καί τή γραφική παράσταση μιᾶς συνάρτησης θά μελετήσουμε στό κεφάλαιο τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καί τῶν Παραγώγων τῶν συναρτήσεων. Ἐδῶ θά ἀναφέρουμε μερικές χαρακτηριστικές συναρτήσεις, ὡρισμένες ἰδιότητές τους καί τίς γραφικές τους παραστάσεις, χρησιμοποιώντας πάντοτε τό σύστημα τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων ἤ Καρτεσιανό σύστημα. (Ἀργότερα θά δοῦμε ὅτι ὑπάρχει κι ἄλλο σύστημα γραφικῆς παράστασης μιᾶς συνάρτησης, τό σύστημα τῶν πολικῶν συντεταγμένων).

Ἀπ᾿ τίς <u>ἀλγεβρικές</u> συναρτήσεις ἀναφέρουμε τίς ἑπόμενες:

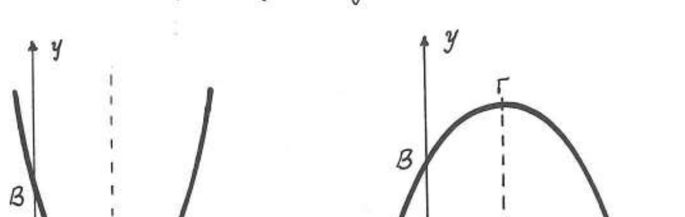
1. Ἡ γραμμική συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$



Σχ. 3

Ἡ συνάρτηση εἶναι αὔξουσα γιά $\alpha>0$ καί φθίνουσα γιά $\alpha<0$. Γιά $\alpha=0$ εἶναι σταθερή συνάρτηση $y=\beta$. Τομές μέ τούς ἄξονες: $A(-\beta/\alpha, 0)$, $B(0,\beta)$ (Σχ. 3α). Γιά $\beta=0$ γίνεται $y=\alpha x$ (Σχ. 3β).

2. Τό τριώνυμο $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

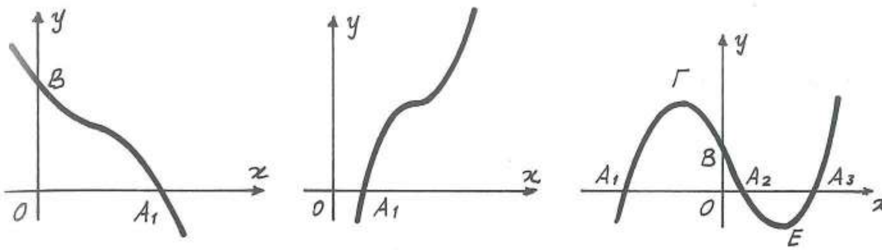


Σχ. 4

Ἡ καμπύλη εἶναι παραβολή, ὅπως θά δοῦμε στήν Ἀναλυτική Γεωμ. μέ κάθετο ἄξονα συμμετρίας τόν $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Γιά $\alpha>0$ ἡ y φθίνει μέχρι τό σημεῖο Γ (σχ 4α)(ἐλάχιστο), μετά αὐξάνει. Γιά $\alpha<0$ ἡ y αὐξάνει μέχρι τό σημεῖο Γ (σχ.4β) (μέγιστο), μετά φθίνει. Τομές μέ τούς ἄξονες: $A_1\left(\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 0\right)$, $A_2\left(\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 0\right)$, $B(0,\gamma)$ καί $\Gamma\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right)$ ὅπου Δ ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

3. Τό πολυώνυμο 3ου βαθμοῦ $y = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Ἡ συμπεριφορά τῆς συνάρτησης αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἀπ᾿ τό πρόσημο τοῦ α καί τή διακρίνουσα $\Delta = 3\alpha\gamma-\beta^2$. Γιά $\Delta\geq 0$ (σχ. 5α,5β) ἡ συνάρτηση εἶναι αὔξουσα γιά $\alpha>0$ καί φθίνουσα γιά $\alpha<0$. Γιά $\Delta<0$ ἡ y ἔχει ἄκρες τιμές· μέ $\alpha>0$ αὐξάνει ἀπ᾿ τό $-\infty$



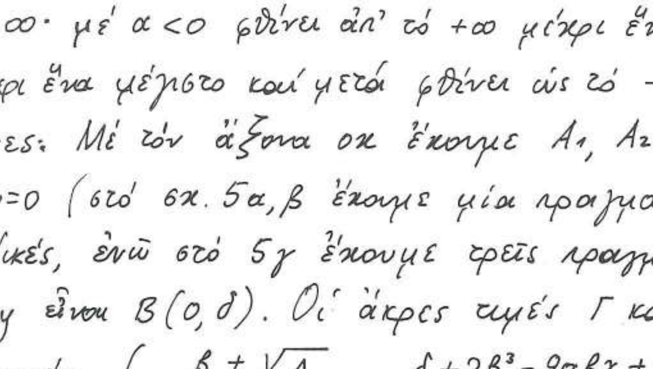
α) $\Delta>0,\ \alpha<0$ β) $\Delta=0,\ \alpha>0$ γ) $\Delta<0,\ \alpha>0$

Σχ. 5

μέχρι τό μέγιστο Γ, μετά φθίνει μέχρι τό ἐλάχιστο Ε, καί νά αὐξηθῆ ὡς τό $+\infty$· μέ $\alpha<0$ φθίνει ἀπ' τό $+\infty$ μέχρι ἕνα ἐλάχιστο, αὐξάνει μέχρι ἕνα μέγιστο καί μετά φθίνει ὡς τό $-\infty$. Τομές μέ τούς ἄξονες: Μέ τόν ἄξονα ox ἔχουμε A_1, A_2, A_3 ρίζες τῆς ἐξίσωσης $y=0$ (στό σχ. 5α,β ἔχουμε μία πραγματική ρίζα καί 2 μιγαδικές, ἐνῶ στό 5γ ἔχουμε τρεῖς πραγματικές). Μέ τόν ἄξονα oy εἶναι $B(0,\delta)$. Οἱ ἄκρες τιμές Γ καί Ε κυμαίνονται στίς τιμές

$$\left(-\frac{\beta\pm\sqrt{\Delta}}{3\alpha},\ \frac{\delta+2\beta^3-9\alpha\beta\gamma\pm(6\alpha\gamma-2\beta^2)\sqrt{-\Delta}}{27\alpha^2}\right).$$

4. Ἡ συνάρτηση $y=\alpha x^n$ $(n\in N)$



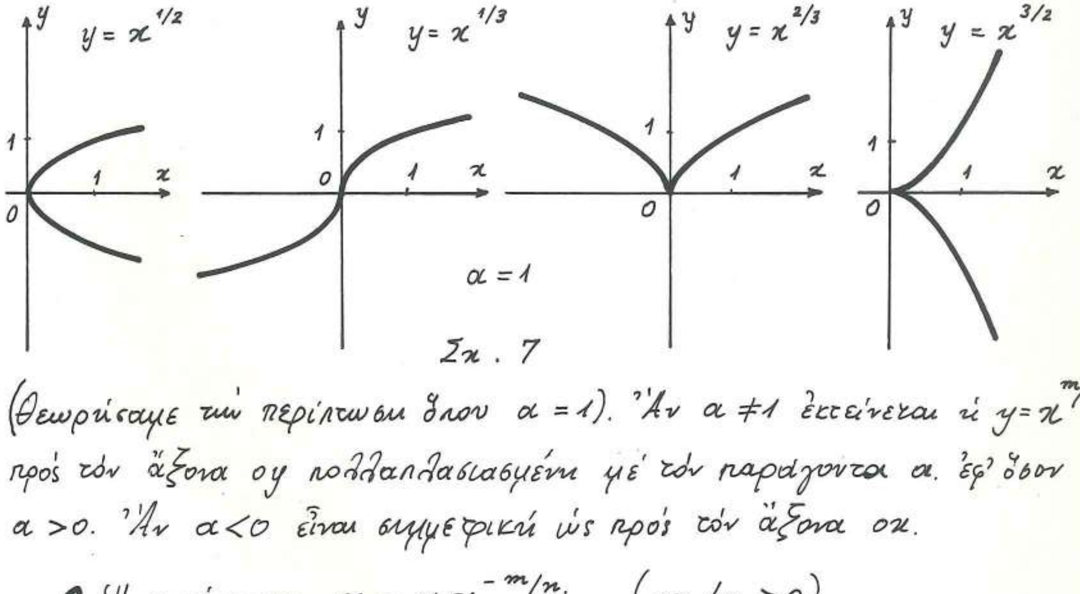
α) β)

Σχ. 6

Ἡ καμπύλη εἶναι παραβολή. Γιά $\alpha=1$ ἡ $y=x^n$ ξεκινάει ἀπ' τήν ἀρχή $O(0,0)$ καί τό $A(1,1)$ καί ἐφάπτεται στόν ἄξονα ox ἐνῶ παραμένει συγκεκριμένως συμμετρική πρός τόν ἄξονα oy (σχ 6α) ἐφ' ὅσον n = ἄρτιος. Ἄν n = περιττός κόβει τόν ἄξονα ox στήν ἀρχή, καί εἶναι συμμετρική πρός τό κέντρο Ο. Ἡ γενική περίπτωση $y=\alpha x^n$ προκύπτει ἄν πολλαπλασιάζεται κάθε φορά ὁ παράγοντας x^n μέ α, ἐφ' ὅσον $\alpha>0$. Γιά $\alpha>0$ θά προκύψει τό y συμμετρικό πρός τόν ἄξονα ox.

5. Ἡ συνάρτηση $y = \alpha x^{m/n}$. $(m/n>0)$

Ἡ καμπύλη περνάει ἀπ' τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων $(0,0)$ καί τό σημεῖο $(1,1)$. Γιά $m/n>1$ ἐφάπτεται στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων μέ τόν ἄξονα ox· γιά $m/n<1$ ἐφάπτεται στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων μέ τόν ἄξονα oy. Γιά ἄρτιο n εἶναι συμμετρική πρός τόν ἄξονα ox, ἐνῶ γιά ἄρτιο m συμμετρική πρός τόν ἄξονα oy. Γιά m καί n περιττούς εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. (σχ. 7)

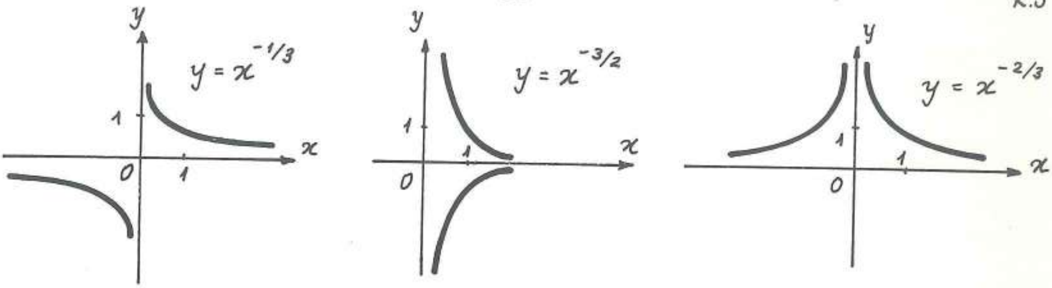


Σχ. 7

(Θεωρήσαμε τήν περίπτωση ὅπου $\alpha=1$). Ἄν $\alpha\neq 1$ ἐκτείνεται ἡ $y=x^{m/n}$ πρός τόν ἄξονα oy πολλαπλασιασμένη μέ τόν παράγοντα α, ἐφ' ὅσον $\alpha>0$. Ἄν $\alpha<0$ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα ox.

6. Ἡ συνάρτηση $y = \alpha x^{-m/n}$. $(m/n>0)$

Εἶναι καμπύλη ὑπερβολικοῦ τύπου μέ τούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων σάν ἄξονες ἀσυμπτώτων. Τό σημεῖο ἀπροσδιοριστίας εἶναι γιά $x=0$. Οἱ ἰδιότητες συμμετρίας ὅσο ἀφορᾶ τούς ἄξονες καί τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων εἶναι ἀκριβῶς ἴδιες ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση. Ἄκρες τιμές δέν ὑπάρχουν (Σχ. 8).

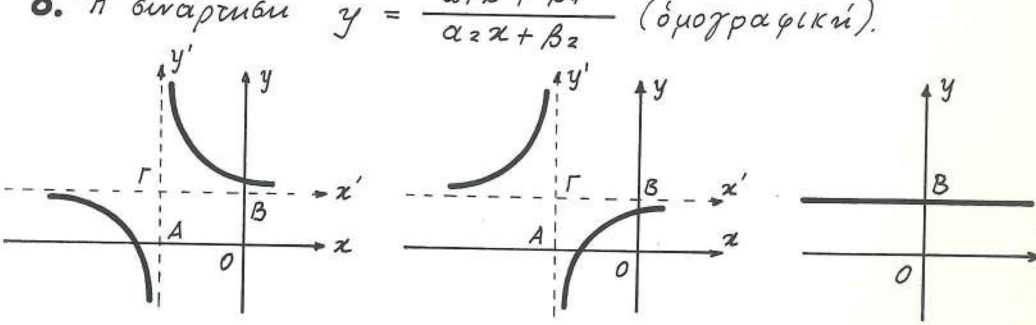


Σχ. 8

(Ὁμοίως θεωρήσαμε τήν περίπτωση ὅπου $\alpha = 1$). Γιά $\alpha \neq 1$ καί μάλιστα $\alpha > 0$ ἤ $\alpha < 0$ ἔχουμε παρόμοια συμπεριφορά τῆς 5.

7. Τό πολυώνυμο 4ου βαθμοῦ $y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$. Διά μετατοπίσεως τῆς ἀρχῆς στό σημεῖο $\left(x' = x - \frac{\beta}{4\alpha},\ y' = y\right)$ φέρουμε τήν ἐξίσωση (βλ. σελ 63) στή μορφή $y' = \alpha x'^4 + \alpha' x'^2 + \beta' x' + \gamma'$ ὁπότε ἔχουμε τήν καμπύλη $y' = \alpha x'^4$ καί τήν παραβολή $y' = \alpha' x'^2 + \beta' x' + \gamma'$. Ἡ τελική καμπύλη λαμβάνεται σάν τό ἄθροισμά τους.

8. Ἡ συνάρτηση $y = \dfrac{\alpha_1 x + \beta_1}{\alpha_2 x + \beta_2}$ (ὁμογραφική).

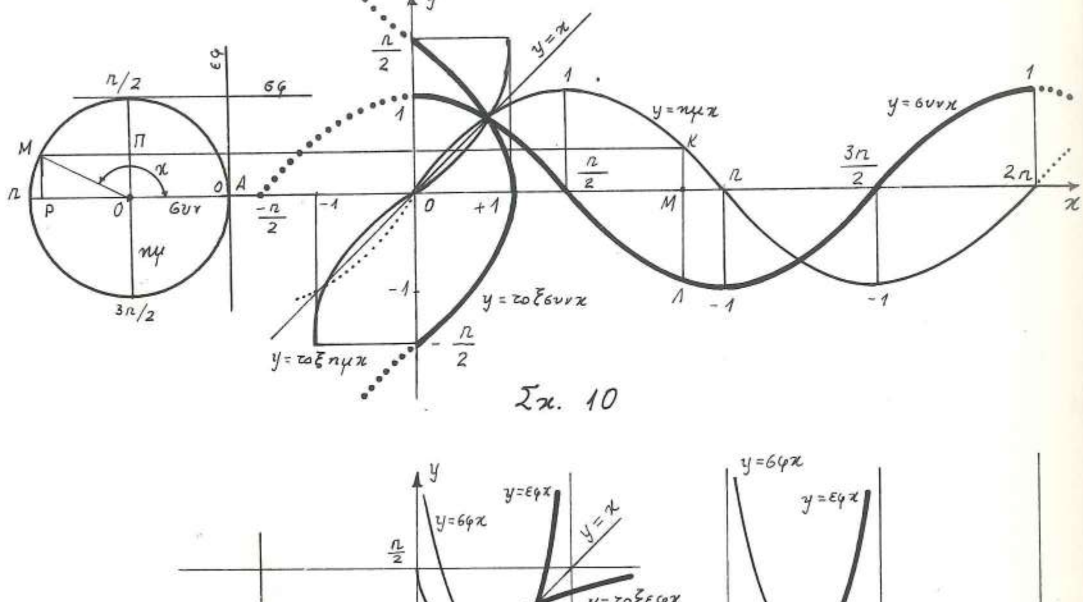


α) $\Delta < 0$ Σχ. 9 β) $\Delta > 0$ γ) $\Delta = 0$.

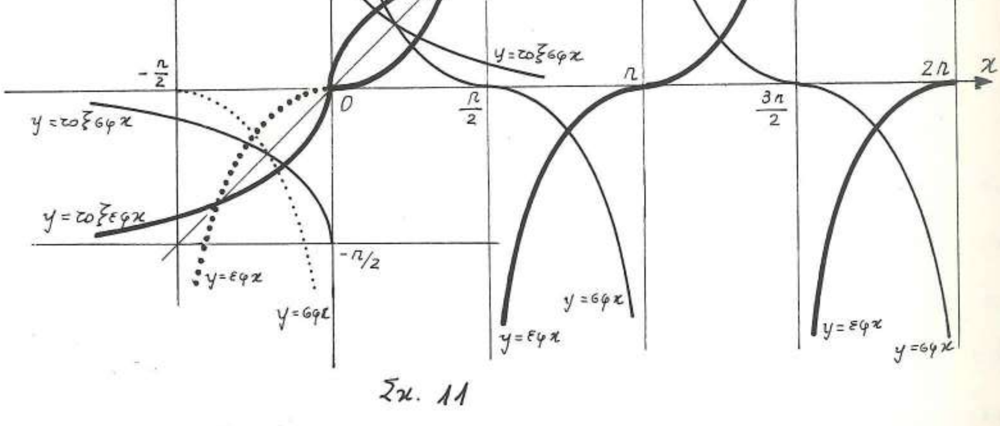
Ἡ καμπύλη εἶναι ὑπερβολή καί ἐξαρτᾶται ἀπ' τή τιμή τῆς διακρίνουσας $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$. Ἄν $\Delta < 0$, ἡ y φθίνει ἀπό $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ μέχρι $-\infty$ κι ἀπό $+\infty$ μέχρι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Ἄν $\Delta > 0$ ἡ y αὐξάνει ἀπό $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ μέχρι $+\infty$ κι ἀπό $-\infty$ μέχρι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Ἄν $\Delta = 0$ ἡ y γίνεται σταθερή συνάρτηση ἴση μέ $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (σχ. 9). Οἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς εἶναι παρ/λοι πρός τούς ἄξονες μέ κέντρο $\Gamma\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$. Ἡ συνάρτηση δέν ὁρίζεται γιά $x = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}$.

Ἀπ' τίς <u>ὑπερβατικές</u> συναρτήσεις ἀναφέρουμε τίς ἑπόμενες:

i) Οἱ τριγωνομετρικές καί ἀντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις εἶναι μεταξύ τους ἀντίστροφες. Τριγωνομετρικές εἶναι ὡς γνωστόν οἱ συναρτήσεις $y = ημx$, $y = συνx$, $y = εφx$, $y = σφx$, $y = τεμx$, $y = στεμx$. Ἐνῶ ἀντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις, δηλ. οἱ ἀντίστροφες αὐτῶν εἶναι οἱ $y = τοξημx$ (καί διαβάζεται: y εἶναι ἕνα τόξο τοῦ ὁποίου τό ἡμίτονο εἶναι x), $y = τοξσυνx$, $y = τοξεφx$, $y = τοξσφx$, κ.τ.λ.



Σχ. 10



Σχ. 11

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν ἀντίστροφων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων εἶναι, ὡς γνωστό, συμμετρικές τῶν ἀντίστοιχων τριγωνομετρικῶν ὡς πρός τήν εὐθεία $y=x$, ὅπου τώρα ὡς πεδίο ὁρισμοῦ λαμβάνεται τό διάστημα $[-1,1]$ καί πεδίο τιμῶν τό $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ γιά τίς $y=$ τοξημx καί $y=$ τοξσυνx, ἐνῶ ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $(-\infty, \infty)$ καί πεδίο τιμῶν τό $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ γιά τίς $y=$ τοξεφx καί $y=$ τοξσφx, ὅπως φαίνεται ἀπό τίς γραφικές τους παραστάσεις. (σχ. 10, 11.)

Γιά τή γραφική παράσταση τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ξεδιπλώνουμε τόν τριγωνομετρικό κύκλο πάνω στόν ἄξονα ox καί βρίσκουμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου AM. Τό τόξο AM ἔχει ἡμίτονο MP = OΠ δηλ. ημ $\widehat{AM}$ = OΠ = MK ἐνῶ συν $\widehat{AM}$ = OP = MΛ. Ὅπως διαπιστώνεται ἀκόμη οἱ συναρτήσεις $y=$ ημx καί $y=$ συνx εἶναι περιοδικές μέ περίοδο 2π, ἐπειδή ημ$(x+2\pi)=$ ημx καί συν$(x+2\pi)=$ συνx, ἐνῶ οἱ συναρτήσεις $y=$ εφx καί $y=$ σφx εἶναι περιοδικές μέ περίοδο π, ἐπειδή εφ$(x+\pi)=$ εφx καί σφ$(x+\pi)=$ σφx. (σχ 10, 11.)

ii) Οἱ ὑπερβολικές συναρτήσεις ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

ὑπερβολικό ἡμίτονο (**S**inus **h**yperbolicus) : $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

ὑπερβολικό συνημίτονο (**C**osinus **h**yperbolicus) : $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

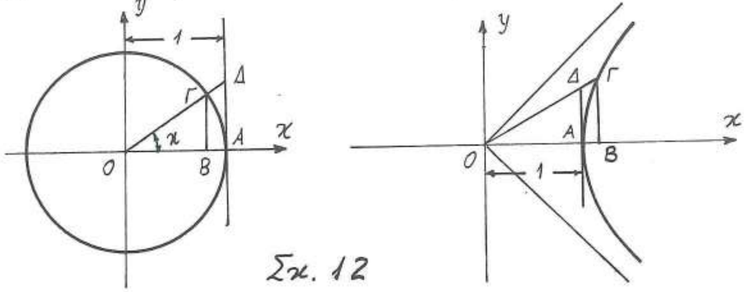
ὑπερβολική ἐφαπτομένη (**T**agens **h**yperbol.) : $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

ὑπερβολική συνεφαπτομένη (**Cot**agens **h**yper.) : $cothx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

ὑπερβολική τέμνουσα (**Sec**ans **h**yperbol.) : $sechx = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

ὑπερβολική συντέμνουσα (**Cosec**ans **h**yper.) : $cosechx = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Ἡ λέξη "ὑπερβολικό" ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι οἱ συναρτήσεις αὐτές συνδέονται γεωμετρικά μέ τήν ἰσοσκελῆ ὑπερβολή $x^2-y^2=1$, ὅπως οἱ τριγωνομετρικές (κυκλικές) συνδέονται μέ τόν κύκλο $x^2+y^2=1$ πρᾶγμα πού φαίνεται στό παρακάτω σχῆμα 12:



Σχ. 12

Στόν κύκλο: $\eta\mu x = B\Gamma$	Στήν ὑπερβολή: $sh\,x = B\Gamma$
$\sigma\upsilon\nu x = OB$	$ch\,x = OB$
$\varepsilon\varphi x = A\Delta$	$th\,x = A\Delta$
δηλ. $\Gamma = (\sigma\upsilon\nu x, \eta\mu x)$	δηλ. $\Gamma = (ch\,x, sh\,x)$, x σέ ἀκτίν.

Στίς ὑπερβολικές συναρτήσεις ὑπάρχουν σχέσεις ἀνάλογες ἤ περίπου ἀνάλογες μέ τίς τριγωνομετρικές. π.χ.

1. $ch^2x - sh^2x = 1$. Πράγματι εἶναι

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2-e^{2x}-e^{-2x}+2}{4} = 1.$$

2. $sh(x\pm y) = shx\cdot chx \pm chx\cdot shx$. Πράγματι τό 2° μέλος γίνεται: $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) \pm \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) =$

$$= \frac{\left(e^{x+y}-e^{y-x}-e^{-(x+y)}+e^{x-y}\right) \pm \left(e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}\right)}{4} =$$

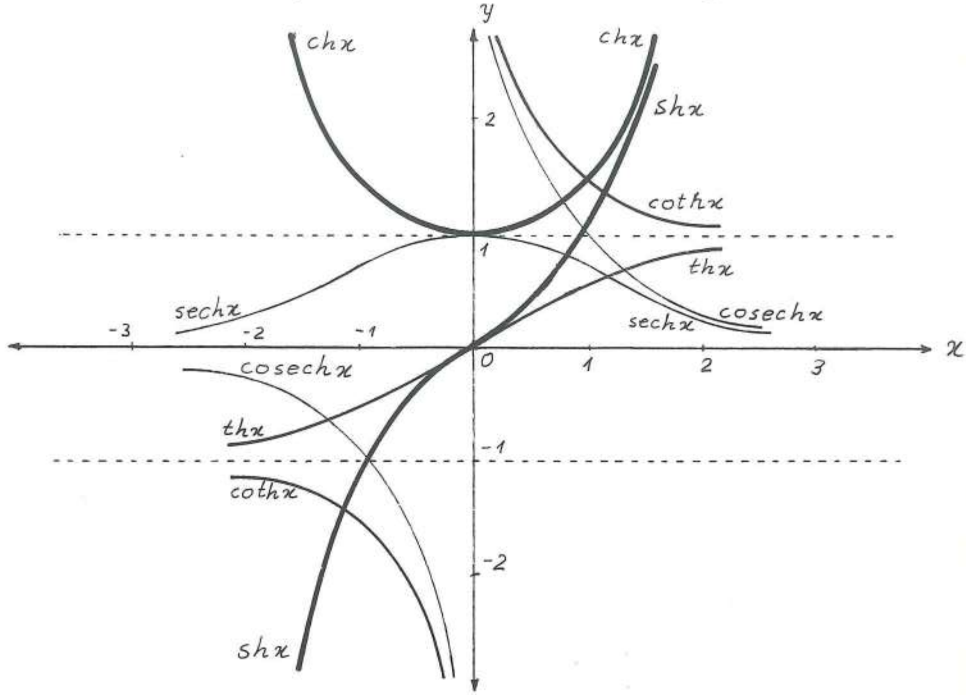
$$= \frac{2e^{x\pm y}-2e^{-(x\pm y)}}{4} = \frac{e^{x\pm y}-e^{-(x\pm y)}}{2} = sh(x\pm y).$$

3. $(chx \pm shx)^n = chnx \pm shnx$ (Τύπος τοῦ De Moivre):

Πράγματι: $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} \pm \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n = \left(\frac{2e^{\pm x}}{2}\right)^n = e^{\pm nx} =$

$= chnx \pm shnx.$

Οἱ γραφικές τους παραστάσεις εἰκονίζονται παρακάτω (σχ. 13):



Σχ. 13

Οἱ ἀντίστροφες ὑπερβολικές συναρτήσεις ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$y = \text{τοξ}\, sh\, x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$y = \text{τοξ}\, ch\, x = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{μέ } x \geq 1.$$

$$y = \text{τοξ}\, th\, x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad \text{μέ } |x| < 1$$

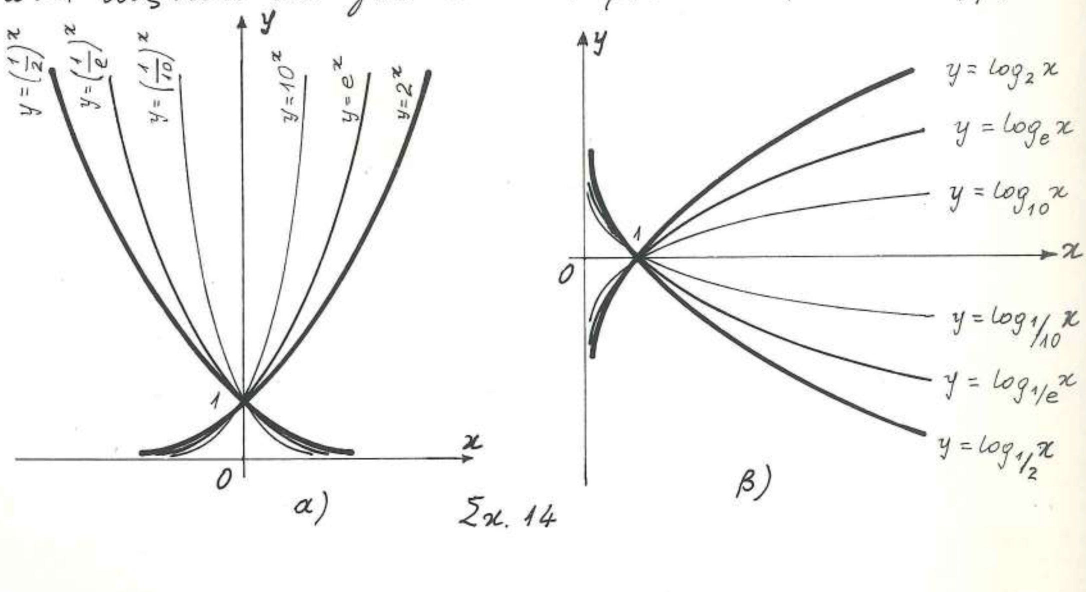
$$y = \text{τοξ}\, cth\, x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \quad \text{μέ } |x| > 1$$

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων αὐτῶν προκύπτουν ἀπ' τίς γραφικές παραστάσεις τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων σάν συμμετρικές αὐτῶν ὡς πρός τήν εὐθεία $y = x$ (διχοτόμο τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων). Ἤ ἀλλοιῶς μέ ἐναλλαγή τῶν ἀξόνων· ὁ ox νά συμπέσει στόν oy κι ὁ oy νά συμπέσει στόν ox.

iii) Οἱ ἐκθετικές καί λογαριθμικές συναρτήσεις εἶναι ἐπίσης ἀντίστροφες συναρτήσεις. Ὡς ἐκθετική ὁρίζεται ἡ συνάρτηση ποὺ εἶναι δύναμις ἑνός ἀριθμοῦ τοῦ ὁποίου ὁ ἐκθέτης εἶναι ἡ μεταβλητή x ἤ συνάρτηση τοῦ x. π.χ $y=10^x$, $y=2^x$, $y=e^x$ (ὅπου e ἡ βάση τῶν νεπερίων λογαρίθμων καί ἰσοῦται μέ 2,71828.... εἶναι δέ ὅπως καί ὁ π ὑπερβατικός ἀριθμός).

Οἱ ἀντίστοιχες αὐτῶν λογαριθμικές δηλ οἱ ἀντίστροφες αὐτῶν εἶναι $y=\log_{10}x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_{1/2}x$, $y=\log_e x$, ὅπως προκύπτει ἀπ' τόν ὁρισμό τῶν λογαρίθμων (ἀλλάζοντας τίς μεταβλητές x, y). Π.χ γιά τήν $y=\log_2 x$ προκύπτει ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι $x=2^y$ ἤ $y=2^x$. Εἰδικά γιά $\alpha=10$ ἔχουμε τούς δεκαδικούς λογαρίθμους, ἐνῶ γιά $\alpha=e$ ἔχουμε τούς νεπέριους ἤ φυσικούς λογαρίθμους καί τούς συμβολίζουμε μέ $\ln$ ἤ $\log_e$.

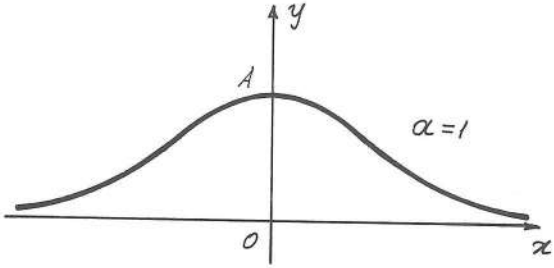
Ἡ ἐκθετική καμπύλη $y=\alpha^x$ γιά $\alpha>1$ εἶναι αὔξουσα ἐνῶ γιά $0<\alpha<1$ εἶναι φθίνουσα. Ἡ λογαριθμική καμπύλη $y=\log_\alpha x$ ὁρίζεται κατ' ἀρχάς μόνο γιά $x>0$ καί εἶναι ἐπίσης γιά $\alpha>1$ αὔξουσα ἐνῶ γιά $0<\alpha<1$ φθίνουσα. (σχ 14 α, β).



Σχ. 14

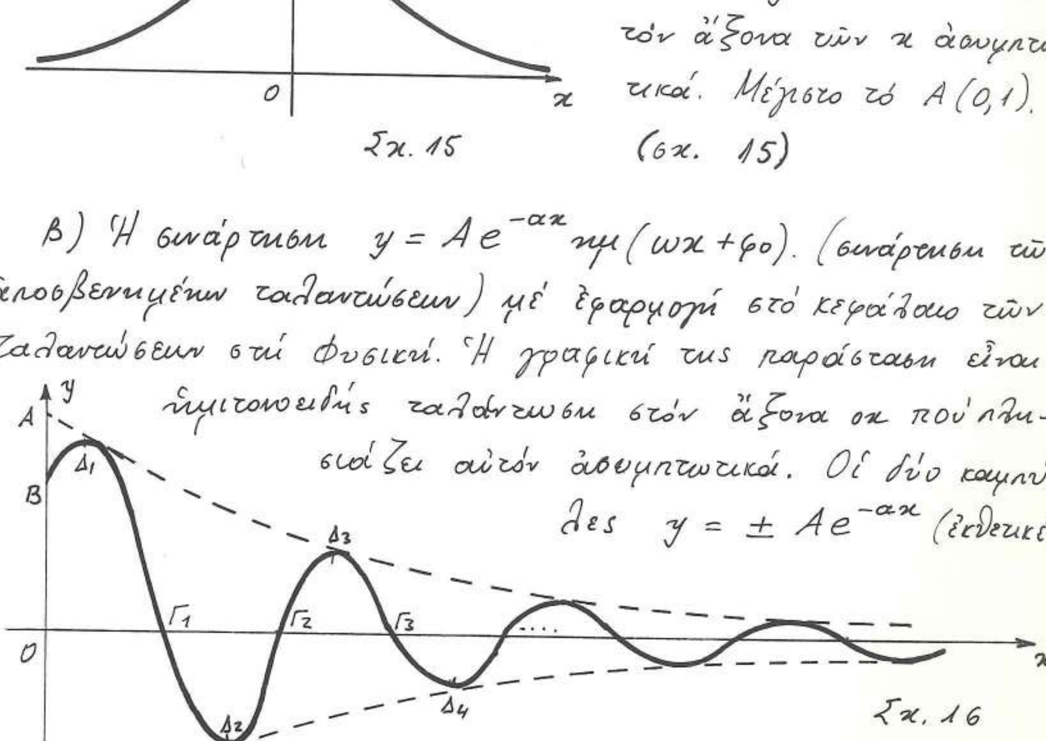
Δύο ἄλλες ἐκθετικές συναρτήσεις μέ μεγάλη ἐφαρμογή εἶναι:

α) Ἡ συνάρτηση $y = Ae^{-(\alpha x)^2}$ (συνάρτηση κανονικῆς κατανομῆς τοῦ Gauss) μέ ἐφαρμογή στή θεωρία Πιθανοτήτων καί Στατιστικῆς. Ἡ συνάρτηση y αὐξάνει ἀπ' τό 0 ὥς τό A καί φθίνει πάλι ἀπό τό A ὥς τό 0. Εἶναι συμμετρική πρός τόν ἄξονα τῶν y καί πλησιάζει τό τόν ἄξονα τῶν x ἀσυμπτωτικά. Μέγιστο τό $A(0,1)$. (σχ. 15)



Σχ. 15

β) Ἡ συνάρτηση $y = Ae^{-\alpha x}\,ημ(\omega x+\varphi_0)$. (συνάρτηση τῶν ἀποσβεννυμένων ταλαντώσεων) μέ ἐφαρμογή στό κεφάλαιο τῶν Ταλαντώσεων στή Φυσική. Ἡ γραφική της παράσταση εἶναι ἡμιτονοειδής ταλάντωση στόν ἄξονα ox πού πλησιάζει αὐτόν ἀσυμπτωτικά. Οἱ δύο καμπύλες $y = \pm Ae^{-\alpha x}$ (ἐκθετικές) καλύπτουν τή καμπύλη ἀπ' τό πάνω καί κάτω μέρος (ἐστιγμένες).



Σχ. 16

Τά σημεῖα τομῆς της μέ τούς ἄξονες: τῶν y εἶναι $B(0, A\,ημ\varphi_0)$ καί τῶν x εἶναι $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots \left(\frac{k\pi-\varphi_0}{\omega}, 0\right)$
Οἱ ἄκρες τιμές $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ εἶναι γιά $k = 1, 2, 3, \dots$
$x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \lambda}{\omega}$ ὅπου $\lambda = τοξεφ\,\frac{\omega}{\alpha}$ σέ ἀκτίνια. (σχ. 16).

Ἀκολουθίες.

Ὀνομάζουμε **ἀκολουθία** πραγματικῶν ἀριθμῶν κάθε συνάρτηση f μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί πεδίο τιμῶν τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλ κάθε μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ N στό R. Τήν τιμή τῆς συνάρτησης f τήν συμβολίζουμε μέ α_ν δηλώνοντας ὅτι α_ν εἶναι ὁ ὅρος τῆς ἀκολουθίας πού κατέχει τήν ν-οστή τάξη. Ἑπομένως μία ἀκολουθία ὁρίζεται πλήρως ἀπ' τό γενικό της ὅρο α_ν καί παριστάνεται μέ α_ν, $\nu=1,2,\cdots$

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{2\nu}{\nu+3}$, $\nu\in N$ εἶναι: $\dfrac{2}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{6}, \dfrac{8}{7}, \dots$

Μία ἀκολουθία α_ν, $\nu\in N$ λέμε ὅτι εἶναι **φραγμένη** (ἀπόλυτα) τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός ϑ τέτοιος ὥστε $|\alpha_\nu|\leq\vartheta$ γιά κάθε $\nu\in N$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{\nu\,\text{ημ}\,\nu}{\nu+1}$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή $\left|\dfrac{\nu\,\text{ημ}\,\nu}{\nu+1}\right|=\dfrac{\nu\,|\text{ημ}\,\nu|}{\nu+1}\leq\dfrac{\nu\cdot 1}{\nu+1}\leq 1\ \forall\nu\in N$ $\left(|\text{ημ}\,\nu|\leq 1\ \forall\nu\in N\right)$.

Μία ἀκολουθία α_ν $\nu\in N$ λέγεται **μηδενική** καί συμβολίζεται μέ $\alpha_\nu\to 0$ τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει δείκτης ν_0 ἐξαρτώμενος γενικά ἀπ' τόν ε, δηλ. $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει $|\alpha_\nu|<\varepsilon$ $\forall\nu\geq\nu_0(\varepsilon)$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu\in N$ εἶναι μηδενική. Πράγματι γιά κάθε $\varepsilon>0$ μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα δείκτη ν_0 ἐξαρτώμενο ἀπ' τόν ε. (Λύνοντας τήν ἀνισότητα $\left|\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\right|<\varepsilon$ ὡς πρός ν καί θέτοντας $\nu_0=\left[\nu(\varepsilon)\right]+1$ ὅπου $\left[\nu(\varepsilon)\right]$ εἶναι τό ἀκέραιο μέρος τοῦ $\nu(\varepsilon)$). Πράγματι θά ἔχουμε $\dfrac{1}{\nu}<\varepsilon^2$ ἤ

$\nu = \frac{1}{\varepsilon^2}$ ὁπότε ὁ $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ εἶναι ὁ $\nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$. Γιά $\nu \geq \nu_0$ θά εἶναι $\left|\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} = \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon$. Ἄρα ἡ α_ν μηδενική.

Ἀναφέρουμε μερικές ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν:

1. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, τότε καί $-\alpha_\nu \to 0$ καθώς καί $|\alpha_\nu| \to 0$.

2. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, τότε ἡ α_ν εἶναι φραγμένη.

3. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, $\beta_\nu \to 0$ τότε καί $\alpha_\nu \pm \beta_\nu \to 0$.

4. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, β_ν φραγμένη, τότε $\alpha_\nu \beta_\nu \to 0$.

5. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, $\beta_\nu \to 0$ τότε $\alpha_\nu \beta_\nu \to 0$.

6. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, τότε $\lambda \alpha_\nu \to 0$, γιά κάθε $\lambda \in R$.

7. Ἄν $\alpha_\nu \to 0$, $\beta_\nu \to 0$ τότε $\kappa\alpha_\nu + \lambda\beta_\nu \to 0$, γιά κάθε $\kappa, \lambda \in R$.

8. Ἄν $\beta_\nu \to 0$ καί γιά μία ἀκολουθία α_ν ἰσχύει: $|\alpha_\nu| \leq |\beta_\nu|$ τότε $\alpha_\nu \to 0$.

Μία ἀκολουθία α_ν **συγκλίνει** πρός τόν πραγματικό ἀριθμό α, ἤ ἔχει **ὅριο** τόν α, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία $(\alpha_\nu - \alpha)$ εἶναι μηδενική καί γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \alpha$. Ἡ ὁριακή αὐτή τιμή τῆς α_ν εἶναι μοναδική.

π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu+10}{\nu+9}$ συγκλίνει στό 1 ἐπειδή ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - 1 = \frac{\nu+10}{\nu+9} - 1$ εἶναι μηδενική καθότι $\left|\frac{\nu+10}{\nu+9} - 1\right| = \frac{1}{\nu+9} < \frac{1}{\nu}$ καί ἡ $\frac{1}{\nu}$ εἶναι μηδενική· ἄρα (Ἰδ. 8) ἡ $\alpha_\nu - 1$ μηδενική.

Ἀναφέρουμε μερικές ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν.

1΄. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, τότε $-\alpha_\nu \to -\alpha$.

2΄. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, τότε ἡ α_ν εἶναι φραγμένη

3΄. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \alpha$ τότε $\alpha_\nu - \beta_\nu \to 0$

4΄. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta$ τότε $\alpha_\nu \pm \beta_\nu \to \alpha \pm \beta$

5΄. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, τότε $\lambda\alpha_\nu \to \lambda\alpha$, γιά κάθε $\lambda \in R$.

6΄. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta$, τότε $\kappa\alpha_\nu + \lambda\beta_\nu \to \kappa\alpha + \lambda\beta$, γιά $\forall \kappa, \lambda \in R$.

7. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta$, τότε $\alpha_\nu \beta_\nu \to \alpha\beta$

8. Ἄν $\beta_\nu \to \beta \neq 0$ καί $\beta_\nu \neq 0$ γιά $\forall \nu \in N$, τότε $\frac{1}{\beta_\nu} \longrightarrow \frac{1}{\beta}$.

9. Ἄν $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta \neq 0$ καί $\beta_\nu \neq 0$ τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu}$.

10. Ἄν δύο ἀκολουθίες α_ν, β_ν συγκλίνουν καί ἰσχύει: $\alpha_\nu \leq \beta_\nu$, τότε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu \leq \lim\limits_{\nu\to\infty} \beta_\nu$

11. Ἄν $\beta_\nu \to \alpha$, $\gamma_\nu \to \alpha$ καί $\beta_\nu \leq \alpha_\nu \leq \gamma_\nu$, τότε καί $\alpha_\nu \to \alpha$.

Μία ἀκολουθία α_ν λέγεται **αὔξουσα** τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in N$. Εἰδικά ἄν $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in N$ τότε ἡ α_ν λέγεται **γνησίως αὔξουσα.**

Μία ἀκολουθία α_ν λέγεται **φθίνουσα** τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in N$. Εἰδικά ἄν $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in N$ τότε ἡ α_ν λέγεται **γνησίως φθίνουσα.**

Μία ἀκολουθία α_ν πού εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα λέγεται **μονότονη** καί ἄν ἡ α_ν εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη.**

Ἀξίωμα. Κάθε μονότονη καί φραγμένη ἀκολουθία α_ν εἶναι συγκλίνουσα εἰς τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R.

Τό παραπάνω ἀξίωμα ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ὁρίου ὑπό ὡρισμένες συνθῆκες, χωρίς νά ὑποδεικνύει πῶς θά ὑπολογισθῆ.

Στήν περίπτωση πού μία αὔξουσα καί μή φραγμένη ἀκολουθία δέν συγκλίνει πρός ἕνα πραγματικό ἀριθμό, λέμε ὅτι ἀπειρίζεται θετικά, ἤ συγκλίνει πρός τό $+\infty$, ἤ τείνει πρός τό $+\infty$. Ἀνάλογα γιά μία φθίνουσα καί μή φραγμένη ἀκολουθία α_ν, λέμε ὅτι ἀπειρίζεται ἀρνητικά, ἤ συγκλίνει πρός τό $-\infty$, ἤ ἀκόμη τείνει πρός τό $-\infty$.

Παραδείγματα:

1. Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt[\nu]{\nu}=1$

Παρατηροῦμε ὅτι $\sqrt[\nu]{\nu}>1$ γιά κάθε $\nu\in N$. ἑπομένως μποροῦμε νά θέσουμε: $\sqrt[\nu]{\nu}=(1+\varepsilon_\nu)^2$ ὅπου $\varepsilon_\nu>0$ $\forall \nu\in N$. ἤ $\sqrt[2\nu]{\nu}=(1+\varepsilon_\nu)$ ἤ $\sqrt{\nu}=(1+\varepsilon_\nu)^\nu$ ὁπότε κατά τήν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (σελ 26) $\sqrt{\nu}=(1+\varepsilon_\nu)^\nu\geq 1+\nu\varepsilon_\nu>\nu\varepsilon_\nu$ ἤ $0<\varepsilon_\nu<\frac{\sqrt{\nu}}{\nu}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ ἀλλά $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{\sqrt{\nu}}=0$ (παράδ. μηδ. ἀκολουθίας, σελ 102). ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\varepsilon_\nu=0$ (ἰδ. 11.) δηλ $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt[\nu]{\nu}=1$.

2. Δίδεται ἡ ἀκολουθία α_ν μέ τόν ἀναγωγικό τύπο:
$\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\frac{3}{\alpha_\nu}\right)$ καί $\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{3}{\alpha}\right)$ ὅπου $\alpha>0$

Νά ἐξετασθεῖ ἡ μονοτονία καί ἡ σύγκλισή της. Ποιό εἶναι τό ὅριό της.

Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι $\alpha_\nu>0$ $\forall\nu\in N$. Ἐξ ἄλλου ἀπ' τήν ταυτότητα $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$ προκύπτει γιά τόν α_ν:
$\alpha_\nu=\frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu-1}+\frac{3}{\alpha_{\nu-1}}\right)\geq\sqrt{\alpha_{\nu-1}\cdot\frac{3}{\alpha_{\nu-1}}}=\sqrt{3}$ δηλ $\alpha_\nu\geq\sqrt{3}$. (1)

Ἐπίσης $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\frac{3}{\alpha_\nu}\right)-\alpha_\nu=\frac{3-\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu}\leq 0$ ἐπειδή ἀπ' τήν (1) προκύπτει $\alpha_\nu^2\geq 3$ ἤ $3-\alpha_\nu^2\leq 0$. Δηλ $\alpha_\nu\geq\alpha_{\nu+1}$ $\forall\nu\in N$. ἄρα ἡ α_ν εἶναι φθίνουσα. Καί ἐπειδή εἶναι καί φραγμένη ἐκ τῶν κάτω διότι $\alpha_\nu\geq\sqrt{3}$ θά συγκλίνει στό R (Ἀξίωμα). Ἔστω x τό $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\alpha_\nu$ τότε εἶναι: $x=\text{ορ}\,\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\text{ορ}\,\alpha_\nu+\frac{3}{\text{ορ}\,\alpha_\nu}\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$ ἤ $x^2=3$ καί $x=\pm\sqrt{3}$ · ἡ $x=-\sqrt{3}$ ἀπορρίπτεται, ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\alpha_\nu=\sqrt{3}$

3. Νά μελετηθεῖ ἡ ἀκολουθία α_ν μέ ἀναγωγικό τύπο:
$\alpha_\nu=\sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}$ καί μέ $\alpha_1=\sqrt{2}$, ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση.

Προφανώς έχουμε $\alpha_1<\alpha_2$. Έστω ότι καί $\alpha_\kappa<\alpha_{\kappa+1}$. Θά δείξουμε ότι καί $\alpha_{\kappa+1}<\alpha_{\kappa+2}$. Άπ' τή σχέση $\alpha_\kappa<\alpha_{\kappa+1}$ προκύπτει:
$2+\alpha_\kappa<\alpha_{\kappa+1}+2$ ή $\sqrt{2+\alpha_\kappa}<\sqrt{2+\alpha_{\kappa+1}}$ ή $\alpha_{\kappa+1}<\alpha_{\kappa+2}$ όπότε άπ' τό θεώρημα τής τελείας έπαγωγής προκύπτει $\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}$ $\forall\nu\in N$, δηλ. ή άκολουθία α_ν είναι γνησίως αύξουσα. Έξετάζουμε τώρα άν ή άκολουθία είναι φραγμένη (γιά νά άποφανθούμε άν συγκλίνει). Πράγματι παρατηρούμε ότι $\alpha_1=\sqrt{2}<2$. Έστω ότι $\alpha_{\nu-1}<2$. Τότε $2+\alpha_{\nu-1}<2+2=4$ ή $\sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}<2$ ή $\alpha_\nu<2$ Δηλ. τό 2 είναι ένα άνώτερο φράγμα. Έπομένως (Άξίωμα) ή α_ν θά συγκλίνει στό R. Άν $x=\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_\nu$ τότε παίρνοντας τά όρια καί τών δύο μελών τής $\sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}=\alpha_\nu$ έχουμε:
$\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}=\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_\nu$ ή $\sqrt{2+\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_{\nu-1}}=\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_\nu$. Καί έπειδή
$\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_\nu=\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_{\nu-1}=x$ έχουμε $\sqrt{2+x}=x$ ή $x^2-x-2=0$
καί $x=2$ ή $x=-1$. (άπορρίπτεται). Άρα $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\alpha_\nu=2$.

4. Δίδονται οί άκολουθίες α_ν καί β_ν μέ $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{\alpha_\nu+\beta_\nu}{2}$ καί $\beta_{\nu+1}=\sqrt{\alpha_\nu\beta_\nu}$. Νά δειχθεί ότι: α'). $\alpha_\nu>\beta_\nu$ $\forall\nu\in N$, β') Ή α_ν είναι αύστηρώς φθίνουσα, ένώ ή β_ν αύστηρώς αύξουσα. όπου $\alpha_1=\alpha$ καί $\beta_1=\beta$ μέ $\alpha>\beta>0$.

α') Είναι $\alpha_1-\beta_1=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{2}>0$.
Έστω $\alpha_\kappa>\beta_\kappa$. Τότε $\alpha_{\kappa+1}-\beta_{\kappa+1}=\dfrac{\alpha_\kappa+\beta_\kappa}{2}-\sqrt{\alpha_\kappa\beta_\kappa}=$
$=\dfrac{(\sqrt{\alpha_\kappa}-\sqrt{\beta_\kappa})^2}{2}>0$. Άρα καί $\alpha_\nu>\beta_\nu$ $\forall\nu\in N$.

β') Δείξαμε προηγουμένως ότι $\alpha_\nu>\beta_\nu$. Άρα:
$\alpha_\nu+\alpha_\nu>\beta_\nu+\alpha_\nu$ ή $2\alpha_\nu>\beta_\nu+\alpha_\nu$ ή $\alpha_\nu>\dfrac{\alpha_\nu+\beta_\nu}{2}=\alpha_{\nu+1}$ δηλ. ή α_ν είναι αύστηρώς φθίνουσα. Έπίσης άπ' τήν $\alpha_\nu>\beta_\nu$ προκύπτει $\alpha_\nu\beta_\nu>\beta_\nu^2$ ή $\sqrt{\alpha_\nu\beta_\nu}=\beta_{\nu+1}>\beta_\nu$, δηλ. ή β_ν αύστ. αύξουσα.

Πρόοδοι.

Μιά είδική κατηγορία άκολουθιών μέ ώρισμένες χαρακτηριστικές ίδιότητες είναι οί πρόοδοι. Άνάλογα μέ τήν χαρακτηριστική τους ίδιότητα τίς χωρίζουμε σέ τρεῖς κατηγορίες:

1. άριθμητικές, 2. γεωμετρικές, 3. άρμονικές.

1. Όνομάζουμε **άριθμητική πρόοδο** (ή πρόοδο κατά διαφορά) μία άκολουθία $α_ν$ στήν όποία κάθε ὅρος της (έκτός τοῦ πρώτου) προκύπτει άπ' τόν προηγούμενό του διά προσθέσεως ένός σταθεροῦ άριθμοῦ πού καλεῖται **λόγος** τῆς προόδου. δηλ $α_{ν+1} = α_ν + ω$ (ὅπου ω ό λόγος)

Ίδιότητες τῆς άριθμητικῆς προόδου.

i. Ό νιοστός ὅρος $α_ν$ δίδεται άπ' τή σχέση: $α_ν = α_1 + (ν-1)ω$.

ii. Σέ πεπερασμένο πλῆθος διαδοχικῶν ὅρων άριθμ. προόδου, τό ἄθροισμα δύο ὅρων πού άπέχουν ἐξ ἴσου άπ' τά ἄκρα ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

iii. Γιά νά εἶναι τρεῖς άριθμοί α, β, γ διαδοχικοί ὅροι άριθμ. προόδου, πρέπει καί άρκεῖ $2β = α + γ$

iv. Τό ἄθροισμα μιᾶς άρ. πρ. δίδεται άπ' τόν τύπο: $Σ_ν = \dfrac{(α_1 + α_ν)\,ν}{2}$.

v. (Τύπος παρεμβολῆς): Ἄν μεταξύ δύο άριθμῶν α, β θέλουμε νά παρεμβάλουμε μ άριθμούς τούς $x_1, x_2, \dots, x_μ$, ὥστε ή άκολουθία $α, x_1, x_2, \dots, x_μ, β$ νά άποτελεῖ άρ. πρόοδο ό λόγος ω δίδεται άπ' τόν τύπο: $ω = \dfrac{β - α}{μ + 1}$.

2. Όνομάζουμε **άρμονική πρόοδο** μία άκολουθία $α_ν$ τῆς όποίας οί άντίστροφοι ὅροι της (δηλ ή άκολουθία $\frac{1}{α_ν}$) άποτελοῦν άριθμητική πρόοδο.

Ἀπ' τόν ὁρισμό αὐτό προκύπτουν ἐντελῶς ἀνάλογες ἰδιότητες τῆς ἁρμονικῆς προόδου μέ ἐκεῖνες τῆς ἀριθμητικῆς. π.χ.

i'. Ὁ νιοστός ὅρος ἁρμ. Πρ. εἶναι: $\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu-1)\left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)$.

ii'. Γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ ὅροι ἁρμ. Προόδου πρέπει $2\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ἤ $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ κ.τ.λ.

3. Ὀνομάζουμε **γεωμετρική πρόοδο** (ἤ πρόοδο κατά πηλίκο) μία ἀκολουθία α_ν στήν ὁποία κάθε ὅρος της (ἐκτός τοῦ πρώτου) προκύπτει ἀπ' τόν προηγούμενό του διά πολλαπλασιασμοῦ ἐπί ἕνα σταθερό ἀριθμό πού καλεῖται **λόγος** τῆς προόδου· δηλ. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \omega$ (ὅπου $\omega > 1$ ὁ λόγος)

Ἀπ' τόν ὁρισμό προκύπτουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες τῆς Γεωμ. πρ.:

i''. Ὁ νιοστός της ὅρος εἶναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 \omega^{\nu-1}$. ($\alpha_1$ ὁ πρῶτος ὅρος)

ii''. Σέ πεπερασμένο πλῆθος διαδοχικῶν ὅρων γεωμ. πρ., τό γινόμενο δύο ὅρων πού ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπ' τά ἄκρα, ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων.

iii''. Γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου πρέπει καί ἀρκεῖ $\beta^2 = \alpha\gamma$.

iv''. Τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμ. πρ. δίδεται ἀπ' τόν τύπο: $\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu \omega - \alpha_1}{\omega - 1} = \frac{\alpha_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}$.

v''. (Τύπος παρεμβολῆς) Ἄν μεταξύ δύο ἀριθμῶν α καί β θέλουμε νά παρεμβάλουμε μ ἀριθμούς $x_1, x_2, \cdots, x_\mu$, ἔτσι ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha, x_1, x_2, \cdots, x_\mu, \beta$ νά ἀποτελεῖ γεωμετρική πρόοδο, ὁ λόγος ω δίδεται ἀπ' τόν τύπο: $\omega = \pm\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$ (ὅταν μ περιττός) καί $\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$ (ὅταν μ ἄρτιος).

Στήν περίπτωση πού ὁ λόγος ω τῆς γεωμετρικῆς προόδου α_ν πληροῖ τήν συνθήκη $0<|\omega|<1$ τότε ἡ πρόοδος α_ν λέγεται **φθίνουσα γεωμ. πρόοδος.**

Ἡ φθίνουσα γεωμ. πρόοδος ἔχει τίς ἴδιες ἀκριβῶς ἰδιότητες μέ τίς ἰδιότητες τῆς γεωμετρικῆς. Τό ἄθροισμά της ὅμως δίδεται ἀπ' τόν τύπο $\Sigma_{\nu \to \infty} = \frac{\alpha}{1-\omega}$ ὅταν τό $\nu \to \infty$.

Σειρές.

Μιά ἄλλη κατηγορία ἀκολουθιῶν εἶναι οἱ σειρές, πού σχηματίζονται ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$. Σχηματίζουμε τήν ἀκολουθία $\sigma_1=\alpha_1$, $\sigma_2=\alpha_1+\alpha_2$, $\sigma_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \dots$, $\sigma_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k$. Ἡ νέα αὐτή ἀκολουθία σ_ν ἤ $\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k$ καλεῖται **σειρά** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν.
π.χ. ἄν ἡ ἀκολουθία εἶναι $\alpha_\nu=\nu$ μέ ὅρους $1, 2, 3, \dots, \nu$, ἡ ἀντίστοιχη σειρά θά εἶναι $\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k$ μέ ὅρους $1, 3, 6, \dots, \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Ὅπως γίνεται προφανές, τό πρόβλημα πού παρουσιάζεται στίς σειρές, εἶναι ὁ ὑπολογισμός τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων της πού δέν εἶναι πάντοτε δυνατό· π.χ δέν μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς (ἁρμονικῆς) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$. Ὑπολογίζεται μόνο σέ ὡρισμένες περιπτώσεις εἰδικῆς μορφῆς.

Μία σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ λέμε ὅτι **συγκλίνει** στόν πραγματικό ἀριθμό σ, ἄν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό σ καί γράφουμε $\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu=\sigma$ καί ὁ σ καλεῖται **ἄθροισμα** τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$.

Ἄν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι θετικοί, ἡ ἀκολουθία σ_ν εἶναι αὔξουσα καί γιά νά συγκλίνει θά πρέπει νά εἶναι φραγμένη, ἀλλοιῶς ἡ σ_ν ὡς αὔξουσα καί μή φραγμένη ἀπειρίζεται θετικά, ὁπότε ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ λέμε ὅτι **ἀπειρίζεται θετικά.** Ἀνάλογα λέμε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ **ἀπειρίζεται ἀρνητικά**, ὅταν οἱ ὅροι τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι ἀρνητικοί καί ἡ σ_ν δέν εἶναι φραγμένη.

Ὅπως καί στίς συγκλίνουσες ἀκολουθίες, ὑπάρχουν μερικές ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν σειρῶν ἀνάλογες μ'αὐτές τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν. Ἀναφέρουμε τίς κυριώτερες:

1'α. Ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \beta$ δύο συγκλίνουσες σειρές, τότε:

α') ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda \alpha_\nu)$ εἶναι συγκλίνουσα καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda \alpha_\nu) = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$

β') ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)$ εἶναι συγκλ. καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$.

2'α. Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει στό R, τότε:

α') ἡ ἀκολουθία σ_ν εἶναι φραγμένη, β') ἡ α_ν εἶναι μηδενική.

3'α. Ἄν ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ δέν συγκλίνει τότε ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)$ δέν συγκλίνει.

4'α. (Κριτήριο συγκρίσεως). Ἄν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καί $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ δύο σειρές τέτοιες ὥστε $0 \leq \alpha_\nu \leq \beta_\nu$ $\forall \nu \in N$ τότε, ἄν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει, καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει. Ἄν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά, καί ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀπειρίζεται θετικά.

Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν. Ἄν ἀντί τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ πάρουμε τά μερικά γινόμενα $\pi_1 = \alpha_1$, $\pi_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2$, $\pi_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$, $\dots$, $\pi_\nu = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu = \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ τότε τήν ἀκολουθία $\pi_\nu = \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ καλοῦμε **ἀπειρογινόμενο** $(\nu = 1, 2, \cdots)$. Τό $\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ λέμε ὅτι **συγκλίνει** ἄν $\lim_{\nu \to \infty} \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \gamma$ $(\gamma \neq 0, \pm\infty)$.

Ὁ ἀριθμός e.

α') Ἔστω ἡ ἀκολουθία y_n μέ γενικό ὅρο $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Ἡ y_n εἶναι αὐστηρῶς φθίνουσα. Πράγματι, ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι γιά $n\geq 2$: $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ἤ ἀκόμη $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ἤ ἄν διαιρέσουμε μέ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>0$ $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}$ ἤ $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$. Ἀλλά $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}$ (ἀνισότητα Bernoulli) $>$ $>1+n\cdot\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{n}$. Ἐξ ἄλλου $\forall n\in N$ εἶναι $y_n>1$. Ἄρα ἡ y_n εἶναι φθίνουσα καί περατωμένη, ἑπομένως συγκλίνουσα. Τό ὅριο αὐτῆς παριστάνεται μέ e· δηλ. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$

β') Ἔστω ἡ ἀκολουθία x_n μέ γενικό ὅρο $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Ἡ x_n εἶναι αὐστηρῶς (γνησίως) αὔξουσα. Πράγματι, ἀρκεῖ νά δειχθεῖ γιά $n\geq 2$: $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ἤ ἀκόμη $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ἤ ἄν διαιρέσουμε μέ $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>0$ καί ἀντιστρέψουμε τούς ὅρους τῆς ἀνισότητας: $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n}\right)$ ἤ $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n}$. Ἀλλά $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$ (ἀνισότητα Bernoulli). Ἀλλά $\forall n\in N$ εἶναι $x_n<y_n$ ἄρα $x_n<y_1=4$. Ὥστε ἡ x_n εἶναι αὔξουσα καί περατωμένη, ἄρα συγκλίνουσα. Ἐξ ἄλλου ἔχουμε:
$y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = x_n \cdot \frac{1}{n}$. Ἐπειδή ἡ x_n εἶναι συγκλίνουσα καί ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{n}$ εἶναι μηδενική, ἄρα ἡ ἀκολουθία $x_n \cdot \frac{1}{n}$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία (ἰδιότητες 2. καί 4. τῶν ἀκολουθιῶν) δηλ. $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}(y_n - x_n) = 0$ ἄρα $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\, y_n = \underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\, x_n = e$ δηλ.

$$\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e .$$

Γενικώτερα ἀποδεικνύεται ὅτι ἄν a_n εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία πού ἀποκλίνει στό $+\infty$ ἤ στό $-\infty$ τότε:

$\underset{n\to\infty}{\text{ορ}}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. Ὁ ἀριθμός αὐτός e εἶναι ἡ βάση τῶν Νεπερίων λογαρίθμων. Ἀποδεικνύεται ἀκόμη ὅτι:

α') ὁ e συμπίπτει μέ τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας:

$\beta_\nu = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu}$ δηλ. εἶναι

$$e = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu}\right)$$

β') Ὁ e εἶναι ἄρρητος. Μία κατά προσέγγιση τιμή αὐτοῦ εἶναι: $e = 2{,}718281\ldots$

Ἔστω μία ἀκολουθία x_n. Ἕνας ἀριθμός α λέγεται **ὁριακός ἀριθμός** τῆς ἀκολουθίας x_n ὅταν, σέ κάθε περιοχή $\pi(\alpha,\varepsilon)$ τοῦ α, ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας. Ὁ α μπορεῖ νά εἶναι ἤ νά μήν εἶναι ὅρος τῆς ἀκολουθίας.

Οὐσιώδης διαφορά μεταξύ ὁρίου καί ὁριακοῦ ἀριθμοῦ ἀκολουθίας εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἄν α εἶναι ὅριο τῆς ἀκολουθίας, τότε σέ κάθε περιοχή τοῦ α, $\pi(\alpha,\varepsilon)$ ὑπάρχουν σχεδόν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ἐκτός τῆς περιοχῆς ὑπάρχει πεπερασμένο πλῆθος ὅρων τῆς ἀκολουθίας. Ἐνῶ ἄν ὁ α εἶναι ὁριακός ἀριθμός τότε ἐκτός τῆς περιοχῆς τοῦ α μποροῦν νά ὑπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ὅροι τῆς ἀκολουθίας ἤ καί ἀπείρου πλήθους. Ἑπομένως τό ὅριο μιᾶς ἀκολουθίας εἶναι καί ὁριακός ἀριθμός αὐτῆς χωρίς ὅμως νά συμβαίνει τό ἀντίστροφο.

Π.χ. στήν ἀκολουθία $x_n = 1+\frac{1}{n}$, ὅταν n περιττός καί $\frac{1}{n}$, ὅταν n ἄρτιος δηλ. τήν $2, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{5}, \dots, 1+\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \dots$ Τότε προφανῶς ὁ 1 καί 0 εἶναι ὁριακοί ἀριθμοί τῆς x_n.

Ἔστω τώρα f μία πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς ὡρισμένη στό σύνολο A καί ξ ὁριακός ἀριθμός τοῦ A πού ἀνήκει ἤ ὄχι στό A. Τότε μποροῦμε νά βροῦμε ἀκολουθίες μέ στοιχεῖα ἀπ' τό A πού νά ἔχουν ὅριο τό ξ. (τήν εὕρεση τέτοιων ἀκολουθιῶν ἐξασφαλίζει ἕνα ἀξίωμα ἀπ' τή θεωρία συνόλων, γνωστό σάν ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς).

I. Ἄν γιά κάθε ἀκολουθία x_n ἀπ' τό A μέ $\underset{n\to\infty}{\text{op}}\, x_n = \xi$, ἡ ἀντίστοιχη ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς συνάρτησης ἡ $f(x_n)$ συγκλίνει πάντοτε πρός τόν ἴδιο ἀριθμό λ, τότε ὁ λ λέγεται **ὅριο τῆς συνάρτησης** $f(x)$ καί γράφουμε $\underset{x\to\xi}{\text{op}}\, f(x) = \lambda$.

II. Ἄν ξ εἶναι ὁριακός ἀριθμός τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ A τῆς συνάρτησης f, τότε θά λέμε ὅτι ἡ $f(x)$ ἔχει **ὅριο** τόν ἀριθμό λ τοῦ x τείνοντος στό ξ, ὅταν γιά ὁποιοδήποτε δοθέντα ἀριθμό $\varepsilon > 0$, μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα θετικό $\delta=\delta(\varepsilon)$ ἐξαρτώμενο γενικά ἀπ' τόν ε ἔτσι ὥστε γιά κάθε $x \in A$ καί $x \neq \xi$, ἄν $|x-\xi| < \delta$ νά εἶναι $|f(x)-\lambda| < \varepsilon$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ δύο ὁρισμοί I καί II γιά τό ὅριο συνάρτησης εἶναι ἰσοδύναμοι. Δηλ. ἀπ' τόν I προκύπτει ὁ II καί ἀντίστροφα.

π.χ. Ἄν $f(x) = x\,\eta\mu(x)^{-1}$ τότε $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} f(x) = 0$. Πράγματι ἔχουμε $|f(x) - 0| = |x\,\eta\mu(x)^{-1} - 0| = |x|\cdot|\eta\mu(x)^{-1}| \leq |x|$. Ἑπομένως ἄν λάβουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, τότε γιά $|x - 0| < \delta = \varepsilon$ θά εἶναι $|x\,\eta\mu(x)^{-1} - 0| \leq |x| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$ ἄρα $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} f(x) = 0$.

Ἔστω $f(x)$ συνάρτηση ὡρισμένη στό σύνολο A καί ξ ὁριακός ἀριθμός τοῦ A. Ἄν x_n εἶναι ἀκολουθία ἀπ' τό A μέ $x_n \to \xi$, καί $\forall n \in N$ εἶναι $x_n < \xi$, γράφουμε $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}} x_n = \xi^-$. Ἄν εἶναι $\forall n \in N$ $x_n > \xi$, γράφουμε $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}} x_n = \xi^+$. Στήν πρώτη περίπτωση λέμε ὅτι τό $x_n \to \xi$ ἐξ ἀριστερῶν καί στή δεύτερη ὅτι τό $x_n \to \xi$ ἐκ δεξιῶν.

Κατόπιν αὐτῶν λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ ἔχει **ὅριο ἐξ ἀριστερῶν** τό λ, ὅταν γιά κάθε ἀκολουθία x_n ἀπ' τό A μέ $x_n \to \xi^-$ εἶναι $\underset{x_n\to\xi^-}{\text{ορ}} f(x_n) = \lambda$ καί γράφουμε $\underset{x\to\xi^-}{\text{ορ}} f(x) = \lambda$. Ἐντελῶς ἀνάλογα ὁρίζεται καί τό **ὅριο ἐκ δεξιῶν** τῆς $f(x)$ τό μ καί γράφουμε $\underset{x\to\xi^+}{\text{ορ}} f(x) = \mu$. Προφανῶς ὅταν ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x) = k$ τότε εἶναι: $\underset{x\to\xi^-}{\text{ορ}} f(x) = \underset{x\to\xi^+}{\text{ορ}} f(x) = \underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x) = k$. καί ἀντίστροφα, ἄν ὑπάρχουν τά ὅρια ἐκ δεξιῶν καί ἐξ ἀριστερῶν καί συμπίπτουν τότε ἡ $f(x)$ θά ἔχει ὅριο τοῦ x τείνοντος στό ξ.

π.χ. ἡ συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{γιά } x \geq 2 \\ 1 + x & \text{—"—}\ \ x < 2 \end{cases}$

ἔχει $\underset{x\to 2^+}{\text{ορ}} f(x) = -1$, $\underset{x\to 2^-}{\text{ορ}} f(x) = -3$ δηλ. $\underset{x\to 2^-}{\text{ορ}} f(x) \neq \underset{x\to 2^+}{\text{ορ}} f(x)$ ἄρα δέν ὑπάρχει τό $\underset{x\to 2}{\text{ορ}} f(x)$.

Ἀναφέρουμε μερικές ἰδιότητες τοῦ ὁρίου συνάρτησης.

Ἔστω $f(x)$ καί $g(x)$ συναρτήσεις ὡρισμένες στό A, ξ ὁριακός ἀριθμός τοῦ A καί ἔστω ὅτι ὑπάρχουν τά $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$ καί $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} g(x)$ καί εἶναι $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x) = \lambda$, $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} g(x) = \mu$. Τότε:

1. $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lambda \pm \mu = \underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x) \pm \underset{x\to\xi}{\text{ορ}} g(x)$

2. $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lambda\cdot\mu = \underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)\cdot \underset{x\to\xi}{\text{ορ}} g(x)$

3. $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)}{\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} g(x)}$ μέ $\mu\neq 0$.

4. $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\, k\cdot f(x) = k\cdot\lambda = k\cdot\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$

5. Ἄν f, φ, g συναρτήσεις ὡρισμένες στό A, ξ ὁριακός ἀριθμός τοῦ A καί $f(x)\leq\varphi(x)\leq g(x)$ $\forall x\in A$ ὑπάρχουν δέ τά $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$, $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} g(x)$ καί εἶναι λ, τότε θά εἶναι καί $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\varphi(x)=\lambda$.

Παραδείγματα:

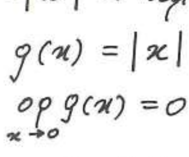
1. Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\,\text{ημ}x = 0$.

Ἀπ' τόν ὁρισμό τοῦ ημx εἶναι $|\text{ημ}x|\leq|x|$ ἐπειδή ἡ χορδή ἔχει μῆκος μικρότερο ἀπ' τό μῆκος τοῦ τόξου. Ἄρα (ἰδ. 4. σελ 118): $-|x|\leq\text{ημ}x\leq|x|$. Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις $f(x)=-|x|$, $g(x)=|x|$ ὡρισμένες στό R. Ὅταν τό $x\to 0$ εἶναι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} f(x)=0$, $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} g(x)=0$. Ἄρα (ἰδιότ. 5.) θά εἶναι καί $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\,\text{ημ}x=0$.

2. Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\,\text{συν}x = 1$.

Ἔχουμε $1-\text{συν}^2x=\text{ημ}^2x$ ἄρα $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(1-\text{συν}^2x)=\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\,\text{ημ}^2x=0$.
Ἀλλά $0\leq 1-\text{συν}x\leq 1-\text{συν}^2x$ καί ἐπειδή $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(1-\text{συν}^2x)=0$ ἕπεται (ἰδ. 5) ὅτι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(1-\text{συν}x)=0$ ἄρα $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\,\text{συν}x=1$.

3. Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=1$ $\forall x\in R-\{0\}$.



Σχ. 17.

Γιά $0<x<\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἐμβ τριγ (OTM) < ἐμβ τομέως (OAM) < ἐμβ τριγ (OAP). δηλ $\frac{1}{2}OA\cdot TM<\frac{1}{2}OA\cdot x<\frac{1}{2}OA\cdot AP$ ἤ $\text{ημ}x<x<\text{εφ}x$ ἤ $1<\dfrac{x}{\text{ημ}x}<\dfrac{1}{\text{συν}x}$ ἄρα $\text{συν}x<\dfrac{\text{ημ}x}{x}<1$ (1). Ἡ (1) ἰσχύει καί γιά τιμές τοῦ x ἀπ' τό διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ἐπειδή $\text{συν}(-x) = \text{συν}\, x$ καί $\frac{\text{ημ}(-x)}{-x} = \frac{-\text{ημ}\, x}{-x} = \frac{\text{ημ}\, x}{x}$. Θεωροῦμε τίς συναρτήσεις: $f(x) = \text{συν}\, x$ καί $g(x) = 1$ τότε $f(x) < \frac{\text{ημ}\, x}{x} < g(x)$. Ὅταν τό $x \to 0$ εἶναι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} f(x) = 1$ καί $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, g(x) = 1$ ἄρα (ἰδ. 5) καί $\underset{x\to 0}{\text{ορ}} \frac{\text{ημ}\, x}{x} = 1$.

Ἔστω $f(x)$ συνάρτηση ὡρισμένη στό διάστημα I καί ξ τυχόν σημεῖο τοῦ I. Τό ξ βεβαίως εἶναι ὁριακός ἀριθμός τοῦ I ἐπειδή σέ κάθε περιοχή τοῦ ξ $\pi(\xi, \varepsilon) \in I$ ὑπάρχουν ἄπειρα στοιχεῖα τοῦ I.

I. Ἡ συνάρτηση $f(x)$ θά λέμε ὅτι εἶναι **συνεχής** στό ξ ὅταν 1) ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$, 2) τό ὅριο αὐτό ἰσοῦται μέ $f(\xi)$. δηλ. $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x) = f(\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\, x) = f(\xi)$. Θά λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι στό σημεῖο ξ **ἀσυνεχής** ὅταν 1) δέν ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$, 2) ὑπάρχει μέν τοῦτο ἀλλά $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x) \neq f(\xi)$. Στή δεύτερη περίπτωση μποροῦμε νά ἄρουμε τήν ἀσυνέχεια, ὁρίζοντας σάν τιμή τῆς συνάρτησης γιά $x = \xi$ τήν τιμή τοῦ $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$. Τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγονται ἐξουδετερόσιμα. Ἄν ὅμως δέν ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$ τότε ἡ ἄρση τῆς ἀσυνέχειας δέν εἶναι δυνατή καί τά σημεῖα ἀσυνέχειας αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγονται μή ἐξουδετερόσιμα.

II. Ἡ συνάρτηση $f(x)$ θά λέμε ὅτι εἶναι **συνεχής** στό ξ ὅταν δοθέντος $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\delta > 0$ ἐξαρτώμενος ἀπ' τόν ε ὥστε γιά $0\ |x - \xi| < \delta$ νά ἔχουμε $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ ὁρίου συνάρτησης οἱ ὁρισμοί I καί II εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὅταν δέν ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}} f(x)$ ἀλλά ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi^-}{\text{ορ}} f(x)$ ἤ τό $\underset{x\to\xi^+}{\text{ορ}} f(x)$ καί εἶναι $\underset{x\to\xi^-}{\text{ορ}} f(x) = f(\xi)$ ἤ $\underset{x\to\xi^+}{\text{ορ}} f(x) = f(\xi)$, ὁρίζεται ἡ **συνέχεια ἐξ ἀριστερῶν** ἤ **ἐκ δεξιῶν** τῆς $f(x)$ εἰς τό ξ.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα I (ἀνοικτό, κλειστό, ἤ ἀνοικτό κατά τό ἕνα ἄκρο) ὅταν εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο τοῦ διαστήματος. Προκειμένου περί τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου ὑποτίθεται φυσικά ἡ ἐκ δεξιῶν συνέχεια καί περί τοῦ δεξιοῦ ἄκρου ἡ ἐξ ἀριστερῶν συνέχεια.

Τό γεγονός ὅτι μία συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό διάστημα I, ἑρμηνεύεται γεωμετρικά, ὅτι ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως f εἶναι μία συνεχής καμπύλη στό διάστημα I.

Ἀναφέρουμε, χωρίς ἀπόδειξη, μερικές ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτ.

1. Ἄν οἱ συναρτήσεις f καί φ εἶναι συνεχεῖς στό σημεῖο $\xi \in I$, ὅπου I τό διάστημα ὁρισμοῦ των τότε καί οἱ συναρτήσεις: $A(x)=f(x)+\varphi(x)$, $\Delta(x)=f(x)-\varphi(x)$, $\Gamma(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ καί $\Pi(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἶναι συνεχεῖς εἰς τό ξ, ἐφ' ὅσον $\varphi(\xi)\neq 0$.

2. Πρόταση τοῦ Weierstrass: Ἄν ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο γ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ γιά τό ὁποῖο $f(x)\leq f(\gamma)=M$ (M τό μέγιστο τῆς $f(x)$ στό $[\alpha,\beta]$) καί τουλάχιστον ἕνα σημεῖο δ γιά τό ὁποῖο $f(x)\geq f(\delta)=m$ (m τό ἐλάχιστο τῆς $f(x)$).

3. Πρόταση τῶν Bolzano-Weierstrass: Ἄν ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί εἶναι $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο γ τοῦ διαστήματος (α,β) γιά τό ὁποῖο εἶναι $f(\gamma)=0$ δηλ. ὑπάρχει μία ρίζα τῆς ἐξίσωσης $f(x)=0$ στό (α,β).

4. Κάθε συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, εἶναι περατωμένη συνάρτηση στό διάστημα αὐτό, δηλ. ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί A, B μέ $A<B$ τέτοιοι ὥστε νά εἶναι $A<f(x)<B$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Ἐπειδή κατά τήν μελέτη τῶν συναρτήσεων χρησιμοποιήσαμε πολλές φορές σχέσεις πού περιεῖχαν ἀπόλυτες τιμές, κρίθηκε σκόπιμο νά ἀναφέρουμε τόν ὁρισμό τους καί ὡρισμένες χαρακτηριστικές τους ἰδιότητες, γιατί ἡ ἐφαρμογή τους στίς συναρτήσεις καί γενικά στά Μαθηματικά εἶναι πολύ μεγάλη.

Ὀνομάζουμε **ἀπόλυτη τιμή** ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x καί τήν συμβολίζουμε μέ $|x|$, τόν ἴδιο τόν x, ἄν αὐτός εἶναι θετικός ἤ μηδέν, τόν ἀντίθετό του, ἄν ὁ x εἶναι ἀρνητικός· δηλ. ἡ ἀπόλυτη τιμή ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε ἕνας θετικός ἀριθμός ἤ μηδέν· Ἀπ' τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι:

$|x| = x$ ἄν $x \geq 0$ καί $|x| = -x$ (θετικός) ἄν $x < 0$.

π.χ $|5| = 5$, $|-2| = -(-2) = 2$, $|0| = 0$.

Ἀπ' τόν ὁρισμό προκύπτουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

1. $\alpha \leq |\alpha| \quad \forall \alpha \in R$

2. $|-\alpha| = |\alpha| \quad \forall \alpha \in R$

3. $|x|^{2\nu} = x^{2\nu}$, $|x|^{2\nu+1} = \begin{cases} x^{2\nu+1} & \text{ἄν } x \geq 0 \\ -x^{2\nu+1} & \text{-}\|\text{- } x < 0 \end{cases} \quad \forall \nu \in N$

4. Ἄν $|x| \leq \varepsilon$ τότε $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$· ἄν $|x| \geq \varepsilon$ τότε $x \geq y$ ἤ $x \leq -y$.

5. $|\alpha| - |\beta| \leq \big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \ \forall \alpha, \beta \in R$.

6. $|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu|$ μέ $\nu \geq 2$

7. $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdots |\alpha_\nu|$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu \in R, \nu \geq 2$

8. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \alpha, \beta \in R$ μέ $\beta \neq 0$

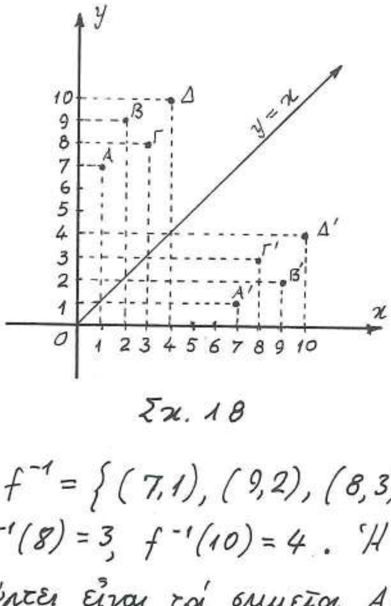
Παράδειγμα.

Ἄν $\alpha < \beta$, τότε ἡ $A \equiv \big||\alpha - x| + |\beta - x|\big|$ διατηρεῖ σταθερή τιμή ὅταν $\alpha < x < \beta$. Πράγματι. Ἐπειδή $\alpha < x < \beta$ ἔχουμε: $\alpha - x < 0$ καί $\beta - x > 0$ δηλ $|\alpha - x| = x - \alpha$ καί $|\beta - x| = \beta - x$, ὁπότε ἡ A γίνεται: $A \equiv |x - \alpha + \beta - x| = |\beta - \alpha| = \beta - \alpha$ ἀνεξάρτητη τοῦ x.

Ἀσκήσεις.

5.1. Θεωροῦμε τή συνάρτηση $f = \{(1,7), (2,9), (3,8), (4,10)\}$ τοῦ $X = \{1,2,3,4\}$ εἰς τό $\Psi = \{7,8,9,10\}$. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη τοῦ X ἐπί τοῦ Ψ καί νά εὑρεθεῖ ἡ ἀντίστροφή της. Νά γίνῃ ἡ γραφική παράσταση τῆς f καθώς καί τῆς ἀντίστροφης αὐτῆς f^{-1}.

Λύση.

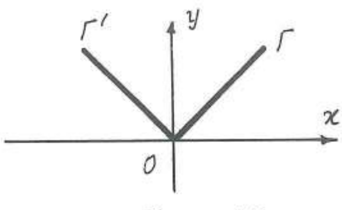


Σχ. 18

Εἶναι $f(1) = 7$, $f(2) = 9$, $f(3) = 8$, $f(4) = 10$ ἢ $f\{1,2,3,4\} = \{7,8,9,10\}$ δηλ. $f[X] = \Psi$ ἤτοι ἡ συνάρτηση f εἶναι συνάρτηση τοῦ X ἐπί τοῦ Ψ. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι τά στοιχεῖα $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ εἶναι διάφορα μεταξύ των ἀνά δύο. Ἑπομένως ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση τοῦ X ἐπί τοῦ Ψ. Ἡ ἀντίστροφή της εἶναι ἡ $f^{-1} = \{(7,1), (9,2), (8,3), (10,4)\}$ δηλ. $f^{-1}(7) = 1$, $f^{-1}(9) = 2$ $f^{-1}(8) = 3$, $f^{-1}(10) = 4$. Ἡ γραφική παράσταση τῆς f ὅπως προκύπτει εἶναι τά σημεῖα A, B, Γ, Δ. καί τῆς f^{-1} τά σημεῖα A', B', Γ', Δ' συμμετρικά τῶν A, B, Γ, Δ ὡς πρός τήν εὐθεία $y = x$. (σχ. 18)

5.2. Δίδεται ἡ συνάρτηση $y = |x|$. Νά εὑρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ καί τό πεδίο τιμῶν της καί νά γίνει ἡ γραφική παράσταση αὐτῆς.

Λύση. Πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι προφανῶς ὁλόκληρος ὁ ἄξο-



Σχ. 19

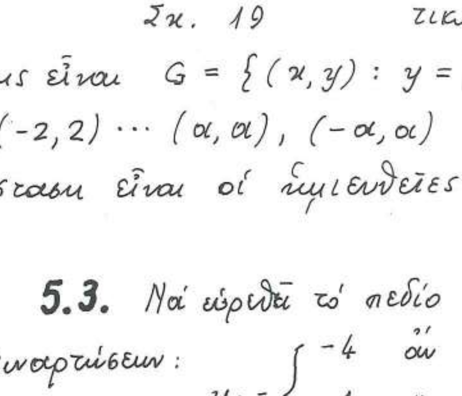
νας τῶν x δηλ. ὁλόκληρο τό R. ἐνῶ πεδίο τιμῶν εἶναι μόνο ὁ θετικός ἡμιάξονας oy δηλ. τό σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν R^+. Τό διάγραμμά της εἶναι $G = \{(x,y) : y = |x|\} = \{(0,0), (1,1), (-1,1), (2,2), (-2,2) \cdots (\alpha,\alpha), (-\alpha,\alpha) \;\; \alpha > 0\}$. δηλ. ἡ γραφική της παράσταση εἶναι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΓ, ΟΓ' (σχ. 19).

5.3. Νά εὑρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ καί τό πεδίο τιμῶν τῶν συναρτήσεων:

$$y_1 = \begin{cases} -4 & \text{ἄν } x < -2 \\ -1 & \text{-''-} \; -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{-''-} \; x > 2 \end{cases} \quad , \quad y_2 = |3x+3|$$

καθώς καί τό διάγραμμά τους.

Λύση



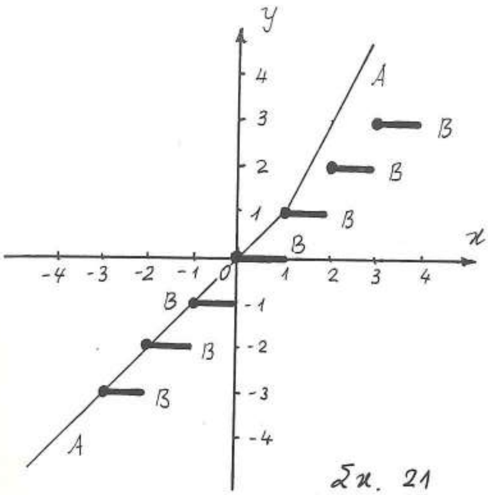
Σχ. 20

Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς y_1 εἶναι ὁλόκληρο τό R καί πεδίο τιμῶν της εἶναι οἱ ἀριθμοί $-4, -1, 3$. Τῆς y_2 πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι ἐπίσης τό R ἐνῶ πεδίο τιμῶν ἐφ' ὅσον ἔχουμε ἀπόλυτο τιμή μόνο ὁ θετικός ἄξονας oy. Οἱ γραφικές τους παραστάσεις εἶναι γιά μέν τήν y_1 ἡ B γιά δέ τήν y_2 οἱ A_1, A_2. Πράγματι ἀπ' τήν y_2 προκύπτει: $y_2 = 3x+3$ ἄν $3x+3 \geq 0$ δηλ. ἄν $x \geq -1$ δηλ. ἡ ἡμιευθεῖα $y_2 = 3x+3$ ἤτοι ἡ IA_2, ἤ $y_2 = -3x-3$ ἄν $3x+3 < 0$ δηλ. ἄν $x < -1$ δηλ. ἡ ἡμιευθεῖα $y_2 = -3x-3$ δηλ. ἡ IA_1 (σχ 20).

5.4. Ὁμοίως νά εὑρεθεῖ πεδίο ὁρισμοῦ καί τιμῶν τῶν:

$y_1 = \begin{cases} x & \text{ἄν } x \le 1 \\ 2x-1 & \text{-״- } x > 1 \end{cases}$ καί $y_2 = [x]$ ὅπου $[x]$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος πού δέν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ x.

Λύση.



Σχ. 21

Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς y_1 εἶναι τό R καί πεδίο τιμῶν της ἐπίσης τό R. Γιά τήν y_2 ἔχομε:

$f(x) = 1$ γιά $1 \le x < 2$

$f(x) = 2$ -״- $2 \le x < 3$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$f(x) = n$ -״- $n \le x < n+1$

ὅπου n ἀκέραιος. Δηλ. πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι ὁλόκληρο τό R ἐνῶ πεδίο τιμῶν εἶναι τό σύνολο τῶν ἀκεραίων. Οἱ γραφικές παραστάσεις εἶναι γιά μέν τήν y_1 ἡ A, γιά δέ τήν y_2 ἡ B (σχ 21).

5.5. Δίδονται οἱ συναρτήσεις: $f_1(x) = 3x+1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = ημ\, 2x$. Νά εὑρεθοῦν οἱ συναρτήσεις: **α')** $f_2 \circ f_1$, **β')** $f_2 \circ f_3$, **γ')** $f_1 \circ f_3$, **δ')** $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ καί $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$, **ε')** $f_3 \circ (f_3 \circ f_3)$, **στ')** $f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$, **ζ')** $f_2 \circ (f_2 \circ f_3)$.

Λύση. α'). Γνωρίζομε ἀπ' τόν ὁρισμό τῶν συνθέτων συναρτήσεων ὅτι: $f_2 \circ f_1 = f_2(f_1(x)) = (3x+1)^2$. Ὁμοίως εὑρίσκομε:

β'). $f_2 \circ f_3 = f_2(f_3(x)) = ημ^2 2x$.

γ'). $f_1 \circ f_3 = f_1(f_3(x)) = 3ημ\, 2x + 1$

δ'). Εἶναι $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = f_3(f_2(f_1(x))) = ημ\, 2(3x+1)^2$ (1), καί $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3(f_2(x)) \circ f_1 = f_{32} \circ f_1$ (θέσαμε $f_3(f_2(x)) = f_{32}$. Εἶναι $f_{32} = ημ\, 2x^2$. Ἄρα $f_{32} \circ f_1 = ημ\, 2(3x+1)^2$ δηλ. ἡ (1).

ε'). Ὁμοίως ἔχουμε $f_3 \circ (f_3 \circ f_3) = ημ\,2\,(ημ\,2\,(ημ\,2x))$.

ϛτ'). $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = 3ημ^2 2x + 1$ καί

ζ'). $f_2 \circ (f_2 \circ f_3) = f_2 \circ (ημ\,2x)^2 = (ημ\,2x)^4 = ημ^4 2x$.

5.6. Ἄν οἱ συναρτήσεις f_1, f_2 ὁρίζονται ἀπ' τίς σχέσεις: $f_1(x) = x^2 - 2|x|$ καί $f_2(x) = x^2+1$, νά εὑρεθεῖ γιά ποιές τιμές τοῦ x θά εἶναι $(f_1 \circ f_2)(x) = 15$.

Λύση. Εἶναι $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = (x^2+1)^2 - 2|x^2+1| =$ $= (x^2+1)^2 - 2(x^2+1)$ (ἐπειδή x^2+1 εἶναι πάντοτε θετική ποσότητα). Δηλ. ἔχουμε νά λύσουμε τήν ἐξίσωση: $(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) = 15$. Θέτουμε $x^2+1 = y > 0$ ὁπότε προκύπτει $y^2 - 2y - 15 = 0$ τῆς ὁποίας οἱ ρίζες εἶναι $y_1 = 5$ καί $y_2 = -3$ (ἀπορρίπτεται ἐπειδή $y > 0$) Συνεπῶς $x^2+1 = 5$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $x = \pm 2$.

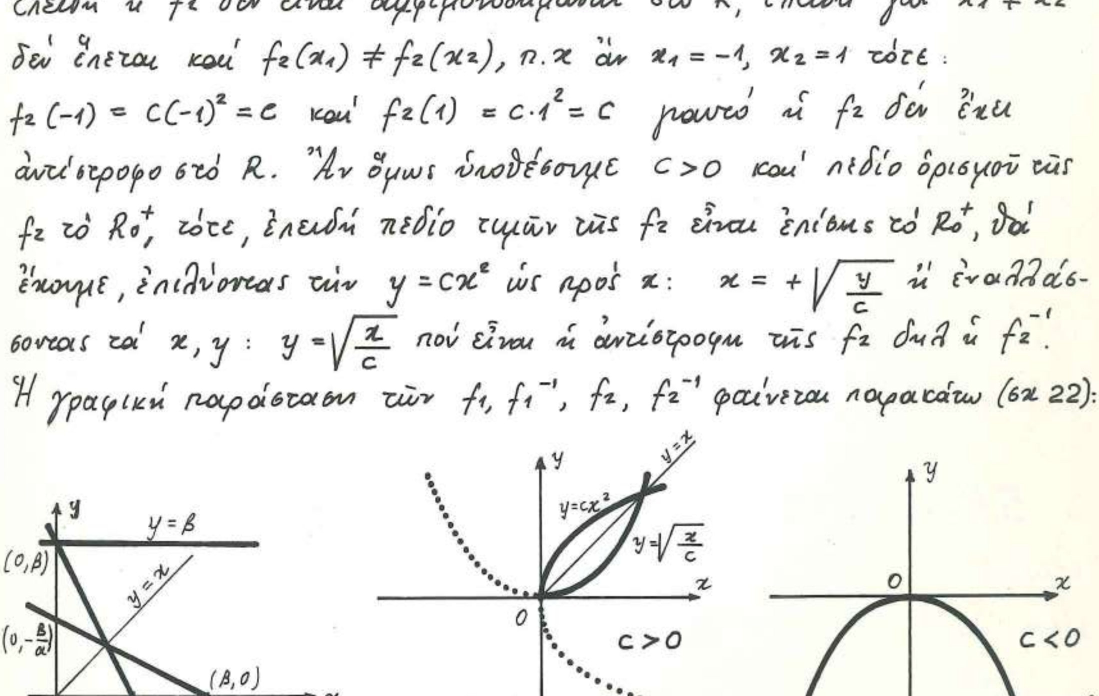
5.7. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις $f_1(x) = αx + β$ καί $f_2(x) = cx^2$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A \subseteq R$ καί πεδίο τιμῶν τό R. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀντίστροφες αὐτῶν καί νά γίνη ἡ γραφική παράσταση ὅλων.

Λύση. Ἡ συνάρτηση f_1 εἶναι μέ $α > 0$ γνησίως αὔξουσα στό R καί μέ $α < 0$ γνησίως φθίνουσα (πεδίο ὁρισμοῦ της τό R). Πράγματι· ἄν $x_1 < x_2$ τότε $αx_1 < αx_2$ ἤ $αx_1 + β < αx_2 + β$ ἤ $f_1(x_1) < f_1(x_2)$ δηλ f_1 γνησίως αὔξουσα, μέ $α > 0$. Ἀνάλογα ἀποδεικνύεται ὅτι f_1 εἶναι γνησίως φθίνουσα ἄν $α < 0$. Ἐπειδή ἡ f_1 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη καί ἐπί τοῦ R (ἐφ' ὅσον γιά $x_1 \neq x_2$ προκύπτει $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$), ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφη αὐτῆς f_1^{-1}

μέ τύπο $f_1^{-1}(x) = \dfrac{x-\beta}{\alpha}$. (προκύπτει ἀπ' τήν $y = \alpha x + \beta$ ἄν λυθεῖ ὡς πρός x, καί γίνει ἐναλλαγή τῶν x, y). Γιά $\alpha = 0$ ἡ f_1 εἶναι σταθερή (εὐθεῖα παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν x).

Ἡ f_2 ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό R. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν $x_1 < x_2$ μέ $x_1, x_2 \in R$ τότε $cx_1^2 \gtreqless cx_2^2$ δηλ δέν μποροῦμε νά ἀποφανθοῦμε γιά τήν μονοτονία αὐτῆς. Ἄν ὅμως περιορισθοῦμε στό $R^- \cup \{0\} = R_0^-$ ἤ στό $R^+\{0\} = R_0^+$ τότε: 1) μέ $c > 0$ Παρατηροῦμε ὅτι ἄν $x_1 < x_2 \leq 0$ τότε $x_1^2 > x_2^2$ ἤ $cx_1^2 > cx_2^2$ καί $f_2(x_1) > f_2(x_2)$ δηλ ἡ f_2 εἶναι γνησίως φθίνουσα στό R_0^-. Ἄν δέ $0 \leq x_1 < x_2$ τότε $x_1^2 < x_2^2$ ἤ $cx_1^2 < cx_2^2$ ἤ $f_2(x_1) < f_2(x_2)$ δηλ ἡ f_2 γνησίως φθίνουσα στό R_0^+. 2) μέ $c < 0$ βρίσκουμε ὅτι f_2 γνησίως αὔξουσα στό R_0^- καί f_2 γνησίως φθίνουσα στό R_0^+.

Ἐπειδή ἡ f_2 δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη στό R, ἐπειδή γιά $x_1 \neq x_2$ δέν ἕπεται καί $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$, π.χ ἄν $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ τότε: $f_2(-1) = c(-1)^2 = c$ καί $f_2(1) = c \cdot 1^2 = c$ φανερό ἡ f_2 δέν ἔχει ἀντίστροφο στό R. Ἄν ὅμως ὑποθέσουμε $c > 0$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 τό R_0^+, τότε, ἐπειδή πεδίο τιμῶν τῆς f_2 εἶναι ἐπίσης τό R_0^+, θά ἔχουμε, ἐπιλύοντας τήν $y = cx^2$ ὡς πρός x: $x = +\sqrt{\dfrac{y}{c}}$ ἤ ἐναλλάσσοντας τά x, y: $y = \sqrt{\dfrac{x}{c}}$ πού εἶναι ἡ ἀντίστροφη τῆς f_2 δηλ ἡ f_2^{-1}.
Ἡ γραφική παράσταση τῶν $f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}$ φαίνεται παρακάτω (σχ 22):



Σχ.22

5.8. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi(x) = x^3$ εἶναι γνησίως αὔξουσα καί ἡ $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ εἶναι γνησίως φθίνουσα γιά $x>0$ ἤ $x<0$.

Λύση. $\varphi(x)$: Ἔστω $x_1, x_2 \in R$ μέ $x_1 < x_2$ δηλ. $x_1 - x_2 < 0$.
Τότε $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) =$
$= (x_1 - x_2) \cdot \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 x_2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\left[x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2\right] < 0$
ἐπειδή $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$ καί $x_1 - x_2 < 0$. Ἄρα $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ δηλ. ἡ $\varphi(x)$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.

$\sigma(x)$: Γιά $0 < x_1 < x_2$ καθώς καί γιά $x_1 < x_2 < 0$ (1) εἶναι
$\sigma(x_1) - \sigma(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$. Ἀλλά $x_2 - x_1 > 0$ καί $x_1 x_2 > 0$ ὅπως προκύπτει ἀπ' τήν (1). Δηλ. $\sigma(x_1) > \sigma(x_2)$ ἄρα $\sigma(x)$ γν. φθίνουσα.

5.9. Νά προσδιορισθεῖ ἄν οἱ συναρτήσεις: $f_1(x) = 5x^8 + 1$, $f_2(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ καί $f_3(x) = 5x^3 - 7x$ εἶναι ἄρτιες ἤ περιττές.

Λύση. Ὡς γνωστό μία συνάρτηση $f(x)$ εἶναι ἄρτια ἄν $f(-x) = f(x)$ καί περιττή ἄν $f(-x) = -f(x)$. Εἶναι:
$f_1(-x) = 5(-x)^8 + 1 = 5x^8 + 1 = f_1(x)$. Ἄρα $f_1(x)$ ἄρτια,
$f_2(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = -f_2(x)$ περιττή,
$f_3(-x) = 5(-x)^3 - 7(-x) = -5x^3 + 7x = -(5x^3 - 7x) = -f_3(x)$ περιττή.

5.10. Νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν f εἶναι περιοδική συνάρτηση μέ περίοδο p, τότε ἡ συνάρτηση g ὅπου $g(x) = f(\beta x)$ μέ $\beta > 0$ εἶναι ἐπίσης περιοδική μέ περίοδο $\frac{p}{\beta}$ δηλ. $g(x) = g\left(x + \frac{p}{\beta}\right)$.

Λύση. Εἶναι $g(x) = f(\beta x) = f(\beta x + p)$ (ἐπειδή ἡ f εἶναι περιοδική μέ περίοδο p, ὅπου ὅμως ἐδῶ ἡ μεταβλητή εἶναι βx) =

$= f\left(\beta\left(x + \frac{p}{\beta}\right)\right) = g\left(x + \frac{p}{\beta}\right)$ (ἐπειδή $g(x) = f(\beta x)$ ὅπου ὅμως σάν μεταβλητή λαμβάνεται ἡ $\left(x + \frac{p}{\beta}\right)$). Ἄρα $g(x) = g\left(x + \frac{p}{\beta}\right)$ δηλ. ἡ $g(x)$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο $\frac{p}{\beta}$.

5.11. Δίδεται ἡ συνάρτηση f μέ τύπο $f(x) = \alpha \cdot \beta^{\gamma x}$. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση g, ὅπου $g(x) = \log_\beta f(x)$, εἶναι γραμμική συνάρτηση.

Λύση. Ἄν στή $g(x) = \log_\beta f(x)$ ἀντικαταστήσουμε τήν $f(x)$ θά ἔχουμε: $g(x) = \log_\beta\left(\alpha \cdot \beta^{\gamma x}\right)$ Καί ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων: $\log_\alpha(x \cdot y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$, θά ἔχουμε: $g(x) = \log_\beta \alpha + \log_\beta \beta^{\gamma x}$. Ἄν τώρα ἐφαρμόσουμε τήν ἰδιότητα: $\log_\alpha x^\nu = \nu \log_\alpha x$, θά ἔχουμε ἀκόμη $g(x) = \log_\beta \alpha + \gamma x \log_\beta \beta$. Ἀλλά $\log_\beta \beta = 1$ ἄρα $g(x) = \log_\beta \alpha + \gamma x = \gamma x + \delta$ ὅπου $\delta = \log_\beta \alpha$, δηλ. γραμμική.

5.12. Νά δειχθοῦν στίς ὑπερβολικές συναρτήσεις οἱ παρακάτω ταυτότητες: **α')** $sh 2x = 2 sh x \cdot ch x$,

β') $sh A + sh B = 2 sh \frac{A+B}{2} ch \frac{A-B}{2}$,

γ') $th x + th y = \frac{sh(x+y)}{ch x \cdot ch y}$.

Λύση. α'). Ἄν ἀναπτύξουμε τό 2° μέλος τῆς (α) ἔχουμε:

$$2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = sh 2x$$

β'). Ὁμοίως ἄν ἀναπτύξουμε τό 2° μέλος τῆς (β) ἔχουμε:

$$2 \cdot \frac{e^{\frac{A+B}{2}} - e^{-\frac{A+B}{2}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{A-B}{2}} + e^{-\frac{A-B}{2}}}{2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}} - e^{-\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}} + e^{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}} - e^{-\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}}{2} =$$

$$= \frac{e^{A}-e^{-B}+e^{B}-e^{-A}}{2} = \frac{e^{A}-e^{-A}}{2} + \frac{e^{B}-e^{-B}}{2} = shA + shB$$

γ'). Τώρα ξεκινώντας ἀπ' τό 1° μέλος τῆς (γ) ἔχουμε:

$$thx + thy = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} + \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} =$$

$$= \frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-(x+y)}}{(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})} =$$

$$= \frac{2\left(e^{x+y}-e^{-(x+y)}\right)}{(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})}.$$ Ἄν διαιρέσουμε ἀριθμητή καί παρονομαστή διά 4 προκύπτει

$$\frac{\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}} = \frac{sh(x+y)}{chx\cdot chy}.$$

5.13. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ ἀκολουθίες μέ τύπους:

α') $\alpha_\nu = \frac{\nu+3}{\nu+1}$, **β')** $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 \eta\mu 4\nu}{\nu^3+2}$ εἶναι φραγμένες.

Λύση. α'). Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει $\vartheta \in R$ ὥστε νά ἰσχύει $|\alpha_\nu| \le \vartheta$ $\forall \nu \in N$. Παρατηροῦμε ὅτι:

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{\nu+3}{\nu+1}\right| = \frac{\nu+3}{\nu+1} = \frac{(\nu+1)+2}{\nu+1} = 1 + \frac{2}{\nu+1} \leqslant 1 + \frac{2}{1+1} = 2$$

$\forall \nu \in N$. Ἑπομένως ὑπάρχει ὁ $\vartheta = 2 \in R$ ὥστε νά εἶναι:

$|\alpha_\nu| \le 2$ $\forall \nu \in N$. Ἄρα ἡ α_ν εἶναι φραγμένη.

β'). Ὁμοίως εἶναι $|\alpha_\nu| = \left|\frac{\nu^2 \eta\mu 4\nu}{\nu^3+2}\right| = \frac{\nu^2|\eta\mu 4\nu|}{\nu^3+2} \leqslant$

$\leqslant \frac{\nu^2\cdot 1}{\nu^3+2} \leqslant \frac{\nu^2}{\nu^2} = 1$ $\forall \nu \in N$ (ἐπειδή ὡς γνωστόν $|\eta\mu 4\nu| \le 1$ γιά κάθε $\nu \in N$). Ἄρα ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.

5.14. Νά ἐξεταστεῖ ἄν ἡ ἀκολουθία $a_\nu = \dfrac{\nu^2+1}{3\nu + \eta\mu^3\nu}$ εἶναι φραγμένη.

Λύση. Γιά νά ἐξετάσουμε ἄν ἡ a_ν εἶναι φραγμένη, ἀρκεῖ νά ἐξετάσουμε ἄν ὑπάρχει ἀριθμός $\vartheta \geq 0$ ὥστε νά ἰσχύει $|a_\nu| \leq \vartheta$, $\forall \nu \in N$. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ὁ ϑ καί ἰσχύει $|a_\nu| \leq \vartheta$. ἤτοι $\left|\dfrac{\nu^2+1}{3\nu+\eta\mu^3\nu}\right| \leq \vartheta$ ἤ $\nu^2+1 \leq \vartheta\,|3\nu+\eta\mu^3\nu|$ ἤ $\nu^2+1 \leq \vartheta\left(|3\nu| + |\eta\mu^3\nu|\right)$ (ἰδ 6. ἀπολύτων τιμῶν) ἤ ἀκόμη $\nu^2 \leq \vartheta(3\nu+1)$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\nu^2 - 3\vartheta\nu \leq \vartheta$ ἤ $\nu^2 - 3\vartheta\nu + \dfrac{9\vartheta^2}{4} \leq \vartheta + \dfrac{9\vartheta^2}{4}$ ἤ $\left(\nu - \dfrac{3\vartheta}{2}\right)^2 \leq \dfrac{9\vartheta^2}{4} + \vartheta$ ἤ $\nu - \dfrac{3\vartheta}{2} \leq \sqrt{\dfrac{9\vartheta^2}{4}+\vartheta}$ = σταθερό. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο γιατί γιά ὁποιονδήποτε πραγματικό ἀριθμό, ἄρα καί γιά τόν $\sqrt{\dfrac{9\vartheta^2}{4}+\vartheta}$ ὑπάρχει φυσικός μεγαλύτερός του (Ἀξίωμα Εὐδόξου).

5.15. Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία a_ν, μέ $a_{\nu+1} = \dfrac{3a_\nu+5}{4}$ καί $a_1 = 1$. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ a_ν εἶναι φραγμένη καί ἔχει σάν ἕνα ἄνω φράγμα τόν ἀριθμό 6.

Λύση. Ἔχουμε $a_1 = 1 \leq 6$ Ἔστω ὅτι ἰσχύει $|a_\kappa| \leq 6$. Θά δείξουμε ὅτι καί $|a_{\kappa+1}| \leq 6$ ὁπότε θά ἰσχύει γιά $\forall \nu \in N$ (ἀρχή τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς). Πράγματι εἶναι:
$|a_{\kappa+1}| = \left|\dfrac{3a_\kappa+5}{4}\right| \leq \dfrac{3|a_\kappa|+5}{4} \leq \dfrac{3\cdot 6+5}{4} = \dfrac{23}{4} < 6$ Ἄρα ἡ a_ν εἶναι φραγμένη μ' ἕνα ἀνώτερο φράγμα τόν 6.

5.16. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $a_\nu = \dfrac{\nu}{(\nu+1)^2}$ εἶναι μηδενική, μέ ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ.

Λύση. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\forall \varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε $|\alpha_\nu| < \varepsilon$ γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$. Ἔστω $\varepsilon > 0$. Θά δείξουμε ὅτι ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ ὥστε νά ἰσχύει: $\left|\dfrac{\nu}{(\nu+1)^2}\right| < \varepsilon$. Εἶναι ὅμως $\left|\dfrac{\nu}{(\nu+1)^2}\right| < \varepsilon$ ἤ $\dfrac{\nu}{(\nu+1)^2} < \varepsilon$ ἤ ἀντιστρέφοντας τούς ὅρους: $\dfrac{(\nu+1)^2}{\nu} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ἤ $\dfrac{\nu^2+2\nu+1}{\nu} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Ἄν τώρα βροῦμε ἕνα $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ γιά τό ὁποῖο νά ἰσχύει: $\dfrac{\nu^2+2\nu}{\nu} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (1), τότε θά ἰσχύει καί ἡ ἀρχική, ἀφοῦ προφανῶς εἶναι $\dfrac{\nu^2+2\nu+1}{\nu} > \dfrac{\nu^2+2\nu}{\nu} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Ἀπ' τήν (1) προκύπτει $\nu+2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ἤ $\nu > \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$. Ἑπομένως ἄν λάβουμε ὡς $\nu_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$ (ἐφ' ὅσον $\dfrac{1}{\varepsilon} - 2 > 0$), τότε γιά $\forall \nu \geq \nu_0$ θά εἶναι $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, ἐπειδή ὅλες οἱ πράξεις εἶναι ἀντιστρεπτές. ἄρα ἡ ἀκολουθία α_ν εἶναι μηδενική.

5.17. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{3\nu^2+2} - \sqrt{3\nu^2+1}$ εἶναι μηδενική.

Λύση. Ἔχουμε $|\alpha_\nu| = \left|\sqrt{3\nu^2+2} - \sqrt{3\nu^2+1}\right| =$ (πολλαπλασιάζουμε καί διαιροῦμε μέ τήν συζυγῆ παράστασή της)

$$= \left|\frac{\left(\sqrt{3\nu^2+2} - \sqrt{3\nu^2+1}\right)\left(\sqrt{3\nu^2+2} + \sqrt{3\nu^2+1}\right)}{\sqrt{3\nu^2+2} + \sqrt{3\nu^2+1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sqrt{(3\nu^2+2)^2} - \sqrt{(3\nu^2+1)^2}}{\sqrt{3\nu^2+2} + \sqrt{3\nu^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3\nu^2+2} + \sqrt{3\nu^2+1}} <$$

$< \dfrac{1}{\sqrt{3\nu^2+1}} < \dfrac{1}{\nu}$. Καί ἐπειδή ἡ ἀκολουθία $\dfrac{1}{\nu}$ εἶναι μηδενική ὅπως ἀποδεικνύεται πολύ εὔκολα, προκύπτει ὅτι καί ἡ α_ν θά εἶναι μηδενική. (ἰδ. 8. μηδενικῶν ἀκολουθιῶν).

5.18. Ἄν λάβομε σάν δεδομένο ὅτι $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=e$ νά εὑρεθοῦν τά **α')** $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{\nu}$; **β')** $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$; **γ')** $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu}$; **δ')** $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu+5}\right)^{\nu+3}$, **ε')** $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{5\nu}$.

Λύση. α'). Θέτομε $2\nu=\mu$ ὁπότε $\nu=\frac{\mu}{2}$ ἄρα
$\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{\nu}=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu/2}=\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{1/2}$ ὁπότε ὅταν $\nu\to\infty$ καί τό $\mu\to\infty$ καί $\underset{\mu\to\infty}{\text{op}}\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{1/2}=e^{1/2}=\sqrt{e}$.

β'). Εἶναι $\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\nu}=\frac{1}{\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu}}=$
$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)}$. Ἐπειδή $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}=e$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)=1$ θά εἶναι $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)}\right]=\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}}\cdot\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{e}$.

γ'). Εἶναι $\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu}=\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\right]^{\nu}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$
καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu}=\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=e\cdot\frac{1}{e}=1$.

δ') Θέτομε $\nu+5=\mu$ ὁπότε $\nu=\mu-5$. Ὅταν τό $\nu\to\infty$ καί τό $\mu\to\infty$ ὁπότε $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu+5}\right)^{\nu+3}=\underset{\mu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-2}=\underset{\mu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\underset{\mu\to\infty}{\text{op}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{2}}=e\cdot\frac{1}{1}=e$.

ε'). Θέτομε $\nu+1=\mu$ ὁπότε $\nu=\mu-1$. Ὅταν τό $\nu\to\infty$ καί τό $\mu\to\infty$ ὁπότε $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{5\nu}=\underset{\mu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{5\mu}\cdot\underset{\mu\to\infty}{\text{op}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-5}=e^{5}\cdot1=e^{5}$.

5.19. Νά λυθεί ή ανισότητα $\left| \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2+3}{2\nu^2-1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση. Έχουμε $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2+3}{2\nu^2-1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^2\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)}{\nu^2\left(2-\frac{1}{\nu^2}\right)} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1+\frac{3}{\nu^2}}{2-\frac{1}{\nu^2}} = \frac{1}{2}$.

δηλ θά έχουμε νά λύσουμε τήν ανισότητα:

$\left|\frac{1}{2}+x\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή τήν ισοδύναμή της (ίδ 4. απολ. τιμών):

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}+x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$.

5.20. Νά δειχθεί ότι οί ακολουθίες **α')** $a_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}$, **β')** $a_\nu = \frac{x^\nu}{\nu^\nu}$ $(x\in R)$, **γ')** $a_\nu = \frac{x^\nu}{\nu!}$ $(x\in R)$ είναι μηδενικές όπου $\nu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu$ καί διαβάζεται ν παραγοντικόν.

Λύση. α'). Ό γενικός όρος τής ακολουθίας γράφεται: $a_\nu = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{2}{\nu}\cdot\frac{3}{\nu}\cdots\frac{\nu}{\nu}$ $\forall \nu\in N$. Παρατηρούμε ότι γιά κάθε $\nu\in N$ μέ $\nu\geq 3$ είναι $\frac{3}{\nu}\cdot\frac{4}{\nu}\cdots\frac{\nu}{\nu}\leq 1$ επομένως γιά τόν a_ν θά ισχύει: $0<a_\nu\leq \frac{1}{\nu}\cdot\frac{2}{\nu}\cdot 1 = \frac{2}{\nu^2}$ $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geq 3$. Ή ακολουθία όμως $\frac{2}{\nu^2}$ είναι μηδενική όπως προκύπτει εύκολα. Άρα καί ή a_ν θά είναι μηδενική (ίδ. 8. μηδ. ακολουθιών).

β'). Θεωρούμε φυσικό αριθμό ν_0 μέ $\nu_0 > 2|x|$. Τότε γιά κάθε $\nu\in N$ μέ $\nu\geq\nu_0$ θά έχουμε $\nu > 2|x|$ ή $\frac{|x|}{\nu}<\frac{1}{2}$ οπότε $|a_\nu| = \left(\frac{|x|}{\nu}\right)^\nu < \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$ $\forall\nu\in N$ μέ $\nu\geq\nu_0$ Έπειδή όμως $\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2^\nu}=0$ προκύπτει ότι καί $\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{x^\nu}{\nu^\nu}\right)=0$ (ίδ. 8 μηδ. ακολ).

γ'). Θεωρούμε φυσικό αριθμό ν_0 μέ $\nu_0 > 2|x|$. (1). Τότε γιά κάθε $\nu\in N$ μέ $\nu>\nu_0$ θά έχουμε $\nu > 2|x|$ καί άρα $\frac{|x|}{\nu}<\frac{1}{2}$ επομένως $\forall\nu\in N$ μέ $\nu>\nu_0$ θά έχουμε καί :

$$|\alpha_\nu| = \frac{|x|^{\nu_0}}{1\cdot 2\cdots \nu_0}\cdot\frac{|x|}{\nu_0+1}\cdot\frac{|x|}{\nu_0+2}\cdots\frac{|x|}{\nu} <$$

$$< \frac{|x|^{\nu_0}}{1\cdot 2\cdots \nu_0}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{\nu-\nu_0 \text{ φορές}} = \frac{|x|^{\nu_0}}{1\cdot 2\cdots \nu_0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\nu_0}$$ ὅπως προ-

κύπτει ἀπ' τήν (1). Ἀλλά ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-\nu_0}$ εἶναι μηδενική, ἄρα θά εἶναι καί ἡ α_ν μηδενική (ἰδ. 6 μηδεν. ἀκολουθιῶν).

5.21. Νά προσδιορισθεῖ ὁ k ἔτσι ὥστε οἱ ἀριθμοί:
α') $3k,\ k+4,\ k-1$ νά ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο, οἱ
β') $1+k,\ 3+k,\ 9+k$ -״- -״- ἁρμονική -״- , καί οἱ
γ') $k-2,\ 2k,\ 7k+4$ -״- -״- γεωμετρική -״- .

Λύση. α'). Γιά νά σχηματίζουν οἱ ἀριθμοί $3k, k+4, k-1$ ἀριθμητική πρόοδο πρέπει (ἰδ. iii ἀριθμ. πρ.) νά εἶναι:
$2(k+4) = 3k+(k-1)$ ἤ $2k+8=4k-1$ ἤ $2k=9$ καί $k=\frac{9}{2}$

β'). Ὁμοίως γιά νά σχηματίζουν οἱ $1+k, 3+k, 9+k$ ἁρμονική πρόοδο πρέπει (ἰδ. ii' ἁρμ. πρ) νά εἶναι: $\frac{2}{3+k}=\frac{1}{1+k}+\frac{1}{9+k}$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $18+20k+2k^2 = 27+12k+k^2+3+4k+k^2$ ἤ $4k=12$ καί $k=3$

γ') Ἀνάλογα σκεπτόμενοι βρίσκουμε ὅτι γιά νά ἀποτελοῦν οἱ $k-2, 2k, 9k+4$ γεωμετρική πρόοδο πρέπει (ἰδ. iii'' γεωμ. προόδων): $(2k)^2=(k-2)(7k+4)$ ἤ $3k^2-10k-8=0$ καί $k_1=4$, $k_2=-\frac{2}{3}$ δηλ. ἔχουμε δύο γεωμ. προόδους.

5.22. Νά εὑρεθεῖ ὁ πρῶτος ὅρος καί ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου ὅταν ξέρουμε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της γιά κάθε τιμή τοῦ ν ἰσοῦται πρός $3\nu^2+\nu$.

Λύση. Ἂν α_1 εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος καί ω ὁ λόγος τῆς ἀριθ. πρ. τότε ὁ τύπος $\Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\nu}{2}$ (ἰδ. iv ἀρ. πρ) γίνεται ἕνεκα τοῦ τύπου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ (ἰδ. i ἀρ. πρ.): $\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2}$.
Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της γιά κάθε τιμή τοῦ ν εἶναι $3\nu^2+\nu$ θά ἔχουμε: $\frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2} \equiv 3\nu^2+\nu$ ἤ $2\alpha_1+(\nu-1)\omega \equiv 6\nu+2$ ἤ διατάσσοντας τά δύο αὐτά ἐκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ ν: $\nu\omega + (2\alpha_1-\omega) \equiv 6\nu+2$. ὁπότε ἐξισώνοντας τούς συντελεστές τῶν ὁμοιοβάθμιων ὅρων ἔχουμε $\omega = 6$ καί $2\alpha_1-\omega = 2$ ἤ $\alpha_1 = 4$.
Ἄρα ἡ ἀριθμητική πρόοδος εἶναι $4, 10, 16, 22, \cdots$

5.23. Πόσους ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους ὅρους πρέπει νά παρεμβάλουμε μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 1 καί 19 ὥστε ὁ δεύτερος ἐνδιάμεσος πρός τόν τελευταῖο ἐνδιάμεσο νά ἔχουν λόγο $\frac{1}{6}$.

Λύση. Ἔστω ὅτι πρέπει νά παρεμβάλουμε x ἀριθμ. ἐνδιαμέσους ὅρους. Ἀπ' τόν τύπο παρεμβολῆς (ἰδ. v ἀρ. πρ). ἔχουμε:
$\omega = \frac{19-1}{x+1} = \frac{18}{x+1}$ Ἄρα ἡ ἀρ. πρόοδος θά εἶναι:
$1,\ 1+\frac{18}{x+1},\ 1+2\cdot\frac{18}{x+1},\ \cdots,\ 1+x\cdot\frac{18}{x+1},\ 19.$
Ἀπ' τό πρόβλημα θά ἔχουμε τώρα τήν ἐξίσωση:

$$\frac{1+2\cdot\frac{18}{x+1}}{1+x\cdot\frac{18}{x+1}} = \frac{1}{6} \quad \text{ἤ} \quad (x+37)6 = 19x+1 \quad \text{καί} \quad x = 17.$$

5.24. Ἂν οἱ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ διάφοροι μεταξύ των ἀνά δύο ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:
$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu = (\nu-1)\alpha_1\alpha_\nu.$

Λύση. Ἐπειδή οἱ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο προκύπτει ὅτι οἱ $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο μέ λόγο $\omega \neq 0$. Τότε θά ἔχουμε: $\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \omega$, $\frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_2} + \omega, \ \ldots, \ \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_{\nu-1}} + \omega = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu-1)\omega$. ἤ

$\alpha_1\alpha_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega}$, $\alpha_2\alpha_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\omega}$, $\cdots$, $\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu = \frac{\alpha_{\nu-1} - \alpha_\nu}{\omega}$ καί $(\nu-1)\alpha_1\alpha_\nu = \frac{\alpha_1 - \alpha_\nu}{\omega}$. Προσθέτοντας τίς σχέσεις αὐτές κατά μέλη (ἐκτός τῆς τελευταίας) εὑρίσκουμε:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu = \frac{\alpha_1 - \alpha_\nu}{\omega} = (\nu-1)\alpha_1\alpha_\nu.$$

5.25. Νά παρεμβληθοῦν 19 ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 2 καί 3

Λύση. Ἄν $x_1, x_2, \cdots, x_{19}$ εἶναι οἱ ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν 2 καί 3, τότε οἱ $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_{19}}$ θά εἶναι οἱ 19 ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν $\frac{1}{2}$ καί $\frac{1}{3}$. Ἀπ' τόν τύπο παρεμβολῆς (ἰδ. ν ἀρ. πρ) προκύπτει ὁ λόγος ω τῆς ἀρ. πρ.: $\omega = \frac{1/3 - 1/2}{19+1} = -\frac{1}{120}$. Ἑπομένως οἱ ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι τῶν $\frac{1}{2}$ καί $\frac{1}{3}$ εἶναι $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{120} = \frac{59}{120}$, $\frac{1}{x_2} = \frac{58}{120}, \ldots$ ὁπότε οἱ ζητούμενοι ἁρμονικοί εἶναι οἱ ἀντίστροφοί των, ἤτοι:

$x_1 = \frac{120}{59}$, $x_2 = \frac{120}{58}$, $\cdots$, $x_{19} = \frac{120}{41}$

5.26. Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο τότε **α')** οἱ γ-β, γ-α, γ ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο καί
β') οἱ βγ, γα, αβ -״- ἀριθμητική -״- .

Λύση. α'). Ὡς γνωστό ἔχουμε $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ (ἰδ. ii' ἀφ.γρ). ἤ $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$. Τώρα ἔχουμε $\gamma - \beta = \gamma - \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma} = \frac{\gamma^2 - \alpha\gamma}{\alpha+\gamma} =$ $= \frac{\gamma(\gamma-\alpha)}{\alpha+\gamma}$. Ὁπότε $\frac{1}{\gamma-\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha+\gamma}{\gamma(\gamma-\alpha)} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2\gamma}{\gamma(\gamma-\alpha)} = \frac{2}{\gamma-\alpha}$

Ἀπ' τήν τελευταία σχέση προκύπτει ὅτι οἱ ἀριθμοί $\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma$ ἀποτελοῦν ἐπίσης ἁρμονική πρόοδο.

β'). Πάλι ἀπ' τήν ὑπόθεση ἔχουμε $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\gamma+\alpha}$. Παίρνουμε τό ἄθροισμα: $\beta\gamma + \alpha\beta = \beta(\gamma+\alpha) = \frac{2\alpha\gamma}{\gamma+\alpha}\cdot(\gamma+\alpha) = 2\alpha\gamma$. πού σημαίνει ὅτι οἱ $\beta\gamma,\ \alpha\gamma,\ \alpha\beta$ ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδο.

5.27. Νά ὁρισθεῖ γεωμετρική πρόοδος τῆς ὁποίας ὁ 5ος ὅρος ὑπερβαίνει τόν 3ο κατά 225 καί τόν 4ο κατά 125.

Λύση. Ἡ γεωμετρική πρόοδος θά εἶναι τῆς μορφῆς: $\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3,\ \alpha\omega^4, \dots$ Ἔχουμε: 5ος − 3ος: $\alpha\omega^4 - \alpha\omega^2 = 225$ καί 5ος − 4ος: $\alpha\omega^4 - \alpha\omega^3 = 125$ Δηλ. $\alpha\omega^2(\omega^2-1) = 225$ καί $\alpha\omega^3(\omega-1) = 125$ καί διά διαιρέσεως κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{\alpha\omega^2(\omega^2-1)}{\alpha\omega^3(\omega-1)} = \frac{225}{125} \text{ ἤ } \frac{(\omega+1)(\omega-1)}{\omega(\omega-1)} = \frac{9}{5} \text{ ἤ } \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{9}{5}$$

ὁπότε $\omega = \frac{5}{4}$ καί ἡ $\alpha\omega^3(\omega-1) = 125$ γίνεται $\alpha\left(\frac{5}{4}\right)^3\left(\frac{5}{4}-1\right) = 125$ ἤ $\alpha\,\frac{125}{64}\cdot\frac{1}{4} = 125$ καί $\alpha = 256$.

5.28. Τό ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ὅρων φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 65, τό δέ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της 81. Νά εὑρεθεῖ ἡ πρόοδος.

Λύση. Ἡ γεωμ. πρόοδος θά εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2, \dots$

μέ α πρῶτο ὅρο καί $\omega<1$ τό λόγο. Κατά τό πρόβλημα θά ἔχουμε $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3=65$ (1) καί $\Sigma=\dfrac{\alpha}{1-\omega}=81$. (2)
Ἡ (1) γράφεται $\alpha(\omega^3+\omega^2+\omega+1)=65$ ἤ ἀκόμη:
$\dfrac{\alpha(\omega^4-1)}{\omega-1}=65$ (ἀξιοσημείωτα πηλίκα). Ἡ (2) γράφεται $\dfrac{\alpha}{\omega-1}=-81$ ὁπότε διά διαιρέσεως κατά μέλη προκύπτει $\omega^4-1=-\dfrac{65}{81}$ ἤ $\omega^4=1-\dfrac{65}{81}=\dfrac{16}{81}$ καί $\omega=\pm\dfrac{2}{3}$. Γιά $\omega=\dfrac{2}{3}$ ἀπ' τή (2) βρίσκουμε $\alpha=27$ καί ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶναι 27, 18, 12, 8, ⋯
Γιά $\omega=-\dfrac{2}{3}$ ἀπ' τή (2) πάλι, βρίσκουμε $\alpha=135$ καί ἡ πρόοδος εἶναι 135, −90, 60, −40, ⋯

5.29. Ἄν Σ_ν, $\Sigma_{2\nu}$, $\Sigma_{3\nu}$ εἶναι τά ἀθροίσματα τῶν ν, 2ν, 3ν ἐξ ἀρχῆς ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, νά εὑρεθεῖ **α')** σχέση μεταξύ τῶν Σ_ν, $\Sigma_{2\nu}$, $\Sigma_{3\nu}$ **β')** παρόμοια σχέση ἄν τά ἀθροίσματα εἶναι γεωμετρικῆς προόδου.

Λύση. α'). Ἄν α ὁ πρῶτος ὅρος καί ω ὁ λόγος τῆς ἀρ. πρ. ἔχουμε:

$$\Sigma_\nu=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu \quad \text{ἤ} \quad \frac{2\Sigma_\nu}{\nu}=2\alpha+(\nu-1)\omega \qquad (1)$$

$$\Sigma_{2\nu}=\frac{2\alpha+(2\nu-1)\omega}{2}\cdot 2\nu \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Sigma_{2\nu}}{\nu}=2\alpha+(2\nu-1)\omega \qquad (2)$$

$$\Sigma_{3\nu}=\frac{2\alpha+(3\nu-1)\omega}{2}\cdot 3\nu \quad \text{ἤ} \quad \frac{2\Sigma_{3\nu}}{3\nu}=2\alpha+(3\nu-1)\omega \qquad (3)$$

Ἀπ' τή (2) − (1) προκύπτει $\dfrac{\Sigma_{2\nu}}{\nu}-\dfrac{2\Sigma_\nu}{\nu}=\nu\omega$.

-״- (3) − (2) -״- $\dfrac{2\Sigma_{3\nu}}{3\nu}-\dfrac{\Sigma_{2\nu}}{\nu}=\nu\omega$ ἑπομένως

$$\frac{\Sigma_{2\nu}}{\nu}-\frac{2\Sigma_\nu}{\nu}=\frac{2\Sigma_{3\nu}}{3\nu}-\frac{\Sigma_{2\nu}}{\nu} \quad \text{ἤ} \quad 3(\Sigma_{2\nu}-\Sigma_\nu)=\Sigma_{3\nu}.$$

β'). Γιά τή γεωμετρική πρόοδο ἔχουμε: $\Sigma_\nu=\alpha\dfrac{\omega^\nu-1}{\omega-1}$ (1), $\Sigma_{2\nu}=\alpha\dfrac{\omega^{2\nu}-1}{\omega-1}$ (2), $\Sigma_{3\nu}=\alpha\dfrac{\omega^{3\nu}-1}{\omega-1}$ (3).

Ἀπ' τίς (1) καί (2) προκύπτει: $\dfrac{\Sigma_{2\nu}}{\Sigma_\nu} = \omega^\nu + 1$ καί

-//- (1) -//- (3) -//- $\dfrac{\Sigma_{3\nu}}{\Sigma_\nu} = \omega^{2\nu} + \omega^\nu + 1$. ὁπότε

$$\frac{\Sigma_{3\nu}}{\Sigma_\nu} = \left(\frac{\Sigma_{2\nu}}{\Sigma_\nu} - 1\right)^2 + \frac{\Sigma_{2\nu}}{\Sigma_\nu} \text{ ἤ } \left(\Sigma_{3\nu} - \Sigma_{2\nu}\right) = \left(\Sigma_{2\nu} - \Sigma_\nu\right)^2.$$

5.30. Ἄν Γ τό γινόμενο τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, Σ_1 τό ἄθροισμα αὐτῶν καί Σ_2 τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των νά δειχθεῖ ὅτι $\Gamma^2 = \left(\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right)^\nu$.

Λύση. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος: $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \cdots, \alpha\omega^{\nu-1}, \cdots$
Τό γινόμενο Γ τῶν ν πρώτων ὅρων εἶναι

$$\Gamma = \alpha^\nu \cdot \omega^{1+2+3+\cdots+(\nu-1)} = \alpha^\nu \cdot \omega^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \text{ καί } \Gamma^2 = \alpha^{2\nu} \cdot \omega^{\nu(\nu-1)} \quad (1)$$

ἐπειδή $1+2+3+\cdots+\nu-1 = \dfrac{(1+\nu-1)\cdot(\nu-1)}{2} = \dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$

Τό $\Sigma_1 = \alpha + \alpha\omega + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} = \alpha \cdot \dfrac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}$. Ἐπίσης εἶναι

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\omega} + \cdots + \frac{1}{\alpha\omega^{\nu-1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{\omega^\nu} - 1}{\frac{1}{\omega} - 1} = (\alpha\omega \neq 0)$$

$= \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1} \cdot \dfrac{1}{\omega^{\nu-1}}$ ὁπότε: $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \alpha^2 \cdot \omega^{\nu-1}$ καί $\left(\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right)^\nu = \alpha^{2\nu} \cdot \omega^{\nu(\nu-1)}$

καί λόγω τῆς (1): $\left(\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right)^\nu = \Gamma^2$.

5.31. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} \dfrac{\nu}{2^\nu}$ εἶναι $\sigma_\nu = 2 - \dfrac{1}{2^{\nu-1}} - \dfrac{\nu}{2^\nu}$.

Λύση. Θέτουμε $\sigma_\nu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{\nu}{2^\nu}$. Ὁ γενικός αὐτός ὅρος εἶναι γινόμενο τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου τῆς $1, 2, 3, \cdots, \nu$ καί τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς γεωμετρικῆς τῆς $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^\nu}$ δηλ. εἶναι ὁ νιοστός ὅρος μιᾶς μικτῆς προόδου, κάθε ὅρος τῆς ὁποίας προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τῶν ἀντιστοίχων ὁμοτάξιων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς καί μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου. Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν σ_ν μέ τό λόγο τῆς γεωμ. προόδου θά πάρουμε:

$$\frac{1}{2}\sigma_\nu = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{\nu-1}{2^\nu} + \frac{\nu}{2^{\nu+1}}.$$

Ἄν ἀφαιρέσουμε τίς δύο αὐτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\sigma_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^\nu} - \frac{\nu}{2^{\nu+1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2^\nu}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} - \frac{\nu}{2^{\nu+1}}$$ ἤ τελικά $\sigma_\nu = 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}} - \frac{\nu}{2^\nu}$

5.32. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu.$$

Λύση. Μετασχηματίζουμε τόν γενικό ὅρο τῆς σειρᾶς, τόν τόν $a_\nu = \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$ σέ ἄθροισμα δύο κλασμάτων ἁπλῶν. Πρός τοῦτο, ἀναλύουμε τό κλάσμα $\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων. Ἔχουμε (Περίπτωση I σελ 57):

$\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \equiv \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu+1}$. Ἐργαζόμενοι κατά τά γνωστά εὑρίσκουμε $A=3$ καί $B=-2$ ὁπότε $\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \equiv \frac{3}{\nu} - \frac{2}{\nu+1}$ καί

$$a_\nu = \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = \frac{3}{\nu}\cdot\frac{2^\nu}{3^\nu} - \frac{2}{\nu+1}\cdot\frac{2^\nu}{3^\nu} =$$

$\frac{2^\nu}{\nu\cdot 3^{\nu-1}} - \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu}$. Θέτοντας τώρα στήν a_ν: $\nu=1,2,\dots,\nu$ διαδοχικά καί προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἰσότητες αὐτές ἔχουμε:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=\sum_{\nu=1}^{\nu}\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}=\frac{2^1}{1\cdot 3^{1-1}}-\frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^{\nu}}=$$

$=2-\dfrac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)3^{\nu}}$ ὁπότε $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}=2-\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^{\nu}}=$

$=2-\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\dfrac{2}{\nu+1}\cdot\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\nu}=2-0\cdot 0=2$ Δηλ. ἡ σειρά Σ συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό 2.

5.33. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ σειρά (ἁρμονική) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ ἀποκλίνει.

Λύση. Γράφουμε τή σειρά αὐτή ὡς ἑξῆς:

$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+$
$+\left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right)+\cdots$ (1) καί θεωροῦμε σάν ὅρους αὐτῆς τίς παρενθέσεις. Ἐπειδή εἶναι: $1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>$
$>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$,
$\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$ κ.τ.λ. ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (1) εἶναι μεγαλύτεροι τῶν ὅρων τῆς ἀντίστοιχης σειρᾶς $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$ (2). Ἡ σειρά ὅμως (2) ἀποκλίνει ἐπειδή, ἄν Σ_ν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της θά ἔχουμε: $\Sigma_\nu=1+\frac{1}{2}(\nu-1)$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\Sigma_\nu=\infty$. Ἀφοῦ ἡ (2) εἶναι ἀποκλίνουσα θά εἶναι καί ἡ (1) ἀποκλίνουσα (ἰδ. 4α σελ 110).

5.34. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^k}$ εἶναι **α')** συγκλίνουσα γιά $k>1$ καί **β')** ἀποκλίνουσα γιά $k\leq 1$.

Λύση. α'). Ἔστω $k>1$. Ἡ δοθεῖσα σειρά γράφεται:

$\frac{1}{1^k}+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right)+\left(\frac{1}{8^k}+\cdots+\frac{1}{15^k}\right)+$ $+\left(\frac{1}{16^k}+\cdots+\frac{1}{31^k}\right)+\cdots$ (1). Ἐπειδή εἶναι $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<$ $<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$, $\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<$ $<\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}=\frac{4}{4^k}=\frac{1}{4^{k-1}}=\frac{1}{2^{2k-2}}$, $\frac{1}{8^k}+\cdots+\frac{1}{15^k}<$ $<\frac{1}{8^k}+\cdots+\frac{1}{8^k}=\frac{8}{8^k}=\frac{1}{8^{k-1}}=\frac{1}{2^{3k-3}}$, κ.τ.λ, ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (1) δηλ. οἱ παρενθέσεις εἶναι μικρότεροι τῶν ὅρων τῆς ἀντίστοιχης σειρᾶς $\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2k-2}}+\frac{1}{2^{3k-3}}+\cdots$ (2).
Ἡ σειρά (2), ἐπειδή εἶναι $\frac{1}{2^{k-1}}<1$, εἶναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος καί συνεπῶς συγκλίνει. Ἄρα θά συγκλίνει καί ἡ (1) (ἰδ 4'α σελ 110).

β'). Ἔστω $k\leq 1$. Ἐπειδή εἶναι $\frac{1}{\nu^k}\geq\frac{1}{\nu}$ ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (1) εἶναι μεγαλύτεροι τῶν ἀντίστοιχων ὅρων τῆς σειρᾶς $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}+\cdots$ πού ὅπως ἀποδείξαμε ἀποκλίνει. Ἄρα θά ἀποκλίνει καί ἡ (1) γιά $k\leq 1$ (ἰδ. 4'α σελ 110).

5.35. Νά εὑρεθεῖ ποιές ἀπ' τίς παρακάτω σειρές εἶναι συγκλίνουσες καί ποιές ἀποκλίνουσες:
α') $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+1}{\nu^4}$, **β')** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\nu^2}$, **γ')** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}$, **δ')** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu}$,
ε') $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3}{e}\right)^\nu$, **στ')** $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu^2}$ ὅπου $x\in R$.

Λύση. α'). Ἔχομε $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+1}{\nu^4}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^4}\right)$ (1). Ἡ σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ εἶναι συγκλίνουσα (ἄσκ. 5.34α), ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^4}$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα (ἄσκ. 5.34α). Ἑπομένως καί ἡ (1) θά εἶναι συγκλίνουσα (ἰδ. 1'α συγκλινουσῶν σειρῶν σελ. 110).

β'). Ὁμοίως ἔχουμε: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu^2} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}\right)$. (1). Ἡ σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἀποκλίνει (ἁρμονική σειρά) ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ συγκλίνει, ἄρα ἡ σειρά (1) ἀποκλίνει (ἴδ. 3'α συγκλ. σειρῶν σελ. 110).

γ'). Ἐκτός ἀπό τόν ὁρισμό συγκλίσεως μιᾶς σειρᾶς (σελ 109) ὑπάρχουν 2 κριτήρια πού μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἀποφανθοῦμε ἄν μία σειρά συγκλίνει ἤ ἀποκλίνει. Αὐτά εἶναι:

1. Κριτήριο τοῦ **D'Alembert**: Ἄν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1$ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει· ἄν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} > 1$ ἀποκλίνει καί ἄν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 1$ δέν μποροῦμε νά ἀποφανθοῦμε ἄν ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει ἤ ἀποκλίνει.

2. Κριτήριο τοῦ **Cauchy**: Ἄν γιά τή σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ εἶναι $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < 1$ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει· ἄν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} > 1$ ἡ σειρά ἀποκλίνει καί ἄν $\text{ορ} \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$ ἔχουμε ἀμφιβολία.

Τό κριτήριο τοῦ D'Alembert χρησιμοποιεῖται ἰδιαιτέρως σέ σειρές δυνάμεων τῆς μορφῆς: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu x^\nu$. Ἄν $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}x^{\nu+1}}{\alpha_\nu x^\nu} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\cdot x = x$ τότε ἄν $|x|<1$ ἡ σειρά συγκλίνει· ἄν $|x|>1$ ἡ σειρά ἀποκλίνει. Γιά $x=1$ ἐξετάζεται ἰδιαίτερα ἡ σειρά.

Κατόπιν αὐτῶν ἐφαρμόζουμε στή γ') τό κριτήριο τοῦ D'Alembert.

Εἶναι $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\frac{1}{(\nu+1)!}}{\frac{1}{\nu!}} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\nu!}{\nu!(\nu+1)} =$

$= \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{1}{\nu+1} = 0 < 1$ ἑπομένως ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}$ συγκλίνει.

δ'). Ὁμοίως ἔχουμε $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$. Εἶναι $\alpha_{\nu+1} = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$, $\alpha_\nu = \frac{x^\nu}{\nu}$ ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}}{\frac{x^\nu}{\nu}} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\nu\cdot x^{\nu+1}}{(\nu+1)x^\nu} =$

$= \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{\nu}{\nu+1}x = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}} \frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}x = 1\cdot x = x$. Ἄν $|x|<1$ ἡ σειρά συγκλίνει· ἄν $|x|>1$ ἀποκλίνει. Γιά $x=1$ εἶναι ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ (ἀποκλίνει).

ε'). Ἐδῶ ἔχουμε $a_\nu = \frac{3^\nu}{e^\nu}$. Ἐφαρμόζουμε τό κριτήριο τοῦ Cauchy καί ἔχουμε $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt[\nu]{a_\nu} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt[\nu]{\frac{3^\nu}{e^\nu}} = \frac{3}{e} > 1$. Ἄρα ἡ σειρά ἀποκλίνει.

στ'). Ὁμοίως ἔχουμε $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt[\nu]{a_\nu} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\sqrt[\nu]{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu^2}} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu =$ $= (\text{ἄσκ. } 5.18\beta) = \frac{1}{e} < 1$ ἄρα ἡ σειρά συγκλίνει.

5.36. Νά ἐξετασθεῖ ἄν τό ἀπειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)^2}{\nu(\nu+2)}$ συγκλίνει ἤ ὄχι.

Λύση. Ἔχουμε $\pi_\nu = \prod_{\nu=1}^{\nu}\frac{(\nu+1)^2}{\nu(\nu+2)} = \prod_{\nu=1}^{\nu}\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2} =$

$$= \prod_{\nu=1}^{\nu}\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\prod_{\nu=1}^{\nu}\frac{\nu+1}{\nu+2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{\nu+1}{\nu+2} =$$

$= \frac{2\cdot(\nu+1)}{(\nu+2)}$ Ἑπομένως $\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)^2}{\nu(\nu+2)} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,\pi_\nu = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\frac{2(\nu+1)}{\nu+2} =$

$= \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\frac{2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{1+\frac{2}{\nu}} = 2$. Δηλ τό ἀπειρογινόμενο συγκλίνει στό 2.

5.37. Νά δειχθεῖ ὅτι δέν ὑπάρχει ἡ ὁριακή τιμή τῆς συνάρτησης $f(x) \equiv \text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$ γιά $x\to 0$.

Λύση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $f(x)$ εἶναι τό $R-\{0\}$. Θεωροῦμε τίς ἀκολουθίες $x_\nu = \frac{1}{2\pi\nu}$ καί $x_\nu' = \frac{1}{2\pi\nu+\frac{\pi}{2}}$. Παρατηροῦμε ὅτι $x_\nu, x_\nu' \in R-\{0\}$ $\forall\nu\in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,x_\nu = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,x_\nu' = 0$. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι $f(x_\nu) = \text{ημ}\left(\frac{1}{x_\nu}\right) = \text{ημ}(2\pi\nu) = 0$ $\forall\nu\in N$ καί $f(x_\nu') = \text{ημ}\left(\frac{1}{x_\nu'}\right) = \text{ημ}\left(2\pi\nu+\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\forall\nu\in N$. Ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,f(x_\nu) = 0$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\,f(x_\nu') = 1 \neq 0$ καί ἄρα ἡ ὁριακή τιμή τῆς $f(x)$ δέν ὑπάρχει γιά $x\to 0$ (ὁρισμός I ὁρίου συνάρτησης).

5.38. Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{x\to\infty}{op}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$

Λύση. Θέτουμε $f(x)\equiv\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ Εἶναι πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $f(x)$ τό $R^+\cup\{0\}$. Ἔστω x_ν τυχοῦσα ἀκολουθία μέ $x_\nu\geqslant 0$ $\forall\nu\in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{op}x_\nu=+\infty$ Εἶναι $f(x_\nu)=\sqrt{x_\nu+1}-\sqrt{x_\nu}=\sqrt{x_\nu+1}-\sqrt{x_\nu}\cdot$

$$\cdot\frac{\sqrt{x_\nu+1}+\sqrt{x_\nu}}{\sqrt{x_\nu+1}+\sqrt{x_\nu}}=\frac{1}{\sqrt{x_\nu+1}+\sqrt{x_\nu}}<\frac{1}{\sqrt{x_\nu}}$$ Δηλαδή

$0<f(x_\nu)<\frac{1}{\sqrt{x_\nu}}$ $\forall\nu\in N$. Ἐπειδή $\underset{\nu\to\infty}{op}\frac{1}{\sqrt{x_\nu}}=0$ θά ἔχουμε καί $\underset{\nu\to\infty}{op}f(x_\nu)=0$ (ἰδ. 5. ὁρίου συνάρτησης σελ. 115) Ἄρα θά εἶναι καί

$$\underset{x\to\infty}{op}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$$

5.39. Δίδεται ἡ συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1} & \text{ἄν } x<1\\ x^2-1 & \text{-//- } x>1\end{cases}$

Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{x\to1}{op}f(x)=0$.

Λύση. Ἔστω $x_\nu<1$ $\forall\nu\in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{op}x_\nu=1$ Τότε θά εἶναι $f(x_\nu)=\frac{x_\nu-1}{x_\nu+1}$ $\forall\nu\in N$. Ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{op}(x_\nu-1)=0$ καί $\underset{\nu\to\infty}{op}(x_\nu+1)=2$

καί ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{op}f(x_\nu)=\underset{\nu\to\infty}{op}\frac{x_\nu-1}{x_\nu+1}=\frac{\underset{\nu\to\infty}{op}(x_\nu-1)}{\underset{\nu\to\infty}{op}(x_\nu+1)}=\frac{0}{2}=0$

(ἰδ. 3. ὁρίου συνάρτησης). Ἔστω ἐπίσης $x_\nu>1$ $\forall\nu\in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{op}x_\nu=1$ Τότε $f(x_\nu)=x_\nu^2-1$ καί ἄρα $\underset{\nu\to\infty}{op}f(x_\nu)=\left(\underset{\nu\to\infty}{op}x_\nu\right)^2-1=1-1=0$ Ἄρα $\underset{x\to1^-}{op}f(x)=\underset{x\to1^+}{op}f(x)=0$ καί ἄρα $\underset{x\to1}{op}f(x)=0$. (σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῶν πλευρικῶν ὁρίων - ὅριο ἐξ ἀριστερῶν καί ἐκ δεξιῶν).

5.40. Δίδεται ἡ συνάρτηση $f(x)=\frac{2x^2-2x}{x-1}$ ὡρισμένη στό σύνολο $A=R-\{1\}$. Νά δειχθεῖ ὅτι $\underset{x\to1}{op}f(x)=2$ (μέ τόν ὁρισμό II ὁρίου).

Λύση. Ὁ ἀριθμός 1 εἶναι ὁριακός ἀριθμός τοῦ A ἀλλά δέν ἀνήκει στό A. Ἡ τιμή τῆς συνάρτησης γιά $x=1$ δέν ὑπάρχει ἐπειδή ἡ $f(x)$ δέν ὁρίζεται γιά $x=1$. Ἐφ' ὅσον $x\neq 1$ ἡ συνάρτηση παίρνει τή μορφή: $f(x)=\dfrac{2x(x-1)}{x-1}=2x$. Γιά νά εἶναι $\underset{x\to 1}{\text{op}} f(x)=2$ θά πρέπει δοθέντος $\varepsilon>0$ νά ὑπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)$ δηλ. ἐξαρτώμενος ἀπ' τόν ε, ἔτσι ὥστε γιά $|x-1|<\delta$ νά εἶναι: $|f(x)-2|<\varepsilon$ (1). Τό δ θά τό ὁρίσουμε ἐξαρτώμενο ἀπ' τό ε, ἄν μετασχηματίσουμε τήν (1) καί τή φέρουμε σέ μιά μορφή γινομένου μέ ἕνα παράγοντα τόν $|x-1|$. Πράγματι ἡ (1) γράφεται $|2x-2|<\varepsilon$ ἤ $|2(x-1)|<\varepsilon$ ἤ $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ἑπομένως γιά $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, ὅπου $\varepsilon>0$ μέ $|x-1|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ ἔχουμε $|f(x)-2|=|2x-2|=|2(x-1)|<2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Ἑπομένως σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό II τοῦ ὁρίου συνάρτησης εἶναι $\underset{x\to 1}{\text{op}} f(x)=2$.

5.41. Νά ἐξετασθεῖ ἄν οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται

α') $f(x)=\begin{cases} x, & \text{ἄν } x\in[0,\frac12] \\ \frac12+x, & \text{ἄν } x\in(\frac12,1]\end{cases}$, **β')** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & \text{ἄν } x\neq 0 \\ 0, & \text{ἄν } x=0\end{cases}$

εἶναι συνεχεῖς στά πεδία ὁρισμοῦ των καί νά γίνουν οἱ γραφικές τους παραστάσεις.

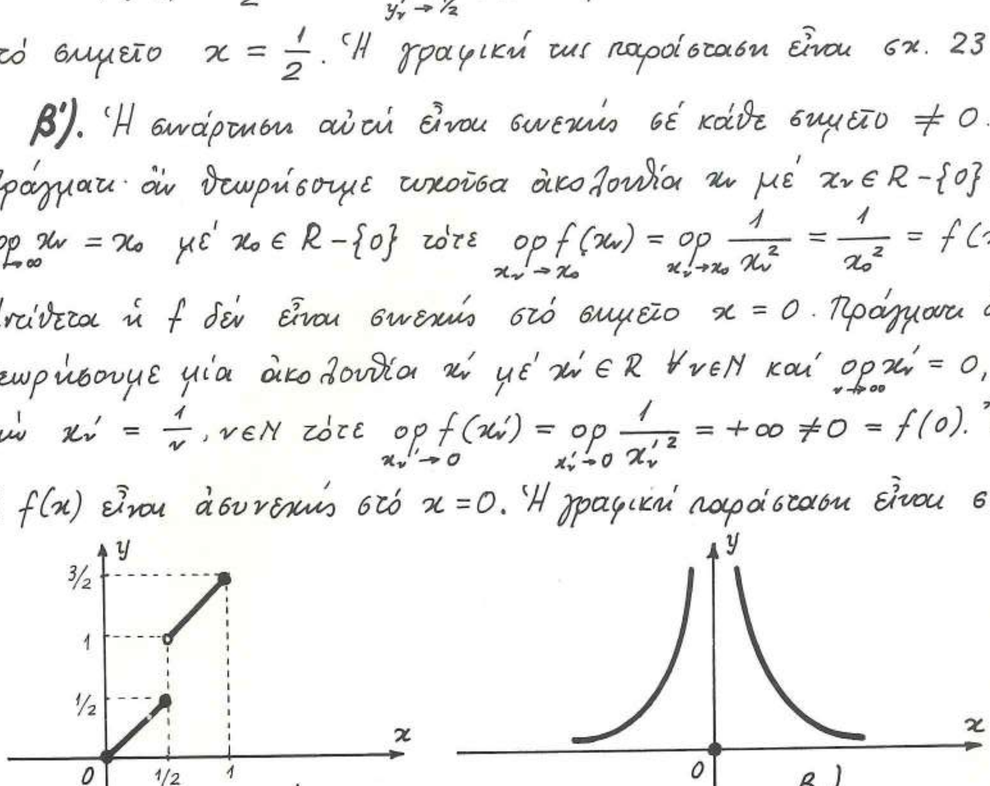
Λύση. α'). Ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο τοῦ διαστήματος διάφορο τοῦ $\frac{1}{2}$. Πράγματι ἄν θεωρήσουμε μία ἀκολουθία x_ν μέ $x_\nu\in[0,\frac12)$ $\forall\nu\in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}} x_\nu=x_0$ μέ $x_0\in[0,\frac12)$ τότε $\underset{x_\nu\to x_0}{\text{op}} f(x_\nu)=\underset{x_\nu\to x_0}{\text{op}} x_\nu=x_0=f(x_0)$. Ἐπίσης ἄν θεωρήσουμε μία ἄλλη ἀκολουθία x_ν' μέ $x_\nu'\in(\frac12,1]$ $\forall\nu\in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}} x_\nu'=x_0'$ μέ $x_0'\in(\frac12,1]$ τότε $\underset{x_\nu'\to x_0'}{\text{op}} f(x_\nu')=\frac12+\underset{x_\nu'\to x_0'}{\text{op}} x_\nu'=$
$=\frac12+x_0'=f(x_0')$ Ἑπομένως ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής $\forall x\in[0,1]-\{\frac12\}$

Αντίθετα ή f δέν είναι συνεχής στό σημείο $\frac{1}{2}$. Πράγματι άν θεωρήσουμε μία ακολουθία y_ν μέ $y_\nu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ $\forall \nu \in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{όρ}}\, y_\nu = \frac{1}{2}$, π.χ. τήν $y_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{\nu}$, $\nu \in N$ τότε $\underset{y_\nu \to 1/2}{\text{όρ}} f(y_\nu) = \frac{1}{2} + \underset{y_\nu \to 1/2}{\text{όρ}}\, y_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Αλλά $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 1 = \underset{y_\nu \to 1/2}{\text{όρ}} f(y_\nu)$. Επομένως ή $f(x)$ είναι ασυνεχής στό σημείο $x = \frac{1}{2}$. Ή γραφική της παράσταση είναι σχ. 23 α.

β'). Ή συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σέ κάθε σημείο $\neq 0$. Πράγματι άν θεωρήσουμε τυχούσα ακολουθία x_ν μέ $x_\nu \in R - \{0\}$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{όρ}}\, x_\nu = x_0$ μέ $x_0 \in R - \{0\}$ τότε $\underset{x_\nu \to x_0}{\text{όρ}} f(x_\nu) = \underset{x_\nu \to x_0}{\text{όρ}} \frac{1}{x_\nu^2} = \frac{1}{x_0^2} = f(x_0)$.

Αντίθετα ή f δέν είναι συνεχής στό σημείο $x = 0$. Πράγματι άν θεωρήσουμε μία ακολουθία x_ν' μέ $x_\nu' \in R$ $\forall \nu \in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{όρ}}\, x_\nu' = 0$, π.χ. τήν $x_\nu' = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in N$ τότε $\underset{x_\nu' \to 0}{\text{όρ}} f(x_\nu') = \underset{x_\nu' \to 0}{\text{όρ}} \frac{1}{x_\nu'^2} = +\infty \neq 0 = f(0)$. Άρα ή $f(x)$ είναι ασυνεχής στό $x = 0$. Ή γραφική παράσταση είναι σχ. 23β.



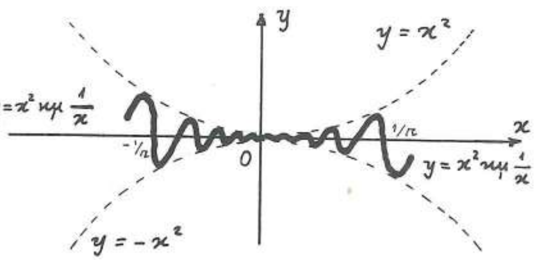
Σχ. 23

5.42. Όμοίως νά έξετασθεί άν οί συναρτήσεις:

$$\text{α')}\ f(x) = \begin{cases} x^2\, \text{ημ}\frac{1}{x}, & \text{άν } x \neq 0 \\ 0 & \text{-''- } x = 0 \end{cases}, \quad \text{β')}\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\, \text{ημ}\frac{1}{x}, & \text{άν } x \neq 0, |x| \leq 1 \\ 0 & \text{-''- } x = 0 \\ \text{ημ}\,x & \text{-''- } |x| > 1 \end{cases}$$

είναι συνεχείς στά πεδία ορισμού των καί νά γίνει ή γραφική τους παράσταση.

Λύση. α'). Ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο. Πράγματι. Γιά διάφορα τοῦ μηδενός σημεῖα εἶναι προφανές διότι ἄν θεωρήσουμε μία ἀκολουθία σημείων x_ν μέ $x_\nu \in R-\{0\}$ $\forall \nu \in N$ καί $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$ μέ $x_0 \in R-\{0\}$, τότε $\lim_{x_\nu\to x_0} f(x_\nu) = \lim_{x_\nu\to x_0}\left(x_\nu^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x_\nu}\right) =$

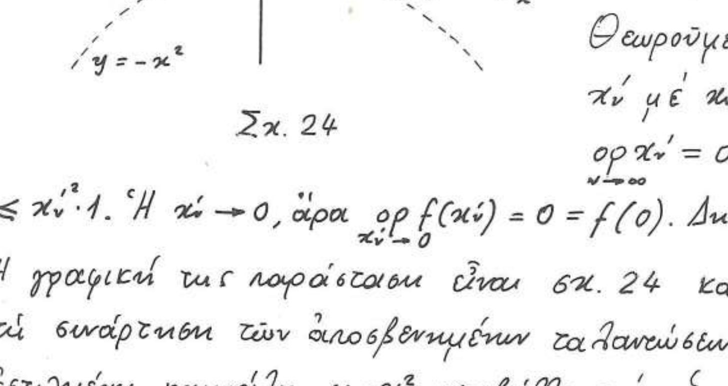


Σχ. 24

$= \lim_{x_\nu\to x_0} x_\nu^2 \cdot \lim_{x_\nu\to x_0} \eta\mu \frac{1}{x_\nu} = x_0^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x_0} = f(x_0)$. Ἡ συνέχεια τῆς $f(x)$ εἰς τό $x=0$ συνάγεται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε τυχοῦσα ἀκολουθία x_ν' μέ $x_\nu' \in R-\{0\}$ $\forall \nu \in N$ καί $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu' = 0$. $\left|f(x_\nu')\right| = x_\nu'^2 \left|\eta\mu \frac{1}{x_\nu'}\right| \leq x_\nu'^2 \cdot 1$. Ἡ $x_\nu' \to 0$, ἄρα $\lim_{x_\nu'\to 0} f(x_\nu') = 0 = f(0)$. Δηλ. ἡ f συνεχής στό $x=0$.

Ἡ γραφική της παράσταση εἶναι σχ. 24 καί εἶναι ἀνάλογη μέ τή συνάρτηση τῶν ἀποσβεννυμένων ταλαντώσεων (σελ 101) ὅπου ἡ ἐστιγμένη καμπύλη $y=x^2$ περιβάλλει τήν ἡμιτονοειδή καμπύλη. Στά σημεῖα $x_k = \frac{k}{\pi}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ἔχουμε $y=0$ δηλ ρίζες τῆς $f(x)=0$.

β').



Σχ. 25

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής σέ τυχόν σημεῖο τοῦ συνόλου $R-\{-1, 0, 1\}$ Μένει νά ἐξετασθεῖ ἡ συνέχεια τῆς f στά σημεῖα $-1, 0, 1$. Ὅπως φαίνεται καί στό σχ. 25 ἡ συνάρτηση ὁρίζεται ἀπ' τόν τύπο: $f(x) = \frac{1}{x}$ ημ $\frac{1}{x}$ στά διαστήματα $(-1,0)$ καί $(0,1)$ καί ἀπ' τόν $f(x) =$ ημ x στά διαστήματα $(-\infty,-1)$ καί $(1,+\infty)$.

α). Ἡ $f(x)$ δέν εἶναι συνεχής στό σημεῖο -1. Πράγματι ἄν θεωρήσουμε τυχοῦσα ἀκολουθία x_ν μέ $x_\nu \in (-1,0)$ $\forall \nu \in N$ καί $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = -1$ τότε $\lim_{x_\nu \to -1} f(x_\nu) = \lim_{x_\nu\to -1}\left(\frac{1}{x}\text{ημ}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x_\nu\to-1}\frac{1}{x_\nu}\cdot\lim_{x_\nu\to-1}\text{ημ}\frac{1}{x_\nu} = -1\cdot\text{ημ}(-1) =$ $=$ ημ1 δηλ. $\lim_{x\to -1^+} f(x) =$ ημ1. Θεωροῦμε τώρα τυχοῦσα ἀκολουθία x_ν' μέ $x_\nu'(-\infty,-1)$ $\forall \nu\in N$ καί $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu' = -1$. Τότε $\lim_{x_\nu'\to-1} f(x_\nu') =$ $\lim_{x_\nu'\to -1}$ ημx_ν' $=$ ημ(-1). Δηλ. $\lim_{x\to-1^-} f(x) =$ ημ$(-1) \neq$ ημ$1 = \lim_{x\to-1^+} f(x)$.

Δηλ. ἡ $f(x)$ δέν εἶναι συνεχής στό σημεῖο $x=1$

β). Ἡ $f(x)$ δέν εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖο 0. Πράγματι ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία $x_\nu = \frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}}$ $\forall\nu\in N$ μέ $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = 0$ τότε $\lim_{x_\nu\to 0} f(x_\nu) = \lim_{x_\nu\to 0}\left(\frac{1}{x_\nu}\cdot\text{ημ}\frac{1}{x_\nu}\right) = \lim_{x_\nu\to0}\frac{1}{x_\nu}\cdot\lim_{x_\nu\to 0}\text{ημ}\frac{1}{x_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\left(2\pi\nu+\frac{\pi}{2}\right)\cdot$ $\cdot\lim_{\nu\to\infty}\text{ημ}\left(2\pi\nu+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(2\pi\nu+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{2} = +\infty\cdot 1 = +\infty \neq 0 = f(0)$.

Ἄρα $\lim_{x_\nu\to 0} f(x_\nu) \neq f(0)$ δηλ. ἡ $f(x)$ εἶναι ἀσυνεχής στό $x=0$.

γ). Ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής στό 1. Πράγματι. Γιά $x_\nu\in(0,1)$ $\forall\nu\in N$ καί $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = 1$ εἶναι $\lim_{x_\nu\to1} f(x_\nu) = \lim_{x_\nu\to1}\left(\frac{1}{x_\nu}\cdot\text{ημ}\frac{1}{x_\nu}\right) = \lim_{x_\nu\to1}\frac{1}{x_\nu}\cdot$ $\cdot\lim_{x_\nu\to1}\text{ημ}\frac{1}{x_\nu} = 1\cdot\text{ημ}1 = \text{ημ}1$. Ἐπίσης γιά $x_\nu'\in(1,+\infty)$ $\forall\nu\in N$ καί $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu' = 1$ εἶναι $\lim_{x_\nu'\to1} f(x_\nu') = \lim_{x_\nu'\to1}(\text{ημ}\,x_\nu') =$ ημ1. Δηλ.

$\lim_{x\to1^-} f(x) =$ ημ1 $= \lim_{x\to1^+} f(x)$. Δηλ. ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής στό $x=1$.

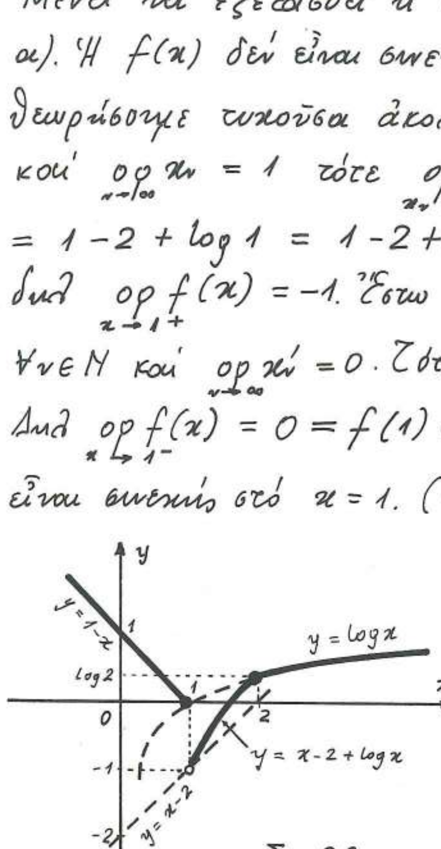
Παρατηροῦμε ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση ὅτι ἡ ἡμιτονοειδής συνάρτηση περικλείεται ἀπό τίς καμπύλες $y=\frac{1}{|x|}$ καί $y=-\frac{1}{|x|}$ δηλ. τούς τέσσερες κλάδους ὑπερβολῆς. (ἐστιγμένες καμπύλες), ὅπως φαίνεται στή γραφική παράσταση.

5.43. Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια καί νά παρασταθεῖ γραφικά ἡ συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{ἄν } x > 2 \\ x - 2 + \log x & \text{ἄν } 1 < x \leq 2 \\ 1 - x & \text{ἄν } x \leq 1 \end{cases}$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ $f(x)$ δίδεται ἀπ' τόν τύπο $f(x) = 1 - x$ γιά $x \in (-\infty, 1]$, τόν $f(x) = x - 2 + \log x$ γιά $x \in (1, 2]$ καί $f(x) = \log x$ γιά $x \in (2, +\infty)$. Ἀκόμη ὅτι ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχής στά διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ καί $(2, +\infty)$, γιατί ὅλες οἱ ἐπί μέρους συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς σ' αὐτά. Μένει νά ἐξετασθεῖ ἡ συνέχεια στά σημεῖα 1 καί 2.

α). Ἡ $f(x)$ δέν εἶναι συνεχής στό σημεῖο $x = 1$. Πράγματι· ἄν θεωρήσουμε τυχοῦσα ἀκολουθία x_ν σημείων μέ $x_\nu \in (1, 2)$ $\forall \nu \in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\, x_\nu = 1$ τότε $\underset{x_\nu \to 1}{\text{op}} f(x_\nu) = \underset{x_\nu \to 1}{\text{op}} (x_\nu - 2 + \log x_\nu) =$
$= 1 - 2 + \log 1 = 1 - 2 + 0 = -1$ (ἐπειδή ὡς γνωστόν $\log 1 = 0$) ἄρα $\underset{x \to 1^+}{\text{op}} f(x) = -1$. Ἔστω τώρα ἀκολουθία x'_ν μέ $x'_\nu \in (-\infty, 1)$ $\forall \nu \in N$ καί $\underset{\nu\to\infty}{\text{op}}\, x'_\nu = 0$. Τότε $\underset{x'_\nu \to 1}{\text{op}} f(x'_\nu) = \underset{x'_\nu \to 1}{\text{op}} (1 - x'_\nu) = 1 - 1 = 0$.
Ἄρα $\underset{x \to 1^-}{\text{op}} f(x) = 0 = f(1) \neq \underset{x \to 1^+}{\text{op}} f(x) = -1$ Ἄρα ἡ $f(x)$ δέν εἶναι συνεχής στό $x = 1$. (Εἶναι ὅμως συνεχής ἐξ ἀριστερῶν).



Σχ. 26

β). Ἡ f εἶναι συνεχής στό $x = 2$. Πράγματι ἄν σκεφθοῦμε παρόμοια ἔχουμε:
$\underset{x \to 2^+}{\text{op}} f(x) = \underset{x \to 2^+}{\text{op}} \log x = \log 2 = f(2)$ καί
$\underset{x \to 2^-}{\text{op}} f(x) = \underset{x \to 2^-}{\text{op}} (x - 2 + \log x) = 2 - 2 + \log 2 =$
$= \log 2 = f(2)$ Ἄρα $\underset{x \to 2^-}{\text{op}} f(x) = \underset{x \to 2^+}{\text{op}} f(x) = f(2)$. Ἄρα ἡ f συνεχής στό $x = 2$ (σχ. 26).

6. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Καλοῦμε **διάνυσμα** ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί τό συμβολίζουμε μέ $\overrightarrow{AB}$ ἤ $\overline{AB}$, πού ὑποθέτουμε ὅτι διανύεται ἀπό κινητό σημεῖο μέ φορά ἀπ' τό Α στό Β. Γιά συντομία τό παριστάνουμε μ' ἕνα μόνο γράμμα καί μιά ἐπιγραμμή δηλ $\overline{AB}\equiv\overline{\alpha}$.

Μέτρο ἤ **μῆκος** ἤ **ἀπόλυτη τιμή** διανύσματος $\overline{AB}$ λέγεται ὁ θετικός ἀριθμός πού μετράει τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καί συμβολίζεται μέ $|\overline{\alpha}|$ ἤ ἁπλῶς α δηλ $|\overline{AB}|=(AB)$ ἤ ΑΒ.

Διεύθυνση διανύσματος λέγεται ἡ διεύθυνση τῆς εὐθείας πού βρίσκεται τό διάνυσμα καί ἡ εὐθεῖα αὐτή λέγεται **φορέας** τοῦ διανύσματος. **Φορά** τοῦ διανύσματος λέγεται ἡ φορά κατά τήν ὁποία κινεῖται τό κινητό πού διαγράφει τό διάνυσμα. Π.χ. τά διανύσματα $\overline{AB}$ καί $\overline{BA}$ ἔχουν φορές ἀντίθετες.

Τό μέτρο, ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά εἶναι τά **στοιχεῖα** ἑνός διανύσματος. Ἡ διεύθυνση καί ἡ φορά καθορίζουν τήν **κατεύθυνση** ἑνός διανύσματος.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ὅταν δοθοῦν τά στοιχεῖα ἑνός διανύσματος, καθορίζεται τό διάνυσμα· ὄχι ὅμως καί ἡ θέση του στό χῶρο. Τέτοια διανύσματα τά λέμε **ἐλεύθερα** διανύσματα, πρός διάκριση ἀπό τά **ἐφαρμοστά** πού ἔχουν ὡρισμένη σταθερή ἀρχή καί ἀπό τά **ὀλισθαίνοντα** πού ἔχουν ὡρισμένο σταθερό φορέα.

Παράλληλα ἤ **συγγραμμικά** λέγονται δύο ἤ περισσότερα διανύσματα, ὅταν οἱ φορεῖς τους εἶναι παράλληλοι ἤ συμπίπτουν. **Ὁμόρροπα** λέγονται τά διανύσματα πού εἶναι παράλληλα καί ἔχουν τήν ἴδια φορά. **Ἀντίρροπα** ὅταν εἶναι παράλληλα καί ἔχουν ἀντίθετες φορές. **Ἀντίθετα** ὅταν εἶναι ἀντίρροπα καί ἰσομήκη δηλ $\overline{AB} = -\overline{BA}$. **Ἴσα** ὅταν εἶναι ὁμόρροπα καί ἰσομήκη, δηλ ὅταν ἔχουν καί τά τρία τους στοιχεῖα ἴδια. Ἄν $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ εἶναι δύο ἴσα διανύσματα γράφουμε $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Τό διάνυσμα τό ὁμόρροπο πρός τό $\bar{\alpha}$ καί μέ μέτρο τή μονάδα θά τό παριστάνουμε μέ $\bar{\alpha}_0$ καί τό λέμε **μοναδιαῖο.** Ἐνῶ τό διάνυσμα ἐκεῖνο γιά τό ὁποῖο ἡ ἀρχή καί τό πέρας συμπίπτουν λέγεται **μηδενικό**. Στό μηδενικό διάνυσμα δίνουμε ὁποιαδήποτε διεύθυνση καί φορά, θεωροῦμε δέ ὅλα τά μηδενικά διανύσματα ἴσα μεταξύ τους καί μέ μέτρο μηδέν.

Διανύσματα διατεταγμένα ἔτσι ὥστε ἡ ἀρχή καθενός νά συμπίπτει μέ τό πέρας τοῦ προηγουμένου, ἀπ' τό δεύτερο κι ἔπειτα, λέγονται **διαδοχικά.**

Διανύσματα πού ἔχουν κοινή σταθερή ἀρχή λέγονται **διανυσματικές ἀκτίνες.**

Προβολή διανύσματος ἐπί εὐθείας ἤ ἐπιπέδου λέγεται τό διάνυσμα πού ἔχει ἀρχή τήν προβολή τῆς ἀρχῆς καί πέρας τήν προβολή τοῦ πέρατος τοῦ προβαλλόμενου διανύσματος. Ἀπό τά θεωρήματα τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας περί προβολῶν εὐθυγράμμων τμημάτων προκύπτει ὅτι: "ἴσα διανύσματα προβάλλονται κατά ἴσα διανύσματα".

Γινόμενο διανύσματος $\bar{\alpha}$ ἐπί λ $(\lambda \in R)$ ὁρίζεται τό διάνυσμα $\bar{\beta}$ πού ἔχει μέτρο $|\lambda| \cdot \alpha$ καί πού εἶναι ὁμόρροπο πρός τό $\bar{\alpha}$ ἄν $\lambda > 0$ καί ἀντίρροπο πρός τό $\bar{\alpha}$ ἄν $\lambda < 0$ καί γράφουμε

$\bar{\beta} = \lambda\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\cdot\lambda$. Ἄν $\lambda = 0$ τότε $0\cdot\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\cdot 0 = \bar{0}$.

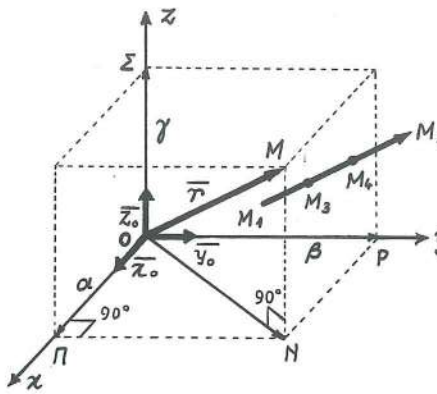
Ἄθροισμα διαδοχικῶν διανυσμάτων λέγεται τό διάνυσμα πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου. Ἄν τα διανύσματα δέν εἶναι διαδοχικά τά καθιστοῦμε διαδοχικά. Ἄν ἔχουν κοινή ἀρχή, τότε τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου αὐτῶν μέ ἀρχή τήν κοινή ἀρχή τους· ἡ διαγώνιος ὡς νέο διάνυσμα μέ τό ἑπόμενο δίνει ἕνα νέο διάνυσμα κατά ὅμοιο τρόπο κ. ο. κ.

Διαφορά δύο διανυσμάτων $\overline{AB}$ καί $\overline{\Gamma\Delta}$ καί συμβολίζεται $\overline{AB} - \overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι τό διάνυσμα πού προκύπτει ἄν προσθέσουμε στό διάνυσμα $\overline{AB}$ τό ἀντίρροπο τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ δηλ τό $\overline{\Delta\Gamma}$ ἤτοι εἶναι $\overline{AB} - \overline{\Gamma\Delta} = \overline{AB} + (-\overline{\Gamma\Delta}) = \overline{AB} + \overline{\Delta\Gamma}$. Ὅταν τά διανύσματα ἔχουν κοινή ἀρχή, ἡ διαφορά τους εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου αὐτῶν πού δέν διέρχεται ἀπό τήν κοινή ἀρχή τους.

Γωνία δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τά $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ (ἀφοῦ τά κατασκευάσουμε μέ κοινή ἀρχή) καί εἶναι θετική, ὅταν ἔχει φορά ἀντίθετη τῆς φορᾶς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἤ ἀρνητική, ὅταν ἔχει φορά ἴδια μέ τή φορά τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

Συντεταγμένες σημείου καί διανύσματος στό χῶρο.

Ἔστω ox, oy, oz μιά τριάδα διατεταγμένων ἀξόνων μέ κοινή ἀρχή O, πού ἔχουν μοναδιαῖα ἰσομήκη διανύσματα $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ ἀντίστοιχα καί σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα. (**Δεξιόστροφο** σύστημα τριῶν διανυσμάτων, τά ὁποῖα δέν



Σχ. 27

βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, προκύπτει, ὅταν ἀπό κάθε ζεῦγος διανυσμάτων $(\bar{\alpha},\bar{\beta}), (\bar{\beta},\bar{\gamma}), (\bar{\gamma},\bar{\alpha})$ τῶν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$, κυκλικά λαμβανόμενο, ἄν περιστραφεῖ π.χ. τό $\bar{\alpha}$ κατά τή μικρότερη γωνία πρός τό $\bar{\beta}$, νά κοχλιώνεται πρός τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού βρίσκεται τό $\bar{\gamma}$. Ὁμοίως καί γιά τά ἄλλα ζεύγη $(\bar{\beta},\bar{\gamma})$ καί $(\bar{\gamma},\bar{\alpha})$).

Ἄν οἱ ἄξονες εἶναι μεταξύ τους ἀνά δύο κάθετοι τότε τό σύστημα Οxyz λέγεται **τρισορθογώνιο** ἤ **Καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων· ἐπί πλέον δέ **ὀρθοκανονικό**, ἐφ' ὅσον τά μοναδιαῖα διανύσματα, ὅπως ἐδῶ, εἶναι ἰσομήκη. Ὁ ἄξονας οx λέγεται ἄξονας τῶν **τετμημένων**, ὁ οy τῶν **τεταγμένων** καί ὁ οz τῶν **κατηγμένων**.

Ἔστω τώρα διάνυσμα $\overline{M_1M_2}$ τοῦ τριδιαστάτου χώρου καί $\overline{OM} = \overline{M_1M_2} = \bar{r}$, ὅπου Ο ἡ ἀρχή τοῦ συστήματος οxyz. Τό μέτρο τῆς προβολῆς τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}$ (ἤ τοῦ ἴσου του $\overline{OM}$) στόν ἄξονα τῶν τετμημένων λέγεται τετμημένη τοῦ διανύσματος· στόν ἄξονα τῶν τεταγμένων καί κατηγμένων λέγεται ἀντίστοιχα τεταγμένη καί κατηγμένη. Παριστάνουμε δέ μέ $\alpha = O\Pi$ τήν τετμημένη, μέ $\beta = OP$ τήν τεταγμένη καί μέ $\gamma = O\Sigma$ τήν κατηγμένη. Οἱ τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ λέγονται **συντεταγμένες διανύσματος** $\overline{M_1M_2}$ καί γράφουμε $\overline{M_1M_2}(\alpha,\beta,\gamma)$ σχ. 27.

Ἀπ' τό σχῆμα προκύπτει $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM} = \overline{O\Pi} + \overline{OP} + \overline{O\Sigma}$. Ἐπειδή ὅμως $\overline{O\Pi} = \alpha\bar{x}_0$, $\overline{OP} = \beta\bar{y}_0$, $\overline{O\Sigma} = \gamma\bar{z}_0$ θά ἔχουμε τελικά:

$$\overline{M_1M_2} = \alpha\overline{x_0} + \beta\overline{y_0} + \gamma\overline{z_0} \qquad (6.1)$$

Ἔστω τώρα M σημεῖο τοῦ χώρου καί (x,y,z) οἱ συντεταγμένες τοῦ $\overline{OM}$ δηλ. $O\Pi = x$, $OP = y$, $O\Sigma = z$. Ὁ x λέγεται τετμημένη τοῦ σημείου M, ὁ y τεταγμένη καί ὁ z κατηγμένη τοῦ M. Καί οἱ τρεῖς ἀριθμοί λέγονται **συντεταγμένες σημείου** M καί γράφουμε $M(x,y,z)$. Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ μονοσήμαντα μία διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν (x,y,z) καί ἀντίστροφα, σέ κάθε διατεταγμένη τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο σημεῖο M τοῦ χώρου. Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη αὐτή ἀντιστοίχηση λέγεται **ἀναλυτική παράσταση** τῶν σημείων τοῦ χώρου ὡς πρός τό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$.

Ἔστω λοιπόν δύο σημεῖα M_1, M_2 μέ συντεταγμένες $M_1(x_1,y_1,z_1)$ καί $M_2(x_2,y_2,z_2)$ καί $\overline{M_1M_2}$ τό διάνυσμα αὐτῶν μέ συντεταγμένες $\overline{M_1M_2}(\alpha,\beta,\gamma)$. Θέλουμε νά ἐκφράσουμε τά α,β,γ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν M_1, M_2.

Ἔχουμε $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$ ἤ λόγω τῆς (6.1)

$$\alpha\overline{x_0} + \beta\overline{y_0} + \gamma\overline{z_0} = (x_2\overline{x_0} + y_2\overline{y_0} + z_2\overline{z_0}) - (x_1\overline{x_0} + y_1\overline{y_0} + z_1\overline{z_0}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\overline{x_0} + (y_2 - y_1)\overline{y_0} + (z_2 - z_1)\overline{z_0}.$$

Ἀπ' τήν τελευταία σχέση προκύπτει ὅτι πρέπει:

$$\alpha = x_2 - x_1, \quad \beta = y_2 - y_1, \quad \gamma = z_2 - z_1 \qquad (6.2)$$

Ἄς ζητήσουμε τώρα νά ἐκφράσουμε τό μῆκος τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}(\alpha,\beta,\gamma)$ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων του $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ONM ἔχουμε $OM^2 = ON^2 + NM^2$. Ἀλλά $OM = M_1M_2$, $ON^2 = O\Pi^2 + \Pi N^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $NM^2 = \gamma^2$. Ἄρα ἄν λάβουμε ὑπ' ὄψη τήν (6.2) προκύπτει: $$OM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6.3)$$

Ἁπλός καί διπλός λόγος.

Θεωροῦμε τυχόν σημεῖο $M_3(x,y,z)$ τῆς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Λέμε ὅτι τό σημεῖο M_3 χωρίζει τό τμῆμα M_1M_2 σέ **μερικό** ἤ **ἁπλό λόγο** λ $(\lambda \neq -1)$ ὅταν $\lambda = \dfrac{M_1M_3}{M_3M_2}$. Ὁ μερικός λόγος λ συμβολίζεται μέ $\lambda = (M_1M_2M_3)$ σχ. 27.

Ἄν τέσσερα σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 κεῖνται ἐπ' εὐθείας ὁ λόγος

$$\rho = \frac{(M_1M_2M_3)}{(M_1M_2M_4)} = \frac{\dfrac{M_1M_3}{M_3M_2}}{\dfrac{M_1M_4}{M_4M_2}} = \frac{(M_1M_3)(M_4M_2)}{(M_3M_2)(M_4M_1)}$$

λέγεται **διπλός λόγος** τῶν τεσσάρων σημείων M_1, M_2, M_3, M_4 καί συμβολίζεται μέ $\rho = (M_1, M_2, M_3, M_4)$. Ἄν $\rho = -1$ τά τέσσερα σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 ἀποτελοῦν **ἁρμονική τετράδα** ἤ τό ἕνα ζεῦγος χωρίζει ἁρμονικά τό ἄλλο.

Θά ζητήσουμε τώρα νά ἐκφράσουμε τίς συντεταγμένες (x,y,z) τοῦ M_3 συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν M_1, M_2 καί τοῦ ἁπλοῦ λόγου λ. Ἔχουμε:

$\overline{M_1M_3} = (x-x_1)\overline{x_0} + (y-y_1)\overline{y_0} + (z-z_1)\overline{z_0}$ καί

$\overline{M_3M_2} = (x_2-x)\overline{x_0} + (y_2-y)\overline{y_0} + (z_2-z)\overline{z_0}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι

$\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_3M_2}$ ἤ ἀντικαθιστώντας τά διανύσματα $\overline{M_1M_3}$ καί $\overline{M_3M_2}$:

$(x-x_1)\overline{x_0} + (y-y_1)\overline{y_0} + (z-z_1)\overline{z_0} = \lambda(x_2-x)\overline{x_0} + \lambda(y_2-y)\overline{y_0} + \lambda(z_2-z)\overline{z_0}$ ἀπ' τίν ὁποία προκύπτει: $x-x_1 = \lambda(x_2-x)$, $y-y_1 = \lambda(y_2-y)$, $z-z_1 = \lambda(z_2-z)$.

Ἄν λύσουμε τίς σχέσεις αὐτές τήν πρώτη ὡς πρός x, τήν δεύτερη ὡς πρός y καί τήν τρίτη ὡς πρός z, ἔχουμε ἀντίστοιχα:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (6.4)$$

Ἄν θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τή διανυσματική ἀκτίνα τοῦ τυχόντος σημείου M_3 τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}$ ὅταν $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_3M_2}$ τότε, ἄν $\overline{OM_1} = \overline{r_1}$, $\overline{OM_2} = \overline{r_2}$ καί $\overline{OM_3} = \overline{r}$ ἡ ζητούμενη διανυσματική ἀκτίνα, τότε εἶναι $\overline{M_1M_3} = \overline{r} - \overline{r_1}$, $\overline{M_3M_2} = \overline{r_2} - \overline{r}$ ὁπότε ἡ σχέση $\overline{M_1M_3} = \lambda\overline{M_3M_2}$ γράφεται $\overline{r} - \overline{r_1} = \lambda(\overline{r_2} - \overline{r})$ ἤ ἄν λύσουμε ὡς πρός $\overline{r}$ προκύπτει
$$\overline{r} = \frac{\overline{r_1} + \lambda\overline{r_2}}{1+\lambda} \qquad (6.5)$$

Ἄν $\lambda = 1$ οἱ τύποι (6.4) καί (6.5) γίνονται ἀντίστοιχα
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \overline{r} = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2}}{2} \qquad (6.6)$$
πού ἐκφράζουν τίς συντεταγμένες τοῦ μέσου ἑνός διανύσματος $\overline{M_1M_2}$ ἤ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overline{r}$ τοῦ μέσου τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}$.

Ἔστω τό διάνυσμα $\overline{M_1M_2}$ ἤ τό ἴσο του $\overline{OM}(\alpha,\beta,\gamma)$. Ὀνομάζουμε **συνημίτονα κατευθύνσεως** τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ τά συνημίτονα τῶν γωνιῶν πού σχηματίζει τό $\overline{OM}$ μέ τά μοναδιαῖα διανύσματα $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0}$. Ἄν συμβολίσουμε μέ:
$\xi = \text{συν}(\overline{x_0}, \overline{OM})$, $\eta = \text{συν}(\overline{y_0}, \overline{OM})$ καί $\zeta = \text{συν}(\overline{z_0}, \overline{OM})$ εἶναι:
$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \quad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \quad \zeta = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \qquad (6.7)$$
καί ἑπομένως: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

Διανύσματα γραμμικῶς ἐξηρτημένα καί γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Ἔστω **δύο** διανύσματα $\overline{\alpha_1}$ καί $\overline{\alpha_2}$. Τά διανύσματα αὐτά λέμε ὅτι εἶναι **γραμμικῶς ἐξηρτημένα** ὅταν μποροῦν νά παρασταθοῦν μέ τή μορφή $\lambda_1\overline{\alpha_1} + \lambda_2\overline{\alpha_2} = \overline{0}$ ὅπου λ_1, λ_2 δέν εἶναι ταυτόχρονα μηδέν. Ἄν $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ τότε τά διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}$ λέγονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**.

Ἀπό τή σχέση $\lambda_1\overline{\alpha_1}+\lambda_2\overline{\alpha_2}=\overline{0}$ προκύπτει ὅτι δύο γραμμικῶς ἐξηρτημένα διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ εἶναι συγγραμμικά. Αὐτό προκύπτει ἀπ' τόν ὁρισμό δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων· διότι σέ δύο συγγραμμικά ἤ παράλληλα διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}$ ἰσχύει $\overline{\alpha_1}=\lambda\overline{\alpha_2}$. Ἀπ' τή σχέση ὅμως $\lambda_1\overline{\alpha_1}+\lambda_2\overline{\alpha_2}=\overline{0}$ προκύπτει $\lambda_1\overline{\alpha_1}=-\lambda_2\overline{\alpha_2}$ ἤ $\overline{\alpha_1}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{\alpha_2}$. Δηλ. οἱ σχέσεις $\overline{\alpha_1}=\lambda\overline{\alpha_2}$ καί $\lambda_1\overline{\alpha_1}+\lambda_2\overline{\alpha_2}=\overline{0}$ ταυτίζονται γιά $\lambda=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Ἄν ἑπομένως τά διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}$ δίδονται μέ τίς συντεταγμένες τους $\overline{\alpha_1}(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{\alpha_2}(x_2,y_2,z_2)$, ἡ σχέση $\overline{\alpha_1}=\lambda\overline{\alpha_2}$ γίνεται $x_1\overline{x_0}+y_1\overline{y_0}+z_1\overline{z_0}=\lambda x_2\overline{x_0}+\lambda y_2\overline{y_0}+\lambda z_2\overline{z_0}$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει: $x_1=\lambda x_2$, $y_1=\lambda y_2$, $z_1=\lambda z_2$. ἤ τελικά

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda \qquad (6.8)$$

δηλ γιά νά εἶναι δύο διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}$ **συγγραμμικά** πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ (6.8).

Ὁμοίως **τρία** διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}$ λέμε ὅτι εἶναι **γραμμικῶς ἐξηρτημένα** ἄν μποροῦν νά παρασταθοῦν μέ τή μορφή $\lambda_1\overline{\alpha_1}+\lambda_2\overline{\alpha_2}+\lambda_3\overline{\alpha_3}=\overline{0}$ ὅπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ δέν εἶναι ὅλοι ταυτόχρονα μηδέν. Ἄν $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ τότε τά διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}$ λέγονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**.

Ἀποδεικνύεται ὅτι τρία γραμμικῶς ἐξηρτημένα διανύσματα $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}$ εἶναι συνεπίπεδα δηλ. βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

Ἄν $\overline{\alpha_1}(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{\alpha_2}(x_2,y_2,z_2)$ καί $\overline{\alpha_3}(x_3,y_3,z_3)$ εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν τριῶν διανυσμάτων τότε ἀπ' τή σχέση $\lambda_1\overline{\alpha_1}+\lambda_2\overline{\alpha_2}+\lambda_3\overline{\alpha_3}=\overline{0}$ προκύπτει λόγω τῆς (6.1):

$$\lambda_1(x_1\overline{x_0}+y_1\overline{y_0}+z_1\overline{z_0})+\lambda_2(x_2\overline{x_0}+y_2\overline{y_0}+z_2\overline{z_0})+\lambda_3(x_3\overline{x_0}+y_3\overline{y_0}+z_3\overline{z_0})=\overline{0}$$

ἤ $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\overline{x_0} + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3)\overline{y_0} + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3)\overline{z_0} = \overline{0}$ καί ἐπειδή $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0} \neq 0$ (ὡς μοναδιαῖα διανύσματα) προκύπτει:

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0, \quad \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0 \quad (1)$

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) εἶναι ὁμογενές μέ ἀγνώστους τά $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Γιά νά ἔχει λύση διάφορη τῆς προφανοῦς $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ἐπειδή ὑποθέσαμε ὅτι τά $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ δέν εἶναι ὅλα συγχρόνως μηδέν, θά πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ νά εἶναι μηδέν. Δηλ.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ἤ} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \mathbf{(6.9)}$$

Ἡ σχέση (6.9) εἶναι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε τά διανύσματα a_1, a_2, a_3 νά εἶναι **συνεπίπεδα**.

Ὁμοίως **n** διανύσματα $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ λέγονται **γραμμικῶς ἐξηρτημένα** ὅταν ὑπάρχουν n ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in R$ ὄχι ὅλοι ταυτόχρονα μηδέν ὥστε $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \cdots + \lambda_n\overline{a_n} = \overline{0}$ **(6.10)**

Στήν περίπτωση αὐτή ἕνα τουλάχιστον τῶν $\overline{a_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδιασμός τῶν ἄλλων. Ἄν $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ τότε τά διανύσματα $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ λέγονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**. Ἀπ' τόν ὁρισμό αὐτό προκύπτει:

α) Δύο διανύσματα μή συγγραμμικά εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

β) Τρία διανύσματα μή συνεπίπεδα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Τέσσερα διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}$ εἶναι πάντοτε γραμμικῶς ἐξηρτημένα· π.χ. κάθε διάνυσμα τοῦ χώρου ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδιασμός τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων (τριῶν) ἑνός συστήματος καρτεσιανῶν συντεταγμένων ὅπως προκύπτει ἀπό τόν (6.1).

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τά μοναδιαῖα διανύσματα $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0}$ ἀποτελοῦν μία **βάση** γιά τό σύνολο τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου.

Όλοι οἱ ὁρισμοί πού δώσαμε γιά τίς συντεταγμένες σημείου καί διανύσματος στόν **τρισδιάστατο** χῶρο ἰσχύουν καί γιά τίς συντεταγμένες σημείου καί διανύσματος στό **διδιάστατο** χῶρο (ἐπίπεδο) ἄν δέν ὑπάρχει ὁ ἄξονας oz ἤ ἄν $z=0$, καθώς ἐπίσης καί στό **μονοδιάστατο** χῶρο (εὐθεῖα) ἄν δέν ὑπάρχουν οἱ ἄξονες oz καί oy ἤ ἄν $z=0$ καί $y=0$.
Τότε οἱ τύποι (6.1), (6.2), (6.3), (6.4), (6.7) καί (6.8) γίνονται:

1. Στό **ἐπίπεδο.**

$$\overline{M_1M_2} = \alpha\overline{x_0} + \beta\overline{y_0} \qquad (6.1')$$

$$\alpha = x_2 - x_1, \quad \beta = y_2 - y_1 \qquad (6.2')$$

$$OM = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \qquad (6.3')$$

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (6.4')$$

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad (6.7')$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \lambda \qquad (6.8')$$

2. Στήν **εὐθεία.**

$$\overline{M_1M_2} = \alpha\overline{x_0} \qquad (6.1'')$$

$$\alpha = x_2 - x_1 \qquad (6.2'')$$

$$OM = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = x_2 - x_1 \qquad (6.3'')$$

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad (6.4'')$$

$$\xi = \frac{\alpha}{|\overline{\alpha}|} \left(\begin{array}{l} \alpha \text{ προβ. τοῦ} \\ \overline{\alpha} \text{ στό } \overline{x_0} \end{array}\right) \qquad (6.7'')$$

$$x_1 = \lambda x_2 \qquad (6.8'')$$

Εἰδικά στό ἐπίπεδο ὁρίζουμε ὡς **συντελεστή κατευθύνσεως** ἑνός διανύσματος $\overline{r}(\alpha,\beta)$ τό λόγο $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \lambda$ (6.11)
Ἀπ' τόν ὁρισμό αὐτό προκύπτει ὅτι γιά νά εἶναι δύο διανύσματα $\overline{r_1}(\alpha_1,\beta_1)$ καί $\overline{r_2}(\alpha_2,\beta_2)$ στό ἐπίπεδο συγγραμμικά πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν ἴσους συντελεστές κατευθύνσεως ὅπως προκύπτει ἀπ' τόν τύπο συγγραμμικότητας δύο διανυσμάτων (6.8') στό ἐπίπεδο.

Στήν ἀρχή ὁρίσαμε γινόμενο διανύσματος $\overline{\alpha}$ ἐπί λ ($\lambda \in R$). Τώρα θά ὁρίσουμε γινόμενο διανύσματος $\overline{\alpha}$ ἐπί ἕνα διάνυσμα $\overline{\beta}$.

Διακρίνουμε διάφορα τέτοια είδη γινομένων:

1. Ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Ἔστω τά διανύσματα $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ μή μηδενικά. Ὁ ἀριθμός (πραγμ.) $\alpha\cdot\beta\cdot συν(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ λέγεται **ἐσωτερικό** γινόμενο τῶν διανυσμάτων $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ καί παριστάνεται μέ $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = \alpha\cdot\beta\cdot συν(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ ὅπου α, β εἶναι τά μέτρα τῶν $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Ὅταν ἕνα ἀπό τά $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ εἶναι μηδενικό διάνυσμα, τότε ὁρίζουμε $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=0$.

Ἀπ' τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=0$ εἴτε ὅταν $\overline{\alpha}=0$ εἴτε ὅταν $\overline{\beta}=0$ εἴτε ὅταν $συν(\overline{\alpha},\overline{\beta})=0$ δηλ. ὅταν τά $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ εἶναι κάθετα μεταξύ τους.

Στό ἐσωτερικό γινόμενο ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1. $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = \overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}$ ἀντιμεταθετική

2. $\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}+\overline{\gamma}) = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}+\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma}$ ἐπιμεριστική

3. $\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma}) \neq (\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\cdot\overline{\gamma}$ δηλ. δέν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικότητα στόν πολλαπλασιασμό ἐσωτερικῶς.

4. $\overline{x_0}\cdot\overline{x_0} = \overline{y_0}\cdot\overline{y_0} = \overline{z_0}\cdot\overline{z_0} = 1$

5. $\overline{x_0}\cdot\overline{y_0} = \overline{y_0}\cdot\overline{z_0} = \overline{z_0}\cdot\overline{x_0} = 0$

6. $\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha} = |\overline{\alpha}|^2$ ἤ $\overline{\alpha}^2 = |\overline{\alpha}|^2$ ὄχι ὅμως καί $\overline{\alpha}^3 = |\overline{\alpha}|^3$ διότι $\overline{\alpha}^3 = |\overline{\alpha}|^2\cdot\overline{\alpha}$ εἶναι διάνυσμα συγγραμμικό πρός τό $\overline{\alpha}$, ἐνῶ $|\overline{\alpha}|^3$ εἶναι ἀριθμός.

7. Ἄν $\overline{\alpha} = x_1\overline{x_0}+y_1\overline{y_0}+z_1\overline{z_0}$, $\overline{\beta} = x_2\overline{x_0}+y_2\overline{y_0}+z_2\overline{z_0}$, τότε

$$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = (x_1\overline{x_0}+y_1\overline{y_0}+z_1\overline{z_0})\cdot(x_2\overline{x_0}+y_2\overline{y_0}+z_2\overline{z_0}) = x_1x_2\overline{x_0}\cdot\overline{x_0}+x_1y_2\overline{x_0}\overline{y_0}+$$
$$+x_1z_2\overline{x_0}\overline{z_0}+y_1x_2\overline{y_0}\cdot\overline{x_0}+y_1y_2\overline{y_0}\cdot\overline{y_0}+y_1z_2\overline{y_0}\overline{z_0}+z_1x_2\overline{z_0}\cdot\overline{x_0}+$$
$$+z_1y_2\overline{z_0}\cdot\overline{y_0}+z_1z_2\overline{z_0}\cdot\overline{z_0}.$$

Ἄν λάβουμε ὑπ' ὄψη τίς ἰδιότητες 4. καί 5. προκύπτει

$$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (6.12)$$

Ἀπ' τή σχέση (6.12) προκύπτει ἡ συνθήκη καθετότητος δύο δια-

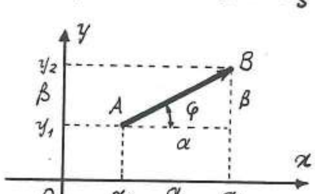
νυσμάτων $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ στό χώρο. Δηλ. ἄν $\overline{\alpha} \perp \overline{\beta}$ τότε ἐπειδή $συν(\overline{\alpha},\overline{\beta}) = 0$ θά εἶναι $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.
Στό ἐπίπεδο ἡ συνθήκη καθετότητος γίνεται $(z_1 = z_2 = 0)$:
$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ἤ $x_1x_2 = -y_1y_2$ ἤ $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2} = -1$ δηλ.

$$\lambda_1\cdot\lambda_2 = -1 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ συντελεστές κατευθύνσεως τῶν } \overline{\alpha}, \overline{\beta}) \qquad (6.13)$$

Ἀκόμα ἀπ' τή σχέση (6.12) ὑπολογίζεται ἡ γωνία τῶν δύο διανυσμάτων. Εἶναι $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = \alpha\beta\, συν(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ καί
$συν(\overline{\alpha},\overline{\beta}) = \dfrac{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}}{\alpha\beta}$ ἤ λόγω τῆς (6.12) καί (6.3) ἔχουμε

$$συν(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (6.14)$$

Ἡ γωνία τῶν δύο διανυσμάτων ὑπολογίζεται καί ἀπ' τούς συντελεστές κατευθύνσεως ὡς ἑξῆς: Ἀπ' τόν τύπο (6.11) προκύπτει (σχ. 28)



Σχ. 28

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda = εφφ$. (φ εἶναι ἡ γωνία τοῦ διανύσματος $\overline{AB}$ μέ τό θετικό ἄξονα οx. Ἑπομένως ἄν ἔχουμε δύο διανύσματα (στό ἐπίπεδο πάντα) ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων αὐτῶν θά εἶναι $\varphi_2 - \varphi_1 = \omega$ ὅπου φ_1, φ_2 εἶναι ἀντίστοιχα οἱ γωνίες τῶν διανυσμάτων $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ μέ τόν θετικό ἄξονα οx. Ἀλλά ἀπό τήν Τριγωνομετρία ἔχουμε ὅτι:
$εφ(\varphi_2 - \varphi_1) = εφ\omega = \dfrac{εφ\varphi_2 - εφ\varphi_1}{1 + εφ\varphi_1\cdot εφ\varphi_2}$. Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη ὅτι $εφ\varphi_1 = \lambda_1$, $εφ\varphi_2 = \lambda_2$ (ὅπου λ_1, λ_2 οἱ συντελεστές κατευθύνσεως τῶν $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$) προκύπτει

$$εφ\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\cdot\lambda_2} \qquad (6.15)$$

Τό ἐσωτερικό γινόμενο βρίσκει ἐφαρμογή στή Φυσική, ὅταν π.χ. τό σημεῖο ἐφαρμογῆς μιᾶς δύναμης $\overline{F}$ μετακινηθεῖ κατά τό διάστημα $\overline{AB}$ (πού σχηματίζει γωνία θ μέ τήν $\overline{F}$) παράγοντας ἔργο $W = \overline{F}\cdot\overline{AB}\cdot συν(\overline{F}, \overline{AB})$.

2. Ἐξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Ἔστω τά διανύσματα $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ μή μηδενικά. Τό διάνυσμα $\overline{\gamma}$ πού ἔχει μέτρο $\alpha\cdot\beta\cdot ημ(\overline{\alpha},\overline{\beta})$, διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο τῶν $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ καί φορά τέτοια ὥστε ἡ διατεταγμένη τριάδα $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ νά ἀποτελεῖ δεξιόστροφο σύστημα, λέγεται **ἐξωτερικό** γινόμενο τῶν $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ καί παριστάνεται μέ τό σύμβολο $\overline{\gamma}=\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}$ ἤ $[\overline{\alpha},\overline{\beta}]$.
Ὅταν ἕνα ἀπό τά $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ εἶναι μηδενικό, τότε ὁρίζουμε $\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}=\overline{0}$.
Ἀπ' τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι $\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}=\overline{0}$ εἴτε ὅταν $\overline{\alpha}=\overline{0}$, εἴτε ὅταν $\overline{\beta}=\overline{0}$, εἴτε ὅταν $ημ(\overline{\alpha},\overline{\beta})=0$ δηλ ὅταν τά $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ εἶναι παράλληλα μεταξύ τους· ἀκόμη ὅτι τό ἐξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων εἶναι διάνυσμα, σέ ἀντίθεση μέ τό ἐσωτερικό αὐτῶν πού εἶναι καθαρός ἀριθμός.

Στό ἐξωτερικό γινόμενο ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1. $\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}=-\overline{\beta}\wedge\overline{\alpha}$ δηλ δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα.

2. $\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}+\overline{\gamma})=\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}+\overline{\alpha}\wedge\overline{\gamma}$ ἐπιμεριστική

3. $\lambda\cdot(\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})=(\lambda\overline{\alpha})\wedge\overline{\beta}=\overline{\alpha}\wedge(\lambda\overline{\beta})=(\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})\cdot\lambda$ $(\lambda\in R)$

4. $\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})\neq(\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})\wedge\overline{\gamma}$ δηλ δέν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐξωτερικῶς.

5. Τό μέτρο τοῦ $\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}$ δηλ τό $\alpha\cdot\beta\cdot ημ(\alpha,\beta)$ εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζεται ἀπό τά $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$, ὅταν τά $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ γίνουν ἐφαρμοστά σέ σημεῖο O.

6. $\overline{x_0}\wedge\overline{x_0}=\overline{y_0}\wedge\overline{y_0}=\overline{z_0}\wedge\overline{z_0}=0$ ἐπειδή $ημ(\overline{x_0},\overline{x_0})=$
$=ημ(\overline{y_0},\overline{y_0})=ημ(\overline{z_0},\overline{z_0})=0$

7. $\overline{x_0}\wedge\overline{y_0}=\overline{z_0}$, $\overline{y_0}\wedge\overline{z_0}=\overline{x_0}$, $\overline{z_0}\wedge\overline{x_0}=\overline{y_0}$, ἐπειδή τά $\overline{x_0}$, $\overline{y_0}$, $\overline{z_0}$ ἀποτελοῦν, κυκλικά λαμβανόμενα πάντοτε, δεξιόστροφο σύστημα.

8. Ἄν $\overline{\alpha} = x_1\overline{x_0} + y_1\overline{y_0} + z_1\overline{z_0}$, $\overline{\beta} = x_2\overline{x_0} + y_2\overline{y_0} + z_2\overline{z_0}$ τότε

$$\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta} = (x_1\overline{x_0} + y_1\overline{y_0} + z_1\overline{z_0})\wedge(x_2\overline{x_0} + y_2\overline{y_0} + z_2\overline{z_0}) = x_1x_2\,\overline{x_0}\wedge\overline{x_0} + x_1y_2\,\overline{x_0}\wedge\overline{y_0} + x_1z_2\,\overline{x_0}\wedge\overline{z_0} + y_1x_2\,\overline{y_0}\wedge\overline{x_0} + y_1y_2\,\overline{y_0}\wedge\overline{y_0} + y_1z_2\,\overline{y_0}\wedge\overline{z_0} + z_1x_2\,\overline{z_0}\wedge\overline{x_0} + z_1y_2\,\overline{z_0}\wedge\overline{y_0} + z_1z_2\,\overline{z_0}\wedge\overline{z_0}.$$

Ἄν λάβουμε ὑπ' ὄψιν τίς ἰδιότητες 6. 7. καί 1. προκύπτει:

$\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta} = (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{x_0} - (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{y_0} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{z_0}$ ἤ

μέ ὁρίζουσα:
$$\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta} = \begin{vmatrix} \overline{x_0} & \overline{y_0} & \overline{z_0} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (6.16)$$

δηλ. τό διάνυσμα $\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}$ ἔχει συντεταγμένες τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας αὐτῆς δηλ. $\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta} = \overline{\gamma}(y_1z_2 - y_2z_1,\ x_2z_1 - x_1z_2,\ x_1y_2 - x_2y_1)$.

Ἀπ τήν ἰδιότητα 6. προκύπτει ὅτι γιά νά εἶναι δύο μή μηδενικά διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει καί ἀρκεῖ τό ἐξωτερικό γινόμενο αὐτῶν νά εἶναι μηδέν.

3. Μικτό γινόμενο τριῶν διανυσμάτων.

Ἔστω τά διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ μή μηδενικά. Καλεῖται **μικτό** γινόμενο κατά τήν τάξη αὐτή τό $\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})$. Προφανῶς τό μικτό γινόμενο τῶν $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ σάν ἐσωτερικό γινόμενο τοῦ $\overline{\alpha}$ μέ τό $\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma}$ εἶναι ἀριθμός, ὁ $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\ \eta\mu(\overline{\beta},\overline{\gamma})\cdot\sigma\upsilon\nu(\overline{\alpha}, \overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})$.

Ἄν ἕνα ἀπό τά τρία διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ εἶναι μηδενικό, τότε ὁρίζουμε σάν μικτό γινόμενο τῆς διατεταγμένης αὐτῆς τριάδας τό 0.

Στό μικτό γινόμενο ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1. $\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma}) = \overline{\beta}\cdot(\overline{\gamma}\wedge\overline{\alpha}) = \overline{\gamma}(\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})$

2. Ἄν $\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma}) = 0$ μέ $\overline{\alpha}\neq\overline{0}$, $\overline{\beta}\neq\overline{0}$, $\overline{\gamma}\neq\overline{0}$ τότε τά $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ εἶναι συνεπίπεδα.

3. Ἄν τά μή συνεπίπεδα διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ ἀχθοῦν μέ καινή ἀρχή O τότε ὁ ἀριθμός $\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου πού σχηματίζεται μέ ἀκμές τά $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$.

4. Ἄν $\overline{\alpha}=x_1\overline{x_0}+y_1\overline{y_0}+z_1\overline{z_0}$, $\overline{\beta}=x_2\overline{x_0}+y_2\overline{y_0}+z_2\overline{z_0}$ καί $\overline{\gamma}=x_3\overline{x_0}+y_3\overline{y_0}+z_3\overline{z_0}$ τότε τό μικτό γινόμενο τῶν $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ εὑρίσκεται, ἄν ληφθοῦν ὑπ' ὄψη οἱ σχέσεις (6.12), (6.16), ὅτι εἶναι:

$$\overline{\alpha}\cdot(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (6.17)$$

Ἄν ἡ ὁρίζουσα (6.17) εἶναι μηδέν τότε ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ εἶναι μηδέν, δηλ τά $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ εἶναι συνεπίπεδα ὁπότε προκύπτει ὁ ἴδιος τύπος (6.9) πού δίνει τήν ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι τρία διανύσματα συνεπίπεδα.

4. Δισεξωτερικό γινόμενο τριῶν διανυσμάτων.

Ἔστω τά διανύσματα $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ μή μηδενικά. Καλεῖται **δισεξωτερικό** γινόμενο κατά τήν τάξη αὐτή τό $\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})$.
Ἄν ἕνα ἀπό τά διανύσματα $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ εἶναι μηδενικό, ὁρίζουμε ὡς δισεξωτερικό γινόμενο τό μηδενικό διάνυσμα.

Στό δισεξωτερικό γινόμενο ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1. $\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})=(\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma})\overline{\beta}-(\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\overline{\gamma}$ ἐνῶ

2. $(\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})\wedge\overline{\gamma}=(\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma})\overline{\beta}-(\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma})\overline{\alpha}$ δηλ γενικῶς δέν ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα

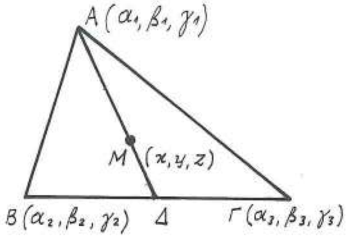
3. Ἄν $\overline{\alpha}=x_1\overline{x_0}+y_1\overline{y_0}+z_1\overline{z_0}$, $\overline{\beta}=x_2\overline{x_0}+y_2\overline{y_0}+z_2\overline{z_0}$ καί $\overline{\gamma}=x_3\overline{x_0}+y_3\overline{y_0}+z_3\overline{z_0}$ τότε λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})$ καί τόν τύπο (6.16), ἔχουμε:

$$\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma})=\begin{vmatrix} \overline{x_0} & \overline{y_0} & \overline{z_0} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ y_2z_3-y_3z_2 & z_2x_3-x_2z_3 & x_2y_3-x_3y_2 \end{vmatrix} \qquad (6.18)$$

Ἀσκήσεις.

6.1. Ἄν $A(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\Gamma(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ στό χῶρο, νά εὑρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

Λύση. Τό μέσον Δ τῆς ΒΓ ἔχει συντεταγμένες (τύπος (6.6)): $\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$, $\dfrac{\beta_2+\beta_3}{2}$, $\dfrac{\gamma_2+\gamma_3}{2}$. Τό Μ διαιρεῖ τήν ΑΔ σέ λόγο $\lambda = (A\Delta M) = \dfrac{A\Delta}{M\Delta} = \dfrac{2}{1} = 2$. Ἄν τό Μ ἔχει συντεταγμένες x, y, z αὐτές θά δίδονται ἀπ' τούς τύπους (6.4) γιά $\lambda = 2$. Εἶναι



Σχ. 29

$$x = \frac{\alpha_1 + 2\cdot\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{1+2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}$$

Ἀνάλογα εὑρίσκουμε $y = \dfrac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{3}$ καί $z = \dfrac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{3}$.

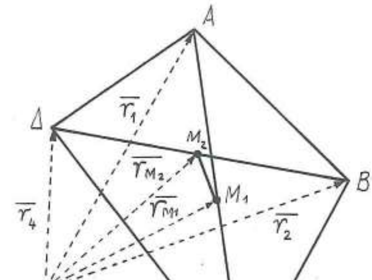
6.2. Νά προσδιορισθεῖ τό α ἔτσι ὥστε τό σημεῖο $M(\alpha, 1, 1)$ νά ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί ἀπό τό σημεῖο $N(1, 2, 3)$.

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (6.3) τοῦ μήκους ἑνός διανύσματος προκύπτει $OM^2 = \alpha^2 + 1^2 + 1^2 = \alpha^2 + 2$ (ὅπου Ο ἡ ἀρχή τῶν συντεταγμένων $O(0,0,0)$). $MN^2 = (\alpha-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 5$ δηλ. θά πρέπει $MO = MN$ ἤ $\alpha^2 + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 5$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

6.3. Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι τυχόν τετράπλευρο στό χῶρο καί

M_1, M_2 τά μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ νά δειχθεῖ ὅτι:
$\overline{AB} + \overline{A\Delta} + \overline{\Gamma B} + \overline{\Gamma\Delta} = 4\overline{M_1M_2}$.

Λύση. Ἔστω $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r_4}$ οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου μέ ἀρχή τῶν συντεταγμένων τό σημεῖο Ο. Τότε τό διάνυσμα θέσεως τοῦ M_1 εἶναι (τύπος (6.6)) $\overline{r_{M_1}} = \dfrac{\overline{r_1}+\overline{r_3}}{2}$ τοῦ δέ M_2 $\overline{r_{M_2}} = \dfrac{\overline{r_2}+\overline{r_4}}{2}$ καί ἑπομένως: $\overline{M_1M_2} = \dfrac{\overline{r_2}+\overline{r_4}}{2} - \dfrac{\overline{r_1}+\overline{r_3}}{2}$ καί $4\overline{M_1M_2} = 2(\overline{r_2}+\overline{r_4}-\overline{r_1}-\overline{r_3})$. (1) Ἐπίσης ἔχουμε $\overline{AB} = \overline{r_2}-\overline{r_1}$, $\overline{A\Delta} = \overline{r_4}-\overline{r_1}$,

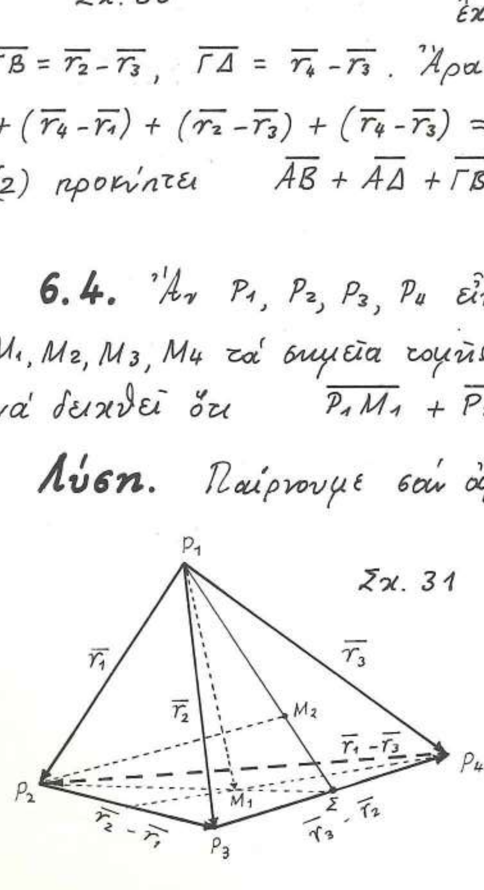


Σχ. 30

$\overline{\Gamma B} = \overline{r_2}-\overline{r_3}$, $\overline{\Gamma\Delta} = \overline{r_4}-\overline{r_3}$. Ἄρα $\overline{AB}+\overline{A\Delta}+\overline{\Gamma B}+\overline{\Gamma\Delta} = (\overline{r_2}-\overline{r_1}) + (\overline{r_4}-\overline{r_1}) + (\overline{r_2}-\overline{r_3}) + (\overline{r_4}-\overline{r_3}) = 2(\overline{r_2}+\overline{r_4}-\overline{r_1}-\overline{r_3})$ (2). Ἀπ' τίς (1), (2) προκύπτει $\overline{AB}+\overline{A\Delta}+\overline{\Gamma B}+\overline{\Gamma\Delta} = 4\overline{M_1M_2}$.

6.4. Ἄν P_1, P_2, P_3, P_4 εἶναι οἱ κορυφές τετραέδρου καί M_1, M_2, M_3, M_4 τά σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, νά δειχθεῖ ὅτι $\overline{P_1M_1} + \overline{P_2M_2} + \overline{P_3M_3} + \overline{P_4M_4} = \overline{0}$

Λύση. Παίρνουμε σάν ἀρχή τῶν ἀξόνων τό P_1. Τότε



Σχ. 31

$\overline{P_1P_2} = \overline{r_1}$, $\overline{P_1P_3} = \overline{r_2}$, $\overline{P_1P_4} = \overline{r_3}$, $\overline{P_2P_3} = \overline{r_2}-\overline{r_1}$, $\overline{P_3P_4} = \overline{r_3}-\overline{r_2}$, $\overline{P_4P_2} = \overline{r_1}-\overline{r_3}$. Τό διάνυσμα θέσεως τοῦ M_1 εἶναι:
$\overline{P_1M_1} = \overline{P_1P_2} + \dfrac{2}{3}\overline{P_2\Sigma}$. (1). Εἶναι ὅμως $\overline{P_2\Sigma} = \dfrac{\overline{P_2P_3}+\overline{P_2P_4}}{2} =$

$= \frac{\overline{P_2P_3} - \overline{P_4P_2}}{2} = \frac{\overline{r_2} - \overline{r_1} - (\overline{r_1} - \overline{r_3})}{2} = \frac{\overline{r_2} + \overline{r_3} - 2\overline{r_1}}{2}$. Ἄρα

ἡ (1) γίνεται $\overline{P_1M_1} = \overline{r_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\overline{r_2} + \overline{r_3} - 2\overline{r_1}}{2} = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2} + \overline{r_3}}{3}$

Τό $\overline{P_2M_2} = \overline{P_2P_1} + \frac{2}{3}\overline{P_1\Sigma} = -\overline{r_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\overline{r_2} + \overline{r_3}}{2} = \frac{-3\overline{r_1} + \overline{r_2} + \overline{r_3}}{3}$

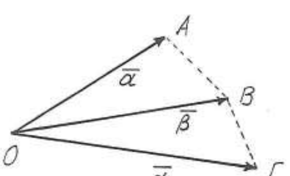
Ὁμοίως εὑρίσκουμε $\overline{P_3M_3} = \frac{\overline{r_1} - 3\overline{r_2} + \overline{r_3}}{3}$, $\overline{P_4M_4} = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2} - 3\overline{r_3}}{3}$

ἄρα $\overline{P_1M_1} + \overline{P_2M_2} + \overline{P_3M_3} + \overline{P_4M_4} = \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2} + \overline{r_3}}{3} +$

$+ \frac{-3\overline{r_1} + \overline{r_2} + \overline{r_3}}{3} + \frac{\overline{r_1} - 3\overline{r_2} + \overline{r_3}}{3} + \frac{\overline{r_1} + \overline{r_2} - 3\overline{r_3}}{3} = \overline{0}$

6.5. Γιά νά εἶναι τά πέρατα Α, Β, Γ τῶν διανυσμάτων $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$, τά ὁποῖα λαμβάνονται ἀπ' τήν ἀρχή Ο, σέ εὐθεία, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ὅλοι διάφοροι τοῦ μηδενός τέτοιοι ὥστε $\lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\beta} + \lambda_3\overline{\gamma} = \overline{0}$ καί $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Λύση. Γιά νά βρίσκονται τά Α, Β, Γ σέ εὐθεία πρέπει τά διανύσματα $\overline{AB}$ καί $\overline{A\Gamma}$ νά εἶναι συγγραμμικά δηλ. $\overline{AB} = k\overline{B\Gamma}$. Εἶναι $\overline{AB} = \overline{\beta} - \overline{\alpha}$ καί $\overline{B\Gamma} = \overline{\gamma} - \overline{\beta}$ δηλ. $\overline{\beta} - \overline{\alpha} = k(\overline{\gamma} - \overline{\beta})$ ἤ $-\overline{\alpha} + (1+k)\overline{\beta} - k\overline{\gamma} = \overline{0}$. Ἄρα ὑπάρχουν 3 ἀριθμοί $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1+k$, $\lambda_3 = -k \neq 0$ τέτοιοι ὥστε $\lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\beta} + \lambda_3\overline{\gamma} = \overline{0}$ καί $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.



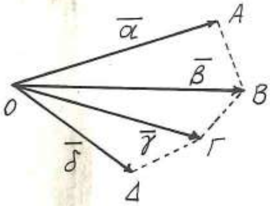
Σχ. 32

Ἀντίστροφα. Ἔστω ὅτι ὑπάρχουν 3 ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιοι ὥστε $\lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\beta} + \lambda_3\overline{\gamma} = \overline{0}$ (1), $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (2). Λύνοντας τήν (2) ὡς πρός ἕνα τῶν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ π.χ. λ_1 ἔχουμε $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$. Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή τοῦ λ_1 στήν (1) ἔχουμε: $-\lambda_2\overline{\alpha} - \lambda_3\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\beta} + \lambda_3\overline{\gamma} = \overline{0}$ ἤ $\lambda_2(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) = \lambda_3(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})$ ἤ $\overline{\beta} - \overline{\alpha} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})$. Ἀλλά $\overline{\beta} - \overline{\alpha} = \overline{AB}$, $\overline{\alpha} - \overline{\gamma} = -(\overline{\gamma} - \overline{\alpha}) = -\overline{A\Gamma}$ δηλ. εἶναι: $\overline{AB} = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \cdot \overline{A\Gamma}$ ἤτοι τά

$\overline{AB}$ καί $\overline{A\Gamma}$ εἶναι συγγραμμικά, ἄρα τά ἄκρα τους κεῖνται σέ εὐθεία (ἐφ' ὅσον ἔχουν κοινή ἀρχή A).

6.6. Γιά νά εἶναι τά πέρατα A, B, Γ, Δ τεσσάρων διανυσμάτων $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$, πού ἔχουν κοινή ἀρχή O, στό ἴδιο ἐπίπεδο, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ὑπάρχουν τέσσερες ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ὅλοι διάφοροι τοῦ μηδενός, τέτοιοι ὥστε νά εἶναι $\lambda_1\bar{\alpha} + \lambda_2\bar{\beta} + \lambda_3\bar{\gamma} + \lambda_4\bar{\delta} = \bar{O}$ καί $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

Λύση. Γιά νά βρίσκονται τά A, B, Γ, Δ στό ἴδιο ἐπίπεδο, πρέπει τά διανύσματα $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}, \overline{\Gamma\Delta}$ νά εἶναι συνεπίπεδα· δηλ. πρέπει νά ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοί k, λ, μ ὄχι ὅλοι ταυτόχρονα μηδέν ὥστε $k\overline{AB} + \lambda\overline{B\Gamma} + \mu\overline{\Gamma\Delta} = \bar{O}$ ἤ



Σχ 33

$k(\bar{\beta}-\bar{\alpha}) + \lambda(\bar{\gamma}-\bar{\beta}) + \mu(\bar{\delta}-\bar{\gamma}) = \bar{O}$ ἤ μετά τίς πράξεις $-k\bar{\alpha} + (k-\lambda)\bar{\beta} + (\lambda-\mu)\bar{\gamma} + \mu\bar{\delta} = \bar{O}$. Ἄρα ὑπάρχουν 4 ἀριθμοί $\lambda_1 = -k$, $\lambda_2 = k-\lambda$, $\lambda_3 = \lambda-\mu$, $\lambda_4 = \mu$ τέτοιοι ὥστε $\lambda_1\bar{\alpha} + \lambda_2\bar{\beta} + \lambda_3\bar{\gamma} + \lambda_4\bar{\delta} = \bar{O}$ καί $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

Ἀντίστροφα. Ἔστω ὅτι ὑπάρχουν 4 ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ὥστε: $\lambda_1\bar{\alpha} + \lambda_2\bar{\beta} + \lambda_3\bar{\gamma} + \lambda_4\bar{\delta} = \bar{O}$ (1), $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ (2). Ἀπ' τή (2) λύνοντας π.χ. ὡς πρός λ_4 ἔχουμε $\lambda_4 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$. Θέτοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ λ_4 στήν (1) ἔχουμε:

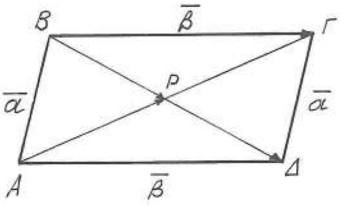
$\lambda_1(\bar{\alpha}-\bar{\delta}) + \lambda_2(\bar{\beta}-\bar{\delta}) + \lambda_3(\bar{\gamma}-\bar{\delta}) = \bar{O}$ ἤ

$\lambda_1(\bar{\delta}-\bar{\alpha}) + \lambda_2(\bar{\delta}-\bar{\beta}) + \lambda_3(\bar{\delta}-\bar{\gamma}) = \bar{O}$ ἤ

$\lambda_1\overline{A\Delta} + \lambda_2\overline{B\Delta} + \lambda_3\overline{\Gamma\Delta} = \bar{O}$ πού σημαίνει ὅτι τά διανύσματα $\overline{A\Delta}, \overline{B\Delta}, \overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι συνεπίπεδα, ἄρα τά A, B, Γ, Δ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο (ἐφ' ὅσον ἔχουν κοινό πέρας).

6.7. Νά ἀποδειχθεῖ διανυσματικά ὅτι οἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

Λύση. Εἶναι $\overline{B\Delta} = \bar{\beta} - \bar{\alpha}$ ἄρα $\overline{BP} = \lambda\,\overline{B\Delta} = \lambda(\bar{\beta}-\bar{\alpha})$. Ἐπίσης $\overline{A\Gamma} = \bar{\alpha}+\bar{\beta}$ ἄρα $\overline{AP} = \mu\,\overline{A\Gamma} = \mu(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$. Ἀλλά $\overline{AB} = \overline{AP}+\overline{PB} = \overline{AP}-\overline{BP}$ ἄρα $\bar{\alpha} = \mu(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) - \lambda(\bar{\beta}-\bar{\alpha})$ ἤ $(1-\mu-\lambda)\bar{\alpha} + (\lambda-\mu)\bar{\beta} = \bar{0}$ · ἐπειδή δέ τά $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ εἶναι μή συγγραμμικά προκύπτει ὅτι $1-\mu-\lambda=0$ καί $\lambda-\mu=0$ (1). Λύνοντας τό σύστημα (1) εὑρίσκουμε $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ δηλ. τό P εἶναι μέσον τῶν $\overline{B\Delta}, \overline{A\Gamma}$.



Σχ 34

6.8. Ἄν $\overline{r_1} = 2\overline{x_0} - \overline{y_0} + \overline{z_0}$, $\overline{r_2} = \overline{x_0} + 3\overline{y_0} - 2\overline{z_0}$, $\overline{r_3} = -2\overline{x_0} + \overline{y_0} - 3\overline{z_0}$ καί $\overline{r_4} = 3\overline{x_0} + 2\overline{y_0} + 5\overline{z_0}$, νά εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιοι ὥστε $\overline{r_4} = \lambda_1\overline{r_1} + \lambda_2\overline{r_2} + \lambda_3\overline{r_3}$ (1).

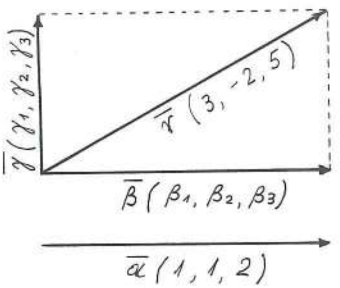
Λύση. Θέτουμε στή (1) ὅπου $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}, \overline{r_4}$ τά ἴσα τους καί ἔχουμε: $3\overline{x_0} + 2\overline{y_0} + 5\overline{z_0} = \lambda_1(2\overline{x_0} - \overline{y_0} + \overline{z_0}) + \lambda_2(\overline{x_0} + 3\overline{y_0} - 2\overline{z_0}) + \lambda_3(-2\overline{x_0} + \overline{y_0} - 3\overline{z_0})$ ἤ ἐκτελώντας τίς πράξεις καί μεταφέροντας ὅλους τούς ὅρους στό πρῶτο μέλος μέ κοινό παράγοντα τά $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0}$ προκύπτει:

$$(3-2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3)\overline{x_0} + (2+\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3)\overline{y_0} + (5-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)\overline{z_0} = \bar{0}$$

Ἐπειδή δέ τά $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0}$ εἶναι μή συνεπίπεδα θά εἶναι κατ' ἀνάγκη $3-2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0$, $2+\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3=0$, $5-\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$ (2). Λύνοντας τό σύστημα (2) εὑρίσκουμε $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-3$.

6.9. Νά ἀναλυθεῖ τό διάνυσμα $\bar{r}(3,-2,5)$ σέ δύο κάθετες συνιστώσες ἀπ' τίς ὁποῖες ἡ μία νά εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα $\bar{\alpha}\,(1,\,1,\,2)$.

Λύση. Ἔστω $\bar{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ καί $\bar{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ οἱ δύο κάθετες συνιστώσες ἀπ' τίς ὁποῖες ἡ $\bar{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ παράλληλη πρός τό $\bar{\alpha}(1,1,2)$. Εἶναι $\bar{\beta}+\bar{\gamma}=\bar{r}$ ἤ $\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{y}_0+\beta_3\bar{z}_0 + \gamma_1\bar{x}_0+\gamma_2\bar{y}_0+\gamma_3\bar{z}_0 = 3\bar{x}_0-2\bar{y}_0+5\bar{z}_0$ ἤ $(\beta_1+\gamma_1-3)\bar{x}_0+(\beta_2+\gamma_2+2)\bar{y}_0 + (\beta_3+\gamma_3-5)\bar{z}_0=\bar{0}$ καί ἐπειδή τά $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ εἶναι μή συνεπίπεδα, θά εἶναι: $\beta_1+\gamma_1-3=0$, $\beta_2+\gamma_2+2=0$, $\beta_3+\gamma_3-5=0$ (1).



Σχ. 35

Ἐπειδή τό $\bar{\beta}$ εἶναι συγγραμμικό πρός τό $\bar{\alpha}$ ἔχουμε (τύπος (6.8)):

$$\frac{\beta_1}{1}=\frac{\beta_2}{1}=\frac{\beta_3}{2}=\lambda \quad \text{ἤ} \quad \beta_1=\lambda,\ \beta_2=\lambda,\ \beta_3=2\lambda \quad (2).$$

Ἐπειδή τό $\bar{\gamma}$ εἶναι κάθετο στό $\bar{\beta}$, θά εἶναι κάθετο καί στό συγγραμμικό του $\bar{\alpha}$, ἄρα (συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων):

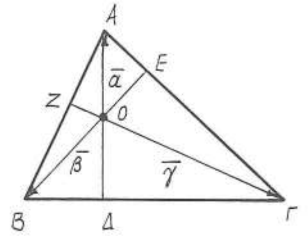
$$\gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot 1+\gamma_3\cdot 2=0 \quad \text{ἤ} \quad \gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3=0 \quad (3).$$

Ἀπ' τήν (1) προκύπτει $\gamma_1=3-\beta_1$, $\gamma_2=-2-\beta_2$, $\gamma_3=5-\beta_3$ ἤ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τήν (2): $\gamma_1=3-\lambda$, $\gamma_2=-2-\lambda$, $\gamma_3=5-2\lambda$.
Θέτοντας τίς τιμές τῶν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ στήν (3) προκύπτει:
$3-\lambda-2-\lambda+10-4\lambda=0$ καί $\lambda=\dfrac{11}{6}$. Ἀπ' τίς (2) προκύπτουν οἱ τιμές τῶν $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Εἶναι: $\beta_1=\dfrac{11}{6}$, $\beta_2=\dfrac{11}{6}$, $\beta_3=\dfrac{11}{3}$ ὁπότε ἀπ' τήν (1) προκύπτουν οἱ τιμές τῶν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Εἶναι:

$$\gamma_1=\frac{7}{6}, \quad \gamma_2=\frac{23}{6}, \quad \gamma_3=\frac{4}{3}.$$

6.10. Νά ἀποδειχθεῖ διανυσματικά ὅτι τά ὕψη κάθε τριγώνου τέμνονται στό ἴδιο σημεῖο.

Λύση. Φέρουμε τά ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τά $\overline{Α\Delta}$ καί $\overline{ΒΕ}$ τά



Σχ. 36

ὁποῖα τέμνονται στό Ο. Ἄν φέρουμε καί τήν $\overline{ΓΟ}$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι καί αὐτή εἶναι ὕψος, δηλ ἡ $\overline{ΓΟ}$ εἶναι κάθετη στήν $\overline{ΑΒ}$.
Ἔστω ὅτι $\overline{ΟΑ} = \overline{\alpha}$, $\overline{ΟΒ} = \overline{\beta}$ καί $\overline{ΟΓ} = \overline{\gamma}$. Ἐπειδή $\overline{Α\Delta}$ εἶναι ὕψος ἔχουμε $\overline{ΟΑ} \cdot \overline{ΒΓ} = 0$ ἤ $\overline{\alpha} \cdot (\overline{\gamma} - \overline{\beta}) = 0$. (1). Ὁμοίως ἐπειδή $\overline{ΒΕ}$ εἶναι ὕψος ἔχουμε $\overline{ΟΒ} \cdot \overline{ΑΓ} = 0$ ἤ $\overline{\beta} \cdot (\overline{\gamma} - \overline{\alpha}) = 0$ (2). Ἀφαιροῦμε κατά μέλη τίς (1) καί (2):
$\overline{\alpha} \cdot \overline{\gamma} - \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} - \overline{\beta} \cdot \overline{\gamma} + \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha} = 0$ ἤ $\overline{\alpha} \cdot \overline{\gamma} - \overline{\beta} \cdot \overline{\gamma} = 0$ ἤ $\overline{\gamma} \cdot (\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = 0$ ἤ $\overline{\gamma} \cdot (\overline{\beta} - \overline{\alpha}) = 0$ δηλ ἡ $\overline{ΟΓ}$ εἶναι κάθετη στήν $\overline{ΑΒ}$. Ἄρα τό $\overline{ΓΖ}$ εἶναι τό τρίτο ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

6.11. Δίδονται τά διανύσματα $\overline{\beta}(1,2,3)$ καί $\overline{\gamma}(7,1,-3)$ σέ σύστημα ἀξόνων τρισορθογώνιο καί δεξιόστροφο. Νά εὑρεθεῖ τό διάνυσμα $\overline{x}$ ἀπό τήν σχέση $\overline{x} = \overline{\beta} + \overline{\gamma} \wedge \overline{x}$. (1).

Λύση. Ἔστω ὅτι τό $\overline{x}$ ἔχει συντεταγμένες x_1, x_2, x_3. Ἄρα $\overline{x} = x_1\overline{x_0} + x_2\overline{y_0} + x_3\overline{z_0}$, $\overline{\beta} = \overline{x_0} + 2\overline{y_0} + 3\overline{z_0}$, $\overline{\gamma} = 7\overline{x_0} + \overline{y_0} - 3\overline{z_0}$ ὁπότε ἡ (1) μετασχηματίζεται στήν: $x_1\overline{x_0} + x_2\overline{y_0} + x_3\overline{z_0} =$
$\overline{x_0} + 2\overline{y_0} + 3\overline{z_0} + (7\overline{x_0} + \overline{y_0} - 3\overline{z_0}) \wedge (x_1\overline{x_0} + x_2\overline{y_0} + x_3\overline{z_0})$ (2)
Βρίσκουμε πρῶτα τό διάνυσμα $\overline{\gamma} \wedge \overline{x}$. Εἶναι:

$$\overline{\gamma} \wedge \overline{x} = \begin{vmatrix} \overline{x_0} & \overline{y_0} & \overline{z_0} \\ 7 & 1 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_3 + 3x_2)\overline{x_0} - (7x_3 + 3x_1)\overline{y_0} + (7x_2 - x_1)\overline{z_0}.$$

ὁπότε ἀντικαθιστώντας στή (2) καί μεταφέροντας στό πρῶτο μέλος:
$(x_1 - 3x_2 - x_3 - 1)\overline{x_0} + (3x_1 + x_2 + 7x_3 - 2)\overline{y_0} + (x_1 - 7x_2 + x_3 - 3)\overline{z_0} = \overline{0}$.

Ἐπειδή τά $\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0}$ εἶναι μή συνεπίπεδα θά εἶναι κατ' ἀνάγκη:

$x_1 - 3x_2 - x_3 - 1 = 0, \quad 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 2 = 0, \quad x_1 - 7x_2 + x_3 - 3 = 0 \quad (3)$

Λύνοντας τό σύστημα (3) βρίσκουμε τίς τιμές τῶν x_1, x_2, x_3.

Εἶναι $x_1 = \dfrac{1}{6}$, $x_2 = -\dfrac{11}{30}$, $x_3 = \dfrac{4}{15}$ δηλ $\overline{x}\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{11}{30}, \dfrac{4}{15}\right)$.

6.12. Νά λυθεῖ ἡ διανυσματική ἐξίσωση $\lambda\overline{u} + \overline{u}\wedge\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, ὅπου γνωστά εἶναι τά διανύσματα $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ καί ὁ ἀριθμός λ καί ἄγνωστο τό διάνυσμα $\overline{u}$.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε τή δοθεῖσα σχέση ἐσωτερικῶς μέ $\overline{\alpha}$ ὁπότε: $\lambda\overline{u}\cdot\overline{\alpha} + (\overline{u}\wedge\overline{\alpha})\cdot\overline{\alpha} = \overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}$ (1).

Εἶναι ὅμως $(\overline{u}\wedge\overline{\alpha})\cdot\overline{\alpha} = 0$ διότι τό $\overline{u}\wedge\overline{\alpha}$ εἶναι διάνυσμα κάθετο στό ἐπίπεδο τῶν $\overline{u}$ καί $\overline{\alpha}$ ἑπομένως κάθετο στό $\overline{\alpha}$· πολλαπλασιαζόμενο ὅμως ἐσωτερικῶς μέ $\overline{\alpha}$, εἶναι $συν(\overline{u}\wedge\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) = 0$ ἄρα $(\overline{u}\wedge\overline{\alpha})\cdot\overline{\alpha} = 0$ ὁπότε ἡ (1) γίνεται $\lambda\overline{u}\cdot\overline{\alpha} = \overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}$ ἤ

$$\overline{u}\cdot\overline{\alpha} = \frac{\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}}{\lambda} \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα τή δοθεῖσα σχέση ἐξωτερικῶς μέ $\overline{\alpha}$, ὁπότε: $\lambda\overline{\alpha}\wedge\overline{u} + \overline{\alpha}\wedge(\overline{u}\wedge\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}$ ἤ βάσει τῆς ἰδιότητας 1. τοῦ διεξωτερικοῦ γινομένου: $\lambda\overline{\alpha}\wedge\overline{u} + \alpha^2\overline{u} - (\overline{\alpha}\cdot\overline{u})\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}$ (3).

Ἀπ' τή δοθεῖσα προκύπτει ἀκόμη $\overline{u}\wedge\overline{\alpha} = \overline{\beta} - \lambda\overline{u}$ ἤ ἀκόμη $\overline{\alpha}\wedge\overline{u} = \lambda\overline{u} - \overline{\beta}$ (4). Ἀντικαθιστοῦμε τίς (2) καί (4) στήν (3) καί ἔχουμε $\lambda(\overline{\beta} - \lambda\overline{u}) + \alpha^2\overline{u} - \dfrac{\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}}{\lambda}\cdot\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}$ ἤ

$$\lambda\overline{\beta} - \lambda^2\overline{u} + \alpha^2\overline{u} - \frac{\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}}{\lambda}\cdot\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\wedge\overline{\beta} \text{ ἤ}$$

$(\alpha^2 - \lambda^2)\overline{u} = \overline{\alpha}\wedge\overline{\beta} + \dfrac{\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}}{\lambda}\cdot\overline{\alpha} - \lambda\overline{\beta}$ ὁπότε τελικά προκύπτει

$$\overline{u} = \frac{\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta}}{\alpha^2 - \lambda^2} + \frac{\overline{\beta}\cdot\overline{\alpha}}{\lambda(\alpha^2 - \lambda^2)}\cdot\overline{\alpha} - \frac{\lambda\overline{\beta}}{\alpha^2 - \lambda^2}.$$

6.13. Τά διανύσματα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{r}$ συνδέονται μέ τή σχέση $\bar{\alpha} = \bar{\beta} + \bar{\gamma}\wedge\bar{r}$, εἶναι δέ τό $\bar{\gamma}$ συγγραμμικό μέ τό $\bar{\alpha}$, τό δέ $\bar{r}$ κάθετο στό $\bar{\gamma}$. Νά εὑρεθεῖ τό $\bar{r}$ συναρτήσει τῶν ἄλλων.

Λύση. Ἐπειδή τό $\bar{\gamma}$ εἶναι συγγραμμικό μέ τό $\bar{\alpha}$ προκύπτει $\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha} = \bar{0}$ (1). Ἐπειδή τό $\bar{\gamma}$ εἶναι κάθετο στό $\bar{r}$ προκύπτει $\bar{\gamma}\cdot\bar{r} = 0$ (2). Πολλαπλασιάζουμε τή δοθεῖσα ἐξωτερικῶς μέ $\bar{\gamma}$ καί ἔχουμε: $\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha} = \bar{\gamma}\wedge\bar{\beta} + \bar{\gamma}\wedge(\bar{\gamma}\wedge\bar{r})$ ἤ (ἰδ. 1. διεξωτ. γινομένου) $\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha} = \bar{\gamma}\wedge\bar{\beta} + (\bar{\gamma}\cdot\bar{r})\bar{\gamma} - (\bar{\gamma}\cdot\bar{\gamma})\bar{r}$ ἤ λόγω τῶν (1) καί (2): $\bar{0} = \bar{\gamma}\wedge\bar{\beta} - \gamma^2\bar{r}$ καί $\bar{r} = \dfrac{\bar{\gamma}\wedge\bar{\beta}}{\gamma^2}$.

6.14. Νά ὁρισθεῖ διάνυσμα $\bar{r}$ ἀπ' τή σχέση $\bar{r} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}\wedge\bar{r}$ μέ $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = 0$ ὅπου $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ δοθέντα διανύσματα.

Λύση. Ἄν πολ/με τή δοθεῖσα ἐσωτερικῶς μέ $\bar{\beta}$ ἔχουμε. $\bar{r}\cdot\bar{\beta} = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} + (\bar{\beta}\wedge\bar{r})\cdot\bar{\beta}$. Ἀλλά $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = 0$ καί $(\bar{\beta}\wedge\bar{r})\cdot\bar{\beta} = 0$ ἐπειδή συν$(\bar{\beta}\wedge\bar{r}, \bar{\beta}) = 0$ (γωνία $\widehat{\bar{\beta}\wedge\bar{r}, \bar{\beta}} = 90°$) ἄρα $\bar{r}\cdot\bar{\beta} = 0$ (1) Δηλ τό $\bar{r}$ εἶναι κάθετο στό $\bar{\beta}$.

Πολ/με τώρα τή δοθεῖσα ἐξωτερικῶς μέ $\bar{\beta}$ καί ἔχουμε: $\bar{\beta}\wedge\bar{r} = \bar{\beta}\wedge\bar{\alpha} + \bar{\beta}\wedge(\bar{\beta}\wedge\bar{r})$ ἤ $\bar{\beta}\wedge\bar{r} = \bar{\beta}\wedge\bar{\alpha} + (\bar{\beta}\cdot\bar{r})\bar{\beta} - \beta^2\bar{r}$ ἤ λόγω τῆς (1) $\bar{\beta}\wedge\bar{r} = \bar{\beta}\wedge\bar{\alpha} - \beta^2\bar{r}$. Ἀπ' τή δοθεῖσα ἔχουμε $\bar{\beta}\wedge\bar{r} = \bar{r} - \bar{\alpha}$ · ἑπομένως ἡ τελευταῖα σχέση γίνεται: $\bar{r} - \bar{\alpha} = \bar{\beta}\wedge\bar{\alpha} - \beta^2\bar{r}$ ἤ $\bar{r}(1+\beta^2) = \bar{\beta}\wedge\bar{\alpha} + \bar{\alpha}$ καί τελικά

$$\bar{r} = \frac{\bar{\beta}\wedge\bar{\alpha} + \bar{\alpha}}{1+\beta^2}.$$

6.15. Νά εὑρεθεῖ διάνυσμα $\bar{r}$ ἀπό τίς σχέσεις: $\bar{\alpha}\cdot\bar{r} = \mu$ καί $\bar{\beta}\wedge\bar{r} = \bar{\gamma}$ ὅπου $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ δοθέντα διανύσματα, μ δοθείς ἀριθμός.

Λύση. Πολ/με την $\bar{\beta}\wedge\bar{r}=\bar{\gamma}$ εξωτερικώς με $\bar{\alpha}$:
$(\bar{\beta}\wedge\bar{r})\wedge\bar{\alpha}=\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha}$ ή (ίδ. 2. διεξωτερικού γινομένου):
$(\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha})\cdot\bar{r}-(\bar{r}\cdot\bar{\alpha})\cdot\bar{\beta}=\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha}$ ή λόγω της σχέσεως $\bar{\alpha}\cdot\bar{r}=\mu$:
$(\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha})\cdot\bar{r}-\mu\bar{\beta}=\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha}$ και $(\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha})\cdot\bar{r}=\mu\bar{\beta}+\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha}$ οπότε διαιρώντας με $\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha}$ (αριθμός) προκύπτει $\bar{r}=\dfrac{\mu\bar{\beta}+\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha}}{\beta\cdot\alpha}$.

6.16. Να δειχθεί ότι $(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})\cdot(\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta})=(\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})(\bar{\beta}\cdot\bar{\delta})-(\bar{\alpha}\cdot\bar{\delta})(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})$.

Λύση. Θέτουμε $\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}=\bar{r}$ οπότε $\bar{r}(\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta})=(\bar{r}\wedge\bar{\gamma})\bar{\delta}$ (1η. ιδιότ. μικτού γινομένου) ή ακόμη $[(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})\wedge\bar{\gamma}]\bar{\delta}=$
$=[(\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})\bar{\beta}-(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})\bar{\alpha}]\bar{\delta}=(\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})(\bar{\beta}\cdot\bar{\delta})-(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})(\bar{\alpha}\cdot\bar{\delta})$.

6.17. Να δειχθεί ότι $\bar{\alpha}\wedge(\bar{\beta}\wedge\bar{\gamma})+\bar{\beta}\wedge(\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha})+\bar{\gamma}\wedge(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})=\bar{0}$.

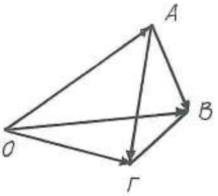
Λύση. Είναι $\bar{\alpha}\wedge(\bar{\beta}\wedge\bar{\gamma})=(\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})\bar{\beta}-(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})\bar{\gamma}$. Ομοίως
$\bar{\beta}\wedge(\bar{\gamma}\wedge\bar{\alpha})=(\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha})\bar{\gamma}-(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})\bar{\alpha}$ και
$\bar{\gamma}\wedge(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})=(\bar{\gamma}\cdot\bar{\beta})\alpha-(\bar{\gamma}\cdot\bar{\alpha})\bar{\beta}$. Άρα η δοθείσα σχέση γίνεται
$(\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma})\cdot\bar{\beta}-(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})\bar{\gamma}+(\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha})\bar{\gamma}-(\bar{\beta}\cdot\bar{\gamma})\bar{\alpha}+(\bar{\gamma}\cdot\bar{\beta})\bar{\alpha}-(\bar{\gamma}\cdot\bar{\alpha})\bar{\beta}=\bar{0}$
επειδή $(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta})\bar{\gamma}=(\bar{\beta}\cdot\bar{\alpha})\bar{\gamma}$ (ίδ. 1. εσωτερικού γινομένου)

6.18. Αν τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι συνεπίπεδα, να δειχθεί ότι $(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})\wedge(\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta})=\bar{0}$

Λύση. Το $\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ άρα και των $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ εφ' όσον τα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ είναι συνεπίπεδα.
Ομοίως το $\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\bar{\gamma},\bar{\delta}$ άρα και των $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$. Δηλ. το $\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το $\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta}$.
δηλ. $\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}\parallel\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta}$. Άρα $(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})\wedge(\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta})=\bar{0}$ γιατί $\eta\mu(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta},\bar{\gamma}\wedge\bar{\delta})=0$

6.19. Ἄν Ο, Α, Β, Γ εἶναι τέσσερα σημεῖα τοῦ χώρου νά δειχθεῖ ὅτι $(\overline{OA})\wedge(\overline{OB}) + (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma}) + (\overline{O\Gamma})\wedge(\overline{OA}) = (\overline{AB})\wedge(\overline{A\Gamma})$

Λύση. Τό δεύτερο μέλος τῆς δοθείσης σχέσεως γράφεται:



Σχ. 37

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ καί $\overline{A\Gamma} = \overline{O\Gamma} - \overline{OA}$ ἄρα

$(\overline{AB})\wedge(\overline{A\Gamma}) = (\overline{OB} - \overline{OA})\wedge(\overline{O\Gamma} - \overline{OA}) =$

$= (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma}) - (\overline{OB})\wedge(\overline{OA}) - (\overline{OA})\wedge(\overline{O\Gamma}) +$

$+ (\overline{OA})\wedge(\overline{OA})$. Ἀλλά $(\overline{OA})\wedge(\overline{OA}) = \overline{0}$,

$-(\overline{OB})\wedge(\overline{OA}) = (\overline{OA})\wedge(\overline{OB})$ καί $-(\overline{OA})\wedge(\overline{O\Gamma}) =$

$= (\overline{O\Gamma})\wedge(\overline{OA})$. Ἄρα $(\overline{AB})\wedge(\overline{A\Gamma}) = (\overline{OA})\wedge(\overline{OB}) + (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma}) + (\overline{O\Gamma})\wedge(\overline{OA})$.

6.20. Ἄν Ο, Α, Β, Γ εἶναι τέσσερα σημεῖα τοῦ χώρου, νά δειχθεῖ ὅτι τό διάνυσμα $(\overline{AB})\wedge(\overline{A\Gamma}) - (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma})$ εἶναι κάθετο στό $\overline{OA}$.

Λύση. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\left[(\overline{AB})\wedge(\overline{A\Gamma}) - (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma})\right]\cdot\overline{OA} = 0$

Εἶναι (σχ. 37) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, $\overline{A\Gamma} = \overline{O\Gamma} - \overline{OA}$ ἄρα ἡ ἀγκύλη γίνεται:

$(\overline{OB} - \overline{OA})\wedge(\overline{O\Gamma} - \overline{OA}) - (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma}) = (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma}) - (\overline{OB})\wedge(\overline{OA}) -$

$-(\overline{OA})\wedge(\overline{O\Gamma}) + (\overline{OA})\wedge(\overline{OA}) - (\overline{OB})\wedge(\overline{O\Gamma}) = -(\overline{OB})\wedge(\overline{OA}) - (\overline{OA})\wedge(\overline{O\Gamma}) =$

$= -(\overline{OA})\wedge\left[(\overline{OB}) + (\overline{O\Gamma})\right]$ Ἄρα $-(\overline{OA})\wedge\left[(\overline{OB}) + (\overline{O\Gamma})\right]\cdot\overline{OA} = 0$

ἐπειδή τό $(\overline{OA})\wedge\left[(\overline{OB}) + (\overline{O\Gamma})\right]$ εἶναι διάνυσμα κάθετο στό $\overline{OA}$.

6.21. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά νά εἶναι $\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma}) = (\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})\wedge\overline{\gamma}$ (1), πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $(\overline{\alpha}\wedge\overline{\gamma})\wedge\overline{\beta} = \overline{0}$.

Λύση. Εἶναι $\overline{\alpha}\wedge(\overline{\beta}\wedge\overline{\gamma}) = (\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma})\overline{\beta} - (\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\overline{\gamma}$ καί $(\overline{\alpha}\wedge\overline{\beta})\wedge\overline{\gamma} =$ $(\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma})\overline{\beta} - (\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma})\overline{\alpha}$. Ἄρα ἡ σχέση (1) γίνεται:

$(\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma})\overline{\beta} - (\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\overline{\gamma} = (\overline{\alpha}\cdot\overline{\gamma})\overline{\beta} - (\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma})\overline{\alpha}$ ἤ

$(\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\overline{\gamma} - (\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma})\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}\wedge\overline{\gamma})\wedge\overline{\beta} = \overline{0}$.

6.22. Νά δειχθῆ ὅτι τά 4 σημεῖα μιᾶς εὐθείας P_1, P_2, P_3, P_4 ἔχουν διπλούς λόγους πού πληροῦν τίς σχέσεις:

$$(P_1P_2P_3P_4)+(P_1P_3P_2P_4) = (P_1P_2P_3P_4)+(P_4P_2P_3P_1) = 1$$

Λύση. Θέτουμε: $(P_1P_2P_3P_4)=\lambda$. Ὡς γνωστόν ἔχουμε:

$$(P_1P_2P_3P_4)=\frac{P_1P_3}{P_3P_2}:\frac{P_1P_4}{P_4P_2}=\frac{P_1P_3}{P_3P_2}\cdot\frac{P_4P_2}{P_1P_4}=\lambda.$$ Ἐπί

$$(P_1P_3P_2P_4)=\frac{P_1P_2}{P_2P_3}:\frac{P_1P_4}{P_4P_3}=\frac{P_1P_2}{P_2P_3}\cdot\frac{P_4P_3}{P_1P_4}=\frac{(P_1P_3+P_3P_2)}{P_2P_3}\cdot\frac{(P_4P_2+P_2P_3)}{P_1P_4}=$$

$$=\frac{(P_1P_3)(P_4P_2)+(P_3P_2)(P_4P_2)+(P_1P_3)(P_2P_3)+(P_3P_2)(P_2P_3)}{(P_2P_3)\cdot(P_1P_4)}=$$

$$=-\lambda-\frac{P_4P_2}{P_1P_4}+\frac{P_1P_3}{P_1P_4}+\frac{P_3P_2}{P_1P_4}=-\lambda-\frac{P_4P_2}{P_1P_4}+\frac{P_1P_2}{P_1P_4}=$$

$$=-\lambda+\frac{P_1P_2}{P_1P_4}+\frac{P_2P_4}{P_1P_4}=-\lambda+\frac{P_1P_4}{P_1P_4}=-\lambda+1.$$ Ἐπίσης:

$$(P_4P_2P_3P_1)=\frac{P_4P_3}{P_3P_2}:\frac{P_4P_1}{P_1P_2}=\frac{P_4P_3}{P_3P_2}\cdot\frac{P_1P_2}{P_4P_1}=\frac{(P_4P_1+P_1P_3)}{P_3P_2}\cdot\frac{(P_1P_4+P_4P_2)}{P_4P_1}=$$

$$=\frac{(P_4P_1)(P_1P_4)+(P_1P_3)(P_1P_4)+(P_4P_1)(P_4P_2)+(P_1P_3)(P_4P_2)}{(P_3P_2)(P_4P_1)}=$$

$$=\frac{P_1P_4}{P_3P_2}-\frac{P_1P_3}{P_3P_2}+\frac{P_4P_2}{P_3P_2}-\lambda=\frac{P_1P_2}{P_3P_2}-\frac{P_1P_3}{P_3P_2}-\lambda=$$

$$=\frac{P_3P_1}{P_3P_2}+\frac{P_1P_2}{P_3P_2}-\lambda=\frac{P_3P_2}{P_3P_2}-\lambda=1-\lambda$$ Ἄρα:

$$\lambda+1-\lambda=\lambda+1-\lambda=1.$$

6.23. Γιά δοθέν σημεῖο ξ πάνω σ' ἕνα ἄξονα $x'x$, ποιό λόγο πρέπει νά ἔχουν τά α, β, ὥστε τά σημεῖα μέ τετμημένες $\xi-\alpha$, $\xi-\beta$, $\xi+\beta$, $\xi+\alpha$ νά ἀποτελοῦν ἁρμονικό λόγο;

Λύση. Ἔστω $M_1(\xi-\alpha)$, $M_2(\xi-\beta)$, $M_3(\xi+\beta)$, $M_4(\xi+\alpha)$. Γιά νά ἀποτελοῦν τά σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 ἁρμονική τετράδα πρέπει:

$(M_1M_2M_3M_4) = \dfrac{M_1M_3}{M_3M_2} : \dfrac{M_1M_4}{M_4M_2} = -1$ ἤ μέ ἀντικατάσταση τῶν τετμημένων: $\dfrac{\xi+\beta-(\xi-\alpha)}{\xi-\beta-(\xi+\beta)} : \dfrac{\xi+\alpha-(\xi-\alpha)}{\xi-\beta-(\xi+\alpha)} = -1$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει: $\dfrac{\alpha+\beta}{-2\beta} : \dfrac{2\alpha}{-(\alpha+\beta)} = -1$ ἤ $\dfrac{(\alpha+\beta)}{-2\beta} \cdot \dfrac{[-(\alpha+\beta)]}{2\alpha} = -1$ ἤ μετά τίς πράξεις $(\alpha+\beta)^2 = -4\alpha\beta$ ἤ $\alpha^2+\beta^2+6\alpha\beta=0$ καί διαιρῶντας μέ $\beta^2 \neq 0$ προκύπτει $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 6\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + 1 = 0$ πού εἶναι ἐξίσωση $2^{ου}$ βαθμοῦ ὡς πρός $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Λύνοντας τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε $\dfrac{\alpha}{\beta} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

6.24. Ἄν P_1, P_2, P_3, P_4 εἶναι 4 σημεῖα πάνω στόν ἄξονα ox μέ τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4 ἀντίστοιχα νά δειχθεῖ ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση: $(P_1P_2)(P_3P_4) + (P_1P_3)(P_4P_2) + (P_1P_4)(P_2P_3) = 0$.

Λύση. Εἶναι $(P_1P_2)(P_3P_4) + (P_1P_3)(P_4P_2) + (P_1P_4)(P_2P_3) =$
$= (x_2-x_1)(x_4-x_3) + (x_3-x_1)(x_2-x_4) + (x_4-x_1)(x_3-x_2) =$
$= x_2x_4 - x_2x_3 - x_1x_4 + x_1x_3 + x_3x_2 - x_3x_4 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_4x_3 -$
$- x_4x_2 - x_1x_3 + x_1x_2 = 0.$

6.25. Ἄν $A(x_1), B(x_2), \Gamma(x_3), \Delta(x_4)$ εἶναι 4 σημεῖα ἑνός ἄξονα $x'x$ καί ἰσχύει ἡ σχέση $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma B} + \dfrac{A\Delta}{\Delta B} = 0$ τότε εἶναι $(x_1+x_2)(x_3+x_4) = 2(x_1x_2+x_3x_4)$.

Λύση. Εἶναι $A\Gamma = x_3-x_1$, $\Gamma B = x_2-x_3$, $A\Delta = x_4-x_1$ καί $\Delta B = x_2-x_4$ ὁπότε ἡ δοθεῖσα σχέση γίνεται: $\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_3} + \dfrac{x_4-x_1}{x_2-x_4} = 0$ ἤ $(x_3-x_1)(x_2-x_4) + (x_4-x_1)(x_2-x_3) = 0$ ἤ $x_3x_2 - x_1x_2 - x_3x_4 +$ $+ x_1x_4 + x_4x_2 - x_1x_2 - x_3x_4 + x_1x_3 = 0$ ἤ $(x_1+x_2)(x_3+x_4) = 2(x_1x_2+x_3x_4)$.

7. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Ἀναλυτική Γεωμετρία εἶναι ὁ μαθηματικός ἐκεῖνος κλάδος πού συσχετίζει ἀλληλένδετα τήν Ἄλγεβρα μέ τή Γεωμετρία.

Τό πρόβλημα τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ κατασκευή τῆς γραφικῆς παράστασης μιᾶς καμπύλης ἤ μιᾶς ἐπιφάνειας ὅταν δοθεῖ ἡ συνάρτησή της καί ἀντίστροφα ἡ εὕρεση τῆς συνάρτησης ὅταν δοθεῖ ἡ γραφική της παράσταση. Αὐτό ἐπιτυγχάνεται μέ τή βοήθεια τοῦ Καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων, ὅπως εἴδαμε, τό ὁποῖο εἰσήγαγε πρῶτος ὁ Descartes (Γάλλος μαθηματικός καί φιλόσοφος 1596-1650), ἤ μέ τή βοήθεια τοῦ συστήματος τῶν πολικῶν συντεταγμένων. Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $f(x,y)=0$ παριστάνει μία καμπύλη τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση γίνεται στό ἐπίπεδο (Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μέ δύο ἄξονες ox, oy). Ἐνῶ κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $f(x,y,z)=0$ παριστάνει ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση γίνεται στό χῶρο (Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μέ τρεῖς ἄξονες ox, oy, oz).

Ἐδῶ θά ἀναφερθοῦμε κυρίως στήν Ἀναλυτική Γεωμετρία τοῦ Ἐπιπέδου καί θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν εὕρεση ἐξισώσεων μερικῶν στοιχειωδῶν καμπύλων ὅπως τῆς **εὐθείας** καί τῶν **κωνικῶν τομῶν** δηλαδή τοῦ **κύκλου**, τῆς **ἔλλειψης** τῆς **ὑπερβολῆς** καί τῆς **παραβολῆς**. Στήν Ἀναλυτική Γεωμετρία τοῦ Χώρου οἱ ἀντίστοιχες στοιχειώδεις ἐπιφάνειες εἶναι τοῦ **ἐπιπέδου**, τῆς **σφαίρας** τοῦ **ἐλλειψοειδοῦς** τοῦ ὑπερβολοειδοῦς τοῦ **παραβολοειδοῦς** καί συνδιασμούς των.

Περιγράφουμε κατ' ἀρχάς τό νέο σύστημα συντεταγμένων τῶν **πολικῶν συντεταγμένων.**

1. Στό ἐπίπεδο.

Τό σύστημα τῶν πολικῶν συντεταγμένων ὁρίζεται στό ἐπίπεδο ἀπό ἕναν ἡμιάξονα Ox πού λέγεται **πολικός ἄξονας**, μέ ἀρχή ἕνα σημεῖο O, τόν **πόλο** καί μοναδιαῖο διάνυσμα $\overline{OE}$. Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου $M\neq O$ ἀντιστοιχοῦμε

Σχ. 38

σάν πρώτη συντεταγμένη τήν ἀπόστασή του ρ ἀπό τόν πόλο O, πού τήν παίρνουμε πάντοτε θετική καί τήν καλοῦμε **πολική ἀκτίνα**, καί σάν δεύτερη συντεταγμένη τή γωνία ϑ πού σχηματίζει ἡ ἀκτίνα OE (σάν πρώτη πλευρά) μέ τήν ἀκτίνα OM κατά τή θετική φορά (ἀντίθετη τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου) καί τήν καλοῦμε **πολική γωνία** ἤ **ὅρισμα** τοῦ σημείου M.

Ἄν θέλουμε ἡ ἀντιστοίχηση νά εἶναι ἀμφιμονότιμη, μποροῦμε, ἀπ' τίς ἄπειρες τιμές τοῦ ὁρίσματος ($\vartheta+2k\pi$, ὅπου k ἀκέραιος) νά πάρουμε τίς μεταξύ 0 καί 2π τιμές δηλαδή $0\leq\vartheta<2\pi$ ἤ τίς μεταξύ $-\pi$ καί π δηλαδή $-\pi\leq\vartheta<\pi$ ἤ $-\pi<\vartheta\leq\pi$, πού καλοῦνται **πρωτεύουσες τιμές** τοῦ ὁρίσματος.

Γιά τήν εὕρεση τῶν σχέσεων μεταξύ τῶν καρτεσιανῶν καί πολικῶν συντεταγμένων ἑνός σημείου, θεωροῦμε σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων μέ ἀρχή τόν πόλο, θετικό ἡμιάξονα Ox τόν πολικό ἄξονα καί ἄξονα τῶν y τόν $Oy\perp Ox$ καί μονάδα μετρήσεως τήν ἴδια γιά τά δύο συστήματα.

Ἄν (x, y) καί (ρ, ϑ) καλέσουμε τίς συντεταγμένες τοῦ M ὡς πρός τό σύστημα καρτεσιανῶν καί πολικῶν συντεταγμένων ἀντίστοιχα, τότε ἔχουμε:

1. Ἔκφραση τῶν (x, y) συναρτήσει τῶν (ρ, ϑ):

$$x = \rho\,\text{συν}\,\vartheta, \quad y = \rho\,\text{ημ}\,\vartheta \qquad (7.1)$$

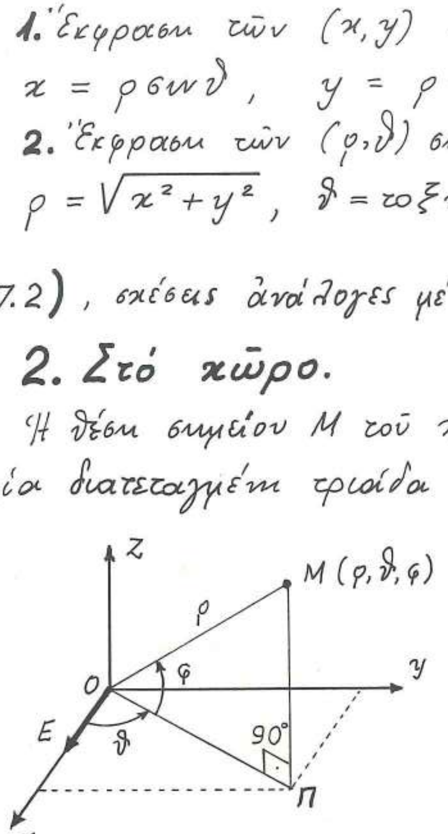
2. Ἔκφραση τῶν (ρ, ϑ) συναρτήσει τῶν (x, y):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \text{τοξημ}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{τοξσυν}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(7.2), σχέσεις ἀνάλογες μέ τίς (3.1), (3.2) στούς μιγαδικούς.

2. Στό χῶρο.

Ἡ θέση σημείου M τοῦ χώρου μπορεῖ νά ὁρισθεῖ καί ἀπό μία διατεταγμένη τριάδα $(\rho, \vartheta, \varphi)$ ὡς ἑξῆς:



Σχ. 39

Θεωροῦμε σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων $Oxyz$. Ἄν Π εἶναι ἡ προβολή τοῦ σημείου M πάνω στό ἐπίπεδο xoy, θέτουμε: $\rho = |\overline{OM}|$, $\vartheta =$ γωνία $(\overline{Ox}, \overline{O\Pi})$, καί $\varphi =$ γωνία $(\overline{O\Pi}, \overline{OM})$, ὅπου $\varphi = 0$ γιά τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου xoy, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ γιά τά σημεῖα τοῦ χώρου πού βρίσκονται πρός τό μέρος τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα oz καί $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ γιά τά σημεῖα τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ χώρου. Οἱ ἀριθμοί τῆς διατεταγμένης τριάδας $(\rho, \vartheta, \varphi)$ λέγονται **πολικές** (ἤ **σφαιρικές**) **συντεταγμένες** καί μάλιστα ὁ ρ λέγεται **πολική ἀκτίνα**, ὁ ϑ **πολική γωνία** ἤ **γεωγραφικό μῆκος** καί ὁ φ **γεωγραφικό πλάτος** (σχ. 39).

Ἂν θέλουμε ἡ ἀντιστοίχηση αὐτή τῶν σημείων τοῦ χώρου καί τῶν διατεταγμένων τριάδων νά εἶναι ἀμφιμονότιμη, πρέπει ὁ ϑ νά ὁρίζεται μεταξύ 0 καί 2π δηλ. $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

Προφανῶς οἱ σχέσεις μεταξύ καρτεσιανῶν καί πολικῶν συντεταγμένων ὁρίζονται ὡς ἑξῆς.

1. Ἔκφραση τῶν (x, y, z) συναρτήσει τῶν $(\rho, \vartheta, \varphi)$:

$$x = \rho\,\text{συν}\vartheta\,\text{συν}\varphi, \quad y = \rho\,\text{ημ}\vartheta\,\text{συν}\varphi, \quad z = \rho\,\text{ημ}\varphi \qquad (7.3)$$

2. Ἔκφραση τῶν $(\rho, \vartheta, \varphi)$ συναρτήσει τῶν (x, y, z):

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vartheta = \text{τοξημ}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{τοξσυν}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

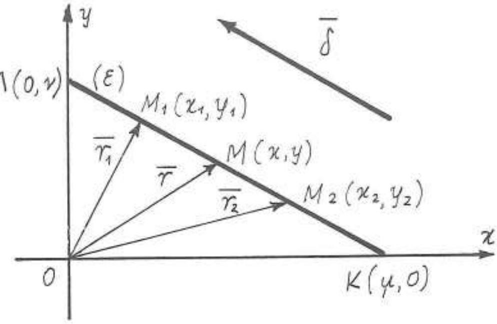
$$\text{καί} \quad \varphi = \text{τοξημ}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (7.4)$$

Θά μελετήσουμε τώρα τίς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας καί τῶν κωνικῶν τομῶν στό ἐπίπεδο.

1. Εὐθεῖα.

Ἔστω ἕνα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy καί (ε) μία ὡρισμένη εὐθεῖα στό ἐπίπεδο xOy μέ ἀρχή τό O κοινή ἀρχή τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων $\bar{r}$. Καλοῦμε **διανυσματική ἐξίσωση** τῆς εὐθείας αὐτῆς τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη τήν ὁποία πρέπει νά πληροῖ ἡ $\bar{r}$, γιά νά βρίσκεται τό πέρας αὐτῆς πάνω στήν εὐθεία (ε). Στή συνέχεια, θά λέμε σημεῖο $\bar{r}$ καί θά ἐννοοῦμε τό πέρας M τῆς ἀκτίνας $\bar{r} \equiv \overline{OM}$. Θά ζητήσουμε νά βροῦμε τή διανυσματική ἐξίσωση τῆς εὐθείας στίς ἑξῆς 2 κύριες περιπτώσεις:

i) Ἡ εὐθεῖα διέρχεται ἀπό δύο διάφορα σημεῖα $\bar{r}_1, \bar{r}_2$. Ἔστω ὅτι τό σημεῖο $\bar{r}$ κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας (σχ. 40). Τότε



Σχ. 40

$\overline{M_1M} = t\,\overline{M_1M_2}$ ή

$\bar r - \bar r_1 = t(\bar r_2 - \bar r_1)$· δηλ. ή διανυσματική ἀκτίνα $\bar r$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση:

$$\bar r = \bar r_1 + t(\bar r_2 - \bar r_1). \quad (7.5)$$

Ἀλλά καί ἀντίστροφα γιά κάθε τιμή τῆς παραμέτρου t ή (7.5) ὁρίζει διανυσματική ἀκτίνα $\bar r$ τέτοια ὥστε νά ἰσχύει ή $\overline{M_1M} = t\,\overline{M_1M_2}$ ή ὁποία ἐκφράζει ὅτι τό $\overline{M_1M}$ εἶναι παράλληλο πρός τό $\overline{M_1M_2}$ δηλ. τό σημεῖο M, πέρας τῆς $\bar r$, βρίσκεται ἐπί τῆς εὐθείας (ε).

Ἄν τώρα εἶναι $\bar r = x\bar x_0 + y\bar y_0$, $\bar r_1 = x_1\bar x_0 + y_1\bar y_0$, $\bar r_2 = x_2\bar x_0 + y_2\bar y_0$, ἀντικαθιστώντας στήν (7.5) ἔχουμε:

$x\bar x_0 + y\bar y_0 = x_1\bar x_0 + y_1\bar y_0 + t(x_2\bar x_0 + y_2\bar y_0 - x_1\bar x_0 - y_1\bar y_0)$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτουν οἱ $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$ (7.6) καί λέγονται **παραμετρικές ἐξισώσεις** τῆς (ε).

Ἄν ἀπαλείψουμε ἀπ' τίς ἐξισώσεις αὐτές τήν παράμετρο t θά προκύψει ή ἐξίσωση:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (7.7)$$

πού ἀποτελεῖ τήν **κανονική** ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα $\bar r_1$, $\bar r_2$.

ii) Ἡ εὐθεία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $\bar r_1$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό μή μηδενικό διάνυσμα $\bar\delta(\alpha, \beta)$ (σχ. 40).

Ἀντικαθιστώντας στήν προηγούμενη σειρά σχέσεων τό $\overline{M_1M_2}$ μέ τό διάνυσμα $\bar\delta$ προκύπτει ἐντελῶς ἀντίστοιχα ή παραμετρική διανυσματική ἐξίσωση $\bar r = \bar r_1 + t\bar\delta$ (7.8) καθώς καί οἱ παραμετρικές (ἀναλυτικές) ἐξισώσεις:

$$x = x_1 + t\alpha, \quad y = y_1 + t\beta, \qquad (7.9)$$

οἱ ὁποῖες μετά τήν ἀπαλοιφή τοῦ t δίδουν τήν ἐξίσωση

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} \qquad (7.10)$$

πού ἀποτελεῖ τήν κανονική ἐξίσωση εὐθείας πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο $\overline{r}_1$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα $\overline{\delta}(\alpha, \beta)$.

Οἱ ἐξισώσεις (7.7) καί (7.10) γράφονται ὑπό μορφή ὁρίζουσας ἀντίστοιχα:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{καί} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.11)$$

Ἀκόμα οἱ ἐξισώσεις (7.7) καί (7.10) γράφονται ὡς ἑξῆς:

ἡ (7.7): $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, ἡ (7.10): $y - y_1 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_1)$

καί ἐπειδή ὁ λόγος $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ εἶναι ὁ συντελεστής κατευθύνσεως (τύπος (6.11) σελ. 157), ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας, πού διέρχεται ἀπ' τό σημεῖο $\overline{r}_1$ καί ἔχει συντελεστή κατευθύνσεως λ εἶναι

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1) \qquad (7.12)$$

Ἄν ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τόν ἄξονα ox στό $K(\mu, 0)$ καί τόν ἄξονα oy στό $\Lambda(0, \nu)$ (σχ. 40), τότε ἀπ' τόν τύπο (7.7) προκύπτει $\frac{x - \mu}{0 - \mu} = \frac{y - 0}{\nu - 0}$ ἤ $(x - \mu)\nu + \mu y = 0$ ἤ

$x\nu + \mu y = \mu\nu$ καί διαιρώντας μέ $\mu\nu \neq 0$: $\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\nu} = 1$ (7.13)

Οἱ ἀριθμοί μ καί ν λέγονται **συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή.**

Ἄν στήν ἐξίσωση (7.12) ἀντικαταστήσουμε τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου $\overline{r}_1$ μέ τίς συντεταγμένες τοῦ Λ (σχ. 40) ἡ (7.12) θά πάρει τή μορφή

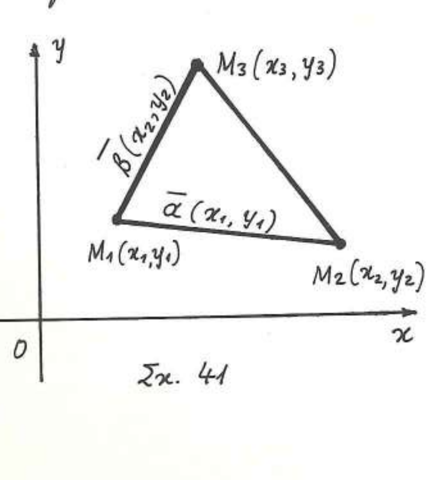
$$y = \lambda x + \nu \qquad (7.14)$$

Τέλος ἄν στήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ (7.11) ἐκτελέσουμε τίς πράξεις προκύπτει $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0$. Θέτοντας τώρα $A=y_2-y_1$, $B=-(x_2-x_1)$ καί $\Gamma=x_2y_1-x_1y_2$ προκύπτει ἐξίσωση τῆς μορφῆς $Ax+By+\Gamma=0$ **(7.15)** πού εἶναι καί ἡ **γενική ἐξίσωση** τῆς εὐθείας (ε).

Ἡ ἐξίσωση (7.15) γράφεται $By=-Ax-\Gamma$ ἤ ἀκόμα $y=-\frac{A}{B}x-\Gamma$ δηλ τῆς μορφῆς (7.14) μέ συντελεστή κατευθύνσεως $\lambda=-\frac{A}{B}$. Ἄν ἑπομένως θεωρήσουμε τό διάνυσμα $\bar{n}(A,B)$ μέ συντελεστή κατευθύνσεως $\lambda_1=\frac{B}{A}$ τότε εἶναι: $\lambda\cdot\lambda_1=-\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=-1$ πού σημαίνει, τύπος (6.13), ὅτι τό διάνυσμα $\bar{n}(A,B)$ εἶναι κάθετο στήν εὐθεία $Ax+By+\Gamma=0$.

Ἐμβαδό τριγώνου ἀπό τίς συντεταγμένες του.

Ἔστω τά σημεῖα $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ στό ἐπίπεδο xoy. Ἄν θεωρήσουμε τά διανύσματα $\overline{M_1M_2}$ καί $\overline{M_1M_3}$ τότε, ὡς γνωστόν ἰδ. 5. ἐξωτερ. γινομένου, τό $\overline{M_1M_2}\wedge\overline{M_1M_3}$ ἐκφράζει τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου μέ πλευρές τά διανύσματα $\overline{M_1M_2}$ καί $\overline{M_1M_3}$. Ἄν ἑπομένως μέ E παραστήσουμε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $M_1M_2M_3$ θά εἶναι $E=\frac{1}{2}\left|\overline{M_1M_2}\wedge\overline{M_1M_3}\right|$. Εἶναι ὅμως, τύπος (6.16): $|\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}|=\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_2z_1-x_1z_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$ καί γιά $z_1=z_2=0$ $|\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}|=\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}=x_1y_2-x_2y_1$.



Σχ. 41

Ἑπομένως στήν προκειμένη περίπτωση, ἄν ἀντικαταστήσουμε τά μήκη x_1,x_2 καί y_1,y_2, πού εἶναι οἱ τετμημένες καί οἱ τεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ μέ τά ἀντίστοιχά τους στό τρίγωνο $M_1M_2M_3$ θά ἔχουμε (σχ. 41): τό x_1 τοῦ $\bar{\alpha}$ ἀντιστ. στό x_2-x_1 τοῦ $\overline{M_1M_2}$

τό x_2 τοῦ $\overline{\beta}$ ἀντιστοιχεῖ στό x_3-x_1 τοῦ $\overline{M_1M_3}$, τό y_1 τοῦ $\overline{\alpha}$ ἀντιστοιχεῖ στό y_2-y_1 τοῦ $\overline{M_1M_2}$ καί τό y_2 τοῦ $\overline{\beta}$ ἀντιστοιχεῖ στό y_3-y_1 τοῦ $\overline{M_1M_3}$. Δηλ. $E=\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]$.
Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις προκύπτει:

$$E=\frac{1}{2}\left(x_2y_3-x_1y_3-x_2y_1+x_1y_1-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_2-x_1y_1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(x_2y_3-x_3y_2-x_1y_3+x_3y_1+x_1y_2-x_2y_1\right)$$ καί γράφεται ὑπό

μορφή ὁρίζουσας ὡς ἑξῆς: $$|E|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\| \qquad (7.16)$$

καί ἐκφράζει τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $M_1M_2M_3$ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν του M_1, M_2, M_3 (ἀπολύτως).

Σχετική θέση δύο εὐθειῶν στό ἐπίπεδο.

Ἔστω $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ καί $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ οἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν. Οἱ εὐθεῖες αὐτές ἤ θά τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο, ἤ θά εἶναι παράλληλες ἤ τέλος θά ταυτίζονται καί θά ἀποτελοῦν μία εὐθεῖα. Αὐτά, ἀπό ἀλγεβρική ἄποψη σημαίνουν ὅτι τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ἤ θά ἔχει μία λύση, ἤ δέν θά ἔχει καμμία, ἤ θά ἔχει ἄπειρες λύσεις. Ἀπό τή διερεύνηση συστήματος δύο γραμμικῶν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ προκύπτει:

1) $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\Longrightarrow$ μία λύση $\Longrightarrow$ εὐθεῖες τέμνονται

2) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\Longrightarrow$ καμμία λύση $\Longrightarrow$ εὐθεῖες παρ/λες.

3) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\Longrightarrow$ ἄπειρες λύσεις $\Longrightarrow$ εὐθεῖες ταυτίζονται.

Ἐπίπεδη δέσμη εὐθειῶν.

Εἶναι τό σύνολο ὅλων τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου καλούμενο **κέντρο** τῆς δέσμης. Οἱ εὐθεῖες λέγονται **ἀκτίνες** τῆς δέσμης.

Ἔστω οἱ εὐθεῖες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$, $A_3x+B_3y+\Gamma_3=0$. Γιά νά διέρχονται οἱ εὐθεῖες αὐτές ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο θά πρέπει νά νά τέμνονται οἱ δύο πρῶτες καί οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς των νά ἐπαληθεύουν τήν τρίτη ἐξίσωση. Αὐτό ἀλγεβρικά σημαίνει, τό σύστημα τῶν 3 αὐτῶν ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους τούς x καί y νά εἶναι συμβιβαστό. Αὐτό συμβαίνει ὅπως ξέρουμε, ἄν ἡ ὁρίζουσα τῶν ἀγνώστων καί τῶν σταθερῶν ὅρων εἶναι μηδέν. Δηλ.

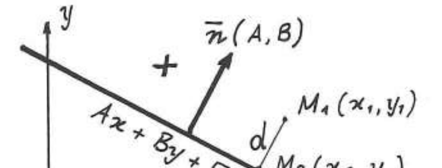
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.17)$$

πού ἀποτελεῖ τήν ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά διέρχονται τρεῖς εὐθεῖες ἀπό ἕνα σημεῖο.

Μία ἰδιότητα τῆς ἐπίπεδης δέσμης εἶναι:

Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς: $(A_1x+B_1y+\Gamma_1)+\lambda(A_2x+B_2y+\Gamma_2)=0$ **(7.18)** ὅπου $\lambda\in R$ ὁρίζει εὐθεία, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό κέντρο τῆς δέσμης πού ὁρίζεται ἀπ' τίς εὐθεῖες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$.

Γραμμική ἀνισότητα καί ἀπόσταση σημείου ἀπό εὐθεία.



Σχ. 42

Ἔστω εὐθεῖα $Ax+By+\Gamma=0$. Τότε ὡς γνωστόν τό διάνυσμα $\bar{n}(A,B)$ εἶναι κάθετο στήν εὐθεία. Ἡ εὐθεία χωρίζει τό ἐπίπεδο xoy σέ δύο ἡμιεπίπεδα. Οἱ συντεταγμένες τοῦ ἡμιεπιπέδου πού βρίσκεται τό $\bar{n}(A,B)$ καθιστοῦν τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξίσωσης θετικό, ἐνῶ οἱ συντεταγμένες τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου ἀρνητικό. Πράγματι· ἔστω $M_0(x_0,y_0)$ σημεῖο τῆς εὐθείας καί $\overline{M_0M_1}$ διάνυσμα κάθετο στήν εὐθεία καί ὁμόρροπο πρός τό $\bar{n}(A,B)$ Τότε $\overline{M_0M_1}=\lambda\bar{n}$ ὅπου $\lambda>0$ (σχ 42).

Επομένως $x_1-x_0=\lambda A$, $y_1-y_0=\lambda B$ δηλ. $x_1=x_0+\lambda A$, $y_1=y_0+\lambda B$. Αντικαθιστούμε τίς τιμές αυτές των x_1, y_1 στό πρώτο μέλος της εξίσωσης $Ax+By+\Gamma=0$ οπότε έχουμε:

$$Ax_1+By_1+\Gamma = A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+\Gamma = Ax_0+By_0+\Gamma+\lambda(A^2+B^2)$$

ή $Ax_1+By_1+\Gamma=\lambda(A^2+B^2)>0$ διότι $Ax_0+By_0+\Gamma=0$ καί $\lambda>0$ απ' όπου $\lambda=\dfrac{Ax_1+By_1+\Gamma}{A^2+B^2}$ (1).

Θά υπολογίσουμε τώρα τήν απόσταση d του σημείου $M_1(x_1,y_1)$ απ' τήν ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$. Έστω $M_0(x_0,y_0)$ ό πόδας της καθέτου απ' τό M_1 στήν ευθεία. Τότε $\overline{M_1M_0}=\lambda\bar{u}$ καί άρα:

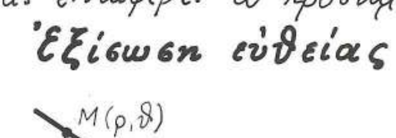
$x_1-x_0=\lambda A$, $y_1-y_0=\lambda B$ οπότε $d^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=\lambda^2(A^2+B^2)$

καί αντικαθιστώντας τό λ απ' τήν (1) έχουμε:

$$d^2=\frac{(Ax_1+By_1+\Gamma_1)^2}{(A^2+B^2)^2}\cdot(A^2+B^2) \quad \text{ή} \quad d=\frac{Ax_1+By_1+\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (7.19)$$

καί λαμβάνεται θετική άν τό $M_1(x_1,y_1)$ βρίσκεται στό θετικό ημιεπίπεδο, αρνητική δέ άν τό M_1 βρίσκεται στό αρνητικό. Άν δέν μας ενδιαφέρει τό πρόσημο παίρνουμε τόν αριθμητή απολύτως.

Εξίσωση ευθείας σέ πολικές συντεταγμένες



Σχ. 43

Λαμβάνουμε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων μέ O τόν πόλο καί Ox τόν πολικό άξονα. Έστω (ε) ή ευθεία πού θέλουμε νά βρούμε τήν εξίσωσή της καί $M(\rho,\vartheta)$ τυχόν σημείο αυτής (σχ. 43). Άν γνωρίζουμε τήν απόσταση P του πόλου απ' τήν ευθεία καθώς καί τή γωνία α πού σχηματίζει ή P μέ τόν πολικό άξονα, τότε απ' τό ορθογώνιο τρίγωνο OAM προκύπτει:

$$\rho=\frac{P}{\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\alpha)} \qquad (7.20)$$

2. Κωνικές τομές.

Γενικά οἱ καμπύλες $2^{ου}$ βαθμοῦ λέγονται **κωνικές τομές**. Καί τοῦτο γιατί ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ τομή ἑνός ὀρθοῦ κυλινδρικοῦ κώνου μ' ἕνα ἐπίπεδο εἶναι μία καμπύλη $2^{ου}$ βαθμοῦ, ἡ ὁποία ἐκφυλίζεται σέ ζεῦγος εὐθειῶν ὅταν τό ἐπίπεδο διέρχεται ἀπ' τήν κορυφή τοῦ κώνου. Εἰδικά ἄν τό ἐπίπεδο τέμνει τόν ἄξονα τοῦ κώνου πλαγίως, ἡ καμπύλη εἶναι κλειστή καί λέγεται **ἔλλειψη**. Ἄν εἶναι παράλληλο πρός τή γενέτειρα τοῦ κώνου ἡ καμπύλη εἶναι ἀνοικτή καί λέγεται **παραβολή** καί τέλος ἄν τό ἐπίπεδο εἶναι παράλληλο πρός τόν ἄξονα τοῦ κώνου, ἡ τομή εἶναι μιά ἀνοικτή καμπύλη μέ δύο κλάδους καί λέγεται **ὑπερβολή**. Στήν περίπτωση τώρα πού τό ἐπίπεδο εἶναι κάθετο πρός τόν ἄξονα τοῦ κώνου ἡ τομή θά εἶναι **κύκλος**. Οἱ κωνικές τομές μελετήθηκαν κατ' ἀρχάς ἀπ' τούς ἀρχαίους Ἕλληνες καί πρῶτος ὁ Ἀπολλώνιος τίς ὀνόμασε κωνικές τομές.

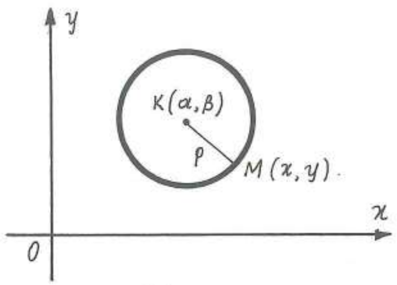
2α. Κύκλος.

Κύκλος εἶναι ὡς γνωστόν, ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπό σταθερό σημεῖο Κ σταθερή ἀπόσταση ρ (ἀκτίνα).

Ἔστω Oxy ἕνα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων καί $K(\alpha,\beta)$ τό κέντρο Κ ἑνός κύκλου ἀκτίνας ρ. Ἄν $M(x,y)$ εἶναι τυχόν σημεῖο τοῦ κύκλου, τότε τό μῆκος ΚΜ τῆς ἀκτίνας ρ θά δίδεται ὡς γνωστόν ἀπό τόν τύπο μήκους διανύσματος (6.3'):

$$KM = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} \quad \text{ἤ ἄν } KM=\rho: \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \qquad \textbf{(7.21)}$$

Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στήν (7.21) θά ἔχουμε:



Σχ. 44

$x^2+\alpha^2-2x\alpha+y^2+\beta^2-2y\beta=\rho^2$ ἤ
$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\rho^2=0$.
Θέτοντας δέ $-2\alpha=A$, $-2\beta=B$,
$\alpha^2+\beta^2-\rho^2=\Gamma$ (1) ἡ (7.21) γίνεται:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \qquad (7.22)$$

καί εἶναι ἡ **γενική ἐξίσωση** κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι μία καμπύλη 2ου βαθμοῦ. Ἀπ' τίς σχέσεις (1) προκύπτει $\alpha=-\frac{A}{2}$, $\beta=-\frac{B}{2}$ καί $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\Gamma}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$ δηλ. τό κέντρο Κ ἔχει συντεταγμένες $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ καί ἀκτίνα $\rho=-\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$.

Ἀπ' τή Στοιχειώδη Γεωμετρία ξέρουμε ὅτι 3 σημεῖα $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ μή κείμενα ἐπ' εὐθείας ὁρίζουν τή θέση ἑνός κύκλου, πού ἔχει ἐξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$. Ἐπειδή ὁ κύκλος διέρχεται ἀπ' τά σημεῖα M_1, M_2, M_3 σημαίνει ὅτι αὐτά θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσή του. Δηλ: $x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+\Gamma=0$, $x_2^2+y_2^2+Ax_2+By_2+\Gamma=0$ καί $x_3^2+y_3^2+Ax_3+By_3+\Gamma=0$ (2) Οἱ ἐξισώσεις (2) μαζί μέ τήν ἐξίσωση τοῦ κύκλου ἀποτελοῦν ἕνα ὁμογενές σύστημα 4 ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους τούς Α, Β, Γ. Γιά νά ἔχει ἑπομένως λύση διάφορη τῆς προφανοῦς θά πρέπει οἱ συντελεστές τῶν ἀγνώστων καί τῶν σταθερῶν ὅρων νά δίδουν ὁρίζουσα ἴση μέ μηδέν. (σταθεροί ὅροι ἐδῶ θεωροῦνται οἱ x^2+y^2 κ.τ.λ.).

δηλ: $$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.23)$$

Ἡ (7.23) εἶναι ἑπομένως ἡ ἐξίσωση κύκλου πού διέρχεται ἀπό 3 σημεῖα.

Γιά νά διέρχεται ἑπομένως ἕνας κύκλος ἀπό 4 σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 θά πρέπει οἱ συντεταγμένες τοῦ M_4 νά ἐπαληθεύουν τήν (7.23).

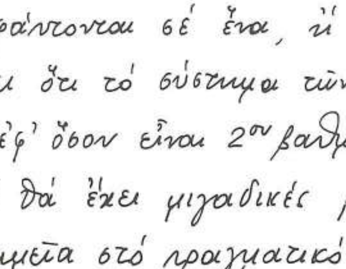
Σχετική θέση δύο κύκλων.

Ἔστω $x^2+y^2+A_1x+B_1y+Γ_1=0$ καί $x^2+y^2+A_2x+B_2y+Γ_2=0$ δύο κύκλοι. Οἱ κύκλοι αὐτοί ἤ θά τέμνονται σέ δύο σημεῖα, ἤ θά ἐφάπτονται σέ ἕνα, ἤ δέν θά τέμνονται. Ἀλγεβρικά αὐτό σημαίνει ὅτι τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων ἤ θά ἔχει 2 ζεύγη λύσεων (ἐφ' ὅσον εἶναι 2ου βαθμοῦ) ἤ ἕνα ζεῦγος (ἀνά μία ρίζα διπλῆ) ἤ θά ἔχει μιγαδικές ρίζες, ὁπότε προφανῶς δέν προσδιορίζονται σημεῖα στό πραγματικό ἐπίπεδο.

Ἐξίσωση κύκλου σέ πολικές συντεταγμένες.

Ἔστω κύκλος μέ κέντρο τό σημεῖο $K(ρ_0, θ_0)$ καί ἀκτίνα $α$. Ἄν $P(ρ,θ)$ εἶναι τό τυχόν σημεῖο τῆς περιφέρειας αὐτοῦ, τότε ἀπ' τό τρίγωνο OKP ἔχουμε (ἐπέκταση Πυθαγορείου θεωρήματος):

$$α^2=ρ^2+ρ_0^2-2ρρ_0 \, συν(θ-θ_0) \qquad (7.24)$$



Σχ. 45

Ἡ (7.24) εἶναι ἡ ἐξίσωση κύκλου σέ πολικές συντεταγμένες μέ πόλο τυχόν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 45).

Ἄν σάν πόλος ληφθεῖ σημεῖο τῆς περιφερείας τότε $ρ_0=α$ καί ἡ (7.24) γίνεται $α^2 = ρ^2 + α^2 - 2ρα \, συν(θ-θ_0)$ ἤ ἐπειδή $ρ \neq 0$

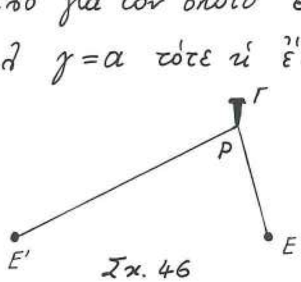
$ρ = 2α \, συν(θ-θ_0)$. Ἄν ἐπί πλέον ὁ πολικός ἄξονας διέρχεται ἀπ' τό κέντρο K τότε $θ_0=0$ καί ἡ τελευταία σχέση γίνεται

$ρ = 2α \, συν θ$.

Σημείωση. Σέ σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων, ὅταν τό κέντρο τοῦ κύκλου συμπέσει μέ τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, ἡ (7.21) γίνεται: $x^2+y^2=ρ^2$.

2β. Ἔλλειψη.

Ἔλλειψη εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων P τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο δοθέντα σημεῖα E καί E' τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σταθερό δηλ. $EP + E'P = 2\alpha$ (ὅπου $2\alpha > 2\gamma = EE'$). Τά σημεῖα E, E' λέγονται **ἑστίες** καί ὅταν συμπέσουν δηλ. $E \equiv E'$ τότε ὁ γεωμετρικός τόπος γίνεται κύκλος μέ κέντρο τό $E \equiv E'$ καί ἀκτίνα α. Ὁ λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} < 1$ λέγεται **ἐκκεντρότητα** τῆς ἔλλειψης καί δίνει ἕνα μέτρο ἀποκλίσεώς της ἀπ' τόν κύκλο γιά τόν ὁποῖο ἐπειδή $E \equiv E'$ εἶναι $\gamma = 0$ δηλ. $\varepsilon = 0$. Ἄν $\varepsilon = 1$ δηλ. $\gamma = \alpha$ τότε ἡ ἔλλειψη ἐκφυλίζεται σέ εὐθεία.



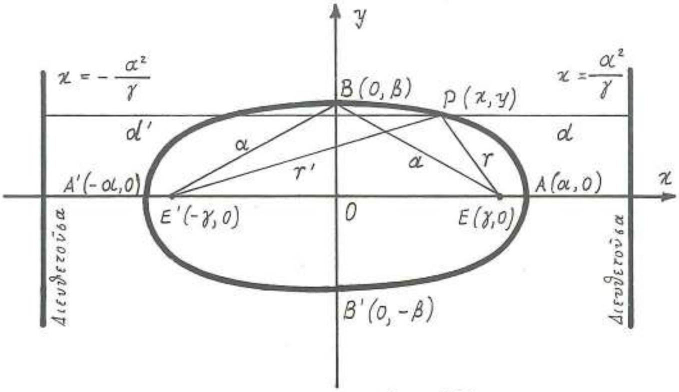
Σχ. 46

Γιά νά κατασκευάσουμε τήν ἔλλειψη ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Στερεώνουμε στά σημεῖα E καί E' δύο καρφιά, στά ὁποῖα δένουμε τά ἄκρα νήματος μήκους 2α. Μέ γραφίδα Γ, τήν ὁποία συνεχῶς κινοῦμε στό ἐπίπεδο σχεδιάσεως πού βρίσκονται οἱ ἑστίες κρατᾶμε τεντωμένο τό νῆμα. Προφανῶς ἡ γραφίδα Γ ἔγραψε κατά τήν κίνησή της ἔλλειψη μέ ἑστίες τά E καί E' καί ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων $E'P + EP = 2\alpha$ ὅσο εἶναι τό μῆκος τοῦ νήματος (σχ. 46).

Γιά τήν εὕρεση τῆς ἐξίσωσής της, παίρνουμε ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων μέ ἀρχή O τό μέσον τοῦ EE', ἄξονα τῶν x τήν εὐθεία EE' καί ἄξονα τῶν y τήν κάθετο πάνω στήν EE'. Οἱ συντεταγμένες τῶν ἑστιῶν εἶναι $E'(-\gamma, 0)$ καί $E(\gamma, 0)$. Ἔστω $P(x, y)$ τό τυχόν σημεῖο τῆς ἔλλειψης. Ἔχουμε (σχ. 47):

$$(E'P)^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 \quad \text{καί} \quad (EP)^2 = (x-\gamma)^2 + y^2 \quad (1)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) προκύπτει $(E'P)^2 - (EP)^2 = 4\gamma x$



Σχ. 47

ἤ $[(E'P)+(EP)]\cdot$
$\cdot[(E'P)-(EP)] = 4\gamma x$
Ἀλλά $(E'P)+(EP)=2\alpha$
ὁπότε $(E'P)-(EP)=\dfrac{2\gamma x}{\alpha}$
Ἄρα $(E'P)=\alpha+\dfrac{\gamma x}{\alpha}$
καί $(EP)=\alpha-\dfrac{\gamma x}{\alpha}$
ὁπότε ἡ πρώτη τῶν (1) μέ τήν ἀντικατάσταση τοῦ $(E'P)=\alpha+\dfrac{\gamma x}{\alpha}$ γίνεται: $\left(\alpha+\dfrac{\gamma x}{\alpha}\right)^2=(x+\gamma)^2+y^2$ ἤ ἀκόμη

$\alpha^2+\dfrac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2}+2\gamma x = x^2+\gamma^2+2\gamma x+y^2$ ἤ $\left(1-\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)x^2+y^2=\alpha^2-\gamma^2$

Ἐπειδή $\alpha>\gamma$ θέτουμε $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$ ὁπότε προκύπτει:

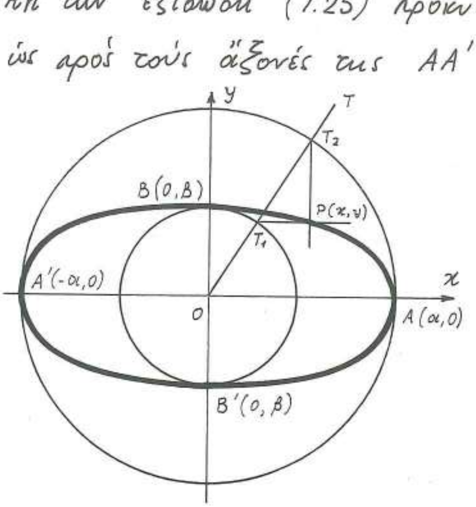
$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2+y^2=\beta^2 \quad \text{ἤ τελικά} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (7.25)$$

Ἡ (7.25) εἶναι ἡ **κανονική** ἤ ἁπλοποιημένη ἐξίσωση τῆς ἐλλείψης. Ἀπ' τήν (7.25) ἔχουμε γιά $y=0$ $x=\pm\alpha$ καί γιά $x=0$ $y=\pm\beta$ δηλ. ἡ ἔλλειψη τέμνει τόν ἄξονα τῶν x στά σημεῖα $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$ καί τόν ἄξονα τῶν y στά σημεῖα $B(0,\beta)$, $B'(0,-\beta)$. Τά σημεῖα A, A', B, B' λέγονται **κορυφές** τῆς ἐλλείψης τά δέ τμήματα $AA'=2\alpha$, $BB'=2\beta$ λέγονται **ἄξονες** αὐτῆς.

Οἱ δύο κάθετες εὐθεῖες σέ ἀπόσταση ἀπ' τό κέντρο $x=\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ καί $x=-\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ λέγονται **διευθετοῦσες** τῆς ἔλλειψης καί κεῖνται προφανῶς ἔξω ἀπ' τήν ἔλλειψη ἐπειδή $\dfrac{\alpha^2}{\gamma}>\alpha$ καί $-\dfrac{\alpha^2}{\gamma}<-\alpha$ ἐφ' ὅσον $\gamma<\alpha$. Μιά ἰδιότητα τῶν διευθετουσῶν εἶναι:

"Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου $P_1(x_1,y_1)$ τῆς ἔλλειψης ἀπό μία ἑστία καί τήν ἀντίστοιχη διευθετοῦσα εἶναι σταθερός καί ἴσος μέ $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon<1$ δηλ. $\dfrac{d}{r}=\dfrac{d'}{r'}=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon$.

Ἀπ' τήν ἐξίσωση (7.25) προκύπτει ὅτι ἡ ἔλλειψη εἶναι συμμετρική ὡς πρός τούς ἄξονές της AA' καί BB'.

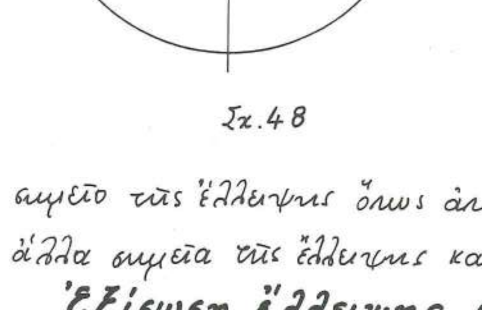


Σχ.48

Ἕνας ἄλλος τρόπος χάραξης τῆς ἔλλειψης, ὅταν ξέρουμε τούς ἄξονές της εἶναι ὁ ἑξῆς: Φέρουμε τυχοῦσα τέμνουσα OT ἡ ὁποία τέμνει τή μικρή περιφέρεια στό T_1 καί τή μεγάλη στό T_2. Ἀπ' τό T_2 φέρουμε κάθετο πρός τόν ἄξονα Ox καί ἀπ' τό T_1 παράλληλο πρός τόν Ox. Τό σημεῖο τομῆς αὐτῶν $P(x,y)$ εἶναι σημεῖο τῆς ἔλλειψης ὅπως ἀποδεικνύεται. Ὁμοίως ὑπολογίζουμε καί ἄλλα σημεῖα τῆς ἔλλειψης καί τήν κατασκευάζουμε προσεγγιστικά.

Ἐξίσωση ἔλλειψης σέ πολικές συντεταγμένες.

Λαμβάνουμε σάν πόλο τήν ἀριστερή ἑστία E' καί σάν πολικό ἄξονα τόν Ox. Ἔστω P τυχόν σημεῖο τῆς ἔλλειψης μέ καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) καί πολικές συντεταγμένες (ρ,ϑ).



Σχ. 49

Τότε ἔχουμε $\rho = (E'P) = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $E'M = E'O + OM = \gamma + x$. Ἀλλά $E'M = \rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$ ἄρα $\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = \gamma + x$ καί ἑπομένως $x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta - \gamma$. Λόγω τῆς $\rho = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha}$ προκύπτει (σχ 49) $\rho = \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}(\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta - \gamma)$ ἤ ἀκόμη $\rho\alpha - \gamma\rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = \alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2$ δηλ.

$$\rho = \frac{\beta^2}{\alpha - \gamma\,\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha}}{1 - \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\vartheta}.$$

Θέτουμε $\frac{\beta^2}{\alpha} = m$ καί ἐπειδή $\frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$ ἔχουμε

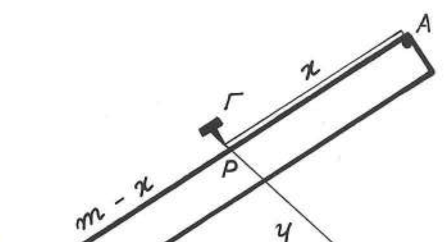
$$\rho = \frac{m}{1 - \varepsilon\,\sigma\upsilon\nu\vartheta} \qquad (7.26)$$

Ἡ (7.26) εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωση. Ὁ ἀριθμός $m = \frac{\beta^2}{\alpha}$ λέγεται **παράμετρος** τῆς ἔλλειψης. Ἀπ' τήν (7.26) γιά $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ἔχουμε $\rho = m$ δηλ. ἡ παράμετρος εἶναι ἡ πολική ἀκτίνα τοῦ σημείου τῆς ἔλλειψης, τό ὁποῖο βρίσκεται ἄν ὑψώσουμε κάθετο στό μέγα ἄξονα αὐτῆς στήν ἑστία E'.

2γ. Ὑπερβολή.

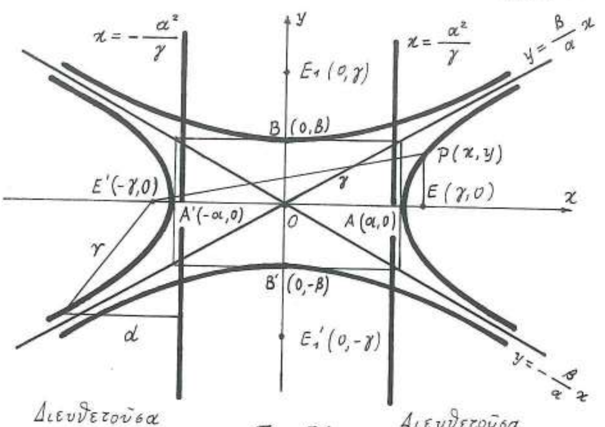
Ὑπερβολή εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων P τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά τῶν ἀποστάσεων, κατ' ἀπόλυτο τιμή, ἀπό δύο σημεῖα E', E δοθέντα τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι σταθερή· δηλαδή $0 < |E'P - EP| = 2\alpha < E'E = 2\gamma$. Ὅπως καί στήν ἔλλειψη τά E', E λέγονται ἑστίες τῆς ὑπερβολῆς, ὁ δέ λόγος $\frac{\gamma}{\alpha} > 1$ λέγεται ἐκκεντρότητα αὐτῆς

Ἡ σχεδίαση τόξου τῆς ὑπερβολῆς γίνεται ὡς ἑξῆς: Στερεώνουμε τό ἕνα ἄκρο κανόνος στή μία ἑστία π.χ τήν E', ὥστε νά μπορεῖ ὁ κανόνας νά στρέφεται περί τό E', τό δέ ἄλλο ἄκρο του A, καθώς καί τό E τά προσδένουμε μέ νῆμα μήκους $m - 2\alpha$, ὅπου m εἶναι τό μῆκος τοῦ κανόνος. Κρατοῦμε τό νῆμα τεντωμένο μέ γραφίδα Γ τήν ὁποία κινοῦμε κατά μῆκος τοῦ κανόνος καί ἐπί τῆς πλευρᾶς τῆς ἐστραμμένης πρός τήν ἑστία, ὁπότε, ὅταν ὁ κανόνας στρέφεται περί τήν ἑστία E', ἡ γραφίδα Γ χαράσσει τόξο ὑπερβολῆς διότι $x + y = m - 2\alpha$



Σχ. 50

καί $PE' - PE = (m - x) - y = m - (x + y) = m - (m - 2\alpha) = 2\alpha$.



Σχ 51

Γιά τήν εὕρεση τῆς ἐξίσωσής της παίρνουμε σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων μέ ἀρχή O τό μέσον τοῦ $E'E$, ἄξονα τῶν x τήν εὐθεῖα $E'E$ καί ἄξονα τῶν y τήν κάθετο εἰς αὐτή. Οἱ συντεταγμένες τῶν ἑστιῶν εἶναι $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$.

Ἔστω $P(x,y)$ τό τυχόν σημεῖο τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 51). Τότε ἔχουμε: $(E'P)^2=(x+\gamma)^2+y^2$, $(EP)^2=(x-\gamma)^2+y^2$ (1). Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) κατά μέλη προκύπτει $(E'P)^2-(EP)^2=4\gamma x$ ἤ ἀκόμη $[(E'P)+(EP)]\cdot[(E'P)-(EP)]=4\gamma x$. Ἀλλά ἐπειδή $|(E'P)-(EP)|=2\alpha$ ἔχουμε $(E'P)-(EP)=\pm 2\alpha$ (2) ἄρα $(E'P)+(EP)=\pm\dfrac{2\gamma x}{\alpha}$ (3)
Προσθέτοντας τίς (2) καί (3) κατά μέλη προκύπτει:
$(E'P)=\pm\alpha\pm\dfrac{\gamma x}{\alpha}=\pm\left(\alpha+\dfrac{\gamma x}{\alpha}\right)$ καί ἐπειδή $(E'P)^2=(x+\gamma)^2+y^2$, $\left(\alpha+\dfrac{\gamma x}{\alpha}\right)^2=(x+\gamma)^2+y^2$ ἤ $\alpha^2+\dfrac{\gamma^2x^2}{\alpha^2}+2\gamma x=x^2+\gamma^2+2\gamma x+y^2$ ἤ $\dfrac{(\gamma^2-\alpha^2)x^2}{\alpha^2}-y^2=\gamma^2-\alpha^2$ ἤ ἐπειδή $\gamma>\alpha$, θέτουμε $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$ ὁπότε ἔχουμε $\dfrac{\beta^2x^2}{\alpha^2}-y^2=\beta^2$ ἤ τελικά

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (7.27)$$

Ἡ (7.27) εἶναι ἡ **κανονική** ἤ ἁπλοποιημένη ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς. Ἀπ' τήν (7.27) προκύπτουν τά ἑξῆς:
Ἄν τό σημεῖο $P(x,y)$ κεῖται ἐπί τῆς ὑπερβολῆς, τότε καί τά σημεῖα μέ συντεταγμένες $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ κεῖνται ἐπί τῆς ὑπερβολῆς. Δηλ ἡ ὑπερβολή εἶναι καμπύλη συμμετρική ὡς πρός τούς ἄξονες ox, oy καί ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.
Γιά $y=0$ ἔχουμε $x=\pm\alpha$ δηλ ἡ ὑπερβολή τέμνει τόν ἄξονα ox στά σημεῖα $A'(-\alpha,0)$, $A(\alpha,0)$ πού λέγονται **κορυφές** αὐτῆς.

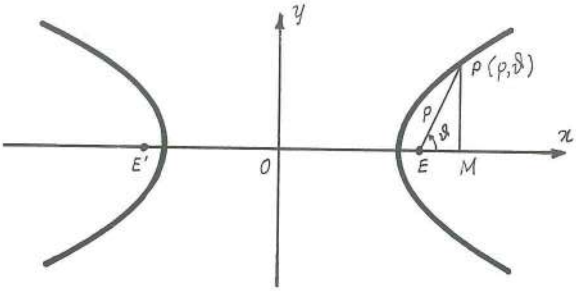
Γιά $x=0$ δέν ορίζεται τό y επομένως ή υπερβολή δέν τέμνει τόν άξονα Oy. Έξ άλλου επειδή $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 1$ προκύπτει ότι $|x| \geq \alpha$, δηλ. άπ' τήν (7.27) ορίζεται τό y γιά τιμές τοῦ x στά διαστήματα $(-\infty, -\alpha]$, $[\alpha, +\infty)$. Επομένως ή υπερβολή αποτελεῖται από δύο κλάδους, τόν έναν αριστερά τῆς εὐθείας $x=-\alpha$ καί τόν άλλο δεξιά τῆς $x=\alpha$. Άν $\alpha=\beta$ τότε ή υπερβολή λέγεται **ισοσκελής**, οπότε ή εξίσωσή της γίνεται: $x^2 - y^2 = \alpha^2$ **(7.28)**

Οί εὐθεῖες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ καί $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ μέ συντελεστές κατευθύνσεως $\frac{\beta}{\alpha}$ καί $-\frac{\beta}{\alpha}$ αντίστοιχα λέγονται **ασύμπτωτοι** τῆς υπερβολῆς καί τέμνουν αὐτή στά ἐπ' άπειρον σημεῖα της. Οί δύο κάθετες εὐθεῖες σέ αποστάσεις $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ καί $x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$ από τό κέντρο συμμετρικά λέγονται επίσης διευθετοῦσες τῆς υπερβολῆς καί έχουν κι αὐτές τήν ιδιότητα ότι ό λόγος $\frac{r}{d}$ τῆς εστιακῆς απόστασης τυχόντος σημείου πρός τήν απόσταση τῆς αντίστοιχης στήν E' ή E διευθετούσας εἶναι σταθερός ήτοι $\frac{r}{d} = \varepsilon$ (ε εκκεντρότητα τῆς υπερβολῆς. Ή υπερβολή ή οποία έχει σάν ασυμπτώτους τίς ίδιες εὐθεῖες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ καί $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ σάν άξονα δέ τόν άξονα BB' μέ εστίες τίς E_1', E_1 λέγεται **συζυγής** τῆς πρώτης ή δέ εξίσωση αὐτῆς προκύπτει (ότων εναλλαχθοῦν τά x καί y) ότι εἶναι

$$-\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad ή \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1 \qquad (7.29)$$

Εξίσωση υπερβολῆς σέ πολικές συντεταγμένες.

Παίρνουμε σάν πόλο τή δεξιά εστία E καί σάν πολικό άξονα τόν Ox. Έστω P σημεῖο τῆς υπερβολῆς μέ καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) καί πολικές συντεταγμένες (ρ, ϑ). Έχουμε $OM = OE + EM$ δηλ. $x = \gamma + EM$ καί συνεπῶς $EM = x - \gamma$. Άλλά $EM = \rho\,συν\vartheta$. Άρα $\rho\,συν\vartheta = x - \gamma$ καί $x = \gamma + \rho\,συν\vartheta$. Άλλά όπως είδαμε προηγουμένως



Σχ. 52

$$EP = \pm\left(\frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha\right)$$ ή

$$\pm EP = \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha = \frac{\gamma}{\alpha}(\gamma + \rho\,\text{συν}\vartheta) - \alpha = \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + \gamma\rho\,\text{συν}\vartheta}{\alpha}$$ καί

ἐπειδή $EP = \rho$ καί $\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$ προκύπτει $\pm\rho = \dfrac{\beta^2 + \gamma\rho\,\text{συν}\vartheta}{\alpha}$

ή $\rho(\pm\alpha - \gamma\,\text{συν}\vartheta) = \beta^2$

καί $\rho = \dfrac{\beta^2}{\pm\alpha - \gamma\,\text{συν}\vartheta} = \dfrac{\frac{\beta^2}{\alpha}}{\pm 1 - \frac{\gamma}{\alpha}\text{συν}\vartheta}$. Θέτουμε $\dfrac{\beta^2}{\alpha} = m$ καί

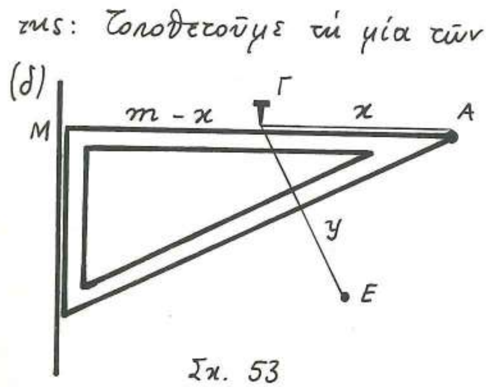
ἐπειδή εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$, ἔχουμε τελικά $\rho = \dfrac{m}{\pm 1 - \varepsilon\,\text{συν}\vartheta}$ **(7.30)**

Τό πρόσημο + ἀντιστοιχεῖ στά σημεῖα τοῦ δεξιοῦ κλάδου καί τό πρόσημο − στά σημεῖα τοῦ ἀριστεροῦ.

2δ. Παραβολή.

Παραβολή εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων P ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό δοσμένο σημεῖο E καί δοσμένη εὐθεῖα (δ) τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημεῖο E πού δέν κεῖται ἐπί τῆς (δ) λέγεται ἑστία τῆς παραβολῆς καί ἡ (δ) διευθετοῦσα.

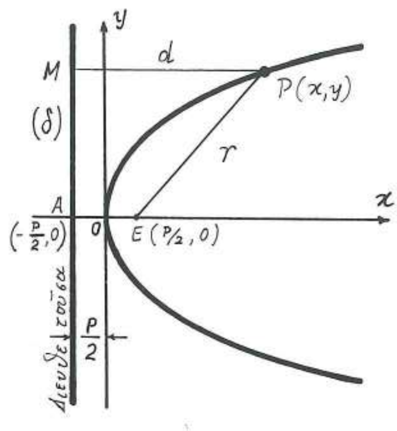
Ἀπ' τόν ὁρισμό τῆς παραβολῆς προκύπτει ἡ ἀκόλουθη κατασκευή της: Τοποθετοῦμε τή μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου



Σχ. 53

πάνω στή δοθεῖσα εὐθεία (δ) καί δένουμε τά ἄκρα νήματος, μήκους ἴσου μέ τό μῆκος m τῆς ἄλλης κάθετης πλευρᾶς, μέ τήν κορυφή τοῦ τριγώνου A ἐκτός τῆς εὐθείας (δ) καί μέ τήν ἑστία E (σχ 53). Μία γραφίδα Γ κινεῖται κατά μῆκος τῆς κάθετης πλευρᾶς ΜΑ ἔχοντας τό νῆμα τεντωμένο. Ὅταν τό τρίγωνο ὀλισθαίνει ἐπί τῆς εὐθείας (δ), ἡ γραφίδα Γ χαράσσει τόξο πού εἶναι παραβολή διότι $x+y=m$ καί $y=m-x$ δηλ $M\Gamma=\Gamma E$.

Γιά τήν εὕρεση τῆς ἐξίσωσης τῆς παραβολῆς, παίρνουμε σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, μέ ἄξονα ox τήν κάθετο ἀπ' τήν ἑστία Ε πρός τή διευθετοῦσα, ἀρχή τό μέσον τῆς ἀπόστασης τοῦ Ε ἀπό τή (δ) καί ἄξονα oy τόν κάθετο σ' αὐτόν. Ἡ ἑστία Ε ἔχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2},0)$ ὅπου p εἶναι ἡ ἀπόσταση τῆς Ε ἀπό τή (δ). Ἡ διευθετοῦσα ἔχει ἐξίσωση $x=-\frac{p}{2}$. Ἔστω $P(x,y)$ τυχόν σημεῖο τῆς παραβολῆς. Τότε κατά τόν ὁρισμό τῆς παραβολῆς: $|PM|=|PE|$ δηλ $PM^2=PE^2$. Ἀλλά $PM^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ καί $PE^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$ ἄρα $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$ ἤ



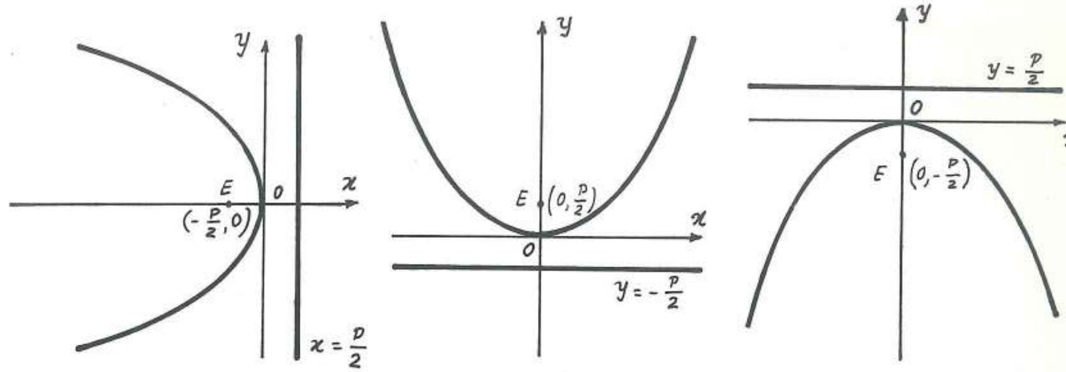
Σχ. 54

$y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$ καί τελικά $y^2=2px$ **(7.31)**

πού εἶναι ἡ **κανονική** ἤ ἁπλοποιημένη μορφή τῆς ἐξίσωσης τῆς παραβολῆς. Ἀπ' τήν (7.31) προκύπτει ὅτι:

Ἄν τό σημεῖο $P(x,y)$ κεῖται ἐπί τῆς παραβολῆς, τότε καί τό σημεῖο μέ συντεταγμένες $(x,-y)$ κεῖται ἐπί τῆς παραβολῆς δηλ ἡ παραβολή εἶναι καμπύλη, συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα ox. Ἐδῶ ὁ λόγος $\frac{r}{d}$, πού ὁρίζεται ὡς ἐκκεντρότητα τῆς παραβολῆς, ἰσοῦται μέ μονάδα.

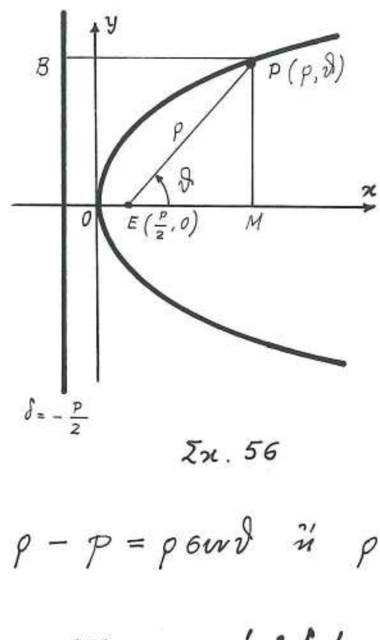
Οἱ ἐξισώσεις $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$, ὅπου $p>0$ παριστάνουν ἐπίσης παραβολή, πού ἀποδίδονται παρακάτω (σχ. 55):



α) $y^2=-2px$ β) $x^2=2py$ γ) $x^2=-2py$

Σχ. 55

Ἐξίσωση παραβολῆς σέ πολικές συντεταγμένες.



Σχ. 56

Παίρνουμε σάν πόλο τήν ἑστία Ε αὐτῆς καί σάν πολικό ἄξονα τόν Οx. Ἔστω Ρ σημεῖο τῆς παραβολῆς μέ καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) καί πολικές (ρ,ϑ). Ἔχουμε $\rho=(EP)=(PB)=x+\frac{p}{2}$
$(OM)=(OE)+(EM)$ ἄρα $(EM)=x-\frac{p}{2}$
Ἀλλά $(EM)=\rho\,\text{συν}\vartheta$ δηλ. $x-\frac{p}{2}=\rho\,\text{συν}\vartheta$ καί ἐπειδή $x=\rho-\frac{p}{2}$ προκύπτει $\rho-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=\rho\,\text{συν}\vartheta$ ἤ ἀκόμη $\rho-p=\rho\,\text{συν}\vartheta$ ἤ $\rho-\rho\,\text{συν}\vartheta=p$ καί τελικά

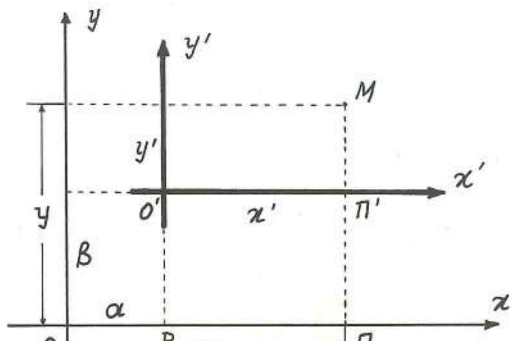
$$\rho=\frac{p}{1-\text{συν}\vartheta} \qquad (7.32)$$

Μία **κοινή ἰδιότητα τῶν κωνικῶν τομῶν** εἶναι ὅτι ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς κωνικῆς τομῆς, σέ τυχόν σημεῖο αὐτῆς, σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τίς ἑστιακές ἀκτίνες πού ἀντιστοιχοῦν στό σημεῖο αὐτό. (στήν παραβολή ἡ δεύτερη ἑστιακή ἀκτίνα εἶναι τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖο τοῦ Οx· στόν κύκλο οἱ ἑστιακές ἀκτίνες συμπίπτουν).

Ἀλλαγή συστήματος συντεταγμένων.

Σέ πολλά προβλήματα τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νά μεταβοῦμε ἀπό ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων σ' ἕνα ἄλλο γιά νά μελετήσουμε σέ πιό ἁπλοποιημένη μορφή τά προβλήματα αὐτά. Ἡ μετάβαση αὐτή μπορεῖ νά εἶναι εἴτε παράλληλη μεταφορά τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος, εἴτε στροφή κατά γωνία φ, εἴτε παράλληλη μεταφορά καί στροφή μαζί. Θά ἀναφερθοῦμε στό ἐπίπεδο καί θά ἐξετάσουμε ξεχωριστά τίς τρεῖς αὐτές περιπτώσεις.

1. Παράλληλη μεταφορά.

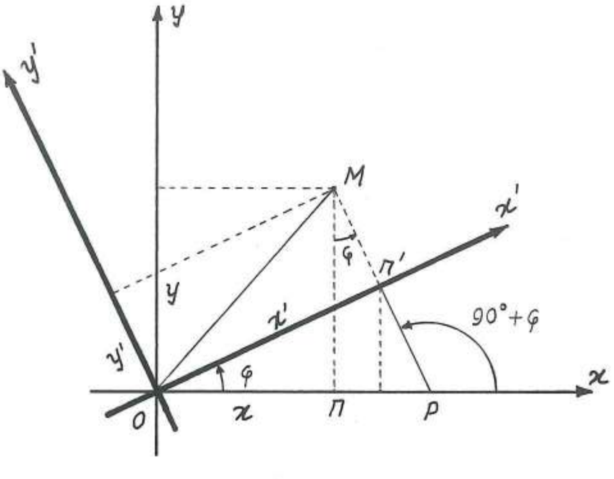


Σχ. 57

Ἔστω τό ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xoy. Μεταφέρουμε αὐτό παράλληλα πρός τόν ἑαυτό του στή θέση $x'o'y'$ ὅπου εἶναι $O'(\alpha,\beta)$. Οἱ συντεταγμένες τυχόντος σημείου M ὡς πρός τό σύστημα xoy εἶναι $O\Pi = x$, $\Pi M = y$ καί ὡς πρός τό σύστημα $x'o'y'$ εἶναι $O'\Pi' = x'$ καί $\Pi'M = y'$. Ἔχουμε $O\Pi = OP + P\Pi$ καί $\Pi M = \Pi\Pi' + \Pi'M = PO' + \Pi'M$. Ἀπ' τίς σχέσεις αὐτές ἔχουμε $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$ ἀπ' τίς ὁποῖες προκύπτουν οἱ τύποι: $x' = x - \alpha$, $y' = y - \beta$ (7.33) πού μᾶς δίνουν τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου M ὡς πρός τούς νέους ἄξονες $x'o'y'$ συναρτήσει τῶν παλαιῶν xoy (σχ. 57)

Στροφή κατά γωνία φ.

Ἔστω τό ὀρθογώνιο σύστημα xoy. Στρέφουμε αὐτό περί τό O κατά



Σχ. 58

κατά γωνία φ πρός τή θετική φορά κι έτσι έχουμε τό σύστημα $x'oy'$. Έστω M τυχόν σημείο. Οί συντεταγμένες αυτού ώς πρός τό xoy είναι $O\Pi = x$, $\Pi M = y$ καί ώς πρός τό $x'oy'$ είναι $O\Pi' = x'$, $\Pi' M = y'$. Έχουμε: $\overline{OM} = \overline{O\Pi'} + \overline{\Pi' M}$ (1). Προβάλλουμε τήν (1) στούς άξονες ox καί oy. Έχουμε, στόν ox: $\text{προβ}_{ox}\overline{OM} = \text{προβ}_{ox}\overline{O\Pi'} + \text{προβ}_{ox}\overline{\Pi' M}$ καί στόν oy: $\text{προβ}_{oy}\overline{OM} = \text{προβ}_{oy}\overline{O\Pi'} + \text{προβ}_{oy}\overline{\Pi' M}$. Επειδή όμως $\text{προβ}_{ox}\overline{OM} = x\overline{x}_o$, $\text{προβ}_{ox}O\Pi' = x'\text{συν}\varphi$, $\text{προβ}_{ox}\Pi' M = y'\text{συν}(90°+\varphi) = -y'\text{ημ}\varphi$, καί $\text{προβ}_{oy}OM = \Pi M = y$, $\text{προβ}_{oy}O\Pi' = x'\text{συν}(90°-\varphi) = x'\text{ημ}\varphi$, $\text{προβ}_{oy}\Pi' M = y'\text{συν}\varphi$, θά έχουμε:

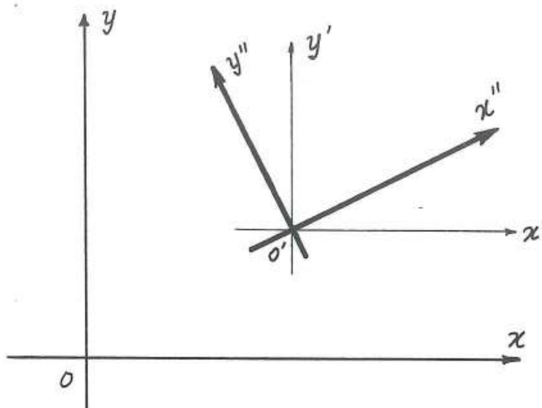
$x = x'\text{συν}\varphi - y'\text{ημ}\varphi$ καί $y = x'\text{ημ}\varphi + y'\text{συν}\varphi$ (2). Λύνοντας τό σύστημα τών εξισώσεων (2) ώς πρός x' καί y' μέ τή μέθοδο τών ορίζουσών (μέθοδος Cramer) ευρίσκουμε:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & -\text{ημ}\varphi \\ y & \text{συν}\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{συν}\varphi & -\text{ημ}\varphi \\ \text{ημ}\varphi & \text{συν}\varphi \end{vmatrix}} = \frac{x\,\text{συν}\varphi + y\,\text{ημ}\varphi}{\text{συν}^2\varphi + \text{ημ}^2\varphi} = x\,\text{συν}\varphi + y\,\text{ημ}\varphi$$

$$(7.34)$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} \text{συν}\varphi & x \\ \text{ημ}\varphi & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{συν}\varphi & -\text{ημ}\varphi \\ \text{ημ}\varphi & \text{συν}\varphi \end{vmatrix}} = \frac{y\,\text{συν}\varphi - x\,\text{ημ}\varphi}{\text{συν}^2\varphi + \text{ημ}^2\varphi} = -x\,\text{ημ}\varphi + y\,\text{συν}\varphi$$

Οί τύποι (7.34) δίνουν τίς νέες συντεταγμένες τού M ώς πρός τό $x'oy'$.



Σχ. 59

Ἔστω τά ὀρθογώνια συστήματα xoy καί $x''o'y''$. Τό $x''o'y''$ προέκυψε μέ παράλληλη μετατόπιση τοῦ xoy πρός τόν ἑαυτό του στή θέση $x'o'y'$ καί στή συνέχεια μέ στροφή τοῦ $x'o'y'$ περί τό O' κατά γωνία φ. Συνδιάζοντας τίς ἐξισώσεις (7.33) τῆς παράλληλης μεταφορᾶς ἔχουμε: $x' = x - \alpha$, $y' = y - \beta$ ἄν $O'(\alpha, \beta)$ (1). Συνδιάζοντας τώρα τίς ἐξισώσεις (7.34) τῆς στροφῆς κατά γωνία φ ἔχουμε (σχ. 59):
$x'' = x'\text{συν}\varphi + y'\text{ημ}\varphi$, $y'' = -x'\text{ημ}\varphi + y'\text{συν}\varphi$ ἤ λόγω τῶν (1):

$$\begin{aligned} x'' &= (x-\alpha)\,\text{συν}\varphi + (y-\beta)\,\text{ημ}\varphi \\ y'' &= -(x-\alpha)\,\text{ημ}\varphi + (y-\beta)\,\text{συν}\varphi \end{aligned} \qquad (7.35)$$

Οἱ τύποι (7.35) μᾶς δίνουν τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ ὡς πρός τούς νέους ἄξονες $x''o'y''$ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν παλαιῶν xoy.

Μέ τήν ἀλλαγή αὐτή τῶν ἀξόνων μποροῦμε νά ἁπλουστέψουμε κατά πολύ τή μελέτη τῶν γραφικῶν παραστάσεων, ἰδιαίτερα τῶν καμπύλων $2^{ου}$ βαθμοῦ, μεταχειριζόμενοι τό κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια.

Διερεύνηση κωνικῶν τομῶν.

Ἡ γενική ἐξίσωση μιᾶς καμπύλης $2^{ου}$ βαθμοῦ (κωνικῆς τομῆς) εἶναι: $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$ (1) ἀναφερόμενη σέ καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων oxy. Θέτουμε:

$$D = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}, \quad S = A + \Gamma \quad (7.36)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1. Ἄν $d > 0$ ἡ καμπύλη (1) εἶναι **γένους ἔλλειψης** καί μάλιστα

α') ἄν $D \neq 0$ καί $D \cdot S < 0$ πραγματική ἔλλειψη,

β') ἄν $D \neq 0$ καί $D \cdot S > 0$ φανταστική ἔλλειψη,

γ') ἄν $D = 0$ ζεῦγος φανταστικῶν εὐθειῶν.

2. Ἄν $d < 0$ ἡ καμπύλη (1) εἶναι **γένους ὑπερβολῆς** καί μάλιστα

α') ἄν $D \neq 0$ πραγματική ὑπερβολή,

β') ἄν $D = 0$ δύο πραγματικές εὐθεῖες τεμνόμενες.

3. Ἄν $d = 0$ ἡ καμπύλη (1) εἶναι **γένους παραβολῆς** καί μάλιστα

α') ἄν $D \neq 0$ εἶναι πραγματική παραβολή

β') ἄν $D = 0$ εἶναι ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν καί μάλιστα

i) ἄν $\Delta^2 - AZ > 0$ πραγματικές διακεκριμμένες

ii) ἄν $\Delta^2 - AZ = 0$ συμπίπτουσες

iii) ἄν $\Delta^2 - AZ < 0$ φανταστικές.

Τά μεγέθη D, d, S λέγονται **ἀναλλοίωτοι** τῆς καμπύλης ἐπειδή δέν μεταβάλλονται ὅταν ἔχουμε μετατόπιση τῆς ἀρχῆς, ἤ στροφή τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων πού ἀναφέρεται ἡ ἐξίσωση (1). Ἄν δηλ. σέ περίπτωση ἀλλαγῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων ἡ καμπύλη λάβει τή μορφή:
$A'x'^2 + 2B'x'y' + \Gamma'y'^2 + 2\Delta'x' + 2E'y' + Z' = 0$, τότε προκύπτουν γιά τά μεγέθη D, d, S ἀπ' τόν ὑπολογισμό μέ τούς νέους συντελεστές A', B', Γ', Δ', E', Z' οἱ ἀρχικές τιμές.

Ὁ προσδιορισμός τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης, πού ἔχει δοθεῖ μέ μία ἐξίσωση δευτέρου βαθμοῦ καί ὁ μετασχηματισμός στήν κανονική μορφή γίνεται ὡς ἑξῆς:

Α. Στήν περίπτωση **1.** καί **2.** δηλ γένους ἔλλειψης ἤ ὑπερβολῆς ἔχουμε τούς ἑξῆς μετασχηματισμούς:

i. Μετατόπιση τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων στό κέντρο τῆς καμπύλης τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d} \qquad (7.37)$$

ii. Στροφή τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος κατά γωνία φ μέ $\varepsilon\varphi 2\varphi = \dfrac{2B}{A-\Gamma}$ **(7.38).** Τό πρόσημο τοῦ ημ2φ πρέπει νά εἶναι τό ἴδιο μέ τό πρόσημο τοῦ $2B$ (γιά τόν προσδιορισμό τοῦ τεταρτημόριου τῆς γωνίας 2φ· ἄν π.χ. ἡ εφ 2φ ἀπ' τόν τύπο (7.37) προκύπτει θετική καί $2B>0$ τότε ἡ γωνία 2φ περιέχεται στό πρῶτο τεταρτημόριο). Ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τοῦ νέου ἄξονα $o'x'$ (ὅπου O' τό κέντρο τῆς καμπύλης μέ συντεταγμένες x_0, y_0) δίδεται ἀπ' τή σχέση:

$$k = \frac{\Gamma - A + \sqrt{(\Gamma-A)^2 + 4B^2}}{2B} \qquad (7.39).$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωση (1) δίδεται στό νέο σύστημα ἀξόνων $o'x'y'$ στήν κανονική της μορφή ἀπό τήν σχέση:

$A'x'^2 + \Gamma' y'^2 + \dfrac{D}{d} = 0$ **(7.40)** ὅπου τά A', Γ' δίδονται ἀπ' τίς σχέσεις: $A' = \dfrac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}$, $\Gamma' = \dfrac{A+\Gamma-\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}$

δηλ τά A' καί Γ' εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $u^2 - Su + d = 0$ ὅπου τά S καί d δίδονται ἀπ' τούς τύπους (7.36).

Προφανῶς ἡ ἐξίσωση (1) θά παριστάνει κύκλο στήν περίπτωση πού ἡ (1) εἶναι γένους ἔλλειψης καί ἐπί πλέον οἱ συντελεστές A' καί Γ' ταυτίζονται, δηλ ἄν $A'=\Gamma'$.

B. Στήν περίπτωση **3.** α) δηλ γένους παραβολῆς, ἔχουμε τούς ἑπόμενους μετασχηματισμούς:

i. Μετατόπιση τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων στήν κορυφή τῆς παραβολῆς, τῆς ὁποίας οἱ συντεταγμένες x_0, y_0 προσδιορίζονται ἀπ' τή λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος ὡς πρός x_0, y_0:

$$\begin{aligned} &Ax_0 + By_0 + \frac{A\Delta + BE}{S} = 0 \\ &\left(\Delta + \frac{\Delta\Gamma - BE}{S}\right)x_0 + \left(E + \frac{AE - B\Delta}{S}\right)y_0 + Z = 0 \end{aligned} \qquad (7.41)$$

ii. Στροφή τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος κατά γωνία φ μέ $\varepsilon\varphi\varphi = -\dfrac{A}{B}$ **(**7.42**)**. Τό πρόσημο τοῦ ημφ πρέπει τώρα νά εἶναι ἀντίθετο μέ τό πρόσημο τοῦ A.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωση (1) δίδεται στό νέο σύστημα ἀξόνων $x'O'y'$ (ὅπου $O'(x_0, y_0)$) στήν κανονική της μορφή ἀπ' τή σχέση $y'^2 = 2px'$ **(**7.43**)** ὅπου $p = \dfrac{AE - B\Delta}{S\sqrt{A^2+B^2}}$

Γ. Στήν περίπτωση **3.** β) δηλ ζεύγους παραλλήλων εὐθειῶν ἔχουμε τόν ἀκόλουθο μετασχηματισμό:

Στροφή τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος κατά γωνία φ μέ $\varepsilon\varphi\varphi = -\dfrac{A}{B}$ **(**7.44**)**. Τό πρόσημο τοῦ ημφ πρέπει νά εἶναι ἐπίσης ἀντίθετο μέ τό πρόσημο τοῦ A.

Τότε ἡ ἐξίσωση (1) δίδεται στό νέο σύστημα ἀξόνων $x'Oy'$ ἀπ' τή σχέση: $Sy'^2 + 2\dfrac{A\Delta + BE}{\sqrt{A^2+B^2}}y' + Z = 0$ (7.45)

τῆς μορφῆς: $(y'-y_0')(y'-y_1')=0$.

Θά άναφέρουμε τώρα περιληπτικά τίς έξισώσεις καί ίδιότητες τοῦ ἐπιπέδου, τῆς σφαίρας, τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ὑπερβολοειδοῦς καί παραβολοειδοῦς καί ἄλλων ἐπιφανειῶν $2^{ου}$ βαθμοῦ στό χῶρο.

Ώς γνωστό κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $f(x,y,z)=0$ παριστάνει μία ἐπιφάνεια. Κάθε σημεῖο πού οἱ συντεταγμένες του ἐπαληθεύουν τή σχέση $f(x,y,z)=0$ βρίσκεται στήν ἐπιφάνεια αὐτῆς καί ἀντίστροφα.

Ἡ ἐξίσωση μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας τῆς ὁποίας ἡ γενέτειρα εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα ox, ἤ oy, ἤ oz, δέν περιέχει τήν τετμημένη x, ἤ τήν τεταγμένη y, ἤ τήν κατηγμένη z. δηλ. ἡ ἐξίσωσή της θά εἶναι τῆς μορφῆς $f(y,z)=0$ ἤ $f(z,x)=0$ ἤ $f(x,y)=0$.

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας ἑνός κώνου μέ τήν κορυφή του στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, ἔχει τή μορφή $f(x,y,z)=0$, ὅπου ἡ f εἶναι ὁμογενής συνάρτηση τῶν συντεταγμένων της.

Ἡ ἐξίσωση μιᾶς καμπύλης στό χῶρο καθορίζεται ἀπό τρεῖς ἐξισώσεις: $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$. Κάθε τιμή τῆς παραμέτρου t, ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα σημεῖο τῆς καμπύλης. Ἕνας ἄλλος καθορισμός τῆς καμπύλης στό χῶρο εἶναι ἀπό τίς ἐξισώσεις $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$ δηλ. τομή δύο ἐπιφανειῶν στό χῶρο.

Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $f_1(x,y,z)+\lambda f_2(x,y,z)=0$ (ὅπου $\lambda\in R$), παριστάνει μία δέσμη ἐπιφανειῶν πού διέρχεται ἀπό τήν καμπύλη $f_1(x,y,z)=0$, $f_2(x,y,z)=0$ γιά διάφορες τιμές τοῦ λ.

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐπιπέδου καί τῶν ἐπιφανειῶν $2^{ου}$ βαθμοῦ παρουσιάζουν μεγάλη ἀντιστοιχία μέ ἐκεῖνες τῆς εὐθείας καί τῶν κωνικῶν τομῶν (καμπύλων $2^{ου}$ βαθμοῦ), ὅπου ὅμως ἐδῶ προστίθενται ἀντίστοιχα καί οἱ παράγοντες μέ τήν κατηγμένη z.

Ἐξίσωση ἐπιπέδου.

Ἡ γενική ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου εἶναι γραμμική ὡς πρός x, y, z τῆς μορφῆς $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ **(7.46)** ἀνάλογη μέ τόν τύπο (7.15) τῆς εὐθείας. Ἄν $\Delta = 0$ τό ἐπίπεδο διέρχεται ἀπ' τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Γιά $A=0$, (ἤ $B=0$ ἤ $\Gamma=0$), τό ἐπίπεδο εἶναι παράλληλο πρός τόν ἄξονα ox (ἤ τόν oy ἤ τόν oz). Γιά $A = B = 0$ (ἤ $A = \Gamma = 0$, ἤ $B = \Gamma = 0$) τό ἐπίπεδο εἶναι παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τῶν x, y (ἤ τῶν x, z, ἤ τῶν y, z).

Μιά ἄλλη μορφή τῆς ἐξίσωσης τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ **(7.47)** $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$ ἀνάλογη μέ τόν τύπο (7.13) ὅπου α, β, γ εἶναι οἱ τομές τοῦ ἐπιπέδου μέ τούς ἄξονες ox, oy, oz ἀντίστοιχα.

Ἄν τό ἐπίπεδο διέρχεται α') ἀπό τρία σημεῖα $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, β') ἀπό ἕνα σημεῖο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ καί εἶναι παράλληλο πρός δύο διανύσματα $\delta_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\delta_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ οἱ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις του εἶναι:

$$\alpha)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{καί} \quad \beta)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \mathbf{(7.48)}$$

ἀνάλογες μέ τούς τύπους (7.11) τῆς εὐθείας.

Κι ἐδῶ τό ἐπίπεδο $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ εἶναι κάθετο στό διάνυσμα $\overline{n}(A, B, \Gamma)$.

Ἡ ἐξίσωση εὐθείας στό χῶρο πού διέρχεται ἀπό σημεῖο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ καί παράλληλη πρός τό διάνυσμα $\overline{\delta}(\alpha, \beta, \gamma)$ εἶναι

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} \qquad \mathbf{(7.49)}$$

ἀνάλογη μέ τήν (7.10) καί ὁρίζεται σάν τομή δύο ἐπιπέδων στό χῶρο.

Ἡ ἀπόσταση τέλος ἑνός σημείου $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ἀπό τό ἐπίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ δίδεται ἀπ' τόν τύπο :

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}. \qquad (7.50)$$

Ἐξίσωση σφαίρας.

Κάνοντας τίς ἴδιες σκέψεις ἀκριβῶς ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ κύκλου βρίσκουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση σφαίρας ἔχει τή μορφή:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2$ (7.51) ὅπου $K(\alpha,\beta,\gamma)$ εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου καί ρ ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας, καί ἡ γενική της ἐξίσωση τή μορφή $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ (7.52) ἀνάλογες μέ τίς ἐξισώσεις (7.21) καί (7.22) στό ἐπίπεδο.

Τέλος ἡ ἐξίσωση σφαίρας πού διέρχεται ἀπό 4 σημεῖα $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$ πού δέν βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο ἔχει τή μορφή:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.53)$$

ἀνάλογη μέ τήν ἐξίσωση (7.23) στό ἐπίπεδο.

Οἱ ἑπόμενες ἐξισώσεις ἐπιφανειῶν δίδονται στήν κανονική τους μορφή καί ἔχουν κέντρο τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Ἀκόμη τά ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων xoy, yoz, zox εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας τῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐξίσωση ἐλλειψοειδοῦς.

Τό ἐλλειψοειδές (σχ 60.α) ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad (7.54)$$ ὅπου α, β, γ εἶναι οἱ ἡμιάξονες τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Ἄν $\alpha=\beta>\gamma$ ἔχουμε τό **πεπλατυσμένο ἐλλειψοειδές ἐκ περιστροφῆς** πού προέρχεται ἀπ' τήν περιστροφή τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ γύρω ἀπ' τόν μικρό ἄξονα (τόν 2γ) πού βρίσκεται στό ἐπίπεδο τῶν x, z. Ἄν $\alpha=\beta<\gamma$ προκύπτει τό **ἐπίμηκες** ἐλλειψοειδές ἐκ περιστροφῆς, πού προέρχεται ἀπ' τήν περιστροφή τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ γύρω ἀπ' τόν μεγάλο ἄξονα (τόν 2γ) στό ἐπίπεδο τῶν x, z.
Ἄν $\alpha=\beta=\gamma$ προκύπτει ἡ σφαῖρα $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$.

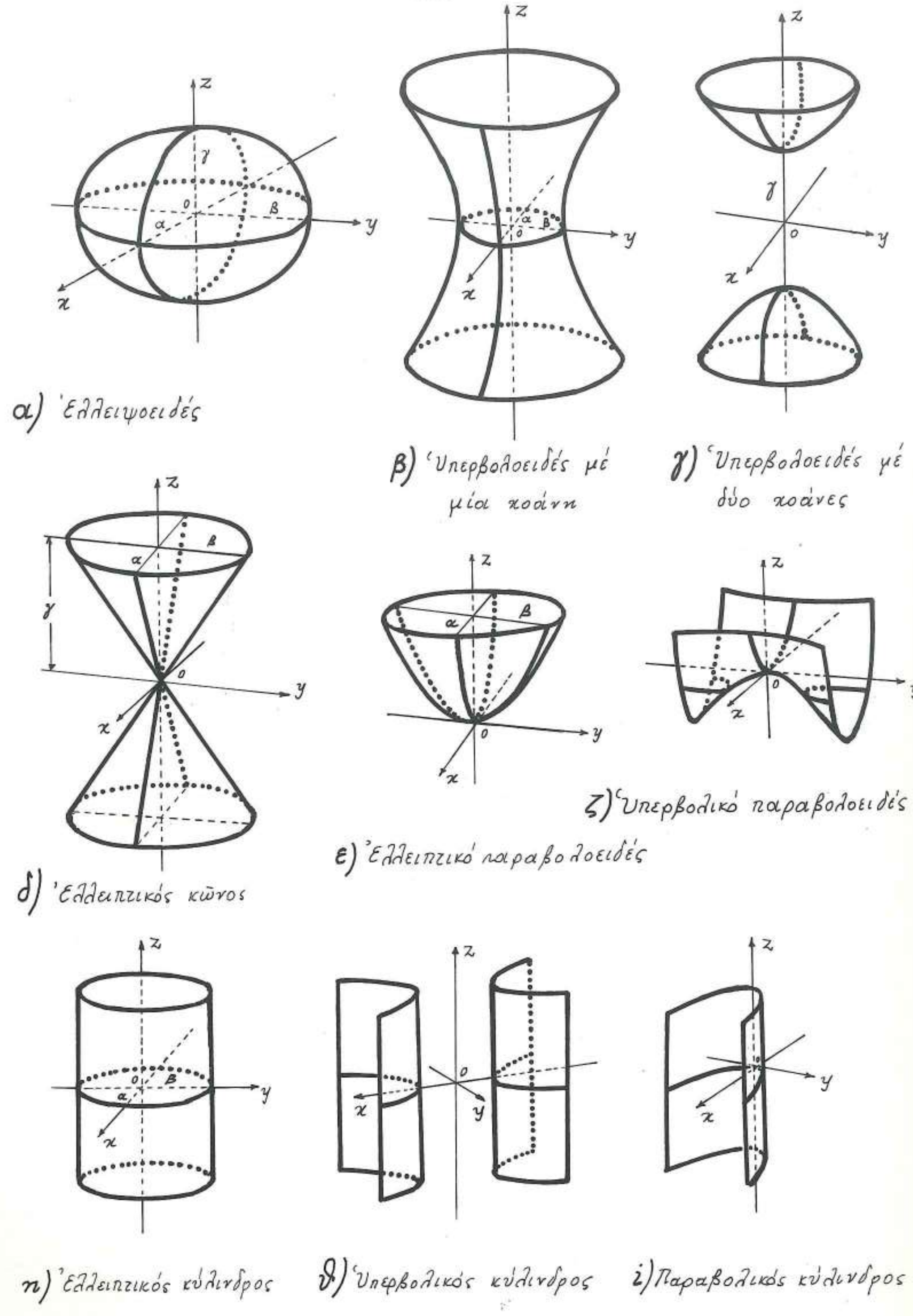
Ἐξίσωση ὑπερβολοειδοῦς.

1. Μέ μία χοάνη: (σχ. 60.β) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad (7.55)$
ὅπου α καί β εἶναι οἱ πραγματικοί ἡμιάξονες καί γ ὁ φανταστικός ἡμιάξονας.

2. Μέ δύο χοάνες: (σχ. 60.γ) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=-1 \quad (7.56)$
ὅπου τώρα γ εἶναι ὁ πραγματικός ἡμιάξονας καί α, β εἶναι οἱ φανταστικοί ἡμιάξονες. Καί γιά τά δύο ὑπερβολοειδῆ οἱ τομές τους μέ ἐπίπεδα παράλληλα πρός τόν ἄξονα τῶν z εἶναι ὑπερβολές, ἐνῶ μέ ἐπίπεδα παράλληλα πρός τό ἐπίπεδο τῶν xy εἶναι ἐλλείψεις. Γιά $\alpha=\beta$ ἔχουμε τό **ὑπερβολοειδές ἐκ περιστροφῆς** τῆς ὑπερβολῆς μέ ἡμιάξονες τούς α καί γ γύρω ἀπό τόν ἄξονα 2γ.

Ἐξίσωση κώνου.

Εἶναι τῆς μορφῆς (σχ. 60 δ) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0 \qquad (7.57)$
καί ἔχει τήν κορυφή του στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Σάν ὁδηγός καμπύλη μπορεῖ νά ἐκλεγῆ ἡ ἔλλειψη μέ ἡμιάξονες α, β τῆς ὁποίας τό ἐπίπεδο εἶναι κάθετο στόν ἄξονα z, σέ ἀπόσταση γ ἀπό


α) Ἐλλειψοειδές
β) Ὑπερβολοειδές μέ μία χοάνη
γ) Ὑπερβολοειδές μέ δύο χοάνες
δ) Ἐλλειπτικός κῶνος
ε) Ἐλλειπτικό παραβολοειδές
ζ) Ὑπερβολικό παραβολοειδές
η) Ἐλλειπτικός κύλινδρος
θ) Ὑπερβολικός κύλινδρος
ι) Παραβολικός κύλινδρος

Σχ. 60

τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Εἶναι ὁ ἀσυμπτωτικός κῶνος καί τῶν δύο ὑπερβολοειδῶν $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1$. Γιά $\alpha = \beta$ ἔχουμε τόν κυκλικό κῶνο.

Τά παραβολοειδῆ.

Οἱ ἐξισώσεις ἐπιφανειῶν πού ἀκολουθοῦν δέν ἔχουν κέντρο. Ἡ κορυφή τῶν παραβολοειδῶν βρίσκεται στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, ὁ ἄξονας oz εἶναι ἄξονας συμμετρίας καί τά ἐπίπεδα τῶν xz καί yz εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας.

1. Τό ἐλλειπτικό παραβολοειδές (σχ. 60.ε) μέ ἐξίσωση: $z = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$ (7.58). Παράλληλες τομές πρός τόν ἄξονα oz εἶναι παραβολές, ἐνῶ παράλληλες τομές πρός τό ἐπίπεδο τῶν x,y εἶναι ἐλλείψεις. Γιά $\alpha = \beta$ προκύπτει τό **παραβολοειδές ἐκ περιστροφῆς**, πού προκύπτει διά περιστροφῆς τῆς παραβολῆς $z = \frac{x^2}{\alpha^2}$ γύρω ἀπό τόν ἄξονα oz.

2. Τό ὑπερβολικό παραβολοειδές (σχ 60.ζ) μέ ἐξίσωση $z = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ (7.59). Παράλληλες τομές μέ τό ἐπίπεδο τῶν z,y εἶναι παραβολές, μέ τό ἐπίπεδο τῶν z,x ἐπίσης παραβολές, ἐνῶ μέ τό ἐπίπεδο τῶν x,y ὑπερβολές.

Ἐξισώσεις κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.

Κυλινδρική ἐπιφάνεια προκύπτει ἀπό παράλληλη μεταφορά μιᾶς εὐθείας (τῆς γενέτειρας) κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης (τῆς ὁδηγοῦ καμπύλης). Ἡ ἀντίστοιχη κωνική ἐπιφάνεια, πού ἀναφέραμε παραπάνω, προκύπτει ἀπό κίνηση μιᾶς εὐθείας (τῆς γενέτειρας) πού διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο (τή κορυφή) καί γλυστράει κατά μῆκος μιᾶς καμπύλης (τῆς ὁδηγοῦ καμπύλης).

Οἱ κυλινδρικές ἐπιφάνειες (ὅπως καί οἱ κωνικές, καθώς καί τό ὑπερβολοειδές μέ μία χοάνη, ὅπως καί τό ὑπερβολικό παραβολοειδές) λέγονται καί **εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειες** γιατί παράγονται ἀπό μία εὐθεία, πού κινεῖται κατά ὡρισμένο νόμο.

1. Ἐξίσωση ἐλλειπτικοῦ κυλίνδρου (σχ. 60.η): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

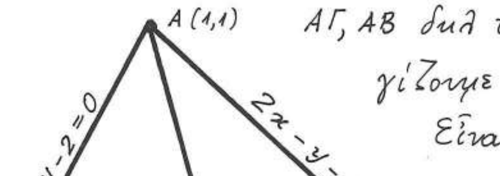
2. -"- ὑπερβολικοῦ -"- (σχ. 60.θ): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$

3. -"- παραβολικοῦ -"- (σχ. 60.ι): $y^2=2px$ **(7.60)**

Ἀσκήσεις.

7.1. Δίδεται τό τρίγωνο ΑΒΓ μέ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ: $x+y-2=0$, ΑΓ: $2x-y-1=0$ καί ΒΓ: $2x+y-9=0$. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ ΑΒΓ καί ἡ ἐξίσωση τῆς διαμέσου ΑΜ.

Λύση. Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΒ δηλ. τῶν $x+y-2=0$, $2x-y-1=0$ ὑπολογίζουμε τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου Α. Εἶναι $x=1$, $y=1$, δηλ. $A(1,1)$. Ὁμοίως τῶν ΑΒ: $2x-y-1=0$, ΓΒ: $2x-y-9=0$ εἶναι $B(7,-5)$ καί τῶν ΑΓ καί ΒΓ δίνουν $\Gamma\left(\frac{5}{2},4\right)$. Ἑπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὑπολογίζεται ἀπ' τόν τύπο (7.16) ὅτι εἶναι (σχ. 61):



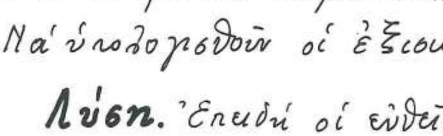
Σχ. 61

$$E=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 7 & -5 & 1\\ \frac{5}{2} & 4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(-5-4-7+\frac{5}{2}+28+\frac{25}{2}\right)=\frac{27}{2}.$$

Τό σημεῖο Μ τῆς ΒΓ ἔχει συντεταγμένες τό ἡμιάθροισμα τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων δηλ. $M\left(\frac{\frac{5}{2}+7}{2}, \frac{4-5}{2}\right)$ ἤ $M\left(\frac{19}{4},-\frac{1}{2}\right)$.
Ἡ ΑΜ εἶναι εὐθεία διερχομένη ἀπό δύο σημεῖα τά Α,Μ καί θά δίδεται ἀπ' τόν τύπο $\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ ὅπου $A(x_1,y_1)$, $M(x_2,y_2)$ ἤ $A(1,1)$, $M\left(\frac{19}{4},-\frac{1}{2}\right)$ ὁπότε προκύπτει $\frac{x-1}{y-1}=\frac{\frac{19}{4}-1}{-\frac{1}{2}-1}$ ἤ τελικά μετά τίς πράξεις $2x+5y-7=0$ ὡς ἐξίσωση τῆς διαμέσου.

7.2. Οἱ δύο πλευρές ἑνός παραλληλογράμμου βρίσκονται πάνω στίς εὐθεῖες $x+2y+1=0$ καί $2x+y-3=0$ ἀντίστοιχα, τό δέ κέντρο τοῦ παραλληλογράμμου ἔχει συντεταγμένες $(1,2)$. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Λύση. Ἐπειδή οἱ εὐθεῖες $x+2y+1=0$ καί $2x+y-3=0$ δέν εἶναι παρ/λοι διότι δέν ἰσχύει ἡ σχέση $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$, θά εἶναι οἱ ἐξισώσεις δύο προσκείμενων πλευρῶν, ἔστω τῶν $AB: x+2y+1=0$, $A\Delta: 2x+y-3=0$. Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων ΑΒ, ΑΔ βρίσκουμε $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{5}{3}$



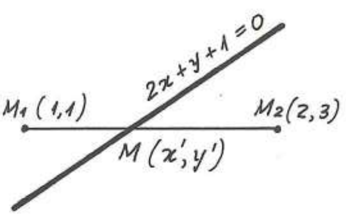
Σχ. 62

δηλ. $A\left(\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right)$. Ἄν τό Γ ἔχει συντεταγμένες x_1, y_1 τότε θά εἶναι:
$\frac{\frac{7}{3}+x_1}{2}=1$ καί $\frac{-\frac{5}{3}+y_1}{2}=2$ ἐπειδή τό Ο εἶναι μέσον τῆς ΑΓ. Ἀπ' τίς τελευταῖες σχέσεις προκύπτει $x_1=-\frac{1}{3}$, $y_1=\frac{17}{3}$ δηλ. $\Gamma\left(-\frac{1}{3},\frac{17}{3}\right)$.
Ἡ πλευρά ΒΓ ἑπομένως θά εἶναι τῆς μορφῆς $y-y_1=\lambda_{A\Delta}(x-x_1)$ ἐφ' ὅσον διέρχεται ἀπό δοθέν σημεῖο $\Gamma(x_1,y_1)$ καί ἔχει συντελεστή κατευθύνσεως ἴσο μέ τόν συντελεστή κατευθύνσεως τῆς ΑΔ ἀφοῦ $A\Delta \parallel B\Gamma$.
Ἀλλά $\lambda_{A\Delta}=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{1}=-2$ ἄρα ἡ ἐξίσωση τῆς ΒΓ θά εἶναι

$y-\frac{17}{3} = -2\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Ὁμοίως ἡ ΓΔ θά εἶναι τῆς μορφῆς: $y-y_1 = \lambda_{AB}(x-x_1)$ ὅπου τώρα $\lambda_{AB} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$. Ἄρα ἡ ΓΔ θά ἔχει ἐξίσωση $y-\frac{17}{3} = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

7.3. Ἡ εὐθεία $2x+y+1=0$ τέμνει τήν εὐθεία πού ὁρίζουν τά σημεῖα $M_1(1,1)$ καί $M_2(2,3)$ στό σημεῖο M. Ζητοῦνται ὁ λόγος $\frac{M_1M}{MM_2}$ καί οἱ συντεταγμένες τοῦ M.

Λύση. Ἄν καλέσουμε x', y' τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου M δηλ. $M(x',y')$ καί λ τόν ζητούμενο λόγο θά ἔχουμε τίς σχέσεις (τύποι (6.4')):



Σχ. 63

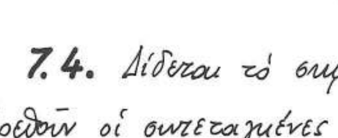
$$x' = \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}, \quad y' = \frac{1+3\lambda}{1+\lambda}.$$

Ἐπειδή ὅμως τό $M(x',y')$ κεῖται πάνω στήν εὐθεία $2x+y+1=0$, θά τήν ἐπαληθεύει· δηλ. $2x'+y'+1=0$ ἤ $2\cdot\frac{1+2\lambda}{1+\lambda} + \frac{1+3\lambda}{1+\lambda} + 1 = 0$

Λύνοντας τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς πρός λ ἔχουμε $\lambda = -\frac{1}{2}$. Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή τοῦ λ στίς σχέσεις τῶν x', y' βρίσκουμε $x'=0$ καί $y'=-1$.

7.4. Δίδεται τό σημεῖο $P(1,3)$ καί ἡ εὐθεῖα $x-2y+5=0$. Νά εὑρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ P ὡς πρός τήν εὐθεία.

Λύση. Ἄν ἡ PM διέρχεται ἀπό τό P καί εἶναι κάθετη στή



Σχ. 64

δοθεῖσα εὐθεία T, ἡ ἐξίσωσή της θά εἶναι: $y-3 = \lambda_{PM}(x+1)$. Ἀλλά εἶναι $\lambda_{PM}\cdot\lambda_{MT} = -1$ ἐφ' ὅσον $PM \perp MT$. Εἶναι $\lambda_{MT} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ Ἄρα $\lambda_{PM} = -2$

καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς PM εἶναι $y-3=-2(x+1)$ ἤ ἀκόμη $2x+y-1=0$. Ἄν λύσουμε τώρα τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν καθέτων εὐθειῶν βρίσκουμε τό σημεῖο τομῆς των M. Ἀπ' τήν ἐξίσωση $x-2y+5=0$ ἔχουμε $x=2y-5$. Θέτοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ x στή $2x+y-1=0$ παίρνουμε $y=\frac{11}{5}$ καί $x=-\frac{3}{5}$. Ἄρα $M\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)$. Ἐπειδή τώρα τό M εἶναι μέσο τῆς PP_1 θά ἔχουμε τίς σχέσεις:
$\frac{-1+x_1}{2}=-\frac{3}{5}$ καί $\frac{3+y_1}{2}=\frac{11}{5}$ ἀπ' τίς ὁποῖες προκύπτει $x_1=-\frac{1}{5}$ καί $y_1=\frac{7}{5}$ δηλ. $P_1\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$.

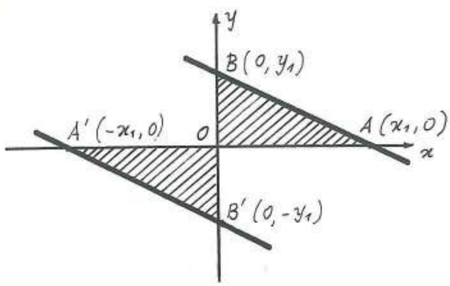
7.5. Νά προσδιορισθεῖ ὁ λ, ἔτσι ὥστε οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις: $\lambda x=2(\lambda+2)-(\lambda-1)y$ καί $3\lambda x=(3\lambda+1)y+5\lambda+7$ νά εἶναι παράλληλες.

Λύση. Οἱ ἐξισώσεις γράφονται $\lambda x+(\lambda-1)y-2(\lambda+2)=0$ καί $3\lambda x-(3\lambda+1)y-5\lambda-7=0$. Γιά νά εἶναι οἱ ἐξισώσεις αὐτές παράλληλες μεταξύ τους θά πρέπει $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ δηλ. $\frac{\lambda}{3\lambda}=\frac{\lambda-1}{-(3\lambda+1)}$ καί $\frac{\lambda-1}{-(3\lambda+1)}\neq\frac{-2(\lambda+2)}{-5\lambda-7}$. Ἀπ' τή πρώτη σχέση προκύπτει $-\lambda(3\lambda+1)=3\lambda(\lambda-1)$ ἤ $\lambda(6\lambda-2)=0$ ὁπότε ἤ $\lambda=0$ ἤ $\lambda=\frac{1}{3}$. Θέτουμε τίς τιμές αὐτές τοῦ λ στή δεύτερη σχέση καί διαπιστώνουμε ὅτι πράγματι ἰσχύει. Ἑπομένως εἶναι δεκτές καί οἱ δύο λύσεις.

7.6. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν πού εἶναι παράλληλες πρός τήν εὐθεία $2x+3y+6=0$ καί πού ὁρίζουν μέ τούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων τρίγωνα ἐμβαδοῦ 3.

Λύση. Ἔστω ὅτι οἱ ζητούμενες εὐθεῖες τέμνουν τούς ἄξονες ox, oy στά σημεῖα A, B καί A', B' ἀντίστοιχα (σχ. 65), ὅπου εἶναι

$A(x_1,0)$ καί $B(0,y_1)$ ὁπότε θά εἶναι $A'(-x_1,0)$ καί $B'(0,-y_1)$. Ἡ



Σχ. 65

ἐξίσωση AB θά εἶναι ἑπομένως $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1$ (τύπος (7.13)) ἤ $y_1x+x_1y=x_1y_1$ ἑπομένως $\lambda_{AB}=-\frac{y_1}{x_1}$ καί ἐπειδή ἡ εὐθεῖα αὐτή εἶναι παρ/λη πρός τήν $2x+3y+6=0$ θά εἶναι $-\frac{y_1}{x_1}=-\frac{2}{3}$ ἤ $\frac{y_1}{x_1}=\frac{2}{3}$ (1)

Ἐπίσης ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο AOB ἔχουμε $E_{(AOB)}=\frac{1}{2}x_1\cdot y_1=3$ ἄρα $x_1\cdot y_1=6$ (2). Λύνοντας τό σύστημα τῶν (1) καί (2) βρίσκουμε $x_1=\pm 3$ καί $y_1=\pm 2$. Ἑπομένως οἱ συντεταγμένες τῶν A,B καί A',B' εἶναι $A(3,0)$, $B(0,2)$, $A'(-3,0)$, $B'(0,-2)$· οἱ δέ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν εἶναι: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ καί $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$.

7.7. Νά εὑρεθεῖ **α)** ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν $x-6y+2=0$, $3x+4y+8=0$ ἀπ' τήν εὐθεία $3x+5y-6=0$, **β)** ἡ ἀπόσταση τῶν παρ/λων εὐθειῶν $5x+7y-2=0$, $15x+21y-20=0$.

Λύση. α'). Λύνουμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων $x-6y+2=0$ καί $3x+4y+8=0$ καί βρίσκουμε τό σημεῖο τομῆς των $M\left(-\frac{28}{11},-\frac{6}{11}\right)$ Κατόπιν βρίσκουμε τήν ἀπόσταση τοῦ M ἀπό τήν $3x+5y-6=0$ (τύπος (7.19)): $d=\frac{\left|3\cdot\left(-\frac{28}{11}\right)+5\left(-\frac{6}{11}\right)-6\right|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{45}{11\sqrt{2}}$

β'). Ἐπειδή $\frac{5}{15}=\frac{7}{21}\neq\frac{-2}{-20}$ οἱ δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλες. Γιά νά βροῦμε τήν ἀπόστασή τους, ἀρκεῖ νά βροῦμε τήν ἀπόσταση ἑνός σημείου τῆς μιᾶς ἀπό τήν ἄλλη. Θέτουμε στήν πρώτη $y=0$ καί προκύπτει $x=\frac{2}{5}$· ἄρα τό $M\left(\frac{2}{5},0\right)$ κεῖται ἐπ' αὐτῆς. Ἑπομένως ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου αὐτοῦ M ἀπό τήν ἄλλη εἶναι:

$$d = \frac{\left|15\cdot\frac{2}{5} + 21\cdot 0 - 20\right|}{\sqrt{15^2+21^2}} = \frac{14}{\sqrt{666}}.$$

7.8. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς περιφέρειας, πού ἔχει κέντρο πάνω στήν εὐθεία $2x+y+4=0$ καί διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $M_1(2,1)$ καί $M_2(3,-2)$.

Λύση. Ἔστω $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ ἡ ζητούμενη ἐξίσωση. Οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων M_1, M_2 θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσή της, ἐφ᾽ ὅσον αὐτή διέρχεται ἀπ᾽ αὐτά, δηλ. θά εἶναι:
$(2-\alpha)^2+(1-\beta)^2=\rho^2$ καί $(3-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=\rho^2$ (1).
Ἐπίσης οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου $K(\alpha,\beta)$ τῆς περιφέρειας θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας $2x+y+4=0$, ἐφ᾽ ὅσον τό K κεῖται πάνω σ᾽ αὐτή, δηλ. $2\alpha+\beta+4=0$ (2)
Λύνοντας τό σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους τούς α, β, ρ τῶν (1) καί (2) βρίσκουμε $\alpha=0$, $\beta=-4$, $\rho=\sqrt{29}$. Ἑπομένως ἡ ζητούμενη ἐξίσωση τῆς περιφέρειας εἶναι:

$$x^2+(y+4)^2=29.$$

7.9. Δίδεται ἡ περιφέρεια $2x^2+2y^2-4x+6y-1=0$. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση εὐθείας πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο τῆς περιφέρειας καί εἶναι κάθετη στήν εὐθεία $3x-2y+5=0$.

Λύση. Τό κέντρο τῆς περιφέρειας ἔχει συντεταγμένες $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Φέρουμε τήν ἐξίσωση τῆς περιφέρειας στήν κανονική της μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ δηλ. στή μορφή: $x^2+y^2-2x+3y-\frac{1}{2}=0$ ὁπότε $A=-2$ καί $B=3$ δηλ. εἶναι $K\left(1,-\frac{3}{2}\right)$. Ἡ ζητούμενη εὐθεῖα θά εἶναι $y-y_1=\lambda(x-x_1)$

ἢ $y+\frac{3}{2}=\lambda(x-1)$. Ἐπειδή δέ ἡ εὐθεῖα αὐτή εἶναι κάθετη στήν $3x-2y+5=0$ θά εἶναι $\lambda\cdot\lambda_1=-1$ (ὅπου $\lambda_1=-\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς $3x-2y+5=0$) ἄρα $\lambda=-\frac{2}{3}$ καί ἡ ζητούμενη εὐθεῖα θά εἶναι ἡ $y+\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}(x-1)$.

7.10. Δίδεται ἡ περιφέρεια $x^2+y^2=\rho^2$ καί ἡ εὐθεία $y=\lambda x+\beta$. Νά εὑρεθεῖ ἡ συνθήκη ὥστε νά ἐφάπτονται.

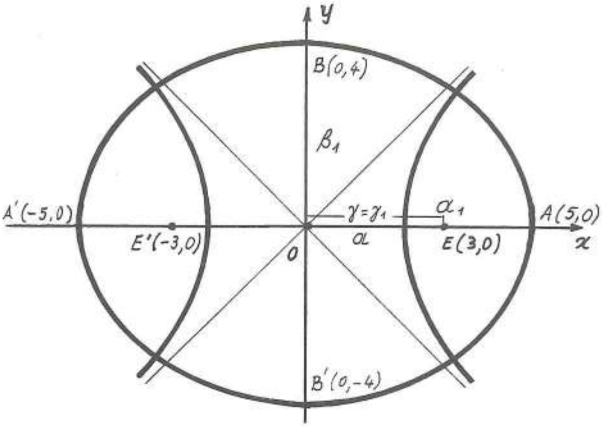
Λύση. Γιά νά ἐφάπτονται ἡ εὐθεῖα καί ἡ περιφέρεια πρέπει καί ἀρκεῖ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν νά ἔχει μία λύση. Λύνουμε τήν εὐθεία ὡς πρός y καί τήν τιμή τοῦ y τήν θέτουμε στήν ἐξίσωση τῆς περιφέρειας· θά ἔχουμε: $x^2+(\lambda x+\beta)^2=\rho^2$ ἤ $(1+\lambda^2)x^2-2\beta\lambda x+\beta^2-\rho^2=0$ δευτεροβάθμια ἐξίσωση ὡς πρός x. Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση αὐτή μία ρίζα (διπλῆ) θά πρέπει νά εἶναι ἡ διακρίνουσα αὐτῆς $\Delta=0$ δηλ. $4\lambda^2\beta^2-4(1+\lambda^2)(\beta^2-\rho^2)=0$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\rho^2=\dfrac{\beta^2}{1+\lambda^2}$ πού εἶναι καί ἡ ζητούμενη σχέση.

7.11. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση ἐλλείψης ὅταν $\alpha=2\beta$ καί τό σημεῖο $(6,4)$ κεῖται πάνω στήν ἔλλειψη.

Λύση. Ἡ γενική ἐξίσωση τῆς ἐλλείψης εἶναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Ἐπειδή $\alpha=2\beta$ ἡ ἐξίσωση γίνεται $\frac{x^2}{4\beta^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου $(6,4)$ ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τῆς ἐλλείψης δηλ. $\frac{36}{4\beta^2}+\frac{16}{\beta^2}=1$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\beta^2=25$.
Ἄρα ἡ ζητούμενη ἐξίσωση θά εἶναι $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ ἤ $x^2+4y^2=100$.

7.12. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, ἡ ὁποία ἔχει τίς ἴδιες ἑστίες μέ τήν ἔλλειψη $16x^2+25y^2=400$.

Λύση. Ὡς γνωστόν ἡ ἐξίσωση τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς εἶναι $x^2-y^2=\alpha^2$ (τύπος (7.28)). Ἑπομένως ἀρκεῖ νά ὁρισθεῖ τό α.

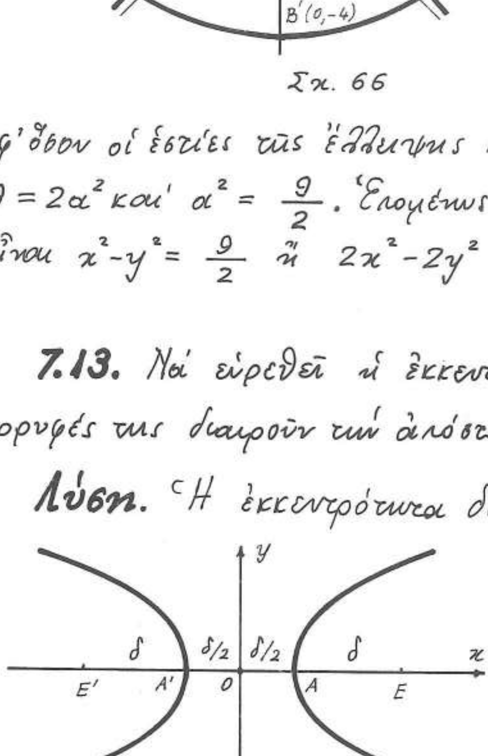


Σχ. 66

Ἡ ἔλλειψη γράφεται καί $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ἤ $\frac{x^2}{5^2}+\frac{\beta^2}{4^2}=1$ δηλ. $\alpha_1=5$ καί $\beta_1=4$ (ὅπου $2\alpha_1$ καί $2\beta_1$ ὁ μικρός καί μεγάλος ἄξονας ἀντίστοιχα). Ἄρα $\gamma_1^2=\alpha_1^2-\beta_1^2=25-16=9$, δηλ. $\gamma_1=\pm 3$. Στήν ἰσοσκελῆ ὑπερβολή $(\alpha=\beta)$ ἔχομε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=2\alpha^2$. Ἀλλά $\gamma=\gamma_1$ ἐφ' ὅσον οἱ ἑστίες τῆς ἐλλείψεως καί ὑπερβολῆς συμπίπτουν· ἄρα $9=2\alpha^2$ καί $\alpha^2=\frac{9}{2}$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς εἶναι $x^2-y^2=\frac{9}{2}$ ἤ $2x^2-2y^2=9$.

7.13. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐκκεντρότητα μιᾶς ὑπερβολῆς, ὅταν οἱ κορυφές της διαιροῦν τήν ἀπόσταση μεταξύ τῶν ἑστιῶν σέ 3 ἴσα μέρη.

Λύση. Ἡ ἐκκεντρότητα δίδεται ὡς γνωστόν ἀπό τή σχέση

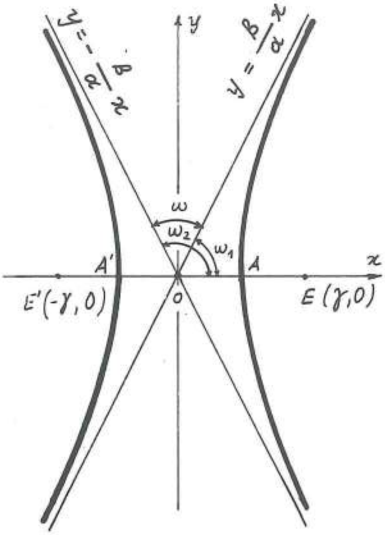


Σχ. 67

$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἡ ἀπόσταση $E'E=3\delta$ ἡ δέ $OE=\gamma=OA+AE=\frac{\delta}{2}+\delta=\frac{3\delta}{2}$ ἡ δέ $OA=\alpha=\frac{\delta}{2}$. Ἄρα θά εἶναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3\cdot\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}=3$ δηλ. $\varepsilon=3$

7.14. Ἄν ἡ ἐκκεντρότητα μιᾶς ὑπερβολῆς εἶναι 2 νά εὑρεθεῖ ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς.

Λύση. Ἡ ζητούμενη γωνία θά εἶναι $\omega = \omega_2 - \omega_1$ ἤ $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1}{1 + \varepsilon\varphi\omega_1\,\varepsilon\varphi\omega_2} = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2}$ (τύπος (6.15)), ὅπου λ_1, λ_2 εἶναι οἱ συντελεστές κατευθύνσεως τῶν δύο ἀσυμπτώτων. Οἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων εἶναι $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ καί $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$. Ἑπομένως $\lambda_1 = \dfrac{\beta}{\alpha}$ καί $\lambda_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (1). Γιά νά ὑπολογίσω τά λ_1, λ_2 ἀρκεῖ νά ὑπολογίσω τό λόγο $\dfrac{\beta}{\alpha}$. Στήν ὑπερβολή εἶναι $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Δίδεται ὅτι $\dfrac{\gamma}{\alpha} = 2$ ἤ $\gamma = 2\alpha$ ὁπότε θά



Σχ. 68

ἔχομε $4\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ἤ $3\alpha^2 = \beta^2$ καί $\dfrac{\beta}{\alpha} = \pm\sqrt{3}$ ὁπότε ἤ $\lambda_1 = \sqrt{3}$ καί $\lambda_2 = -\sqrt{3}$, ἤ $\lambda_1 = -\sqrt{3}$ καί $\lambda_2 = \sqrt{3}$. Στήν πρώτη περίπτωση θά ἔχομε $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}(-\sqrt{3})} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{1 - 3} = \sqrt{3}$ ὁπότε $\omega = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$ καί στή δεύτερη προκύπτει $\omega = -\dfrac{\pi}{3} = -60^\circ$.

7.15. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς μέ κορυφή τό Ο, ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί ἄξονα Ox, ἡ ὁποία νά ἐφάπτεται τῆς εὐθείας $y = 4x + 1$.

Λύση. Ἡ γενική ἐξίσωση τῆς παραβολῆς εἶναι $y^2 = 2px$. Γιά νά ὁρισθεῖ ἡ ἐξίσωση ἀρκεῖ ἑπομένως νά προσδιορισθεῖ ὁ p. Γιά νά ἐφάπτεται ἡ εὐθεία $y = 4x + 1$ στήν παραβολή $y^2 = 2px$ πρέπει τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τῆς εὐθείας καί παραβολῆς νά έχει μία πραγματική λύση. Αντικαθιστούμε την τιμή του $y=4x+1$ στην εξίσωση της παραβολής οπότε προκύπτει: $16x^2+8x+1=2px$ ή $16x^2+(8-2p)x+1=0$. Για να έχουμε μία ρίζα πρέπει να είναι $\Delta=0$ δηλ. $(8-2p)^2-64=0$ από την οποία προκύπτει $p=0$ ή $p=8$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $y^2=16x$.

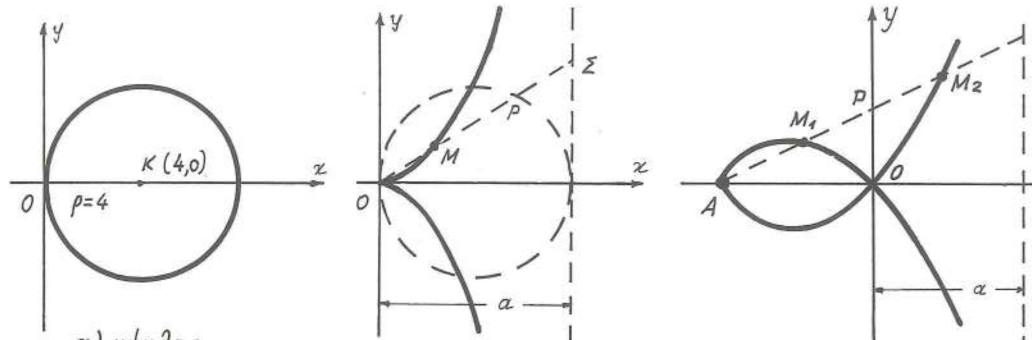
7.16. Να ευρεθούν οι εξισώσεις των κάτωθι καμπυλών σε πολικές συντεταγμένες: **α)** $x^2+y^2-8x=0$ (κύκλου), **β)** $y^2=\dfrac{x^3}{\alpha-x}$ (κισσοειδούς), **γ)** $y^2=x^2\left(\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}\right)$ (στροφοειδούς).

Λύση. α'). Θέτουμε $x=\rho\,\text{συν}\vartheta$, $y=\rho\,\text{ημ}\vartheta$ οπότε προκύπτει $\rho^2\text{συν}^2\vartheta+\rho^2\text{ημ}^2\vartheta-8\rho\,\text{συν}\vartheta=0$ ή $\rho^2(\text{συν}^2\vartheta+\text{ημ}^2\vartheta)-8\rho\,\text{συν}\vartheta=0$ ή $\rho(\rho-8\text{συν}\vartheta)=0$ και επειδή $\rho\neq0$ προκύπτει $\rho=8\text{συν}\vartheta$ και είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(4,0)$ και ακτίνα $\rho=4$ (σχ 69α) όπως φαίνεται από τον τύπο (7.22) ή (7.24) τελευταία σχέση.

β'). Πάλι θέτοντας $x=\rho\,\text{συν}\vartheta$, $y=\rho\,\text{ημ}\vartheta$ προκύπτει:
$\rho^2\text{ημ}^2\vartheta=\dfrac{\rho^3\text{συν}^3\vartheta}{\alpha-\rho\,\text{συν}\vartheta}$ ή $\alpha\rho^2\text{ημ}^2\vartheta-\rho^3\text{ημ}^2\vartheta\,\text{συν}\vartheta=\rho^3\text{συν}^3\vartheta$ ή ακόμη
$\alpha\rho^2\text{ημ}^2\vartheta-\rho^3(1-\text{συν}^2\vartheta)\text{συν}\vartheta=\rho^3\text{συν}^3\vartheta$ ή τελικά $\rho=\dfrac{\alpha\,\text{ημ}^2\vartheta}{\text{συν}\vartheta}$.
Η κισσοειδής καμπύλη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (σχ.69β) για τα οποία ΟΜ = ΡΣ (Ρ είναι τυχόν σημείο κύκλου διαμέτρου α).

γ'). Για $x=\rho\,\text{συν}\vartheta$, $y=\rho\,\text{ημ}\vartheta$ προκύπτει:
$\rho^2\text{ημ}^2\vartheta=\rho^2\text{συν}^2\vartheta\left(\dfrac{\alpha+\rho\,\text{συν}\vartheta}{\alpha-\rho\,\text{συν}\vartheta}\right)$ ή $\alpha\,\text{ημ}^2\vartheta-\rho\,\text{ημ}^2\vartheta\,\text{συν}\vartheta=$
$=\alpha\,\text{συν}^2\vartheta+\rho\,\text{συν}^3\vartheta$ ή ακόμη $-\rho\,\text{συν}\vartheta(\text{ημ}^2\vartheta+\text{συν}^2\vartheta)=\alpha(\text{συν}^2\vartheta-\text{ημ}^2\vartheta)$
ή $-\rho\,\text{συν}\vartheta=\alpha\,\text{συν}2\vartheta$ και $\rho=-\dfrac{\alpha\,\text{συν}2\vartheta}{\text{συν}\vartheta}$.
Η στροφοειδής καμπύλη είναι ο γεωμ. τόπος των σημείων M_1 και

Μ2 πάνω σέ τυχοῦσα εὐθεία πού διέρχεται ἀπ' τό Α, γιά τά ὁποῖα $PM_1 = PM_2 = OP$ (Ρ τομή τῆς εὐθείας μέ τόν ἄξονα οy). Τό Α εἶναι σταθερό πάνω στόν οx. Ἡ καμπύλη πλησιάζει ἀσυμπτωτικά τήν εὐθεία $x = \alpha$. (σχ. 69.γ)



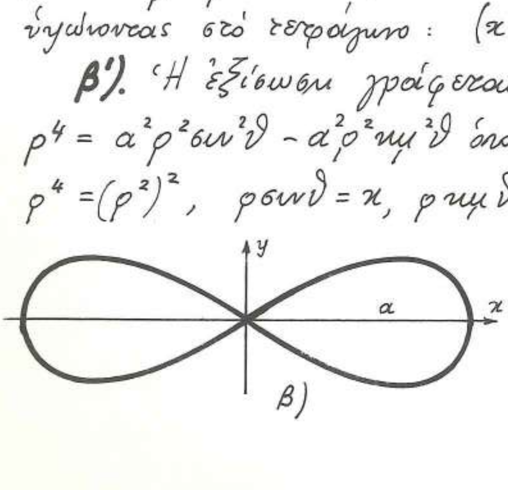
α) κύκλος β) κισσοειδής γ) Στροφοειδής

Σχ 69

7.17. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις τῶν κάτωθι καμπυλῶν σέ καρτεσιανές συντεταγμένες: **α)** $\rho = \alpha\eta\mu 2\vartheta$ (Τριαντάφυλλο τοῦ Γκραντέ) **β)** $\rho^2 = \alpha^2 \sigma\upsilon\nu 2\vartheta$ (Λημνίσκος τοῦ Bernoulli).

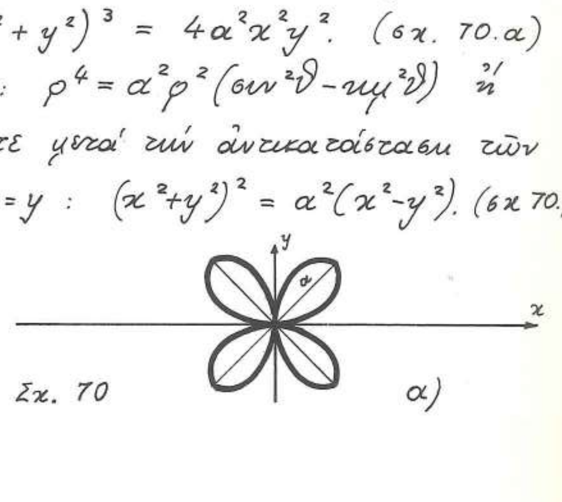
Λύση. α'). Κάνοντας τώρα τίς ἀντικαταστάσεις $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ καί $\eta\mu\vartheta = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{x}{\rho}$ (τύποι (7.1)) ἔχουμε: $\rho = 2\alpha \cdot \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta$ ἤ $\rho = 2\alpha \cdot \frac{y}{\rho} \cdot \frac{x}{\rho}$ ἤ $\rho^3 = 2\alpha \cdot xy$ ἤ $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 2\alpha xy$ καί ὑψώνοντας στό τετράγωνο: $(x^2+y^2)^3 = 4\alpha^2x^2y^2$. (σχ. 70.α)

β'). Ἡ ἐξίσωση γράφεται: $\rho^4 = \alpha^2\rho^2(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta - \eta\mu^2\vartheta)$ ἤ $\rho^4 = \alpha^2\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta - \alpha^2\rho^2\eta\mu^2\vartheta$ ὁπότε μετά τήν ἀντικατάσταση τῶν $\rho^4 = (\rho^2)^2$, $\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta = x$, $\rho\eta\mu\vartheta = y$: $(x^2+y^2)^2 = \alpha^2(x^2-y^2)$. (σχ 70.β).



β)

Σχ. 70



α)

7.18. Δίδεται ἡ καμπύλη $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ ἀναφερόμενη σέ ὀρθογώνιο σύστημα xoy. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς καμπύλης στό σύστημα $x'o'y'$ ὅπου $O'(2,3)$ καί οἱ ἄξονες $o'x'$ $o'y'$ εἶναι παράλληλοι πρός τούς ἀρχικούς.

Λύση. Οἱ ἐξισώσεις τυχόντος σημείου M τῶν συντεταγμένων τῶν παλαιῶν ἀξόνων συναρτήσει τῶν νέων εἶναι:
$x = \alpha + x'$ καί $y = \beta + y'$ ὅπου $\alpha = 2$ καί $\beta = 3$· ὁπότε ἡ ἐξίσωση τῆς καμπύλης παίρνει τή μορφή:

$$(2+x')^2 + (3+y')^2 - 4(2+x') - 6(3+y') - 3 = 0 \text{ ἤ}$$

$$4 + 4x' + x'^2 + 9 + 6y' + y'^2 - 8 - 4x' - 18 - 6y' - 3 = 0 \text{ ἤ}$$

$x'^2 + y'^2 - 16 = 0$ ἤ τελικά $x'^2 + y'^2 = 4^2$ ἐξίσωση κύκλου μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν νέων ἀξόνων O' καί ἀκτίνα $\rho = 4$.

7.19. Μέ ποιά στροφή τῶν ἀξόνων ἡ ἐξίσωση $x^2-y^2=4$ μετατρέπεται εἰς τήν $x'y'=2$;

Λύση. Ἐκφράζουμε τίς συντεταγμένες τυχόντος σημείου M τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς συναρτήσει τῶν παλαιῶν συντεταγμένων τύποι (7.34). Εἶναι: $(x\,\text{συν}\varphi + y\,\text{ημ}\varphi)(y\,\text{συν}\varphi - x\,\text{ημ}\varphi) = 2$ ἤ

$$xy\,\text{συν}^2\varphi - x^2\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi + y^2\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi - xy\,\text{ημ}^2\varphi = 2 \text{ ἤ}$$

$xy(\text{συν}^2\varphi - \text{ημ}^2\varphi) - \text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi(x^2-y^2) = 2$ ἤ λόγω τῆς $x^2-y^2=4$:

$$xy\,\text{συν}2\varphi - \frac{1}{2}\,\text{ημ}2\varphi \cdot 4 = 2 \text{ ἤ } xy\,\text{συν}2\varphi - 2\,\text{ημ}2\varphi = 2 \quad (1).$$

Ἐκφράζουμε τώρα τίς συντεταγμένες x, y συναρτήσει τῶν x', y':
Εἶναι $(x'\,\text{συν}\varphi - y'\,\text{ημ}\varphi)^2 - (x'\,\text{ημ}\varphi + y'\,\text{συν}\varphi)^2 = 4$ ἤ

$$x'^2\text{συν}^2\varphi + y'^2\text{ημ}^2\varphi - 2x'y'\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi - x'^2\text{ημ}^2\varphi - y'^2\text{συν}^2\varphi - 2x'y'\,\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi = 4$$

ἤ $x'^2(\text{συν}^2\varphi - \text{ημ}^2\varphi) - y'^2(\text{συν}^2\varphi - \text{ημ}^2\varphi) - 4\cdot 2\cdot \text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi = 4$ $(x'y'=2)$.

ἤ $\sigma\upsilon\nu 2\varphi(x'^2-y'^2) - 4\eta\mu 2\varphi = 4$ (2).
Πολ/με καί τά δύο μέλη τῆς (1) ἐπί 2 καί ἀφαιροῦμε τίς (1) καί (2) κατά μέλη ὁπότε προκύπτει:
$\sigma\upsilon\nu 2\varphi(x'^2-y'^2-2xy)=0$. Στήν τελευταία σχέση ἐπειδή ἡ παρένθεση εἶναι πάντοτε διάφορη τοῦ μηδενός προκύπτει ὅτι $\sigma\upsilon\nu 2\varphi = 0$ ἤ $2\varphi = 90^\circ$ καί $\varphi = 45^\circ$.

7.20. Τῆς καμπύλης $x^2+2xy+2y^2-2x-4y+1=0$ νά εὑρεθοῦν: τό γένος, τό εἶδος, τό κέντρο, ἡ ἁπλοποιημένη της μορφή καί οἱ ἐξισώσεις τῶν ἀξόνων της.

Λύση. Ὡς γνωστόν ἡ γενική μορφή μιᾶς καμπύλης 2ου βαθμοῦ εἶναι $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$. Ἑπομένως εἶναι $A=1$, $B=1$, $\Gamma=2$, $\Delta=-1$, $E=-2$, $Z=1$ ὁπότε οἱ ἀναλλοίωτοι αὐτῆς D, d, S εἶναι:

$$D = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-4)-1(1-2)-1(2-2) = -1 < 0$$

$$d = \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 > 0, \quad S = A+\Gamma = 1+2 = 3 > 0.$$

Ἐπειδή $d>0$ ἡ καμπύλη εἶναι γένους ἐλλείψεως καί ἐπειδή $D<0$ καί $S>0$ ἕπεται ὅτι $D\cdot S<0$ ἄρα ἔχουμε πραγματική ἔλλειψη. Τό κέντρο O' τῆς ἐλλείψεως ἔχει συντεταγμένες:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{1} = 0, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1$$

δηλ. $O'(0,1)$. Ἡ κανονική της μορφή προκύπτει ὡς γνωστόν ἀπ' τή

σχέση $A'x'^2+\Gamma'y'^2+\frac{D}{d}=0$ όπου $A'=\frac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}=$
$=\frac{3+\sqrt{1^2+4}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ καί $\Gamma'=\frac{A+\Gamma-\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2}=$
$=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ καθώς καί $\frac{D}{d}=\frac{-1}{1}=-1$ οπότε ἡ ἐξίσωση γίνεται:
$\frac{3+\sqrt{5}}{2}x'^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}y'^2=1$.
Ἡ ἐξίσωση τοῦ νέου ἄξονα όx' εἶναι τῆς μορφῆς $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ ὅπου x_1, y_1 εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ κέντρου $O'(0,1)$ καί ὁ λ δίδεται ὡς γνωστόν ἀπ' τή σχέση $\lambda=\frac{\Gamma-A+\sqrt{(\Gamma-A)^2+4B^2}}{2B}=$
$=\frac{1+\sqrt{1^2+4}}{2\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Δηλ ἡ ἐξίσωση τοῦ ο$x'$ θά εἶναι:
$y-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$. Ὁ ἄλλος ἄξονας ό$y'$ ὡς κάθετος στόν όx' θά ἔχει λ_1 τέτοιον ὥστε $\lambda\cdot\lambda_1=-1$ δηλ $\lambda_1=-\frac{1}{\lambda}$ ἤ $\lambda_1=\frac{-2}{1+\sqrt{5}}=$
$=\frac{-2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ καί ἡ ἐξίσωση τοῦ όy': $y-1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$.

7.21. Δίδεται ἡ καμπύλη $2x^2-4xy+y^2-2x-6y+1=0$. Νά εὑρεθοῦν τό γένος, τό εἶδος, τό κέντρο καί ἡ κανονική της μορφή.

Λύση. Εἶναι $A=2$, $B=-2$, $\Gamma=1$, $\Delta=-1$, $E=-3$, $Z=1$ οπότε

$$D=\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-33<0,\quad d=\begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-2<0$$

καί $S=A+\Gamma=3>0$. Ἐπειδή $d<0$ ἡ καμπύλη εἶναι γένους ὑπερβολῆς καί ἐπειδή $D\neq 0$ ἡ ὑπερβολή εἶναι πραγματική.
Τό κέντρο της O' ἔχει συντεταγμένες:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-2}=-\frac{7}{2},\quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2}=-4$$

δηλ $O'\left(-\frac{7}{2},-4\right)$. Ἡ κανονική της ἐξίσωση εἶναι $A'x'^2+\Gamma'y'^2+\frac{D}{d}=0$

όπου είναι $A' = \frac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2} \quad \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $\Gamma' = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

και $\frac{D}{d} = \frac{33}{2}$ καί ή εξίσωση: $\frac{3+\sqrt{17}}{2}x'^2 - \frac{-3+\sqrt{17}}{2}y'^2 = -\frac{33}{2}$

7.22. Τί παριστάνει ή καμπύλη $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$; Νά γίνει ή γραφική της παράσταση.

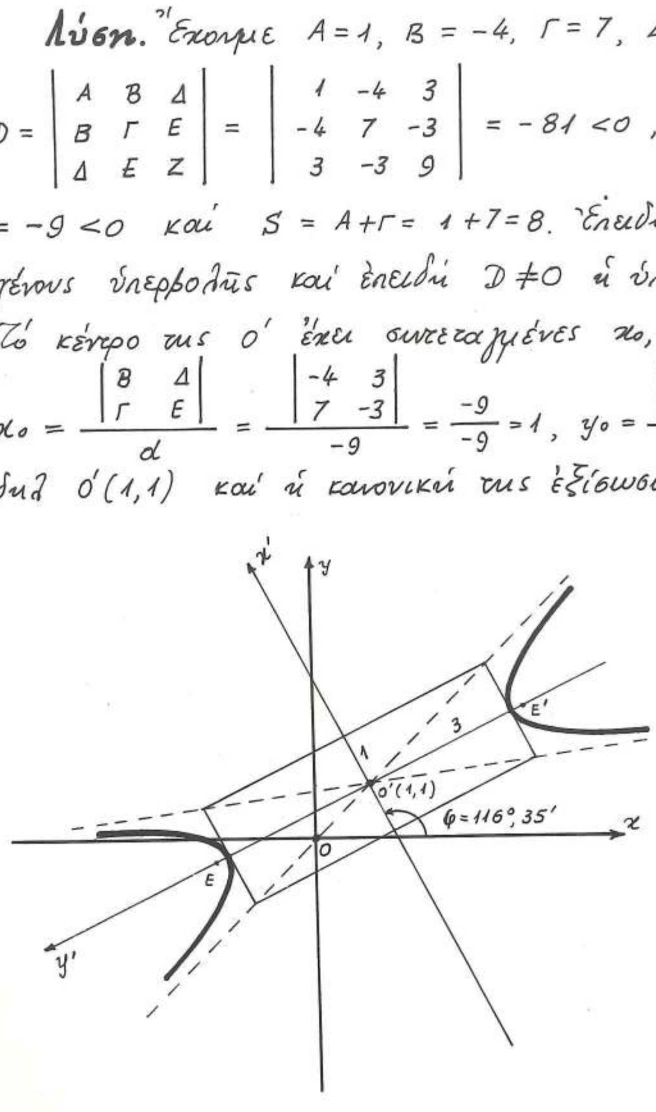
Λύση. Έχομε $A=1$, $B=-4$, $\Gamma=7$, $\Delta=3$, $E=-3$, $Z=9$ Άρα:

$$D = \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -81 < 0 \,, \quad d = \begin{vmatrix} A & B \\ B & \Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$= -9 < 0$ καί $S = A+\Gamma = 1+7 = 8$. Έπειδή $d<0$ ή καμπύλη είναι γένους υπερβολής καί έπειδή $D \neq 0$ ή υπερβολή είναι πραγματική. Τό κέντρο της O' έχει συντεταγμένες x_0, y_0:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & \Delta \\ \Gamma & E \end{vmatrix}}{d} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1 \,, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta & A \\ E & B \end{vmatrix}}{d} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1$$

δηλ. $O'(1,1)$ καί ή κανονική της εξίσωση είναι: $A'x'^2+\Gamma'y'^2+\frac{D}{d}=0$



Σχ 71

$A' = \frac{A+\Gamma+\sqrt{(A-\Gamma)^2+4B^2}}{2} =$

$= \frac{8+10}{2} = 9$ καί $\Gamma' = \frac{8-10}{2} =$

$= -1$ καθώς καί $\frac{D}{d} = \frac{-81}{-9} = 9$

δηλ. $9x'^2 - y'^2 = -9$ ή

$\frac{x'^2}{1^2} - \frac{y'^2}{3^2} = -1$ δηλ ή συζυγής της $\frac{x'^2}{1^2} - \frac{y'^2}{3^2} = 1$.

Ή γωνία στροφής φ υπολογίζεται άπ' τόν τύπο (7.38):

$\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{2B}{A-\Gamma} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

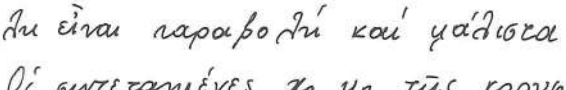
Έπειδή όμως $2B<0$ δηλ $\eta\mu 2\varphi < 0$ προκύπτει ότι ή γωνία 2φ περιέχεται στό III τεταρτημόριο δηλ. μεταξύ $180°$ καί $270°$. Ἀπ' τήν $\varepsilon\varphi 2\varphi = \frac{4}{3}$ προκύπτει $2\varphi = 53°,10'$ (γωνία τοῦ I τεταρτημόριου) δηλ. $2\varphi = 180 + 53°,10 = 233°,10$ (γωνία τοῦ III τεταρτημόριου). Ἄρα $\varphi = 116°,35'$. Ἡ γραφική της παράσταση εἰκονίζεται στό σχ. 71.

7.23. Δίδεται ἡ καμπύλη $x^2-2xy+y^2-2x-4y+1=0$. Νά εὑρεθοῦν τό γένος, τό εἶδος, τό κέντρο, ἡ κανονική της μορφή, ἡ γωνία τῶν ἀξόνων τοῦ νέου συστήματος καί νά γίνῃ ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. Εἶναι $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=1$, $\Delta=-1$, $E=-2$, $Z=1$ ὁπότε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9 < 0 \ , \quad d = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ἄρα ἡ καμπύλη εἶναι παραβολή καί μάλιστα πραγματική ἐπειδή $D \neq 0$. Οἱ συντεταγμένες x_0, y_0 τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς (κέντρο δέν ὑπάρχει), πού εἶναι καί ἡ ἀρχή τοῦ νέου συστήματος συντεταγμένων δίδονται ἀπ' τούς τύπους (7.41): Θέτοντας $A=1$, $B=-1$, $\Gamma=1$, $\Delta=-1$, $E=-2$ $Z=1$ καί $S=A+\Gamma=2$ καί ἐκτελώντας τίς πράξεις:



Σχ. 72

$$x_0 - y_0 + \frac{1}{2} = 0, \quad -\frac{5}{2}x_0 - \frac{7}{2}y_0 + 1 = 0.$$

Λύνοντας τό σύστημα εὑρίσκουμε $x_0 = -\frac{1}{8}$, $y_0 = \frac{3}{8}$ δηλ. ἡ κορυφή της εἶναι $O'\left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Ἡ ἐξίσωσή της εἶναι τῆς μορφῆς $y'^2 = 2px'$ ὅπου

$$p = \frac{AE - B\Delta}{S\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} < 0$$

δηλ. τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος 55α. (σχ. 72) Εἶναι $\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1$ (τύπος (7.44)). Ἐπειδή ὅμως $A>0$ θά εἶναι ημ $\varphi<0$ δηλ. ἡ γωνία φ θά περιέχεται στό III τεταρτημόριο. Ἀπ' τή σχέση $\varepsilon\varphi\varphi = 1$ προκύπτει $\varphi = 45°$ (γωνία τοῦ I τεταρτημόριου) δηλ. $\varphi = 180° + 45° = 225°$ (ἡ πραγματική γωνία τοῦ III τεταρτημόριου). Ἡ γραφική της παράσταση εἰκονίζεται στό σχ. 72. Ἄξιο παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἡ παραβολή $y'^2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}x'$ ἐφάπτεται στόν ἄξονα ox τοῦ παλαιοῦ συστήματος στό σημεῖο $x=1$. Πράγματι, ἄν θέσουμε στήν ἀρχική ἐξίσωση τῆς παραβολῆς $y=0$ εὑρίσκουμε: $x^2-2x+1=0$ ἡ ὁποία ἔχει διπλῆ ρίζα $x=1$.

7.24. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση ἐπιπέδου **α)** διερχομένου διά τῶν σημείων $P_1(2,1,0)$, $P_2(0,-1,0)$, $P_3(0,0,2)$ καί **β)** διερχομένου διά τοῦ σημείου $P_1(0,1,-2)$ καί παραλλήλου πρός τά διανύσματα $\overline{r_1}(-1,0,2)$ καί $\overline{r_2}(1,-2,1)$.

Λύση. α'). Ἡ ἐξίσωση τοῦ ζητούμενου ἐπιπέδου δίδεται ἀπ' τήν ὁρίζουσα τοῦ τύπου (7.48 α):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ἤ } x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x+2y+z-2=0$$

β'). Ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου δίδεται ἀπ' τήν ὁρίζουσα: (7.48 β)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ἤ } (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4x+3y+2z+1=0$$

(Συνήθως ἀναπτύσσουμε τήν ὁρίζουσα κατά τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ στήλης, ὁποιασδήποτε, πού περιέχει τά περισσότερα μηδενικά, προσέχοντας κάθε φορά τό πρόσημο. Ἡ ἀνάπτυξη γίνεται πολλαπλασιάζοντας τά στοιχεῖα τῆς γραμμῆς ἢ στήλης πού θέλουμε, κάθε φορά μέ τήν ὁρίζουσα πού ἀπομένει ἄν ἀφαιρεθεῖ ἡ γραμμή καί ἡ στήλη πού περιέχει τό ἑκάστοτε στοιχεῖο. Τό πρόσημο εἶναι θετικό ἄν τό ἄθροισμα τῆς γραμμῆς καί στήλης πού ἀντιστοιχεῖ τό ἑκάστοτε στοιχεῖο εἶναι ἄρτιος ἀριθμός καί ἀρνητικό ἄν εἶναι περιττός). Στήν ἄσκηση ἀναπτύξαμε τήν ὁρίζουσα (α) κατά τά στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης, ἐνῶ τήν ὁρίζουσα (β) κατά τά στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης.

7.25. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχόμενου διά τοῦ σημείου $P(1,-1,3)$ καί παραλλήλου πρός τό ἐπίπεδο $2x+3y+z-7=0$.

Λύση. Ἐπειδή τό ζητούμενο ἐπίπεδο εἶναι παράλληλο πρός τό δοθέν θά εἶναι κάθετο στό διάνυσμα $\overline{n}\,(2,3,1)$ τό ὁποῖο εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο $2x+3y+z-7=0$. Ἔστω $M(x,y,z)$ τυχόν σημεῖο τοῦ ζητούμενου ἐπιπέδου. Τότε τό σημεῖο $P(1,-1,3)$, πού κεῖται στό ἐπίπεδο, μέ τό σημεῖο $M(x,y,z)$ ἀποτελοῦν διάνυσμα, τό $\overline{PM}\,(x-1,\ y+1,\ z-3)$, τό ὁποῖο, ἐφ' ὅσον κεῖται στό ζητούμενο ἐπίπεδο, θά εἶναι κάθετο στό $\overline{n}(2,3,1)$. Ἄρα θά εἶναι (συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων) $\overline{PM}\cdot\overline{n}=0$ ἢ
$2\cdot(x-1)+3(y+1)+1\cdot(z-3)=0$ ἢ $2x+3y+z-2=0$ πού εἶναι καί ἡ ἐξίσωση τοῦ ζητούμενου ἐπιπέδου.

7.26. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου, πού διέρχεται ἀπ' τήν τομή τῶν ἐπιπέδων $2x-3y+z-2=0$ καί $x+2y-3z+1=0$ καί εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο $x-3y+z-3=0$.

Λύση. Ἀπ' τήν εὐθεία $2x-3y+z-2=0$, $x+2y-3z+1=0$, τομή τῶν δύο ἐπιπέδων, διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα. Ἡ ἐξίσωση τῆς δέσμης ἐπιπέδων εἶναι ὡς γνωστόν (σελ 204) τῆς μορφῆς: $2x-3y+z-2+\lambda(x+2y-3z+1)=0$ (1). Θέλουμε νά ὁρίσουμε ἐκεῖνο πού εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο $x-3y+z-3=0$.
Ἡ ἐξίσωση δέσμης γράφεται ἀκόμη: $(2+\lambda)x+(-3+2\lambda)y+$ $+(1-3\lambda)z-2+\lambda=0$. Ἔστω $\overline{n_1}(2+\lambda,\ -3+2\lambda,\ 1-3\lambda)$ τό διάνυσμα τό κάθετο στό ἐπίπεδο τῆς δέσμης καί $\overline{n_2}(1,-3,1)$ τό διάνυσμα τό κάθετο στό ἐπίπεδο $x-3y+z-3=0$. Ἐφ' ὅσον τά δύο ἐπίπεδα θέλουμε νά εἶναι κάθετα, θά εἶναι καί τά $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$ κάθετα μεταξύ των, ὡς κάθετα στά ἀντίστοιχα ἐπίπεδα. Ἄρα θά εἶναι: $(2+\lambda)\cdot 1+(-3+2\lambda)(-3)+(1-3\lambda)\cdot 1=0$ (συνθήκη καθετότητας τῶν $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$) ἤ $2+\lambda+9-6\lambda+1-3\lambda=0$ καί $\lambda=\frac{3}{2}$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἀπ' τήν (1): $7x-7z-1=0$.

7.27. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπ' τό σημεῖο $P(2,3,1)$ καί εἶναι παράλληλη πρός τά ἐπίπεδα $3x-2y+3=0$ καί $2x+3y-z+4=0$.

Λύση. Ἐπειδή ἡ ζητούμενη εὐθεῖα εἶναι παράλληλη πρός τά δοθέντα ἐπίπεδα θά εἶναι παράλληλη καί πρός τήν τομή τους. Ἄν $\overline{n_1}(3,-2,0)$ καί $\overline{n_2}(2,3,-1)$ εἶναι τά διανύσματα τά κάθετα στά ἐπίπεδα $3x-2y+3=0$ καί $2x+3y-z+4=0$, τότε τό διάνυσμα $\overline{n_1}\wedge\overline{n_2}$ θά εἶναι παράλληλο πρός τήν τομή τῶν δύο ἐπιπέδων, δηλ ἡ ζητούμενη εὐθεῖα θά διέρχεται ἀπό τό σημείο $P(2,3,1)$ καί θά είναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα

$$\overline{n_1}\wedge\overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{x_0} & \overline{y_0} & \overline{z_0} \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\overline{x_0}+3\overline{y_0}+13\overline{z_0}$$ δηλ τό $\overline{n_1}\wedge\overline{n_2}(2,3,13)$

Ἄρα (τύπος (7.49)) ἡ ζητούμενη ἐξίσωση θά εἶναι ἡ

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{13}$$ ἤ $3x-2y=0$ καί $13x-2z-24=0$.

(Ὡς γνωστό κάθε εὐθεῖα στό χῶρο παριστάνεται σάν τομή δύο ἐπιπέδων).

7.28. Νά εὑρεθεῖ πάνω στόν ἄξονα oz σημεῖο τό ὁποῖο νά ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τά ἐπίπεδα $3x+4z-5=0$, $4y-3z+2=0$.

Λύση. Ἔστω P τό σημεῖο πάνω στόν ἄξονα oz μέ συντεταγμένες $P(0,0,z_1)$ Τότε οἱ ἀποστάσεις d_1 καί d_2 τοῦ P ἀπ' τά ἐπίπεδα $3x+4z-5=0$ καί $4y-3z+2=0$ εἶναι (τύπος (7.50)):

$$d_1 = \frac{|3\cdot 0+0\cdot 0+4\cdot z_1-5|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}} \quad \text{καί} \quad d_2 = \frac{|0\cdot 0+4\cdot 0+(-3)\cdot z_1+2|}{\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}}$$

καί ἐπειδή πρέπει $d_1=d_2$ προκύπτει ὅτι πρέπει νά εἶναι $|4z_1-5| = |-3z_1+2|$. Ὑψώνοντας στό τετράγωνο τήν τελευταία σχέση ἔχουμε: $16z_1^2-40z_1+25 = 9z_1^2-12z_1+4$ ἤ τελικά $z_1^2-4z_1+3=0$. Οἱ ρίζες αὐτῆς εἶναι $z_1=3$ καί $z_1=1$. Ἑπομένως εἶναι δύο σημεῖα τά $P_1(0,0,3)$ καί $P_2(0,0,1)$.

7.29. Ἀπ' τό σημεῖο $P(2,2,1)$ νά ἀχθεῖ ἐπίπεδο, πού νά περιέχει τήν εὐθεία $2x-y+z-1=0$, $3x+y-z+1=0$.

Λύση. Ἡ δέσμη τῶν ἐπιπέδων πού διέρχονται ἀπ' τήν εὐθεία (τομή δύο ἐπιπέδων) $2x-y+z-1=0$, $3x+y-z+1=0$ εἶναι $2x-y+z-1+\lambda(3x+y-z+1)=0$ (1). Ἀπ' τά ἐπίπεδα αὐτά θέλουμε νά ὁρίσουμε ἐκεῖνο πού διέρχεται ἀπ' τό σημεῖο $P(2,2,1)$. Ἑπομένως οἱ συντεταγμένες τοῦ $P(2,2,1)$ πρέπει νά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τῆς δέσμης, ἑπομένως $2\cdot2-1\cdot2+1\cdot1+\lambda(2\cdot2+1\cdot2-1\cdot1+1)=0$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\lambda=-\frac{1}{3}$. Θέτοντας τήν τιμή τοῦ λ στήν (1) βρίσκουμε τήν ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου: $3x-4y-2z-4=0$

7.30. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση σφαίρας, ἡ ὁποία τέμνει τό ἐπίπεδο xoy κατά κύκλο κέντρου $O(0,0)$ καί ἀκτίνας 7 καί διέρχεται ἀπ' τό σημεῖο $(8, 15, 10)$.

Λύση. Ὅπως φαίνεται τό κέντρο τοῦ κύκλου εἶναι ἡ ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Πάνω στήν κάθετο στό κέντρο τοῦ κύκλου δηλ τόν ἄξονα OZ βρίσκεται τό κέντρο K τῆς σφαίρας μέ συντεταγμένες $K(0,0,\gamma)$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς σφαίρας εἶναι $x^2+y^2+(z-\gamma)^2=R^2$ ὅπου R ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας. Ἀλλά εἶναι $R^2=\gamma^2+7^2$ ἄρα $x^2+y^2+(z-\gamma)^2=\gamma^2+7^2$. Ἐπειδή τό σημεῖο $P(8,15,10)$ βρίσκεται πάνω στή σφαίρα, θά ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσή της· δηλ $8^2+15^2+(10-\gamma)^2=\gamma^2+7^2$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\gamma=17$. Ἄρα ἡ ζητούμενη ἐξίσωση τῆς σφαίρας εἶναι $x^2+y^2+(z-17)^2=338$.

7.31. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς σφαίρας, πού διέρχεται ἀπό τόν κύκλο (τομή τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2-3x-2y-z=0$ καί τοῦ ἐπιπέδου $2x+3y+6z-6=0$) καί ἀπό τό σημεῖο $P(0,-1,-2)$.

Λύση. Ἡ δέσμη τῶν σφαιρῶν πού διέρχονται ἀπό τόν δεδομένο κύκλο ἔχει ἐξίσωση (σελ. 204) $x^2+y^2+z^2-3x-2y-z+$ $+\lambda(2x+3y+6z-6)=0$. Ἐπειδή ἡ σφαῖρα διέρχεται καί ἀπό τό σημεῖο $P(0,-1,-2)$, οἱ συντεταγμένες τοῦ P θά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τῆς δέσμης. Δηλ. $0^2+(-1)^2+(-2)^2-3\cdot 0-2\cdot(-1)-1\cdot(-2)+\lambda(2\cdot 0+3\cdot(-1)+$ $+6\cdot(-2)-6)=0$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\lambda=\frac{3}{7}$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση τῆς σφαίρας γιά $\lambda=\frac{3}{7}$ γίνεται $x^2+y^2+z^2-\frac{15}{7}x-\frac{5}{7}y+\frac{11}{7}z-\frac{18}{7}=0$.

7.32. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ἡ ὁποία ἔχει ὁδηγό καμπύλη τόν κύκλο $x^2+y^2=5$ πάνω στό ἐπίπεδο xoy καί γενέτειρες παράλληλες πρός τήν διχοτόμο τῆς γωνίας yoz δηλ τήν εὐθεία $y=z$ καί $x=0$.

Λύση. Ἡ ὁδηγός καμπύλη ἔχει ἐξισώσεις $x^2+y^2=5$ καί $z=0$ (1). Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας yoz ἔχει ἐξισώσεις $y-z=0$ καί $x=0$ (2). Ἑπομένως μία εὐθεῖα παράλληλη πρός αὐτή θά ἔχει ἐξισώσεις $y-z=\lambda$ καί $x=\mu$ (3). Ἄν μεταξύ τῶν ἐξισώσεων τῆς ὁδηγοῦ καμπύλης (1) καί τῶν ἐξισώσεων τῆς γενέτειρας (3) δηλ τεσσάρων ἐξισώσεων, ἀπαλείψουμε τά x, y, z εὑρίσκουμε μία σχέση ὡς πρός μ καί λ· προκύπτει πολύ εὔκολα ὅτι εἶναι ἡ $\mu^2+\lambda^2=5$ (4). Ἄν τώρα μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (3) καί τῆς τελευταίας (4) δηλ τριῶν ἐξισώσεων, ἀπαλείψουμε τά λ καί μ προκύπτει μία σχέση ὡς πρός x, y, z, πού εἶναι καί ἡ ἐξίσωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας· πράγματι προκύπτει $(y-z)^2+x^2=5$.

7.33. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωση τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἡ ὁποία ἔχει κορυφή τό σημεῖο $P(0,1,1)$ καί ὁδηγό καμπύλη τήν εὐθεία $3x^2+y^2=1$ καί $z=0$.

Λύση. Τό σημεῖο $P(0,1,1)$ εἶναι τομή τῶν ἐπιπέδων $x=0$, $y-1=0$, $z-1=0$. Ἑπομένως μία γενέτειρα ἔχει ἐξισώσεις:

$z-1=\lambda x$ καί $z-1=\mu(y-1)$ (1). Ἡ ὁδηγός καμπύλη ἔχει ἐξισώσεις $3x^2+y^2=1$ καί $z=0$ (2). Μεταξύ τῶν (1) καί (2) ἀπαλοίφουμε τά x, y, z. Ἀπό τήν $z=0$ οἱ ἐξισώσεις (1) γίνονται $-1=\lambda x$ καί $-1=\mu(y-1)$ ἤ $x=-\frac{1}{\lambda}$ καί $y=\frac{\mu-1}{\mu}$ (3). Ὑψώνουμε τίς σχέσεις (3) στό τετράγωνο καί ἔχουμε: $x^2=\frac{1}{\lambda^2}$ καί $y^2=\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2}$. Ἄν ἀντικαταστήσουμε τά x^2, y^2 στήν πρώτη τῶν (2) προκύπτει $3\cdot\frac{1}{\lambda^2}+\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2}=1$ ἤ μετά τίς πράξεις $3\mu^2+\lambda^2(\mu-1)^2=\lambda^2\mu^2$ (4). Ἄν τώρα μεταξύ τῶν (1) καί (4) ἀπαλείψουμε τά λ καί μ εὑρίσκουμε τήν ἐξίσωση τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας. Ἀπ' τίς (1) προκύπτει $\lambda=\frac{z-1}{x}$ καί $\mu=\frac{z-1}{y-1}$ ὁπότε ἡ (4) γίνεται: $3\left(\frac{z-1}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z-1}{x}\right)^2\left(\frac{z-1}{y-1}-1\right)^2=\left(\frac{z-1}{x}\right)^2\left(\frac{z-1}{y-1}\right)^2$ ἤ μετά τίς πράξεις $3x^2+(z-y)^2=(z-1)^2$.

7.34. Νά εὑρεθοῦν οἱ ὀρθές προβολές τῆς καμπύλης $2x^2+5y^2-z=0$, $x^2+y^2+z-6=0$ πάνω στά συντεταγμένα ἐπίπεδα.

Λύση. Γιά νά βροῦμε τήν ὀρθή προβολή τῆς καμπύλης πάνω στό ἐπίπεδο xoy ἀπαλοίφουμε μεταξύ τῶν ἐξισώσεων τῆς καμπύλης τό z. Ἀπ' τήν πρώτη προκύπτει $z=2x^2+5y^2$ ὁπότε ἡ δεύτερη ἐξίσωση γίνεται $x^2+y^2+2x^2+5y^2-6=0$ ἤ $3x^2+6y^2-6=0$ δηλ ἡ προβολή τῆς καμπύλης πάνω στό ἐπίπεδο xoy εἶναι ἔλλειψη. Γιά νά βροῦμε τήν ὀρθή προβολή τῆς καμπύλης πάνω στό xoz ἀπαλοίφουμε μεταξύ τῶν δύο ἐξισώσεων τώρα τό y. Ἡ προβολή τῆς καμπύλης στό xoz προκύπτει ὅτι εἶναι ἡ ἐξίσωση $x^2-2z-15=0$. Ὁμοίως ἡ προβολή τῆς καμπύλης στό ἐπίπεδο yoz μετά τήν ἀπαλοιφή τοῦ x προκύπτει ὅτι εἶναι ἡ $y^2-z+4=0$.

8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ.

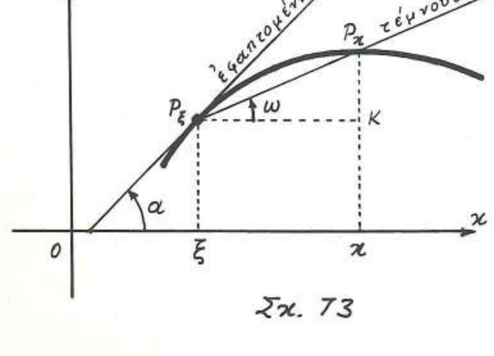
Ὁρισμοί - Μεθοδολογία.

Ἔστω f συνάρτησι ὡρισμένη στό διάστημα (α,β) καί δύο σημεῖα x καί ξ τοῦ διαστήματος (α,β). Σχηματίζουμε τό πηλίκο τῶν διαφορῶν $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, διατηροῦμε τό ξ σταθερό καί μελετοῦμε τό πηλίκο αὐτό ὅταν τό x τείνει στό ξ, δηλ. εὑρίσκουμε τό $\underset{x\to\xi}{\text{ορ}}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Ἄν ὑπάρχει τό ὅριο αὐτό, τό ὀνομάζουμε **παράγωγο ἀριθμό** τῆς συνάρτησης f στό σημεῖο $\xi\in(\alpha,\beta)$ καί τό συμβολίζουμε μέ $f'(\xi)$. Λέμε ἀκόμη ὅτι ἡ συνάρτησι f εἶναι **παραγωγίσιμη** στό ξ. Ἄν δέν ὑπάρχει τό ὅριο, δηλ. ἄν δέν ὑπάρχει ὁ παράγωγος ἀριθμός τῆς f στό ξ, λέμε ὅτι ἡ συνάρτησι δέν εἶναι παραγωγίσιμη στό ξ. Ἄν τό ὅριο αὐτό εἶναι $\pm\infty$, λέμε ὅτι ὁ παράγωγος ἀριθμός ἀπειρίζεται στό σημεῖο ξ. Ἄν ὑπάρχει τό $\underset{x\to\xi^-}{\text{ορ}}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ ἤ τό $\underset{x\to\xi^+}{\text{ορ}}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ λέμε ὅτι ἔχουμε παράγωγο ἀριθμό ἐξ ἀριστερῶν ἤ ἐκ δεξιῶν καί τόν συμβολίζουμε μέ $f'_-(\xi)$ ἤ $f'_+(\xi)$ ἀντίστοιχα. Ἑπομένως γιά νά εἶναι ἡ συνάρτησι παραγωγίσιμη στό ξ πρέπει νά ὑπάρχουν καί τά δύο ὅρια καί νά εἶναι $f'_-(\xi)=f'_+(\xi)=f'(\xi)$. Ἄν ὑπάρχει ὁ παράγωγος ἀριθμός γιά κάθε σημεῖο τοῦ διαστήματος (α,β), λέμε ὅτι ἡ συνάρτησι εἶναι παραγωγίσιμη στό (α,β).

Ἀπ' τόν ὁρισμό τοῦ παραγώγου ἀριθμοῦ τῆς f στό σημεῖο ξ, προκύπτει ὅτι ὁρίζεται μιά νέα συνάρτησι, ἡ ὁποία ὁρίζεται γιά ἐκεῖνα τά σημεῖα τοῦ διαστήματος (α,β) γιά τά ὁποῖα ὑπάρχει ὁ παράγωγος ἀριθμός καί λέγεται **παράγωγος** συνάρτηση τῆς f ἤ ἁπλῶς παράγωγος τῆς f καί συμβολίζεται μέ y'_x ἤ $f'(x)$ ἤ $Df(x)$ ἤ $\frac{df(x)}{dx}$ ἤ $\frac{dy}{dx}$.

Γιά νά βροῦμε τήν παράγωγο τῆς συνάρτησης $y=f(x)$, ἐφ' ὅσον αὐτή ὑπάρχει, θέτουμε ὅπου ξ τό x καί ὅπου x τό $x+\Delta x$ καί παίρνουμε τό ὅριο τοῦ πηλίκου $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ὅταν τό Δx τείνει στό μηδέν $(\Delta x \neq 0)$ δηλ. $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Ἡ $f'(x)$ λέγεται καί πρώτη παράγωγος τῆς $f(x)$. Ἄν καί ἡ συνάρτηση $f'(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη γιά κάθε σημεῖο τοῦ διαστήματος (α,β) ὁρίζεται μία νέα συνάρτηση, ἡ παράγωγος αὐτῆς, ἡ ὁποία λέγεται **δεύτερη** παράγωγος τῆς $f(x)$ καί συμβολίζεται μέ $f''(x)$. Ἀνάλογα ὁρίζεται ἐπαγωγικά καί ἡ **νιοστή** παράγωγος τῆς $f(x)$ στό διάστημα (α,β) καί συμβολίζεται μέ $f^{(\nu)}(x)$ εἶναι δέ $f^{(\nu)}(x) = \left(f^{(\nu-1)}(x)\right)'$. Δηλ. ἀναγκαία συνθήκη γιά τόν ὁρισμό τῆς νιοστῆς παραγώγου τῆς $f(x)$ στό (α,β) εἶναι ἡ ὕπαρξη τῆς $f^{(\nu-1)}(x)$ στό διάστημα (α,β). Γιά τή νιοστή παράγωγο ἐκτός ἀπό τόν συμβολισμό $f^{(\nu)}(x)$ χρησιμοποιοῦνται καί οἱ συμβολισμοί $\frac{d^{(\nu)}f(x)}{dx^{\nu}}$, $D_x^{\nu}f(x)$, $y_x^{(\nu)}$.



Σχ. 73

Γεωμετρικά ἡ παράγωγος τῆς f στό σημεῖο αὐτῆς ξ εἶναι ὁ συντελεστής κατευθύνσεως λ τῆς εὐθείας πού ἐφάπτεται στήν καμπύλη τῆς f στό σημεῖο ξ διότι ἔχουμε (σχ. 73) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{KP_x}{P_\xi K} =$

$$= \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \text{ καί } \lambda = \varepsilon\varphi\alpha = \underset{x \to \xi}{\text{ὅρ}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi).$$

δηλ. ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης στό σημεῖο $P_\xi(\xi, f(\xi))$ θά εἶναι: $y - f(\xi) = \lambda(x - \xi)$ ὅπου $\lambda = f'(\xi)$, ἐξίσωση εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $P_\xi(\xi, f(\xi))$ καί τῆς ὁποίας ὁ συντελεστής κατευθύνσεως εἶναι $\lambda = f'(\xi)$.

Μιά ἄλλη ἑρμηνεία τῆς παραγώγου εἶναι ἡ κινηματική. Ἔστω ὑλικό σημεῖο, πού κινεῖται πάνω στόν ἄξονα ox. Ἡ κίνηση τοῦ σημείου θά εἶναι τελείως ὡρισμένη, ὅταν σέ κάθε χρονική στιγμή t_o εἶναι γνωστή ἡ θέση τοῦ σημείου πάνω στόν ἄξονα ox, ἤ ὅπως λέμε ὅταν εἶναι γνωστή ἡ ἐξίσωση τῆς κίνησης $x = s(t)$. Ἔστω $P_o(x_o)$ ἡ θέση τοῦ κινητοῦ κατά τή χρονική στιγμή t_o καί $P'(x_o + \Delta x)$ ἡ θέση του κατά τή χρονική στιγμή $t_o + \Delta t$ ὅπου $\Delta t \neq 0$. Τό πηλῖκο διαφορῶν $\frac{s(t_o+\Delta t)-s(t_o)}{\Delta t}$ λέγεται μέση ταχύτης τοῦ κινητοῦ μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν t_o καί $t_o + \Delta t$. Ὡς ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τήν χρονική στιγμή t_o ὁρίζουμε τήν ὁριακή τιμή τῆς μέσης ταχύτητος αὐτοῦ, δηλ. τό $\underset{\Delta t \to 0}{\text{ὅρ}} \frac{s(t_o+\Delta t) - s(t_o)}{\Delta t} = s'(t_o) = v(t_o)$

Ὥστε ὁ παράγωγος ἀριθμός $s'(t_o)$ παριστάνει τήν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατά τήν χρονική στιγμή t_o. Ἐντελῶς ἀνάλογα ὁρίζουμε ὡς ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ κατά τήν χρονική στιγμή t_o τό $\underset{\Delta t \to 0}{\text{ὅρ}} \frac{v(t_o+\Delta t) - v(t_o)}{\Delta t} = v'(t_o) = \gamma(t_o) = s''(t_o)$ ἐφ' ὅσον βεβαίως ὑπάρχει. Γενικώτερα στή Φυσική ἐκτός ἀπό τή δοθεῖσα ἑρμηνεία γιά τήν κίνηση, ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου εἰσέρχεται παντοῦ ὅπου πρόκειται γιά ὁριακές τιμές μέσων διαφορῶν π.χ. γιά τήν μέση εἰδική θερμότητα, τῆς ὁποίας ἡ ὁριακή τιμή λέγεται εἰδική θερμότης κ.τ.λ.

Παραδείγματα παραγώγων ἁπλῶν συναρτήσεων:

α. Ἔστω ἡ συνάρτηση $f(x) = x^2$ ὡρισμένη στό R καί σημεῖο $2 \in R$. Ὁ παράγωγος ἀριθμός στό σημεῖο 2 εἶναι τό $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$. Ἄρα $f'(2)=4$.

Τήν παράγωγο συνάρτηση ὑπολογίζουμε ὡς ἑξῆς: Εἶναι

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x. \text{ Ἄρα } f'(x) = 2x.$$

β. Ἔστω ἡ συνάρτηση $f(x) = |x|$ ὡρισμένη στό R. Ἡ συνάρτηση αὐτή στό σημεῖο 0 δέν εἶναι παραγωγίσιμη διότι ὁ παράγωγος ἀριθμός ἐκ δεξιῶν εἶναι $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Ἐνῶ ὁ παράγωγος ἀριθμός ἐξ ἀριστερῶν εἶναι:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \text{ δηλ. } f'_-(0) \neq f'_+(0).$$

Ἰδιότητες τῶν παραγώγων.

Ἀναφέρουμε μερικές προτάσεις πού μᾶς χρησιμεύουν γιά τόν ὑπολογισμό τῆς παραγώγου δοθείσης συναρτήσεως f.

1. Ἄν ἡ συνάρτηση f ὡρισμένη στό διάστημα (α, β) εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο $\xi \in (\alpha, \beta)$ καί ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι πεπερασμένη, τότε εἶναι συνεχής στό σημεῖο ξ. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει γενικά, δηλ. μία συνάρτηση f μπορεῖ νά εἶναι συνεχής στό σημεῖο ξ χωρίς νά εἶναι παραγωγίσιμη στό ξ. π.χ. ἡ συνάρτηση $y = x$ ἄν $x \leq 1$ καί $y = 2x-1$ ἄν $x > 1$ (βλ. ἄσκ. 5.4 σελ 121) εἶναι συνεχής στό σημεῖο $x=1$ διότι

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(2x-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \text{ καί } f(1) = 1$$

ἐνῶ $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$, δηλ. $f'_-(1)=1$ καί

$\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$, δηλ. $f'_+(1)=2$

Ἄρα $f'_-(1)\neq f'_+(1)$ δηλ. ἡ f δέν εἶναι παραγωγίσιμη στό 1.

Γενικώτερα. Ἄν ἡ συνάρτηση f παραγωγίζεται στό διάστημα Δ, τότε εἶναι συνεχής συνάρτηση στό διάστημα αὐτό.

2. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ παραγωγίζονται στό διάστημα Δ, τότε παραγωγίζονται καί οἱ συναρτήσεις $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ καί μάλιστα ἰσχύουν:

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x),\quad [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x),$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),\quad [cf(x)]'=c\cdot f'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}\quad (\text{ὅπου } g(x)\neq 0\ \forall x\in\Delta).$$

Γιά ν συναρτήσεις τίς $f_1, f_2, \cdots, f_\nu$ ἰσχύει ἐπαγωγικά:

$(f_1\pm f_2\pm\cdots\pm f_\nu)'=f_1'\pm f_2'\pm\cdots\pm f_\nu'$ καί

$(f_1\cdot f_2\cdots f_\nu)'=f_1'\cdot f_2\cdots f_\nu+f_1\cdot f_2'\cdots f_\nu+\cdots+f_1\cdot f_2\cdots f_\nu'$.

3. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ παραγωγίζονται στά διαστήματα A καί Δ, τότε καί ἡ σύνθεση αὐτῶν $h=f\circ g$ δηλ. ἡ $h(x)=f(g(x))$ $\forall x\in\Delta$ παραγωγίζεται ἐπίσης καί μάλιστα $h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

4. Ἄν ἡ συνάρτηση $y=f(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο x, τότε καί ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση αὐτῆς $x=f^{-1}(y)$ εἶναι παραγωγίσιμη στό σημεῖο y καί, ἄν θέσουμε $x=\varphi(y)$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ (Ἡ παράγωγος τῆς φ εἶναι ὡς πρός y).

Βάσει τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καί τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου θά ὑπολογίσουμε τίς παραγώγους μερικῶν περιπτώσεων συναρτήσεων.

1. Παράγωγος της συνάρτησης $y = x^n$.

Ἄν $y = x^n$ τότε $y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Πράγματι·
Γιά $n=1$ εἶναι $y = x^1 = x$ ἄρα $y' = \underset{\Delta x \to 0}{op} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{op} \frac{\Delta x}{\Delta x} =$
$=1 = 1 \cdot x^{1-1}$ δηλ ἰσχύει. Γιά $n = 2$ εἶναι $y = x^2$ ἄρα
$y' = 2x = 2 \cdot x^{2-1}$ δηλ ἰσχύει (ὅπως ὑπολογίσαμε τήν y' στό παράδειγμα α) σελ. 236). Κάνουμε τήν ἀπόδειξη ἐπαγωγικά.
Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $n = k$ δηλ. $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$. Θά δείξουμε ὅτι $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$. Ἔχουμε $x^{k+1} = x \cdot x^k$ ὁπότε (ἰδ.2)
$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot k x^{k-1} =$
$x^k + k \cdot x^k = x^k(k+1)$. δηλ $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$ Ἄρα ἰσχύει γιά κάθε $n \in N$. Ἡ παραπάνω περίπτωση ἰσχύει καί ὅταν ὁ n εἶναι **ἀρνητικός** καθώς καί ὅταν εἶναι **κλασματικός**.

Ἄν τώρα ἔχουμε τήν συνάρτηση $y = u^n$ ὅπου $u = \varphi(x)$ τότε σύμφωνα μέ τήν ἰδ. 3. θά ἔχουμε:
$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$. Εἰδικά ἄν $n = \frac{1}{2}$ τότε:

$$(u^{1/2})' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2} \cdot u^{1/2 - 1} \cdot u' = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ὅταν ἡ συνάρτηση ἔχει τή μορφή πολυωνύμου δηλ εἶναι $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ τότε ἐφαρμόζοντας τήν ἰδιότητα 2. ἔχουμε $y' = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots +$
$+ 2 \cdot a_2 x + a_1$. (Λαμβάνοντας βεβαίως ὑπ' ὄψη ὅτι ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν. Πράγματι· ἄν $f(x) = c \ \forall x \in R$ τότε $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{op} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{op} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$).

2. Παράγωγος τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.

Ἄν $y = \eta\mu x$ τότε $y' = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. Πράγματι· Εἶναι

$$(\eta\mu x)' = \underset{\Delta x \to 0}{op} \frac{\eta\mu(x+\Delta x) - \eta\mu x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{op} \frac{2\eta\mu\frac{\Delta x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{o\rho} \frac{\eta\mu \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{o\rho}\, \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, x.$$ (παράδ. 3 σελ. 115)

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $(\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\eta\mu\, x$.

Ἄν $y = \varepsilon\varphi\, x$ τότε $y' = (\varepsilon\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$. Πράγματι εἶναι $(\varepsilon\varphi\, x)' = \left(\dfrac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}\right)' =$ (ἰδιότητα 2) $\dfrac{(\eta\mu\, x)'\sigma\upsilon\nu\, x - \eta\mu\, x(\sigma\upsilon\nu\, x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$

$$= \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $(\sigma\varphi\, x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} = -(1 + \sigma\varphi^2 x)$

Πάλι ἄν ὁ x δέν εἶναι ἁπλῶς μεταβλητή, ἀλλά συνάρτηση τοῦ x δηλ. $u = u(x)$ τότε θά ἔχουμε $(\eta\mu\, u)' = \sigma\upsilon\nu\, u \cdot u'$, $(\sigma\upsilon\nu\, u)' = -\eta\mu\, u \cdot u'$, $(\varepsilon\varphi\, u)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}\cdot u'$ καί $(\sigma\varphi\, u)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 u}\cdot u'$.

3. Παράγωγος τῶν ἀντίστροφων τριγωνομ. συναρτήσεων.

Ἄν $y = \tau o\xi\,\eta\mu\, x$, τότε $x = \eta\mu\, y$ ὁπότε σύμφωνα μέ τήν ἰδ. 4, $y' = (\tau o\xi\,\eta\mu\, x)' = \dfrac{1}{(\eta\mu\, y)'} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\, y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \eta\mu^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Ὁμοίως $(\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\, x)' = \dfrac{1}{(\varepsilon\varphi\, y)'} =$

$= \sigma\upsilon\nu^2 y = \dfrac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (διότι ἄν $y = \tau o\xi\,\varepsilon\varphi\, x$, τότε $x = \varepsilon\varphi\, y$).

Ἐπίσης $(\tau o\xi\,\sigma\varphi\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$. Γενικώτερα ἄν $u = u(x)$

$$(\tau o\xi\,\eta\mu\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\, u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$(\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\, u)' = \frac{u'}{1 + u^2}, \quad (\tau o\xi\,\sigma\varphi\, u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}.$$

4. Παράγωγος τῆς συνάρτησης $y = \log x$.

Ἄν $y = \log x$ τότε $y' = (\log x)' = \underset{\Delta x \to 0}{o\rho} \dfrac{\log(x + \Delta x) - \log(x)}{\Delta x} =$

$\dfrac{1}{x} \underset{\Delta x \to 0}{o\rho} \dfrac{x}{\Delta x} \log\left(\dfrac{x + \Delta x}{x}\right) = \dfrac{1}{x} \underset{\Delta x \to 0}{o\rho} \log\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$. Ἄν θέσουμε

$\dfrac{x}{\Delta x} = t$ τότε, ὅταν τό $\Delta x \to 0$, τό $t \to \infty$ καί $\underset{t \to \infty}{o\rho}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t = e$.

Ἄρα $\underset{t\to\infty}{\text{όρ}}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log\left[\underset{t\to\infty}{\text{όρ}}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right] = \log e = 1$

Ἄρα $(\log x)' = \frac{1}{x}$ καί γενικώτερα $(\log u)' = \frac{u'}{u}$

5. Παράγωγος ἐκθετικῶν συναρτήσεων.

Ξεχωριστό ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ παράγωγοι τῶν ἐκθετικῶν συναρτήσεων, δηλ συναρτήσεων τῆς μορφῆς $y = u_1^{u_2}$ (ὅπου u_1, u_2 συναρτήσεις τοῦ x). Σέ μιά τέτοια συνάρτηση πρῶτα λογαριθμίζουμε τά δύο μέλη τῆς $y = u_1^{u_2}$ καί μετά παραγωγίζουμε. Λογαριθμίζοντας ἑπομένως τήν $y = u_1^{u_2}$ προκύπτει $\log y = \log(u_1^{u_2})$ ἤ $\log y = u_2 \log u_1$ καί ἄρα $(\log y)' = (u_2 \log u_1)'$. (1). Ἀλλά $(\log y)' = \frac{y'}{y}$ (διότι τό y εἶναι συνάρτηση τοῦ x) καί $(u_2\log u_1)' = (u_2)'\cdot\log u_1 + u_2\cdot(\log u_1)' = (u_2)'\cdot\log u_1 + u_2\cdot\frac{u_1'}{u_1}$ ὁπότε ἡ (1) γίνεται $\frac{y'}{y} = (u_2)'\log u_1 + u_2\cdot\frac{u_1'}{u_1}$ ὁπότε ἐπειδή $y = u_1^{u_2}$ ἔχουμε τελικά $y' = u_1^{u_2}\left[(u_2)'\log u_1 + u_2\cdot\frac{u_1'}{u_1}\right]$

Κάνοντας ἐφαρμογή στίς ἐκθετικές συναρτήσεις $y_1 = e^x$ καί $y_2 = \alpha^x$ θά ἔχουμε: $y_1 = e^x$ ἤ $\log y_1 = \log e^x$ ἤ $\log y_1 = x\cdot\log e = x$ καί $(\log y_1)' = (x)'$. Ἀλλά $(\log y_1)' = \frac{y'}{y}$ καί $(x)' = 1$ ἄρα $\frac{y'}{y} = 1$ ἤ $y' = y = e^x$. Ὁμοίως $y_2 = \alpha^x$ ἤ $\log y_2 = \log\alpha^x$ ἤ $\log y_2 = x\log\alpha$ καί $(\log y_2)' = (x\log\alpha)'$ Ἀλλά $(\log y_2)' = \frac{y_2'}{y_2}$ καί $(x\log\alpha)' = (x)'\cdot\log\alpha + x\cdot(\log\alpha)' = 1\cdot\log\alpha + x\cdot 0 = \log\alpha\cdot$ ἄρα $\frac{y_2'}{y_2} = \log\alpha$ καί $y_2' = y_2\log\alpha$ ἤ $y_2' = \alpha^x\cdot\log\alpha$. Γενικῶς ἄν $y_1 = e^u$, $y_2 = \alpha^u$ τότε $y_1' = e^u\cdot u'$ καί $y_2' = \alpha^u\cdot\log\alpha\cdot u'$

6. Παράγωγος ὑπερβολικῶν συναρτήσεων.

Στίς ὑπερβολικές συναρτήσεις shx, chx, thx, $cothx$, λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ὅτι $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}$ θά ἔχουμε $(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ Ὁμοίως εὑρίσκουμε $(chx)' = shx$, $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$ καί $(cothx)' = -\frac{1}{sh^2x}$. Ἤ γενικώτερα $(shu)' = chu\cdot u'$, $(chu)' = shu\cdot u'$, $(thu)' = \frac{u'}{ch^2u}$, $(cothu)' = -\frac{u'}{sh^2u}$.

7. Παράγωγος ἀντίστροφων ὑπερβολ. συναρτήσεων.

Γιά τίς ἀντίστροφες ὑπερβολικές συναρτήσεις, ἄν ἐργασθοῦμε ὅπως καί μέ τίς ἀντίστροφες τριγωνομετρικές προκύπτει: ἄν $y = τοξ\, shx$ τότε $x = shy$. Ἄρα $y' = (τοξ\, shx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}}$ (ἐπειδή $ch^2y - sh^2y = 1$) $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ἄρα $(τοξ\, shx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ Ὁμοίως $(τοξ\, chx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Ἐπίσης $(τοξ\, thx)' = \frac{1}{(thy)'} = ch^2y = \frac{1}{1-th^2y} = \frac{1}{1-x^2}$ (διότι ἄν στή σχέση $ch^2y - sh^2y = 1$ ἀντικαταστήσουμε τό sh^2y ἀπ' τή σχέση $th^2y = \frac{sh^2y}{ch^2y}$ προκύπτει:
$ch^2y - ch^2y\cdot th^2y = 1$ ἤ $ch^2y(1-th^2y) = 1$ καί $ch^2y = \frac{1}{1-th^2y}$. καθώς καί, ἄν $y = τοξ\, thx$ τότε $x = thy$).

Ἀνάλογα προκύπτει $(τοξ\, cothx)' = \frac{1}{(cothy)'} = -sh^2y = -\frac{1}{coth^2y - 1} = -\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$ (διότι ἄν στή σχέση $ch^2y - sh^2y = 1$ ἀντικαταστήσουμε τό ch^2y ἀπ' τή σχέση $coth^2y = \frac{ch^2y}{sh^2y}$ προκύπτει $coth^2y\cdot sh^2y - sh^2y = 1$ ἤ $sh^2y(coth^2y-1) = 1$ καί $sh^2y = \frac{1}{coth^2y-1}$. καθώς καί, ἄν $y = τοξ\, cothx$ τότε $x = cothy$).

Ἄρα $(τοξ\, thx)' = (τοξ\, cothx)' = \frac{1}{1-x^2}$. Γενικά $(τοξ\, shu)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$, $(τοξ\, chu)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$, $(τοξ\, thu)' = (τοξ\, cothu)' = \frac{u'}{1-u^2}$.

Διαφορικό μιᾶς συναρτήσεως.

Καλοῦμε **διαφορικό** τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ καί τό σημειώνουμε μέ τό σύμβολο dy ἤ $df(x)$, τό γινόμενο τῆς παραγώγου $f'(x)$ τῆς συναρτήσεως ἐπί τήν αὔξηση Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Δηλ. $dy = y'\Delta x$.

Ἄν θελήσουμε τώρα νά βροῦμε τό διαφορικό τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς, δηλ τό dx, θεωροῦμε τή συνάρτηση $y = x$, ὁπότε, ἐπειδή $y' = 1$ θά ἔχουμε $dy = 1 \cdot \Delta x$ ἤ ἐπειδή ἡ συνάρτηση εἶναι $y = f(x) = x$, εἶναι $df(x) = 1 \cdot \Delta x$ ἤ $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Ἑπομένως τό διαφορικό dy μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς παραγώγου αὐτῆς $f'(x)$ ἐπί τό διαφορικό dx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς · δηλ $dy = y' dx$

Ἄρα $y' = \dfrac{dy}{dx}$ · ἔτσι δικαιολογεῖται καί ὁ συμβολισμός πού θέσαμε γιά τήν παράγωγο σάν λόγος τοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως πρός τό διαφορικό τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς.

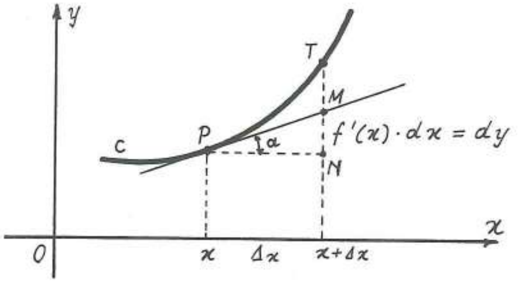
Ὁμοίως ὀνομάζουμε **δεύτερο** διαφορικό τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ καί τό συμβολίζουμε μέ d^2y ἤ $d^2f(x)$ τό διαφορικό τοῦ πρώτου διαφορικοῦ αὐτῆς, δηλ $d^2y = d(dy)$.

Προφανῶς εἶναι $d^2f(x) = d\left[df(x)\right] = d\left[f'(x)dx\right] =$
$= f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2$. Ἀντί $(dx)^2$ γράφουμε dx^2 (ὁ συμβολισμός ὅμως dx^2 δέν σημαίνει "διαφορικό τῆς συναρτήσεως $y = x^2$"). Δηλ εἶναι $d^2f(x) = f''(x)dx^2$.

Ἐπαγωγικά ὁρίζεται τό διαφορικό **νιοστῆς** τάξεως καί συμβολίζεται μέ $d^\nu f(x)$ εἶναι δέ $d^\nu f(x) = d\left[d^{\nu-1}f(x)\right]$ δηλ $d^\nu f(x) = f^{(\nu)}(x) \cdot dx^\nu$.

Μία συνάρτηση $f(x)$ πού ἔχει διαφορικό (δηλ. πεπερασμένη παράγωγο στό διάστημα I) λέγεται **διαφορίσιμη** στό I. Ἑπομένως ἄν ἡ $f(x)$ εἶναι διαφορίσιμη στό διάστημα I, τότε ἔχει πεπερασμένη παράγωγο σ' αὐτό καί εἶναι συνεχής στό I.

Γεωμετρικά τό διαφορικό μιᾶς συνάρτησης y ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:



Σχ. 74

Ἀπ' τόν ὁρισμό εἶναι $dy = y'\Delta x = \varepsilon\varphi\alpha \cdot PN = MN$ ὅπου PM εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης c στό σημεῖο P αὐτῆς. Ὅταν τό σημεῖο T κινεῖται πάνω στήν καμπύλη, τό σημεῖο M κινεῖται πάνω στήν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης στό P. Ἑπομένως τό νά ἐργαζόμαστε μέ τά διαφορικά dx, dy ἀντί μέ τίς διαφορές Δx, Δy σημαίνει ὅτι ἀντικαθιστοῦμε μία καμπύλη σέ μία περιοχή ἑνός σημείου αὐτῆς μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης στό σημεῖο αὐτό (σχ. 74).

Αὐτό ἐπιτρέπει τόν εὔκολο ὑπολογισμό, κατά προσέγγιση τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς μιᾶς συνάρτησης γιά μιά μικρή μεταβολή Δx τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x.

Π.χ. ἔστω ἡ συνάρτηση $y = x^3$. Ζητοῦμε νά ὑπολογίσουμε τή μεταβολή Δy ὅταν τό x μεταβάλλεται ἀπό τό 3 στό 2,98. Θέτουμε $x = 3$, $x+\Delta x = 2{,}98$ ὁπότε $\Delta x = -0{,}02$. Ἐπειδή $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ ἔχουμε $dy = 3x^2\cdot \Delta x = 3\cdot 3^2\cdot(-0{,}02) = 27\cdot(-0{,}02) = -0{,}54$. Ἑπομένως $\Delta y \simeq dy = -0{,}54$.

Ὁ ἀκριβής ὑπολογισμός τῆς διαφορᾶς Δy ἀπαιτεῖ δυσκολότερους ὑπολογισμούς διότι $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (2{,}98)^3 - 3^3 = 26{,}463592 - 27 = -0{,}536408$.

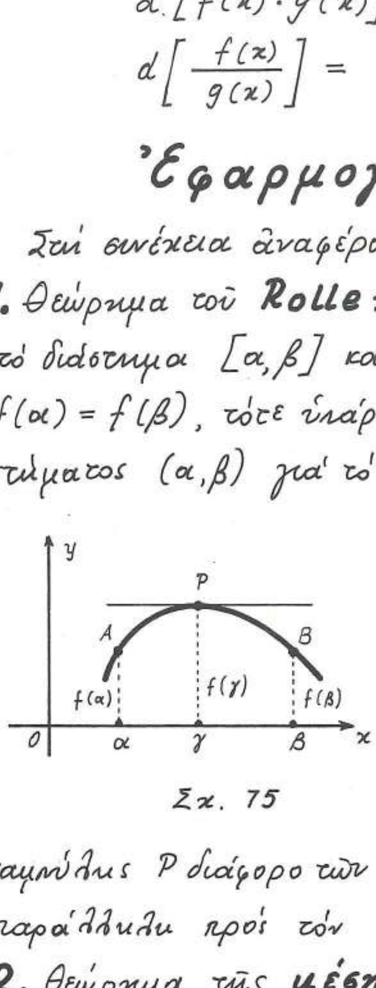
Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι διαφορίσιμες στό διάστημα I τότε ἰσχύουν οἱ παρακάτω τύποι ὅπως καί στίς παραγώγους:

$$d[f(x) \pm c] = df(x) \quad \text{ὅπου } c \in R$$
$$d[cf(x)] = c\,df(x)$$
$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$$
$$d.[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot dg(x) + g(x)\cdot df(x)$$
$$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot df(x) - f(x)\cdot dg(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Ἐφαρμογές τῶν παραγώγων.

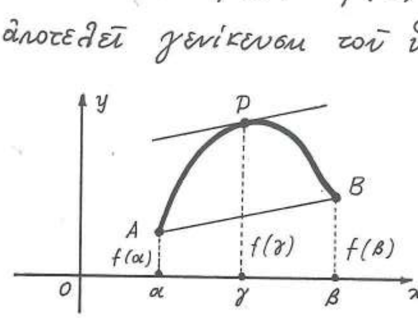
Στή συνέχεια ἀναφέρουμε προτάσεις μέ ἐνδιαφέρουσες ἐφαρμογές.

1. Θεώρημα τοῦ **Rolle**: Ἄν ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί παραγωγίσιμη στό (α,β), εἶναι δέ $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖο γ τοῦ διαστήματος (α,β) γιά τό ὁποῖο εἶναι $f'(\gamma)=0$. Γεωμετρικά αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν τά ἄκρα A, B μιᾶς συνεχοῦς καμπύλης στό διάστημα $[\alpha,\beta]$, πού ἔχει ἐφαπτομένη σ' ὅλα της τά σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν στό (α,β), ἔχουν ἴσες τεταγμένες, τότε ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο τῆς καμπύλης P διάφορο τῶν A, B πού ἡ ἐφαπτομένη σ' αὐτό εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα ox (σχ. 75).



Σχ. 75

2. Θεώρημα τῆς **μέσης τιμῆς** τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, ἤ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων: Ἄν ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί παραγωγίσιμη στό (α,β), τότε ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖο γ τοῦ διαστήματος (α,β) γιά τό όποιο εἶναι $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)\cdot f'(\gamma)$. (Τό θεώρημα αὐτό ἀποτελεῖ γενίκευση τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle). Γεωμετρικά αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν ἡ συνεχής καμπύλη ΑΡΒ στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ ἔχει ἐφαπτομένη σ' ὅλα της τά σημεῖα μεταξύ τῶν Α, Β, τότε ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖο Ρ τῆς καμπύλης διάφορο τῶν Α,Β στό ὁποῖο ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλη πρός τήν ΑΒ (σχ 76).



Σχ. 76

Συνέπειες τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς εἶναι οἱ προτάσεις:

3. Ἄν ὑπάρχει ἡ παράγωγος $f'(x)$ τῆς συνάρτησης $f(x)$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ καί εἶναι $f'(x)>0$ τότε ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα στό (α,β)· ἄν δέ $f'(x)<0$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

4. Ἄν ὑπάρχει ἡ παράγωγος $f'(x)$ τῆς συνάρτησης $f(x)$ στό διάστημα (α,β) καί εἶναι $f'(x)=0$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε ἡ συνάρτηση στό (α,β) εἶναι σταθερή.

5. Ἄν ὑπάρχει ἡ παράγωγος $f'(x)$ τῆς συνάρτησης $f(x)$ στό (α,β) καί ἡ $f'(x)$ εἶναι περατωμένη γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, δηλ $|f'(x)|\leq M$, τότε καί ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι περατωμένη στό (α,β).

6. Ἐπέκταση τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς ἢ τύπος τοῦ **Taylor**: Ἄν ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής στό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ἔχει στό $[\alpha,\beta]$ παραγώγους μέχρι n τάξεως, πού εἶναι συνεχεῖς στό $[\alpha,\beta]$ καί ὑπάρχει ἡ $n+1$ τάξεως παράγωγος αὐτῆς στό διάστημα (α,β), τότε ὑπάρχει σημεῖο $\xi\in(\alpha,\beta)$ ἔτσι ὥστε:

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)+R_n$$

ὅπου $R_n = \dfrac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ καί λέγεται ὑπόλοιπο κατά Lagrange. Ὁ τύπος τοῦ Taylor ἔχει πολλές ἐφαρμογές.

Ἄν θέσουμε $\alpha = 0$ καί $\beta = x$ προκύπτει:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n$$

ὅπου $R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x)$ μέ $0<\vartheta<1$ καί λέγεται τύπος τοῦ **Mac-Laurin.**

Μέ τόν τύπο τοῦ Mac-Laurin μποροῦμε νά προσεγγίσουμε τήν τιμή μιᾶς συναρτήσεως σέ ἕνα σημεῖο μέ ἕνα πολυώνυμο.

Π.χ γιά τή συνάρτηση $f(x) = ημx$ ἡ ὁποία ἔχει παραγώγους ὁποιασδήποτε τάξεως μποροῦμε νά προσεγγίσουμε τήν τιμή αὐτῆς μέ ἕνα πολυώνυμο π.χ. $7^{ου}$ βαθμοῦ. Ἔχουμε:

$f(x) = ημx$ καί $f(0) = 0$

$f'(x) = συνx$ " $f'(0) = 1$

$f''(x) = -ημx$ " $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -συνx$ " $f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = ημx$ " $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = συνx$ " $f^{(5)}(0) = 1$

$f^{(6)}(x) = -ημx$ " $f^{(6)}(0) = 0$

$f^{(7)}(x) = -συνx$ " $f^{(7)}(0) = -1$

$f^{(8)}(x) = ημx$ " $f^{(8)}(\xi) = ημ\xi$. Ἄρα (τύπος Mac-Laurin)

$ημx = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^8}{8!}ημ\xi$. Ὁ ὅρος $\dfrac{x^8}{8!}ημ\xi$ εἶναι ἡ προσέγγιση πού θά ἔχουμε.

Ἐπίσης ἄν $f(x) = e^x$ θά ἔχουμε $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$ καί ἑπομένως $f^{(n)}(0) = 1$ γιά κάθε $n \in N$. Ἐξ ἄλλου θά εἶναι $R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}$, $0<\vartheta<1$ καί ἐπειδή ὁ παράγοντας $e^{\vartheta x}$ εἶναι πεπερασμένος ἕπεται ὅτι $\underset{n\to\infty}{\text{ορ}} R_n = 0$. Ἄρα $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ Γιά $x=1$ ἔχουμε $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \cdots$ (σελ. 112).

7. Γενίκευση τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς: Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(x)$ εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στό (α,β) ἡ δέ $\varphi'(x)$ εἶναι πεπερασμένη καί διάφορη τοῦ μηδενός γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε ὑπάρχει σημεῖο $\xi\in(\alpha,\beta)$ ἔτσι ὥστε:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Ἀποτέλεσμα τῆς γενίκευσης τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς εἶναι ὁ κανόνας τοῦ **L' Hospital** πού ἰσχύει γιά ἀπροσδιόριστες μορφές συναρτήσεων:

8. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι ὡρισμένες καί παραγωγίσιμες στό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί $f(\alpha)=0$, $\varphi(\alpha)=0$ ἐνῶ $\varphi'(\alpha)\neq 0$ τότε, ἄν ὑπάρχει τό $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, θά ὑπάρχει καί τό $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ καί μάλιστα θά εἶναι $\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Γενικώτερα: Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(x)$ καθώς καί οἱ παράγωγοι αὐτῶν μέχρι τάξεως n μηδενίζονται γιά $x=\alpha$, δηλ ἄν $f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(n)}(\alpha)=0$, $\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\dots=\varphi^{(n)}(\alpha)=0$ καί ὑπάρχουν οἱ παράγωγοι $f^{(n+1)}(x)$, $\varphi^{(n+1)}(x)$ καί εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις μέ $\varphi^{(n+1)}(\alpha)\neq 0$ τότε θά ἰσχύει:

$$\underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \underset{x\to\alpha}{\text{ορ}}\frac{f^{(n+1)}(x)}{\varphi^{(n+1)}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{\varphi^{(n+1)}(\alpha)}.$$

Μιά ἄλλη μορφή ἀπροσδιοριστίας ἐκτός ἀπό τή μορφή $\frac{0}{0}$ εἶναι καί ἡ μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἐπίσης ὁ κανόνας L' Hospital.

Τέλος ὑπάρχουν ἀκόμη οἱ ἀπροσδιόριστες μορφές συναρτήσεων:

i. $\infty\cdot 0$, **ii.** $\infty-\infty$, **iii.** 0^0, 1^∞, ∞^0. Οἱ μορφές αὐτές μέ κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταφέρονται στή μορφή $\frac{0}{0}$ ἤ $\frac{\infty}{\infty}$ ὁπότε στή συνέχεια μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ ὁ κανόνας τοῦ L' Hospital. Εἰδικώτερα ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

i. Ἔστω $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ καί $\underset{x\to a}{\text{ορ}} f(x)=\infty$, $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\varphi(x)=0$. Γράφουμε τότε τήν $y=\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ ὁπότε $\underset{x\to a}{\text{ορ}} y=\frac{0}{0}$ δηλ. μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τόν κανόνα τοῦ L' Hospital. δηλ. $\underset{x\to a}{\text{ορ}} y=\dfrac{\varphi'(x)}{(1/f(x))'}$.

ii. Ἔστω $y=f(x)-\varphi(x)$ καί $\underset{x\to a}{\text{ορ}} f(x)=\infty$, $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\varphi(x)=\infty$ ὁπότε $\underset{x\to a}{\text{ορ}} y=\infty-\infty$ Γράφουμε τότε $y=\varphi(x)\left[\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}-1\right]$. Ἄν τό $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἶναι πεπερασμένο $\neq 1$ τότε $\underset{x\to a}{\text{ορ}} y=\infty$. Ἄν εἶναι $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$ τότε ἔχουμε $\underset{x\to a}{\text{ορ}} y=\infty\cdot 0$ δηλ. τήν προηγούμενη μορφή.

iii. Ἔστω $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$. Τότε πρῶτα λογαριθμίζουμε καί μετά παίρνουμε τά ὅρια τῶν συναρτήσεων. Ἄν π.χ. $\underset{x\to a}{\text{ορ}} f(x)=0$, $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\varphi(x)=0$ ὁπότε $\underset{x\to a}{\text{ορ}} y=0^0$, ἄν εἶναι $f(x)>0$ θά ἔχουμε: $\log y=\varphi(x)\cdot\log f(x)$. Καί ἐπειδή $\underset{x\to a}{\text{ορ}} f(x)=0^+$, $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\log f(x)=-\infty$ ὁπότε $\underset{x\to a}{\text{ορ}}\log y=0\cdot(-\infty)$ δηλ. ὁδηγούμαστε στή μορφή i.

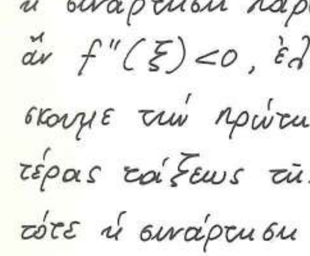
Μια ἀκόμα σπουδαία ἐφαρμογή τῶν παραγώγων εἶναι στόν ὑπολογισμό τῶν ἄκρων τιμῶν μιᾶς συνάρτησης $f(x)$. Ἡ παρακάτω πρόταση μᾶς βοηθάει στή διαπίστωση ὕπαρξης **ἄκρων τιμῶν** καί τή μέθοδο τοῦ ὑπολογισμοῦ των.

9. Ἄν ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής στό σημεῖο ξ τοῦ διαστήματος $[a,\beta]$, ὑπάρχουν οἱ $f'(x)$, $f''(x)$ οἱ ὁποῖες εἶναι συνεχεῖς στό σημεῖο ξ καί γιά $x=\xi$ ἔχουμε $f'(\xi)=0$ ἐνῶ $f''(\xi)\neq 0$ τότε ἄν $f''(\xi)>0$ ἡ συνάρτηση γιά $x=\xi$ παρουσιάζει ἐλάχιστο, ἐνῶ ἄν $f''(\xi)<0$ ἡ συνάρτηση γιά $x=\xi$ παρουσιάζει μέγιστο.

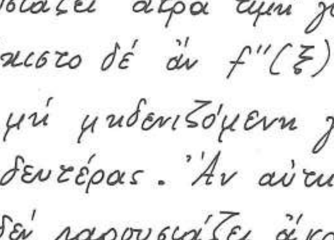
Γενικευμένη περίπτωσι: Ἄν ἡ συνάρτησι $f(x)$ εἶναι συνεχής στό σημεῖο ξ τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$, ὑπάρχει ἡ παράγωγος n τάξεως $f^{(n)}(x)$, εἶναι δέ $f'(\xi)=f''(\xi)=\dots=f^{(n-1)}(\xi)=0$ καί $f^{(n)}(\xi)\neq 0$, ἄν **n = ἄρτιος**, τότε γιά $x=\xi$ ἡ συνάρτησι $f(x)$ λαμβάνει ἄκρα τιμή καί μάλιστα σχετικό μέγιστο ἄν $f^{(n)}(\xi)<0$, σχετικό ἐλάχιστο ἄν $f^{(n)}(\xi)>0$.

Ὥστε προκειμένου νά βροῦμε τίς <u>ἄκρες τιμές</u> μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: **1ον.** Βρίσκουμε τήν $f'(x)$ καί τίς πραγματικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης $f'(x)=0$. Ἔστω δέ ξ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς. **2ον.** Βρίσκουμε τήν $f''(x)$. Ἄν $f''(\xi)\neq 0$, ἡ συνάρτησι παρουσιάζει ἄκρα τιμή γιά $x=\xi$ καί μέγιστο μέν ἄν $f''(\xi)<0$, ἐλάχιστο δέ ἄν $f''(\xi)>0$. Ἄν $f''(\xi)=0$, βρίσκουμε τήν πρώτη μή μηδενιζόμενη γιά $x=\xi$ παράγωγο ἀνωτέρας τάξεως τῆς δευτέρας. Ἄν αὐτή εἶναι περιττῆς τάξεως, τότε ἡ συνάρτησι δέν παρουσιάζει ἄκρες τιμές γιά $x=\xi$. Ἄν εἶναι ἀρτίας τάξεως, τότε ἡ $f(x)$ ἔχει ἄκρες τιμές καί μάλιστα μέγιστο ὅταν $f^{(n)}(\xi)<0$, ἐλάχιστο ὅταν $f^{(n)}(\xi)>0$.

Γιά τή μελέτη τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως, οἱ παράγωγοι βοηθοῦν τά μέγιστα. Δίνουμε παρακάτω τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:



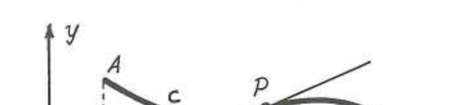
Κοῖλα πρός τά ἄνω



Κοῖλα πρός τά κάτω

σχ. 77

Λέμε ὅτι στή θέση $x=\xi$ ἡ καμπύλη c στρέφει τά **κοῖλα** πρός τά **ἄνω (κάτω)** ὅταν γιά κάποια περιοχή $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ τοῦ ξ ἡ γραμμή c κεῖται ἀπό πάνω (ἀπό κάτω) ἀπ' τήν ἐφαπτομένη της στό σημεῖο αὐτῆς $P(\xi, f(\xi))$. Ἄν γιά κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ἡ γραμμή c κεῖται πάνω (κάτω) ἀπ' τήν ἐφαπτομένη της γιά τό σημεῖο αὐτό x, τότε ἡ c εἶναι κοίλη πρός τά ἄνω (κάτω) σ' ὁλόκληρο τό διάστημα $[\alpha,\beta]$ (σχ. 77). Ἀντί τοῦ ὁρισμοῦ "κοῖλα πρός τά ἄνω (κάτω)" χρησιμοποιεῖται μερικές φορές καί ὁ ἀντίστοιχος ὁρισμός "κυρτά πρός τά κάτω (ἄνω)".



Σχ. 78

Λέμε ὅτι τό σημεῖο $P(\xi, f(\xi))$ τῆς γραμμῆς c εἶναι **σημεῖο καμπῆς**, ὅταν ὑπάρχει περιοχή τοῦ ξ, ἡ $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ τέτοια ὥστε στό διάστημα $(\xi-\varepsilon, \xi)$ ἡ γραμμή c νά εἶναι κοίλη πρός τά ἄνω (κάτω) καί στό διάστημα $(\xi, \xi+\varepsilon)$ νά εἶναι κοίλη πρός τά κάτω (ἄνω). Γεωμετρικά αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς c στό σημεῖο $P(\xi, f(\xi))$ διαπερᾶ αὐτή (σχ. 78).

Οἱ παρακάτω προτάσεις μᾶς βοηθοῦν νά διαπιστώνουμε, ἄν ἡ $f(x)$ στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω (κάτω), καί νά βρίσκουμε τά σημεῖα καμπῆς (ἄν ὑπάρχουν).

10. Ἄν ὑπάρχει ἡ δεύτερη παράγωγος τῆς $f(x)$ στό σημεῖο $x=\xi$ καί εἶναι $f''(\xi)>0$, τότε ἡ γραμμή c στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω· ἄν δέ $f''(\xi)<0$ ἡ c στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω.

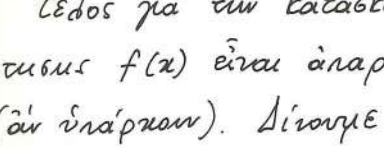
Γενικευμένη περίπτωση: Ἄν ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι συνεχής καί παραγωγίσιμη στό διάστημα (α,β), καί ἡ παράγωγος $f'(x)$ εἶναι αὔξουσα (φθίνουσα) στό σημεῖο $\xi\in[\alpha,\beta]$, ὑπάρχει δέ ἡ παράγωγος n τάξεως $f^{(n)}(x)$, εἶναι δέ $f''(\xi)=f'''(\xi)=\cdots=$ $=f^{(n-1)}(\xi)=0$ καί $f^{(n)}(\xi)\neq 0$, ἄν **n = ἄρτιος**, τότε ἡ συνάρτηση $f(x)$ στρέφει στή θέση ξ τά κοῖλα πρός τά ἄνω (κάτω) ἄν $f^{(n)}(\xi)>0$ $\left(f^{(n)}(\xi)<0\right)$.

11. Ἄν ὑπάρχει ἡ $f'''(\xi)$ καί εἶναι $f''(\xi)=0$ ἐνῶ $f'''(\xi)\neq 0$, τότε τό σημεῖο $P(\xi, f(\xi))$ τῆς c εἶναι σημεῖο καμπῆς αὐτῆς.

Γενικευμένη περίπτωση: Ἄν ἡ συνάρτηση $f(x)$ ἔχει παραγώγους μέχρι n τάξεως, εἶναι δέ $f''(\xi)=f'''(\xi)=\cdots=f^{(n-1)}(\xi)=0$ καί $f^{(n)}(\xi)\neq 0$, ἄν **n = περιττός**, τότε τό σημεῖο $P(\xi, f(\xi))$ εἶναι σημεῖο καμπῆς τῆς γραμμῆς c.

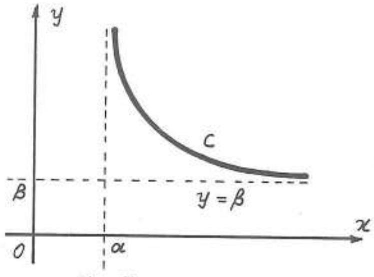
Ὥστε γιά νά βροῦμε τά <u>σημεῖα καμπῆς</u> μιᾶς συνάρτησης $f(x)$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: **1ον.** Βρίσκουμε τήν $f''(x)$ καί τίς πραγματικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης $f''(x)=0$. Ἔστω ξ μία ρίζα τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς. **2ον.** Βρίσκουμε τήν $f'''(x)$. Ἄν $f'''(\xi)\neq 0$, ἡ συνάρτηση ἔχει τό σημεῖο $P(\xi, f(\xi))$ σάν σημεῖο καμπῆς. Ἄν $f'''(\xi)=0$, βρίσκουμε τήν πρώτη μή μηδενιζόμενη γιά $x=\xi$ παράγωγο ἀνωτέρας τάξεως τῆς τρίτης. Ἄν αὐτή εἶναι ἀρτίας τάξεως, ἡ συνάρτηση δέν ἔχει σημεῖο καμπῆς γιά $x=\xi$. Ἄν εἶναι περιττῆς τάξεως, τότε ἡ $f(x)$ ἔχει τό σημεῖο $P(\xi, f(\xi))$ σάν σημεῖο καμπῆς.

Τέλος γιά τήν κατασκευή τῆς γραφικῆς παράστασης τῆς συνάρτησης $f(x)$ εἶναι ἀπαραίτητος ὁ προσδιορισμός τῶν ἀσυμπτώτων (ἄν ὑπάρχουν). Δίνουμε παρακάτω τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:



Σχ. 79

Ἡ εὐθεῖα $y=\alpha x+\beta$ λέγεται **ἀσύμπτωτος** τῆς γραμμῆς c, ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου $P(x,y)$ τῆς c ἀπό τήν εὐθεία ε τείνει στό μηδέν, ὅταν τό σημεῖο P ἀπομακρύνεται πάνω στή C στό ἄπειρο (σχ. 79). Εἰδικώτερα ἡ εὐθεῖα $y=\beta$ (σχ.80) λέγεται **ὁριζόντια** ἀσύμπτωτος τῆς γραμμῆς C ὅταν $\underset{x\to\pm\infty}{op} f(x)=k$. Ἐνῶ ἡ εὐθεῖα $x=\alpha$ λέγεται **κατακόρυφη** ἀσύμπτωτος τῆς C ὅταν $\underset{x\to\alpha}{op} f(x)=\pm\infty$. Γενικά γιά τήν εὕρεση τῆς ἀσυμπτώτου μιᾶς καμπύλης ἰσχύει ἡ πρόταση:



Σχ. 80

12. Ἄν $\underset{x\to\infty}{op} f(x)=\infty$ καί $\underset{x\to\infty}{op} f'(x)=\alpha$, τότε ἡ εὐθεῖα $y=\alpha x+\beta$, ὅπου $\beta=\underset{x\to\infty}{op}\left(f(x)-\alpha x\right)$, εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς γραμμῆς C.

Εἰδικά ἄν ἡ συνάρτηση $y=f(x)$ εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{P(x)}{q(x)}$, ὅπου $P(x)$ καί $q(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, τά ὁποῖα δέν ἔχουν κοινή ρίζα, μέ βαθμό τοῦ $P(x)=\nu$, βαθμό τοῦ $q(x)=\mu$, τότε:

α. Ἄν $\nu<\mu$ προκύπτει ὅτι $\underset{x\to\pm\infty}{op} y=0$. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα $y=0$, δηλ ὁ ἄξονας ox εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος.

β. Ἄν $\nu=\mu$ προκύπτει ὅτι $\underset{x\to\infty}{op}\frac{P(x)}{q(x)}=k$ καί ἑπομένως ἡ εὐθεῖα $y=k$ εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος.

γ. Ἄν $\nu=\mu+1$ προκύπτει ὅτι $\frac{P(x)}{q(x)}=kx+\lambda+\frac{P_1(x)}{q(x)}$ καί ἐπειδή εἶναι $\underset{x\to\pm\infty}{op}\frac{P_1(x)}{q(x)}=0$, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα $y=kx+\lambda$ εἶναι πλάγια ἀσύμπτωτος

δ. Ἄν $\nu>\mu$ προκύπτει ὅτι $\underset{x\to\infty}{op} y=\infty$ ἑπομένως δέν ὑπάρχει εὐθεῖα ἀσύμπτωτος. (Γενικά ὑπάρχει καμπύλη ἀσύμπτωτος).

ε. Ἄν ρ εἶναι μία πραγματική ρίζα τῆς ἐξίσωσης $q(x)=0$, προκύπτει ὅτι $\underset{x\to\rho}{op} y=\underset{x\to\rho}{op}\frac{P(x)}{q(x)}=\pm\infty$, δηλ ἡ εὐθεῖα $x=\rho$ εἶναι κατακόρυφη ἀσύμπτωτος.

Γιά νά κατασκευάσουμε τή γραφική παράσταση μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς, στηριζόμενοι στίς προτάσεις πού ἀναφέραμε παραπάνω:

1ον. Καθορίζουμε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $f(x)$

2ον. Βρίσκουμε τά σημεῖα ἀσυνέχειας τῆς $f(x)$ καί χωρίζουμε τό πεδίο ὁρισμοῦ σέ μικρότερα διαστήματα, σέ καθένα τῶν ὁποίων ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής.

3ον. Βρίσκουμε ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν τίς ἀσυμπτώτους τῆς καμπύλης.

4ον. Βρίσκουμε ἄν εἶναι δυνατόν τίς πραγματικές ρίζες τῆς $y=0$ καθώς καί γιά $x=0$ τήν τιμή τῆς y.

5ον. Βρίσκουμε τίς πραγματικές ρίζες τῆς $y'=0$ (σημεῖα ἄκρων τιμῶν).

6ον. Βρίσκουμε τίς πραγματικές ρίζες τῆς $y''=0$ (σημεῖα καμπῆς).

7ον. Βρίσκουμε τά διαστήματα πού εἶναι $y'>0$ (δηλ y αὔξουσα) καί $y'<0$ (δηλ y φθίνουσα) καθώς καί $y''>0$ (δηλ ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω), $y''<0$ (δηλ ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω).

8ον. Κατασκευάζουμε ἕνα πίνακα μέ κατακόρυφη στήλη τούς x, y, y', y'' στόν ὁποῖο καταγράφουμε: γιά τό x ὅλες τίς χαρακτηριστικές τιμές του ἀπ' τό $+\infty$ ὡς τό $-\infty$ (τῶν $\pm\infty$ συμπεριλαμβανομένων), ἤτοι, τήν τιμή $x=0$, τίς ρίζες τῶν $y=0$, $y'=0$ καί $y''=0$ καθώς καί τίς τιμές τοῦ x πού ἔχουμε ἐνδεχόμενες κατακόρυφες ἀσυμπτώτους· γιά τό y τίς τιμές πού ἀντιστοιχοῦν στό x· γιά τό y' τά διαστήματα πού εἶναι $y'>0$ καί $y'<0$· γιά τό y'' τά διαστήματα πού εἶναι $y''>0$ καί $y''<0$.

9ον. Μέ βάση τόν πίνακα πού σχηματίσαμε, σχεδιάζουμε τήν καμπύλη.

Ἄν ἡ συνάρτηση δίδεται σέ πολικές συντεταγμένες, δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς $\rho = \rho(\vartheta)$, τότε γιά τή γραφική της παράσταση ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1ον. Βρίσκουμε γιά ποιές τιμές τῆς γωνίας ϑ ἡ πολική ἀκτίνα γίνεται μεγίστη ἤ ἐλαχίστη.

2ον. Βρίσκουμε τά διαστήματα στά ὁποῖα ἡ $\rho=\rho(\vartheta)$ εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα. Γιά νά τό πετύχουμε, ἐξετάζουμε τό σημεῖο τῆς παραγώγου $\frac{d\rho}{d\vartheta}$. Γιά τιμές τῆς ϑ γιά τίς ὁποῖες $\frac{d\rho}{d\vartheta}>0$, ἡ ρ αὐξάνει, ἐνῶ γιά τιμές τῆς ϑ μέ $\frac{d\rho}{d\vartheta}<0$, ἡ πολική ἀκτίνα ρ ἐλαττοῦται.

3ον. Ἐξετάζουμε μήπως ἡ καμπύλη παρουσιάζει συμμετρία ὡς πρός τούς ἄξονες ἤ ὡς πρός τήν ἀρχή. Ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα ox ἄν $\rho(-\vartheta)=\rho(\vartheta)$· ὡς πρός τόν ἄξονα oy ἄν $\rho(\pi-\vartheta)=\rho(\vartheta)$ καί ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων ἄν $\rho(\pi+\vartheta)=\rho(\vartheta)$.

4ον. Κατόπιν αὐτῶν καταρτίζουμε πίνακα τιμῶν τῶν $\vartheta, \rho, \frac{d\rho}{d\vartheta}=\rho'$.

5ον. Σέ σύστημα πολικῶν συντεταγμένων σχεδιάζουμε τήν καμπύλη.

Ἀσκήσεις.

8.1. Νά εὑρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης καθώς καί τῆς καθέτου τῶν καμπύλων στό δεδομένο σημεῖο τους.

α) τῆς $y=x^2-4x+5$ στό $x=1$, **β)** τῆς $y=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$ στό $x=\frac{\pi}{6}$.

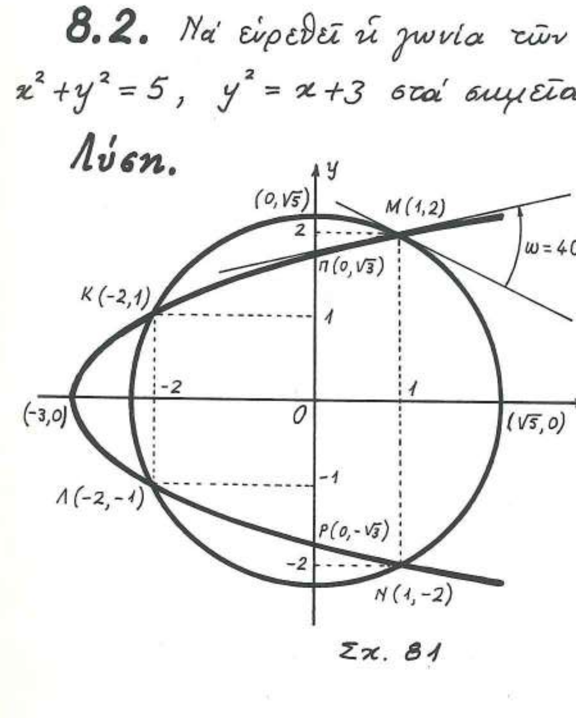
Λύση. α'). Ἡ ἐφαπτομένη τῆς $y=x^2-4x+5$ στό σημεῖο $x_0=1$ θά εἶναι τῆς μορφῆς $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ ὅπου $y_0=x_0^2-4x_0+5=1^2-4\cdot1+5=2$. Εἶναι $y'=2x-4$ καί $y'(x_0)=2\cdot1-4=$

$=-2$ ὁπότε ἡ ἐξίσωση γίνεται $y-2=-2(x-1)$ ἢ $y+2x-4=0$ ἡ δέ ἐξίσωση τῆς καθέτου θά εἶναι ἐπίσης τῆς μορφῆς $y-2=\lambda_{\text{καθ.}}(x-1)$ ὅπου ὅμως $\lambda_{\text{καθ.}}\cdot\lambda_{\text{εφ}}=-1$ $(\lambda_{\text{εφ}}=y'(x_0))$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $\lambda_{\text{καθ}}=\frac{1}{2}$ ὁπότε ἡ ἐξίσωση τῆς καθέτου γίνεται $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$ ἢ $2y-x-3=0$.

β'). Ὁμοίως ἡ ἐφαπτομένη τῆς $y=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$ στό σημεῖο $x_0=\frac{\pi}{6}$ εἶναι τῆς μορφῆς $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ ὅπου $y_0=\varepsilon\varphi x_0+\sigma\varphi x_0=$ $=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}+\sigma\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ καί $y'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ μέ $y'(x_0)=y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}-4=-\frac{8}{3}$ ὁπότε ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης γίνεται: $y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=-\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ἡ δέ ἐξίσωση τῆς καθέτου τῆς μορφῆς $y-y_0=\lambda_{\text{καθ.}}(x-x_0)$ ὅπου $\lambda_{\text{καθ.}}\cdot\lambda_{\text{εφ}}=-1$ $\left(\lambda_{\text{εφ}}=y'(x_0)=-\frac{8}{3}\right)$ ἄρα $\lambda_{\text{καθ}}=\frac{3}{8}$ καί ἡ ἐξίσωση τῆς καθέτου γίνεται $y-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{8}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

8.2. Νά εὑρεθεῖ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων τῶν καμπύλων $x^2+y^2=5$, $y^2=x+3$ στά σημεῖα τομῆς τους.

Λύση.

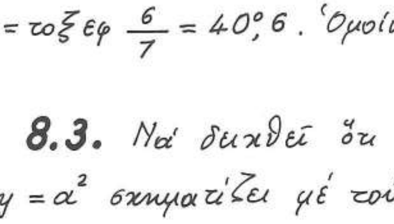


Σχ. 81

Ὡς γνωστόν ἡ καμπύλη $x^2+y^2=5$ παριστάνει κύκλο ἐνῶ ἡ $y^2=x+3$ παραβολή. Ἡ γωνία ω δύο τεμνόμενων εὐθειῶν εἶναι ὡς γνωστόν $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$ (1) ὅπου λ_1, λ_2 οἱ συντελεστές κατευθύνσεως τῶν δύο εὐθειῶν. Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τῶν καμπύλων προσδιορίζουμε τά πραγματικά σημεῖα τομῆς των. Ἔχουμε 4 ζεύγη τιμῶν τά $(x_1=1, y_1=2)$, $(x_2=1, y_2=-2)$, $(x_3=-2, y_3=1)$ καί $(x_4=-2, y_4=-1)$ πού ἀντιστοιχοῦν στά σημεῖα Μ, Ν, Κ καί Λ ἀντίστοιχα. Ὑπολογίζουμε κατ' ἀρχάς τή γωνία τῶν ἐφαπτομένων στό σημεῖο $M(1,2)$. Ἡ πρώτη συνάρτηση $x^2+y^2=5$ δίδεται σέ πεπλεγμένη μορφή. Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τήν ἰδ. 3 τῶν παραγώγων (σελ. 237), θεωρώντας δηλ. τό y σάν συνάρτηση τοῦ x, ἄν παραγωγίσουμε καί τά δύο μέλη τῆς $x^2+y^2=5$ θά ἔχουμε: $2x+2y\cdot y'=0$ ἤ $y'=-\dfrac{x}{y}$. Ἐπομένως ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου στό σημεῖο $M(1,2)$ θά εἶναι $\lambda_1=y'(1)=-\dfrac{1}{2}$. Ὁμοίως τῆς παραβολῆς $y^2=x+3$ ἡ παράγωγος εἶναι: $2y\cdot y'=1+0$ ἤ $y'=\dfrac{1}{2y}$. Ἐπομένως ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς στό σημεῖο $M(1,2)$ ἔχει: $\lambda_2=y'(1)=\dfrac{1}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{4}$. Ἄν ἀντικαταστήσουμε τώρα τούς συντελεστές κατευθύνσεως λ_1, λ_2 στήν (1) προκύπτει: $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\dfrac{6}{7}$. Ἄρα $\omega=\text{τοξεφ}\,\dfrac{6}{7}=40{,}6^\circ$. Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καί γιά τά ἄλλα σημεῖα.

8.3. Νά δειχθεῖ ὅτι ὁποιαδήποτε ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης $xy=\alpha^2$ σχηματίζει μέ τούς ἄξονες ox, oy τρίγωνο σταθεροῦ ἐμβαδοῦ.

Λύση. Τό ἐμβαδόν τοῦ τριγ. ΑΟΒ εἶναι $E=\dfrac{1}{2}\,OA\cdot OB$. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδόν ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τίς συντεταγμένες τῶν Α καί Β. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης $xy=a^2$ στό τυχόν σημεῖο της $M(x_0,y_0)$ εἶναι: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ ὅπου $\lambda=y'(x_0)$.



Σχ 82

Ἡ συνάρτηση $xy = \alpha^2$ γράφεται $y = \frac{\alpha^2}{x}$. Ἄρα $y' = \frac{(\alpha^2)'x - \alpha^2\cdot(x)'}{x^2} = -\frac{\alpha^2}{x^2}$ δηλ. $\lambda = y'(x_0) = -\frac{\alpha^2}{x_0^2}$ καί ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης γίνεται: $x_0^2 y - x_0^2 y_0 = -\alpha^2 x + \alpha^2 x_0$. (1). Γιά $y=0$ προκύπτει ἀπ' τήν (1): $x = \frac{x_0^2 y_0 + \alpha^2 x_0}{\alpha^2} = \frac{x_0\cdot(x_0 y_0) + \alpha^2 x_0}{\alpha^2} = \frac{x_0\cdot\alpha^2 + \alpha^2 x_0}{\alpha^2} = 2x_0$ ἐπειδή $x_0 y_0 = \alpha^2$, ἐφ' ὅσον οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου $M(x_0, y_0)$ ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τῆς καμπύλης. Γιά $x=0$ προκύπτει ἀπ' τήν (1): $y = \frac{\alpha^2 x_0 + x_0^2 y_0}{x_0^2} = \frac{\alpha^2 x_0 + x_0\alpha^2}{x_0^2} = \frac{2\alpha^2 x_0}{x_0^2} = \frac{2\alpha^2}{x_0}$ Ἑπομένως $E = \frac{1}{2}\cdot 2x_0\cdot\frac{2\alpha^2}{x_0} = 2\alpha^2 =$ σταθερό. $\left(OA = 2x_0,\ OB = \frac{2\alpha^2}{x_0}\right)$.

8.4. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης $y =$ τοξεφ $\log x$, πού φέρεται ἀπ' τό σημεῖο τομῆς τῆς καμπύλης καί τοῦ ἄξονα ox, μέ τόν ἄξονα ox εἶναι $45°$.

Λύση. Ὡς γνωστό ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς καμπύλης σ' ἕνα σημεῖο της P, ἰσοῦται μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας πού σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης μέ τόν ἄξονα ox καθώς ἐπίσης ἰσοῦται καί μέ τή παράγωγο τῆς καμπύλης στό σημεῖο της P. (σελ. 235). Γιά νά βροῦμε τίς συντεταγμένες τοῦ M σημείου τομῆς τῆς καμπύλης μέ τόν ἄξονα ox, θέτουμε στήν ἐξίσωση $y =$ τοξεφ $\log x$ $y=0$ ὁπότε ἔχουμε: $0 =$ τοξεφ $\log x$ ἤ εφ $\log x = 0$ ἤ $\log x = 0$ ἄρα $x = 1$. Ἡ παράγωγος τῆς y εἶναι $y' = \frac{(\log x)'}{1 + (\log x)^2} = \frac{1/x}{1 + (\log x)^2}$ ὁπότε $\lambda =$ εφ$\alpha = y'(1) = \frac{1/1}{1 + 0^2} = 1$ δηλ. εφ$\alpha = 1$ ἄρα $\alpha = 45°$.

8.5. Κινητό σημεῖο ἔχει ἐξίσωση $x = 2t\cdot e^{t-1}$. Νά εὑρεθεῖ ἡ μέση ταχύτητά του μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν 1 καί 1,2 καθώς καί ἡ ταχύτητα αὐτοῦ κατά τή χρονική στιγμή 1.

Λύση. Ἐδῶ ἡ συνάρτηση εἶναι $x = f(t)$. Ἡ μέση ταχύτητα εἶναι ὡς γνωστό (σελ. 235) τό πηλίκο διαφορῶν $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} =$
$= \frac{2\cdot 1,2\cdot e^{1,2-1} - 2\cdot 1\cdot e^{1-1}}{1,2-1} = \frac{2,4\cdot e^{1/5}-2}{0,2} = 12\sqrt[5]{e}-10$. Ἡ ταχύτητα αὐτοῦ βρίσκεται ἀπ' τόν τύπο $v(t) = f'(t)$. Ἔχουμε $f(t) = 2t\cdot e^{t-1}$ ἄρα $f'(t) = (2t)'\cdot e^{t-1} + 2t\cdot\left(e^{t-1}\right)' = 2\cdot e^{t-1} +$ $+ 2t\cdot e^{t-1}$ ὁπότε ἡ ταχύτητα αὐτοῦ κατά τή χρονική στιγμή $t=1$ θά εἶναι $f'(1) = 2\cdot e^{1-1} + 2\cdot 1\cdot e^{1-1} = 4$.

8.6. Νά εὑρεθεῖ ἡ παράγωγος τῶν ἑπόμενων συναρτήσεων:
α) $y = 2\cdot x^{1/2} + 6\cdot x^{1/3} - 2\cdot x^{3/2}$, **β)** $y = \frac{x^2}{(x+1)^3}$,
γ) $y = (2x-1)\sqrt{3-x^2-x^4}$, **δ)** $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ καί **ε)** $y = \sqrt[3]{x-1}$

Λύση. α'). Ἔχουμε περίπτωση 1. παραγωγίσεως (ὅπου ὁ ἐκθέτης εἶναι κλασματικός): $y' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{1/3-1} - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{3/2-1} =$
$= x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - 3\sqrt{x}$

β'). $y' = \frac{(x^2)'(x+1)^3 - x^2\left((x+1)^3\right)'}{\left[(x+1)^3\right]^2} = \frac{2x(x+1)^3 - x^2\cdot 3(x+1)^2(x+1)'}{(x+1)^6} =$
$= \frac{(x+1)^2\left[2x(x+1)-3x^2\right]}{(x+1)^6} = \frac{2x(x+1)-3x^2}{(x+1)^4} = \frac{2x-x^2}{(x+1)^4}$.

γ'). $y' = (2x-1)'\cdot\sqrt{3-x^2-x^4} + (2x-1)\cdot\left(\sqrt{3-x^2-x^4}\right)' =$
$2\cdot\sqrt{3-x^2-x^4} + (2x-1)\frac{(3-x^2-x^4)'}{2\cdot\sqrt{3-x^2-x^4}} = 2\cdot\sqrt{3-x^2-x^4} +$
$+ \frac{(2x-1)(-2x-4x^3)}{2\sqrt{3-x^2-x^4}} = \frac{2\cdot(3-x^2-x^4) - (2x-1)\cdot x(2x^2+1)}{\sqrt{3-x^2-x^4}}$.

δ'). $y' = \frac{(x^2)'\cdot\sqrt{4-x^2} - x^2\cdot\left(\sqrt{4-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2} = \frac{2x\cdot\sqrt{4-x^2} - x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} =$

$$= \frac{\frac{2x(4-x^2)+x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)\cdot\sqrt{4-x^2}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

ε'). $y' = \left((x-1)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(x-1)^{1/3-1} = \frac{1}{3}\cdot(x-1)^{-2/3} = \frac{1}{3\cdot(x-1)^{2/3}}.$

8.7. Ὁμοίως νά εὑρεθεῖ ἡ παράγωγος τῶν ἑπόμενων συναρτήσεων:

α) $y = \varepsilon\varphi^2 x$, **β)** $y = \varepsilon\varphi\, x^2$ **γ)** $y = \eta\mu\, x \cdot \sigma\upsilon\nu\, 3x$,

δ) $y = \tau o\xi\eta\mu\,(2-x)$, **ε)** $y = \tau o\xi\sigma\varphi\,\frac{1+x}{1-x}$, **ζ)** $y = \eta\mu\,(\sigma\upsilon\nu\, x)$,

η) $y = \eta\mu^\nu(\nu x)$, **ϑ)** $y = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{\alpha^2}{2}\,\tau o\xi\eta\mu\,\frac{x}{\alpha}$.

Λύση. α'). Ἔχουμε παραγώγους συναρτήσεων τῶν περιπτ. 2., 3.

Εἶναι $y' = 2\cdot\varepsilon\varphi\, x\cdot(\varepsilon\varphi\, x)' = 2\,\varepsilon\varphi\, x\,(1+\varepsilon\varphi^2 x)$

β'). $y' = (\varepsilon\varphi\, x^2)' = (1+\varepsilon\varphi^2 x^2)\cdot(x^2)' = 2x\,(1+\varepsilon\varphi^2 x^2)$.

γ'). $y' = (\eta\mu\, x)'\cdot\sigma\upsilon\nu\, 3x + \eta\mu\, x\cdot(\sigma\upsilon\nu\, 3x)' = \sigma\upsilon\nu\, x\cdot\sigma\upsilon\nu\, 3x + \eta\mu\, x\cdot$
$\cdot(-\eta\mu\, 3x)\cdot(3x)' = \sigma\upsilon\nu\, x\cdot\sigma\upsilon\nu\, 3x - 3\,\eta\mu\, x\cdot\eta\mu\, 3x = \sigma\upsilon\nu\, x\cdot\sigma\upsilon\nu\, 3x -$
$- \eta\mu\, x\cdot\eta\mu\, 3x - 2\,\eta\mu\, x\cdot\eta\mu\, 3x = \sigma\upsilon\nu\, 4x - 2\,\eta\mu\, x\cdot\eta\mu\, 3x$.

δ'). $y' = \frac{(2-x)'}{\sqrt{1-(2-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}.$

ε'). $y' = -\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = -\frac{\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}} = -\frac{1}{1+x^2}.$

ζ'). $y' = [\eta\mu\,(\sigma\upsilon\nu\, x)]' = \sigma\upsilon\nu\,(\sigma\upsilon\nu\, x)\cdot(\sigma\upsilon\nu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\,(\sigma\upsilon\nu\, x)\cdot(-\eta\mu\, x) =$
$= -\eta\mu\, x\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\sigma\upsilon\nu\, x)$

η'). $y' = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}(\nu x)\cdot(\eta\mu(\nu x))' = \nu\cdot\eta\mu^{\nu-1}(\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\nu x)\cdot$
$\cdot(\nu x)' = \nu^2\cdot\eta\mu^{\nu-1}(\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu\,(\nu x)$

ϑ'). $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2}} + \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}} + \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{\alpha^2-x^2+\alpha^2-x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \sqrt{\alpha^2-x^2}.$$

8.8. Ὁμοίως νά εὑρεθεῖ ἡ παράγωγος τῶν ἑπόμενων συναρτήσεων:
α) $y = \log(\eta\mu 3x)$, **β)** $y = \eta\mu\left(x^{\log x}\right)$, **γ)** $y = x^x$, **δ)** $y = x^{x^x}$,
ε) $y = (\varepsilon\varphi x)^x$, **ζ)** $y = \varepsilon\varphi x^x$, **η)** $y = (4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$ μέ $|x| \geq 5$,
θ) $y = 5^{e^{\eta\mu x}}$, **ι)** $y = \left(\frac{ve}{x}\right)^x$, **κ)** $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$, **λ)** $y = \frac{e^{x^2}}{x^2}$.

Λύση. α'). Ἐδῶ ἔχουμε παραγώγους τῶν περιπτώσεων 4. καί 5. Εἶναι $y' = \frac{(\eta\mu 3x)'}{\eta\mu 3x} = \frac{\sigma\upsilon\nu 3x \cdot (3x)'}{\eta\mu 3x} = \frac{3\sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu 3x} = 3\sigma\varphi 3x$.

β'). $y' = \sigma\upsilon\nu\left(x^{\log x}\right) \cdot \left(x^{\log x}\right)'$ (1). Ἡ $y_1 = x^{\log x}$ εἶναι ἐκθετική· ἄρα πρῶτα λογαριθμίζουμε καί μετά παραγωγίζουμε. Ἔχουμε $\log y_1 = \log\left(x^{\log x}\right) = \log x \cdot \log x = (\log x)^2$. ὁπότε $(\log y_1)' = \left[(\log x)^2\right]'$ ἤ $\frac{y_1'}{y_1} = 2\log x \cdot (\log x)' = \frac{1}{x} \cdot 2\log x$. Ἄρα $y_1' = y_1 \cdot \frac{2}{x}\log x = x^{\log x} \cdot \frac{2}{x}\log x$ ὁπότε ἡ (1) γίνεται
$y' = \frac{1}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x^{\log x}\right) \cdot 2x^{\log x} \cdot \log x$.

γ'). Ἡ $y = x^x$ εἶναι ἐκθετική ἄρα $\log y = \log(x^x) = x\log x$ καί $(\log y)' = (x\log x)'$ ἤ $\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$ ἄρα $y' = y(\log x + 1) = x^x \cdot (\log x + 1)$.

δ'). Ἡ $y = x^{x^x}$ γράφεται $y = x^{(x^x)}$ ἐκθετική ἄρα $\log y = \log\left(x^{(x^x)}\right) = x^x \cdot \log x$ ὁπότε $(\log y)' = (x^x \cdot \log x)'$ ἤ $\frac{y'}{y} = (x^x)' \cdot \log x + x^x \cdot (\log x)' = x^x \cdot (\log x + 1) \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}$ $= x^x\left[(\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right]$. Ἄρα $y' = y \cdot x^x\left[(\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right] = x^{x^x} \cdot x^x\left[(\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right]$.

ε'). Ὁμοίως ἔχουμε $\log y = \log\left[(\varepsilon\varphi x)^x\right] = x\log\varepsilon\varphi x$ ὁπότε $(\log y)' = (x\log\varepsilon\varphi x)'$ ἤ $\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log\varepsilon\varphi x + x \cdot \frac{(\varepsilon\varphi x)'}{\varepsilon\varphi x} =$

$= \log \varepsilon\varphi x + \dfrac{x(\varepsilon\varphi^2 x+1)}{\varepsilon\varphi x}$ Ἄρα $y' = (\varepsilon\varphi x)^x \left[\log \varepsilon\varphi x + \dfrac{x(\varepsilon\varphi^2 x+1)}{\varepsilon\varphi x}\right]$.

ζ'). $y' = \dfrac{(x^x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x^x} = \dfrac{x^x(\log x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x^x}$.

η'). Ἔχομε $\log y = (2+\sqrt{x^2-5})\cdot \log(4x^2-7)$ ὁπότε

$(\log y)' = (2+\sqrt{x^2-5})' \cdot \log(4x^2-7) + (2+\sqrt{x^2-5})\cdot[\log(4x^2-7)]'$

ἢ $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-5}}\cdot \log(4x^2-7) + (2+\sqrt{x^2-5})\cdot \dfrac{8x}{4x^2-7}$ ὁπότε

$y' = (4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}\left(\dfrac{x\cdot \log(4x^2-7)}{\sqrt{x^2-5}} + \dfrac{8x(2+\sqrt{x^2-5})}{4x^2-7}\right)$

θ'). Εἶναι $\log y = e^{\eta\mu x}\cdot \log 5$ ὁπότε $(\log y)' = (e^{\eta\mu x}\cdot \log 5)'$ ἢ

$\dfrac{y'}{y} = (e^{\eta\mu x})'\cdot \log 5 = e^{\eta\mu x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot \log 5 = \log 5\cdot \sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}$

ἄρα $y' = 5^{e^{\eta\mu x}}\cdot e^{\eta\mu x}\cdot \log 5\cdot \sigma\upsilon\nu x$.

ι'). Εἶναι $\log y = x\cdot \log \dfrac{\nu e}{x}$ καί $(\log y)' = \left(x\cdot \log \dfrac{\nu e}{x}\right)'$ ἢ

$\dfrac{y'}{y} = 1\cdot \log \dfrac{\nu e}{x} + x\cdot \dfrac{\left(\frac{\nu e}{x}\right)'}{\frac{\nu e}{x}}$ (1). Ἀλλά $\log \dfrac{\nu e}{x} = \log(\nu e) - \log x =$

$= \log \nu + \log e - \log x = \log \nu + 1 - \log x$ καί $x\cdot \dfrac{\left(\frac{\nu e}{x}\right)'}{\frac{\nu e}{x}} =$

$= \dfrac{x^2}{\nu e}\cdot\left(-\dfrac{\nu e}{x^2}\right) = -1$ ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$\dfrac{y'}{y} = \log \nu + 1 - \log x - 1 = \log \nu - \log x = \log \dfrac{\nu}{x}$. ἢ $y' = \left(\dfrac{\nu e}{x}\right)^x\cdot \log \dfrac{\nu}{x}$.

κ'). Ἔχομε $\log y = \dfrac{1}{x}\cdot \log \dfrac{1}{x}$ ἢ $(\log y)' = \left(\dfrac{1}{x}\cdot \log \dfrac{1}{x}\right)'$ ἢ

$\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{x^2}\cdot \log \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\cdot \dfrac{(-1/x^2)}{\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2}\left(\log \dfrac{1}{x} + 1\right) =$

$= -\dfrac{1}{x^2}(\log 1 - \log x + 1) = \dfrac{\log x - 1}{x^2}$ καί $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}\cdot \dfrac{\log x - 1}{x^2}$.

(διότι $\log \dfrac{1}{x} = \log 1 - \log x$ καί $\log 1 = 0$).

λ'). Ἐδῶ ἔχομε $y' = \dfrac{(e^{x^2})'\cdot x^2 - e^{x^2}\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} =$

$= \dfrac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x^2 - e^{x^2}\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x\cdot e^{x^2}\cdot(x^2-1)}{x^4} = \dfrac{2e^{x^2}\cdot(x^2-1)}{x^3}$.

8.9. Νά εὑρεθεῖ ἡ παράγωγος τῶν ἑπόμενων ἀκόμη συναρτήσεων:

α) $y = \text{τοξ}\,ch\sqrt{x^2+1}$, **β)** $y = ch\left(x^{\text{τοξ}\,shx}\right)$

γ) $y = (chx)^{\text{τοξ}\,shx}$ καί **δ)** $y = (\text{τοξ}\,shx)^{chx}$

Λύση. α'). Ἐδῶ ἔχουμε συναρτήσεις τῶν περιπτώσεων 6. καί 7.

Εἶναι $y' = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}} = \dfrac{2x/2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

β'). Εἶναι $y' = sh\left(x^{\text{τοξ}\,shx}\right)\cdot\left(x^{\text{τοξ}\,shx}\right)'$ (1). Ἄν θέσουμε $y_1 = x^{\text{τοξ}\,shx}$ τότε $\log y_1 = \text{τοξ}\,shx\cdot\log x$ καί παραγωγίζοντας: $(\log y_1)' = (\text{τοξ}\,shx\cdot\log x)'$ ἤ $\dfrac{y_1'}{y_1} = (\text{τοξ}\,shx)'\log x + \text{τοξ}\,shx\cdot(\log x)' =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\log x + \text{τοξ}\,shx\cdot\dfrac{1}{x}$ καί $y_1' = x^{\text{τοξ}\,shx}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\text{τοξ}\,shx}{x}\right)$
καί ἡ (1) γίνεται $y' = sh\left(x^{\text{τοξ}\,shx}\right)\cdot x^{\text{τοξ}\,shx}\left(\dfrac{\log x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\text{τοξ}\,shx}{x}\right)$.

γ'). Ἡ $y = (chx)^{\text{τοξ}\,shx}$ εἶναι ἐκθετική ἄρα θά ἔχουμε:
$\log y = \text{τοξ}\,shx\cdot\log chx$ ἤ $(\log y)' = (\text{τοξ}\,shx\cdot\log chx)'$ ἤ
$\dfrac{y'}{y} = (\text{τοξ}\,shx)'\cdot\log chx + \text{τοξ}\,shx\cdot(\log chx)' =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\log chx + \text{τοξ}\,shx\cdot\dfrac{shx}{chx}$ ὁπότε θά εἶναι
$y' = (chx)^{\text{τοξ}\,shx}\cdot\left(\dfrac{\log chx}{\sqrt{x^2+1}} + thx\cdot\text{τοξ}\,shx\right)$.

δ'). Ἡ συνάρτηση εἶναι ἐκθετική ἄρα $\log y = chx\cdot\log\text{τοξ}\,shx$ καί $(\log y)' = (chx\cdot\log\text{τοξ}\,shx)' = (chx)'\log\text{τοξ}\,shx + chx\cdot$
$\cdot(\log\text{τοξ}\,shx)' = shx\cdot\log\text{τοξ}\,shx + chx\cdot\dfrac{(\text{τοξ}\,shx)'}{\text{τοξ}\,shx}$ ἄρα
$\dfrac{y'}{y} = shx\cdot\log\text{τοξ}\,shx + chx\cdot\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\text{τοξ}\,shx}$ ὁπότε τελικά προκύπτει
$y' = (\text{τοξ}\,shx)^{chx}\cdot\left(shx\cdot\log\text{τοξ}\,shx + \dfrac{chx}{\sqrt{x^2+1}\;\text{τοξ}\,shx}\right)$.

8.10. Νά εὑρεθεῖ ἡ παράγωγος τῆς συνάρτησης πού ὁρίζεται μέ πεπλεγμένη μορφή ἀπ' τή συνάρτηση $e^x\cdot\text{συν}\,y - e^y\cdot\text{ημ}\,x = 0$.

Λύση. Θεωροῦμε τήν y σάν συνάρτηση τοῦ x καί παραγωγίζουμε ὡς πρός x, ὁπότε προκύπτει:
$(e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu y + e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu y)' - (e^y)' \cdot \eta\mu x - e^y \cdot (\eta\mu x)' = 0$ ἤ
$e^x \cdot \sigma\upsilon\nu y - e^x \cdot \eta\mu y \cdot y' - e^y \cdot y' \cdot \eta\mu x - e^y \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ ἤ βγάζοντας κοινό παράγοντα τό y' ἔχουμε: $-y'(e^x \eta\mu y + e^y \eta\mu x) =$
$= e^y \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot \sigma\upsilon\nu y$ καί $y' = \dfrac{e^x \cdot \sigma\upsilon\nu y - e^y \cdot \sigma\upsilon\nu x}{e^x \cdot \eta\mu y + e^y \eta\mu x}$.

8.11. Νά εὑρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ καί τό διαφορικό τῆς συνάρτησης $y = \tau o\xi\, th\sqrt{2x+1}$ γιά $x = -\frac{3}{8}$ καί $dx = 0{,}003$.

Λύση. Ἀπ' τή γραφική παράσταση τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων (σελ 99) διαπιστώνουμε ὅτι τό πεδίο τιμῶν τῆς thx εἶναι τό διάστημα $(-1, 1)$· ἐπομένως τό διάστημα αὐτό θά εἶναι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ἀντιστρόφου της $\tau o\xi\, thx$. Ἐδῶ ὅμως τό x εἶναι $\sqrt{2x+1}$· κι ἐπειδή τό ριζικό πρέπει νά εἶναι θετική ποσότητα (γιά νά ἔχουμε πραγματικές τιμές τοῦ x), γι' αὐτό πρέπει ἡ ἀνισότητα:
$-1 < \sqrt{2x+1} < 1$ νά γίνει $0 \leq \sqrt{2x+1} < 1$ (1). Ἡ (1) διασπᾶται στίς ἀνισότητες $\sqrt{2x+1} < 1$ καί $\sqrt{2x+1} \geq 0$. Ἡ πρώτη γίνεται $2x+1 < 1$ ἤ $x < 0$ καί ἡ δεύτερη $2x+1 \geq 0$ ἤ $x \geq -\frac{1}{2}$. Καί οἱ δύο συναληθεύουν γιά $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ πού εἶναι καί τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $y = \tau o\xi\, th\sqrt{2x+1}$.
Διαφορίζοντας τήν y ἔχουμε $dy = (\tau o\xi\, th\sqrt{2x+1})' dx$ (2)
Εἶναι $(\tau o\xi\, th\sqrt{2x+1})' = \dfrac{(\sqrt{2x+1})'}{1-(\sqrt{2x+1})^2} = \dfrac{2/2\sqrt{2x+1}}{1-2x-1} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2x+1}}$
ὁπότε ἡ (2) γίνεται $dy = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2x+1}} \cdot dx$. Ἄν θέσουμε $x = -\frac{3}{8}$ καί $dx = 0{,}003$ προκύπτει $dy = -\dfrac{0{,}003}{2 \cdot (-3/8) \cdot \sqrt{2 \cdot (-3/8) + 1}} =$
$= \dfrac{0{,}003 \cdot 8}{3} = 0{,}008$. Τό ἀριθμητικό αὐτό ἐξαγόμενο εἶναι μία

καλή προσέγγιση τῆς αὔξησης $\Delta y = \text{τοξ}th\sqrt{0,264} - \text{τοξ}th 0,5 \simeq$ $\simeq 0,008$. Ὅπως παρατηροῦμε ὁ προηγούμενος ὑπολογισμός τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τῆς συνάρτησης μέ τό διαφορικό εἶναι πολύ πιό εὔκολος ἀπ' τόν τελευταῖο.

8.12. Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε μία τῶν ἑπόμενων συναρτήσεων πληροῖ τήν ἔναντι αὐτῆς σχέση (διαφορική ἐξίσωση).

α) $y = x^2 + x^{-2}$, $x^2 \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

β) $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

γ) $y = e^{x}\,\text{συν}x$, $y^{(4)} + 4y = 0$ καί

δ) $y = (\text{τοξημ}x)^2$, $(1-x^2)\cdot y'' - x\cdot y' = 2$.

Λύση. α'). Διαφορική ἐξίσωση n τάξεως εἶναι μία συνάρτηση τῆς μορφῆς $f(x, y, y', y'', y''', \cdots, y^{(n)}) = 0$. Ἔχουμε: $y' = 2x + (-2x^{-2-1}) = 2x - 2x^{-3}$ καί $y'' = (y')' = 2 + 2\cdot 3\cdot x^{-3-1} =$ $= 2 + 6x^{-4}$. Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές αὐτές τῶν y, y', y'' στήν ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση προκύπτει:

$$x^2\cdot(2+6x^{-4}) + x(2x - 2x^{-3}) - 4(x^2 + x^{-2}) = 2x^2 + 6x^{-2} +$$
$$+ 2x^2 - 2x^{-2} - 4x^2 - 4x^{-2} = 0.$$

β'). Ὁμοίως ἔχουμε $y' = Ae^{-x}\cdot(-x)' + Be^{-2x}\cdot(-2x)' =$ $= -Ae^{-x} - 2Be^{-2x}$, $y'' = -Ae^{-x}\cdot(-x)' - 2Be^{-2x}\cdot(-2x)' =$ $= Ae^{-x} + 4Be^{-2x}$ καί $y''' = Ae^{-x}\cdot(-x)' + 4Be^{-2x}\cdot(-2x)' =$ $= -Ae^{-x} - 8Be^{-2x}$. Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς y', y'', y''' στήν ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση προκύπτει:

$$-Ae^{-x} - 8Be^{-2x} + 3(Ae^{-x} + 4Be^{-2x}) + 2(-Ae^{-x} - 2Be^{-2x}) = 0$$

γ'). Βρίσκουμε τήν τέταρτη παράγωγο τῆς $y = e^{-x}\cdot\text{συν}x$. Εἶναι $y' = (e^{-x})'\text{συν}x + e^{-x}\cdot(\text{συν}x)' = -e^{-x}\cdot\text{συν}x - e^{-x}\,\text{ημ}x$,

$y'' = (-e^{-x})' \cdot συνx - e^{-x} \cdot (συνx)' + (-e^{-x})' ημx - e^{-x} \cdot (ημx)' =$
$= e^{-x} συνx + e^{-x} ημx + e^{-x} ημx - e^{-x} συνx = 2e^{-x} ημx$
$y''' = 2(e^{-x})' ημx + 2e^{-x}(ημx)' = -2e^{-x} ημx + 2e^{-x} συνx$
$y^{(4)} = (-2e^{-x})' ημx - 2e^{-x} \cdot (ημx)' + (2e^{-x})' συνx + 2e^{-x} \cdot (συνx)' =$
$= 2e^{-x} ημx - 2e^{-x} συνx - 2e^{-x} συνx - 2e^{-x} ημx = -4e^{-x} συνx.$
Ὁπότε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση γίνεται: $-4e^{-x} συνx + 4 \cdot e^{-x} συνx = 0.$

δ'). Ὁμοίως ἔχουμε $y' = 2 τοξημx \cdot (τοξημx)' =$
$= 2τοξημx \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $y'' = (2τοξημx)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$
$+ 2τοξημx \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2τοξημx \cdot \left(-\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}\right)$
ἢ $y'' = \frac{2}{1-x^2} + 2τοξημx \cdot \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$
$= \frac{2}{1-x^2}\left(1 + τοξημx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ὁπότε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση εἶναι
$(1-x^2) \cdot \frac{2}{1-x^2} \cdot \left(1 + τοξημx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - x \cdot 2τοξημx \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2.$

8.13. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα στὰ ὁποῖα οἱ συναρτήσεις **α)** $y = x^2 - x + 1$, **β)** $y = x^{\alpha} \cdot e^{-x}$ $(\alpha > 0)$ εἶναι μονότονες.

Λύση. α'). Ἡ παράγωγος τῆς $y = x^2 - x + 1$ εἶναι: $y' = 2x - 1$. Ἑπομένως (πρότ. 3, σελ. 245) ἂν $2x - 1 > 0$ ἡ y εἶναι αὔξουσα καὶ ἂν $2x - 1 < 0$ ἡ y εἶναι φθίνουσα.
Ἡ $2x - 1 > 0$ δίνει $x > \frac{1}{2}$. Ἄρα γιὰ $\frac{1}{2} < x < \infty$ ἡ y αὔξουσα.
Ἡ $2x - 1 < 0$ δίνει $x < \frac{1}{2}$. Ἄρα γιὰ $-\infty < x < \frac{1}{2}$ ἡ y φθίνουσα.

β'). Ὁμοίως εἶναι $y' = \alpha x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} - x^{\alpha} \cdot e^{-x} = x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}(\alpha - x)$. (1). Ἡ (1) εἶναι θετικὴ ὅταν 1) $x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} > 0$ καὶ $\alpha - x > 0$ (i) καὶ 2) $x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} < 0$ καὶ $\alpha - x < 0$ (ii). Οἱ σχέσεις (i) ἀληθεύουν ὅταν $x > 0$ καὶ $\alpha > x$ δηλ ὅταν $0 < x < \alpha$. Οἱ σχέσεις (ii) ἀληθεύουν ὅταν $x<0$ καί $x>\alpha$. Οἱ σχέσεις ὅμως αὐτές δέν ἰσχύουν γιατί ὁ α θεωρεῖται θετικός ἑπομένως οἱ σχέσεις (ii) δέν συναληθεύουν. Ἄρα γιά $0<x<\alpha$ ἡ y εἶναι αὔξουσα. Ἑπομένως ἐκτός τοῦ διαστήματος αὐτοῦ δηλ. γιά $-\infty<x<0$ καί $\alpha<x<\infty$ ἡ y εἶναι φθίνουσα, διότι ἡ y' γίνεται ἀρνητική.

8.14. Νά ἀναπτυχθεῖ τό πολυώνυμο $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+$ $+x+2$ κατά τίς δυνάμεις τοῦ $x-2$.

Λύση. Ἄν στόν τύπο τοῦ Taylor (σελ. 245) θέσουμε $\beta=x$ καί $\alpha=2$ θά ἔχουμε: $f(x)=f(2)+\frac{x-2}{1!}f'(2)+\frac{(x-2)^2}{2!}f''(2)+$ $+\frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2)+\frac{(x-2)^4}{4!}\cdot f^{(4)}(2)+R_4$ (1). Εἶναι ὅμως $f(2)=2^4-5\cdot2^3+5\cdot2^2+2+2=0$, $f'(x)=4x^3-15x^2+10x+1$ καί $f'(2)=4\cdot2^3-15\cdot2^2+10\cdot2+1=-7$, $f''(x)=12x^2-30x+10$ καί $f''(2)=12\cdot2^2-30\cdot2+10=-2$, $f'''(x)=24x-30$ καί $f'''(2)=24\cdot2-30=18$, $f^{(4)}(x)=24$ καί προφανῶς $f^{(4)}(2)=24$. Ἐπίσης τό $R_4=\frac{(x-2)^5}{5!}f^{(5)}(2)=0$ διότι $f^{(5)}(x)=0$. Ἀντικαθιστώντας τά $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$ καί $f^{(4)}(2)$ στήν (1) ἔχουμε $f(x)=(x-2)^4+3(x-2)^3-(x-2)^2-7(x-2)$.

8.15. Νά ἀναπτυχθοῦν κατά τίς δυνάμεις τοῦ x οἱ ἑπόμενες συναρτήσεις: **α)** $y=\text{συν}\,x$, **β)** $y=\frac{1}{1-x}$, **γ)** $y=\alpha^x$.

. **Λύση. α').** Εἶναι $f(x)=\text{συν}\,x$ καί $f(0)=\text{συν}\,0=1$

$f'(x)=-\text{ημ}\,x=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ καί $f'(0)=-\text{ημ}\,0=0$

$f''(x)=-\text{συν}\,x=\text{συν}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$ καί $f''(0)=-\text{συν}\,0=-1$

$f'''(x)=\text{ημ}\,x=\text{συν}\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$ καί $f'''(0)=\text{ημ}\,0=0$

$f^{(4)}(x) = \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$ καί $f^{(4)}(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

- -

$f^{(\nu)}(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{2}+x\right)$ καί $f^{(\nu)}(0) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)$

Θέτοντας τίς τιμές τῶν $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(\nu)}(0)$ στόν τύπο τοῦ Mac-Laurin ἔχουμε τό ἀνάπτυγμα τῆς $y = \sigma\upsilon\nu x$.

Εἶναι $\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$.

β'). Ὁμοίως γιά τήν $y = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ εἶναι $f(0) = 1$

$f'(x) = (-1)\cdot(1-x)^{-1-1}\cdot(-1) = 1!(1-x)^{-2}$ καί $f'(0) = 1!$

$f''(x) = (-2)\cdot(1-x)^{-2-1}(-1) = 2!(1-x)^{-3}$ " $f''(0) = 2!$

$f'''(x) = (-3)\cdot 2!(1-x)^{-3-1}(-1) = 3!(1-x)^{-4}$ " $f'''(0) = 3!$

$f^{(4)}(x) = (-4)\cdot 3!(1-x)^{-4-1}(-1) = 4!(1-x)^{-5}$ " $f^{(4)}(0) = 4!$

- -

$f^{(\nu)}(x) = \nu!(1-x)^{-(\nu+1)}$ " $f^{(\nu)}(0) = \nu!$

καί θέτοντας τίς τιμές τῶν $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(\nu)}(0)$ στόν τύπο τοῦ Mac-Laurin θά ἔχουμε τό ἀνάπτυγμα σέ σειρά τῆς $y = \frac{1}{1-x}$

Εἶναι $\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1!}1! + \frac{x^2}{2!}2! + \cdots + \frac{x^{\nu}}{\nu!}\nu! = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu}$.

γ'). Ἡ $y = \alpha^x$ ἐντελῶς ἀνάλογα εἶναι $f(0) = \alpha^0 = 1$

$f'(x) = \alpha^x\cdot\log\alpha$ (διότι εἶναι ἐκθετική καί ἄρα $\log y = x\cdot\log\alpha$ ἤ $(\log y)' = (x\cdot\log\alpha)'$ ἤ $\frac{y'}{y} = 1\cdot\log\alpha$ ἄρα $y' = y\cdot\log\alpha = \alpha^x\log\alpha$) καί $f'(0) = \alpha^0\cdot\log\alpha = \log\alpha$. Ὁμοίως $f''(x) = \alpha^x\cdot\log\alpha\cdot\log\alpha =$ $= \alpha^x\cdot\log^2\alpha$ καί $f''(0) = \alpha^0\cdot\log^2\alpha = \log^2\alpha$. κ.τ.λ.

$f^{(\nu)}(x) = \alpha^x\cdot\log^{\nu}\alpha$ καί $f^{(\nu)}(0) = \alpha^0\cdot\log^{\nu}\alpha = \log^{\nu}\alpha$.

ὁπότε ὁ τύπος τοῦ Mac-Laurin θά δώσει τελικά γιά τίς τιμές τῶν $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(\nu)}(0)$ τό ἀνάπτυγμα τῆς $y = \alpha^x$ σέ σειρά· ἤτοι $\alpha^x = 1 + \frac{x\cdot\log\alpha}{1!} + \frac{x^2\cdot\log^2\alpha}{2!} + \cdots + \frac{x^{\nu}\cdot\log^{\nu}\alpha}{\nu!}$.

8.16. Ὁμοίως νά ἀναπτυχθοῦν κατά τίς δυνάμεις τοῦ x οἱ ἑπόμενες συναρτήσεις: **α)** $y = \log(1+x)$, **β)** $y = shx$, **γ)** $y = chx$.

Λύση. α'). Ἔχουμε $f(x) = \log(1+x)$ καί $f(0) = \log 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{(1+x)'}{1+x} = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ " $f'(0) = 1$

$f''(x) = (-1)\cdot(1+x)^{-1-1} = -1!(1+x)^{-2}$ " $f''(0) = -1!$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-2-1} = 2!(1+x)^{-3}$ " $f'''(0) = 2!$

$f^{(4)}(x) = (-3)\cdot 2!(1+x)^{-3-1} = -3!(1+x)^{-4}$ " $f^{(4)}(0) = -3!$

- -

$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\cdot(\nu-1)!(1+x)^{-\nu}$ " $f^{(\nu)}(0) = (-1)^{\nu-1}\cdot(\nu-1)!$

ὁπότε ὁ τύπος τοῦ Mac-Laurin παίρνει τή μορφή:

$$\log(1+x) = 0 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}(-1!) + \frac{x^3}{3!}\cdot 2! + \frac{x^4}{4!}(-3!) + \cdots =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \quad \text{γιά } |x|<1$$

β'). Ἔχουμε $f(x) = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ καί $f(0) = 0$

$f'(x) = (shx)' = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ " $f'(0) = 1$

$f''(x) = shx$ " $f''(0) = 0$

$f'''(x) = chx$ " $f'''(0) = 1$

- -

$f^{(\nu)}(x) = shx$ (ν ἄρτιος) ἤ chx (ν περιττός) " $f^{(\nu)}(0) = 0$ ἤ 1

ὁπότε ἀντικαθιστώντας τά $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(\nu)}(0)$ στόν τύπο τοῦ Mac-Laurin προκύπτει τό ἀνάπτυγμα τῆς $y = shx$. Εἶναι:

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{γιά } x \in R$$

γ'). Ὁμοίως ἔχουμε $f(x) = chx$ καί $f(0) = 1$, $f'(x) = shx$ καί $f'(0) = 0$, $f''(x) = chx$ καί $f''(0) = 1$, $f'''(x) = shx$ καί $f'''(0) = 0$, κ.τ.λ. ὁπότε τό ἀνάπτυγμα τοῦ chx εἶναι

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{γιά } x \in R.$$

8.17. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ σχέσεις: **α)** $e^{ix}=$ συν$x+i$ημx, **β)** $e^{-ix}=$ συν$x-i$ημx καί βάσει αὐτῶν νά εὑρεθοῦν οἱ τιμές τῶν δυνάμεων: **γ)** $e^{\pi i}$, **δ)** $e^{-\pi i}$, **ε)** $e^{\frac{\pi}{2}i}$, **ζ)** i^{i}.

Λύση. α'). Ἄν στό ἀνάπτυγμα τοῦ e^x (σελ 247) θέσουμε ἀντί x τό ix θά προκύψει: $e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+$ $+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{i\cdot x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{i\cdot x^5}{5!}-$ $-\frac{x^6}{6!}-\frac{i\cdot x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{i\cdot x^9}{9!}-\cdots=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+$ $+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)=$ συν$x+i$ημx ὅπως προκύπτει (ἄσκ 8.15 α. καί παράδ. ὑπολογισμοῦ ημx σελ. 246).

β'). Ὁμοίως $e^{-ix}=1+\frac{-ix}{1!}+\frac{(-ix)^2}{2!}+\frac{(-ix)^3}{3!}+\frac{(-ix)^4}{4!}+\cdots=$ $=1-\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{i\cdot x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{i\cdot x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=$ $=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)-i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)=$ συν$x-i$ημx.

γ'). Ἄν στή σχέση $e^{ix}=$ συν$x+i$ημx θέσουμε $x=\pi$ προκύπτει $e^{\pi i}=$ συν$\pi+i$ημπ $=-1+i\cdot 0=-1$ ἄρα $e^{\pi i}=-1$.

δ'). Ὁμοίως ἄν στή σχέση $e^{-ix}=$ συν$x-i$ημx θέσουμε $x=\pi$ προκύπτει $e^{-\pi i}=$ συν$\pi-i$ημπ $=-1-i\cdot 0=-1$ δηλ πάλι $e^{-i\pi}=-1$.

ε'). Στή σχέση $e^{ix}=$ συν$x+i$ημx θέτουμε τώρα $x=\frac{\pi}{2}$. Θά ἔχουμε $e^{\frac{\pi}{2}i}=$ συν$\frac{\pi}{2}+i$ημ$\frac{\pi}{2}$ $=0+i\cdot 1=i$ δηλ $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

ζ'). Ἄν τή σχέση πού ὑπολογίσαμε $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ τήν ὑψώσουμε εἰς τήν i δύναμη προκύπτει: $i^i=\left(e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}\right)^i=e^{\frac{\pi}{2}\cdot i^2}=e^{-\frac{\pi}{2}}$. Δηλ. ὁ ἀριθμός i^i εἶναι πραγματικός.

Παρατήρηση: Ἀπ' τίς σχέσεις $e^{\pi i}=-1$ καί $e^{-\pi i}=-1$ προκύπτει $e^{\pi i}=e^{-\pi i}$ ἤ $e^{\pi i}=\frac{1}{e^{\pi i}}$ καί $\left(e^{\pi i}\right)^2=1$ ἤ $e^{2\pi i}=1$.

8.18. Νά ύπολογισθοῦν τά ὅρια τῶν ἑπόμενων συναρτήσεων: **α)** $y = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \text{συν}x}$ ὅταν $x \to 0$, **β)** $y = \dfrac{\text{συν}x}{2x - \pi}$ ὅταν $x \to \dfrac{\pi}{2}$, **γ)** $y = \dfrac{\sqrt{2} - \text{ημ}x - \text{συν}x}{\log \text{ημ}2x}$ ὅταν $x \to \dfrac{\pi}{4}$.

Λύση. α'). Εἶναι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \text{συν}x} = \dfrac{1-1-0}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ ἀπροσδιόριστη μορφή. Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα τοῦ L' Hospital ἔχουμε: $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\text{ημ}x} = \dfrac{1+1-2}{0} = \dfrac{0}{0}$. Κάνουμε πάλι ἐφαρμογή τοῦ κανόνα καί ἔχουμε $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\text{συν}x} = \dfrac{1-1}{1} = 0$.

β'). Ὁμοίως $\underset{x\to \pi/2}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/2}{\text{ορ}} \dfrac{\text{συν}x}{2x-\pi} = \dfrac{0}{\pi - \pi} = \dfrac{0}{0}$. Ἄρα $\underset{x\to \pi/2}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/2}{\text{ορ}} \dfrac{-\text{ημ}x}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Ἄρα $\underset{x\to \pi/2}{\text{ορ}}\, y = -\dfrac{1}{2}$.

γ'). Ἐπίσης $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{\sqrt{2} - \text{ημ}x - \text{συν}x}{\log \text{ημ}2x} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\log 1} = \dfrac{0}{0}$

ἄρα $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{-\text{συν}x + \text{ημ}x}{\dfrac{2\,\text{συν}2x}{\text{ημ}2x}} = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{(-\text{συν}x + \text{ημ}x)\,\text{ημ}2x}{2\,\text{συν}2x} = \dfrac{0}{0}$

ἄρα $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{(\text{ημ}x + \text{συν}x)\,\text{ημ}2x + (-\text{συν}x + \text{ημ}x)\,2\text{συν}2x}{-4\,\text{ημ}2x} =$

$= \dfrac{(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2)\cdot 1 + 0}{-4} = \dfrac{\sqrt{2}}{-4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Ἄρα $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

8.19. Ὁμοίως νά ὑπολογισθοῦν τά ὅρια τῶν ἑπόμενων συναρτήσεων: **α)** $y = \text{ημ}x \cdot \log x$ ὅταν $x \to 0$, **β)** $y = \dfrac{1}{1 - \text{συν}x} - \dfrac{2}{x^2}$ ὅταν $x \to 0$, **γ)** $y = (\text{ημ}x)^{\text{ημ}x}$ ὅταν $x \to 0$, **δ)** $y = (\text{εφ}x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}}$ ὅταν $x \to \dfrac{\pi}{4}$, **ε)** $y = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}$ $x \to 1$.

Λύση. α'). Εἶναι $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} (\text{ημ}x \cdot \log x) = 0 \cdot (-\infty)$ δηλ. ἔχουμε τήν περίπτωση ί. (σελ 248). Γράφουμε τήν συνάρτηση

μέ μορφή κλάσματος δηλ. $y = \dfrac{\log x}{1/\text{ημ}x}$ καί $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{\log x}{1/\text{ημ}x} =$
$= \dfrac{0}{0}$, ἄρα $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \dfrac{1/x}{\dfrac{-\text{συν}x}{\text{ημ}^2x}} = \dfrac{\text{ημ}^2x}{-x\,\text{συν}x} = \dfrac{0}{0}$. Ἄρα

$\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \dfrac{2\text{ημ}x\cdot\text{συν}x}{-\text{συν}x + x\,\text{ημ}x} = \dfrac{0}{1} = 0$ Ἄρα $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = 0$.

β'). Εἶναι $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}}\left(\dfrac{1}{1-\text{συν}x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = \infty - \infty$ περ. ii. Γράφουμε τήν y ὡς $y = \dfrac{2}{x^2}\left(\dfrac{1}{1-\text{συν}x}\cdot\dfrac{x^2}{2} - 1\right)$ Ἄν $y_1 = \dfrac{x^2}{2\cdot(1-\text{συν}x)}$ τότε $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y_1 = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{x^2}{2\cdot(1-\text{συν}x)} = \dfrac{0}{0}$ ἤ $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y_1 = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2x}{2\,\text{ημ}x} = \dfrac{0}{0}$ ἤ ἀκόμη $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y_1 = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{1}{\text{συν}x} = 1$ Ἄρα $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \infty\cdot 0$ ὁπότε γράφουμε τήν y ὡς $y = \dfrac{\dfrac{x^2}{2(1-\text{συν}x)} - 1}{\dfrac{x^2}{2}} = \dfrac{x^2 - 2 + 2\,\text{συν}x}{x^2(1-\text{συν}x)}$ (1).

ὁπότε $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{x^2-2+2\,\text{συν}x}{x^2(1-\text{συν}x)} = \dfrac{0}{0}$ ἤ $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2x - 2\,\text{ημ}x}{2x(1-\text{συν}x) + x^2\text{ημ}x} =$

$= \dfrac{0}{0}$ ἤ $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2(1-\text{συν}x)}{2(1-\text{συν}x) + 2x\,\text{ημ}x + 2x\,\text{ημ}x + x^2\text{συν}x} =$

$= \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2(1-\text{συν}x)}{(x^2-2)\text{συν}x + 4x\,\text{ημ}x + 2} = \dfrac{0}{0}$ ἤ $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y =$

$= \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2\,\text{ημ}x}{2x\,\text{συν}x - (x^2-2)\text{ημ}x + 4\,\text{ημ}x + 4x\,\text{συν}x} = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2\,\text{ημ}x}{(6-x^2)\text{ημ}x + 6x\,\text{συν}x} =$

$= \dfrac{0}{0}$ ἤ $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2\,\text{συν}x}{(6-x^2)\text{συν}x - 2x\,\text{ημ}x + 6\cdot\text{συν}x - 6x\,\text{ημ}x} =$

$= \underset{x\to0}{\text{op}} \dfrac{2\cdot1}{1\cdot(6-0) - 2\cdot0 + 6\cdot1 - 6\cdot0} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$. Ἄρα $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \dfrac{1}{6}$.

Παρατήρηση: Στή μορφή (1) φθάναμε καί ἄν κάναμε ἀπ' εὐθείας ἀπαλοιφή παρονομαστῶν.

γ'). Εἶναι $\underset{x\to0}{\text{op}}\, y = \underset{x\to0}{\text{op}}(\text{ημ}x)^{\text{ημ}x} = 0^0$ (περίπτ. iii.).
Λογαριθμίζουμε πρῶτα καί ἔχουμε: $\log y = \text{ημ}x\cdot\log\text{ημ}x$. καί $\underset{x\to0}{\text{op}}(\log y) = \underset{x\to0}{\text{op}}(\text{ημ}x\cdot\log\text{ημ}x) = 0\cdot(-\infty)$. Ἄρα ἡ $\log y$ γράφε-

τοῦ: $\log y = \dfrac{\log \eta\mu x}{1/\eta\mu x}$ καί $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(\log y) = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\log \eta\mu x}{1/\eta\mu x} = \dfrac{-\infty}{\infty}$

ἄρα $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(\log y) = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x/\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x/\eta\mu^2 x} = \underset{x\to 0}{\text{ορ}}(-\eta\mu x) = 0$. Ἑπομένως

$\underset{x\to 0}{\text{ορ}}(\log y) = 0$ διά $\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, y = e^0 = 1$.

δ'). Ἔχομε $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} = 1^\infty$ (περ iii.)

ἄρα $\log y = \dfrac{1}{x-\frac{\pi}{4}} \cdot \log \varepsilon\varphi x$ καί $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}(\log y) = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{\log \varepsilon\varphi x}{x-\frac{\pi}{4}} =$

$= \dfrac{\log 1}{0} = \dfrac{0}{0}$ ἤ $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi x}}{1} = \underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}} \dfrac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi x} = 2$

διά $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}(\log y) = 2$ ἄρα $\underset{x\to \pi/4}{\text{ορ}}\, y = e^2$.

ε'). Ἐπίσης $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to 1}{\text{ορ}}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1} = \infty^0$ (περίπτ. iii.)

ἄρα $\log y = (x-1)\cdot \log\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = (x-1)\left[\log 1 - \log(x-1)\right] =$

$= (x-1)\left[-\log(x-1)\right] = (1-x)\cdot\log(x-1)$ καί

$\underset{x\to 1}{\text{ορ}}(\log y) = \underset{x\to 1}{\text{ορ}}\left[(1-x)\cdot\log(x-1)\right] = 0\cdot(-\infty)$ ἄρα γράφομε

τήν $\log y$ ὡς: $\log y = \dfrac{\log(x-1)}{\frac{1}{1-x}}$ καί $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}(\log y) =$

$= \underset{x\to 1}{\text{ορ}} \dfrac{\log(x-1)}{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$ · ἄρα $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}(\log y) = \underset{x\to 1}{\text{ορ}} \dfrac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{-1}{(1-x)^2}} =$

$= \underset{x\to 1}{\text{ορ}}(x-1) = 0$ Ἄρα $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}(\log y) = 0$ καί $\underset{x\to 1}{\text{ορ}}\, y = e^0 = 1$.

8.20. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἄκρες τιμές τῶν συναρτήσεων:

α) $y = 5 - x^2 - x^3 - \frac{1}{4}x^4$, **β)** $y = x^4$, **γ)** $y = \dfrac{x^2}{x^2-5x+4}$,
δ) $y = \dfrac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}$, **ε)** $y = e^x \sigma\upsilon\nu x$, **ζ)** $y = x\cdot\log x$, **η)** $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,
καί **θ)** $y = \left(\dfrac{\nu e}{x}\right)^x$.

Λύση. α'). Έχουμε $y' = -2x - 3x^2 - x^3 = -x(x^2+3x+2)$. Η εξίσωση $y'=0$ έχει ρίζες τις $x=0$, $x=-1$, $x=-2$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $y'' = -2 - 6x - 3x^2$. Γιά $x=0$: $f''(0) = -2 < 0$. Γιά $x=-1$: $f''(-1) = 1 > 0$. Γιά $x=-2$: $f''(-2) = -2 < 0$. Άρα ή y έχει ένα ελάχιστο γιά $x=-1$ τό $y_{ελ} = f(-1) = 4\frac{3}{4}$ καί δύο μέγιστα γιά $x=0$ τό $y_{μέγ.} = f(0) = 5$ καί γιά $x=-2$ τό $y_{μέγ.} = f(-2) = 7$.

β'). Έχουμε $f'(x) = 4x^3$. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει (τριπλή) ρίζα τήν $x=0$. Είναι $f''(x) = 12x^2$ καί $f''(0)=0$. Επίσης $f'''(x) = 24x$ καί $f'''(0)=0$. Ακόμη $f^{(4)}(x) = 24$ καί $f^{(4)}(0) = 24 > 0$· επομένως επειδή ή πρώτη μή μηδενιζόμενη παράγωγος γιά $x=0$ είναι άρτιας τάξεως, ή συνάρτηση έχει άκρα τιμή καί μάλιστα ελάχιστο τό $y_{ελ.} = f(0) = 0$.

γ'). Η $y' = \dfrac{1\cdot(x^2-5x+4) - x\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \dfrac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$

$y'' = \dfrac{-2x\cdot(x^2-5x+4)^2 - (-x^2+4)\cdot 2(x^2-5x+4)\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+4)^4}$. Λύνουμε τήν $y'=0$ θά πρέπει $-x^2+4=0$ καί $x^2-5x+4 \neq 0$ (γιά τίς ρίζες τής $-x^2+4=0$). Οί ρίζες τής $-x^2+4=0$ είναι $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Γιά $x_1 = 2$ ή y'' γίνεται αρνητική άρα ή y έχει μέγιστο τό $y_{μεγ.} = y(2) = -1$. Γιά $x_2 = -2$ ή y'' είναι θετική άρα ή y έχει ελάχιστο τό $y_{ελ.} = y(-2) = -\frac{1}{9}$.

δ'). Η $y' = \dfrac{-συνx\cdot ημx - (1-ημx)συνx}{ημ^2x} = \dfrac{-συνx}{ημ^2x}$.

Επίσης $y'' = \dfrac{ημx\cdot ημ^2x - (-συνx)2ημx\cdot συνx}{ημ^4x} = \dfrac{1+συν^2x}{ημ^3x}$

Λύνουμε τήν εξίσωση $y'=0$ ή $\dfrac{-συνx}{ημ^2x} = 0$ θά πρέπει $ημx \neq 0$. Τότε $συνx = 0 = συν\frac{\pi}{2}$ οπότε από τήν Τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της τριγωνομ. εξίσωσης $συν x = συν \frac{\pi}{2}$ είναι $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (k ακέραιος) Γιά $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ η y'' είναι $\frac{1+0}{1^3} = 1 > 0$ άρα η y έχει ελάχιστο τό $y_{ελ} = f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-1}{1} = 0$. Γιά $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ η y'' είναι $\frac{1+0}{-1^3} = -1 < 0$ άρα η y έχει μέγιστο τό $y_{μεγ} = f\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-(-1)}{-1} = -2$. (Έννοοῦμε πάντοτε σχετικά μέγιστα ή ελάχιστα).

ε'). Είναι $y' = (e^x \cdot συν x)' = (e^x)' \cdot συν x + e^x (συν x)' = e^x συν x - e^x ημ x = e^x (συν x - ημ x)$. $y'' = e^x \cdot (συν x - ημ x) + e^x(-ημ x - συν x) = -2e^x ημ x$. Λύνουμε τήν $y' = 0$. Ο παράγοντας $e^x \neq 0$ γιά κάθε πραγματική τιμή τοῦ x καί μάλιστα πάντοτε θετικός. Άρα $συν x - ημ x = 0$ ή $ημ x = συν x$ ή $εφ x = 1 = εφ \frac{\pi}{4}$ άρα άπ' τήν Τριγωνομετρία η γενική λύση της $εφ x = εφ \frac{\pi}{4}$ δίδεται άπ' τή σχέση $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$. Γιά $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ η y'' είναι $y'' = -2e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \cdot ημ\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$. Ο παράγοντας $e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ είναι πάντα θετικός. Άν $k = 2\mu$ δηλ άρτιος τότε $ημ\left(2\mu\pi + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ άρα η $y'' < 0$ δηλ η y έχει μέγιστο. Άν $k = 2\mu+1$ δηλ περιττός τότε $ημ\left(2\mu\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ άρα η $y'' > 0$ δηλ η y έχει ελάχιστο.

ζ'). Είναι $y' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$ καί $y'' = \frac{1}{x}$. Λύνουμε τήν $y' = 0$ · είναι $\log x = -1$ άρα $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Γιά $x = \frac{1}{e}$ η y'' γίνεται $y'' = \frac{1}{1/e} = e > 0$ άρα η y έχει ελάχιστο τό $y_{ελ} = y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \log \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (\log 1 - \log e) = \frac{1}{e}(0-1) = -\frac{1}{e}$.

η'). Είναι (άσκ. 8.8. κ.) $y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\log x - 1}{x^2}$ καί

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} \cdot \left(\frac{\log x - 1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\log x - 1)\, 2x}{x^4}.$$

Λύνουμε τήν ἐξίσωση $y'=0$· ὁ παράγοντας $\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$ εἶναι πάντα $\neq 0$ γιά $x\neq 0$. Ἄρα θά εἶναι $\log x - 1 = 0$ ἤ $\log x = 1$ ἄρα $x = e^1 = e$. Γιά $x=e$ ἡ y'' γίνεται θετική ἄρα ἡ y ἔχει ἐλάχιστο τό $y_{ελ} = f(e) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$.

θ'). Εἶναι (ἄσκ. 8.8. ι.) $y' = \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x \cdot \log\frac{\nu}{x}$,

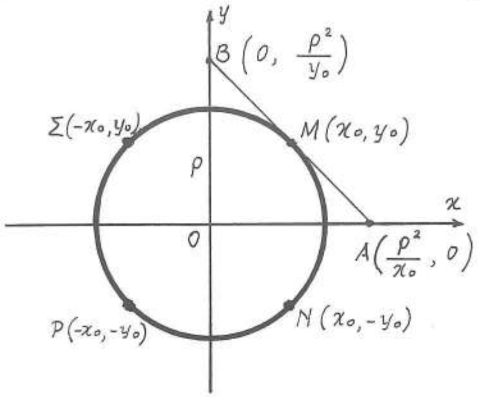
$$y'' = \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x \cdot \left(\log\frac{\nu}{x}\right)^2 + \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{-\nu/x^2}{\nu/x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\nu e}{x}\right)^x \cdot \left[\left(\log\frac{\nu}{x}\right)^2 - \frac{1}{x}\right].$$ Λύνουμε τήν $y'=0$. Ὁ παράγοντας $\left(\frac{\nu e}{x}\right)^x$ εἶναι πάντα $\neq 0$ γιά $x\neq 0$. ὁπότε θά εἶναι $\log\frac{\nu}{x} = 0$ ἄρα $\frac{\nu}{x} = e^0 = 1$ καί $x=\nu$. Γιά $x=\nu$ ἡ y'' γίνεται ἀρνητική ἄρα ἡ y ἔχει μέγιστο τό $y_{μεγ.} = f(\nu) = e^\nu$.

8.21. Δίδεται ὁ κύκλος $x^2+y^2=\rho^2$. Νά εὑρεθεῖ σημεῖο πάνω στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου τέτοιο ὥστε, τό τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφέρειας στό σημεῖο αὐτό, πού περιέχεται μεταξύ τῶν ἀξόνων, νά εἶναι ἐλάχιστο.

Λύση. Στά γεωμετρικά μέγιστα ἤ ἐλάχιστα ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς. Ἄν τό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο πού ζητοῦμε εἶναι μῆκος ἤ ἐμφάνεια ἤ ὄγκος, βρίσκουμε τήν συνάρτηση μήκους ἤ ἐπιφανείας ἤ ὄγκου καί προσπαθοῦμε νά τήν ἐκφράσουμε μέ μία μεταβλητή, ὁπότε ὑπολογίζουμε τό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο τῆς ἀντίστοιχης συναρτήσεως. Ἐδῶ κατ' ἀρχάς θά ὑπολογίσουμε τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό τυχόν σημεῖο αὐτοῦ $M(x_0,y_0)$. Ἡ παράγωγος τῆς $x^2+y^2=\rho^2$ (πεπλεγμένης μορφῆς) εἶναι:

$2x+2yy'=0$ ἤ $y' = -\frac{x}{y}$. Ἡ τιμή τῆς παραγώγου στό σημεῖο $M(x_0 y_0)$ δηλ. ἡ $y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0}$ εἶναι ὁ συντελεστής κατευθύνσεως τῆς



Σχ. 82

ἐφαπτομένης τῆς περιφέρειας στό σημεῖο $M(x_0, y_0)$ Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης στό M εἶναι ὡς γνωστό $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ ἤ $xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2$ Ἀλλά τό σημεῖο (x_0, y_0) ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση τοῦ κύκλου δηλ εἶναι $x_0^2 + y_0^2 = \rho^2$ ὁπότε ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης γίνεται $xx_0 + yy_0 = \rho^2$. (1) Ἡ (1) τέμνει τούς ἄξονες ox καί oy στά σημεῖα A καί B ἀντίστοιχα. Οἱ συντεταγμένες τοῦ A θαί βρεθοῦν ἀπ' τήν (1) ἄν θέσουμε $y = 0$. Τότε ἡ (1) γίνεται $x = \frac{\rho^2}{x_0}$. Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι $y = \frac{\rho^2}{y_0}$ ἄν θέσουμε στήν (1) $x = 0$. δηλ εἶναι $A\left(\frac{\rho^2}{x_0}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\rho^2}{y_0}\right)$. Τό μῆκος ἑπομένως AB εἶναι $AB = \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\rho^2}{y_0}\right)^2}$ (2). Στή συνάρτηση μήκους AB εἰσέρχονται δύο μεταβλητές οἱ x_0, y_0. Τήν μεταβλητή y_0 τήν ἀντικαθιστοῦμε στή συνάρτηση μήκους AB ἀπό τή σχέση $x_0^2 + y_0^2 = \rho^2$ ἀπ' τήν ὁποία ἔχουμε $y_0^2 = \rho^2 - x_0^2$. Ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$AB = \sqrt{\frac{\rho^4}{x_0^2} + \frac{\rho^4}{\rho^2 - x_0^2}}$ πού εἶναι μία συνάρτηση ὡς πρός x_0.

Κάνοντας τίς πράξεις στό ριζικό ἔχουμε $AB = \frac{\rho^3}{x_0\sqrt{\rho^2 - x_0^2}}$ (3)

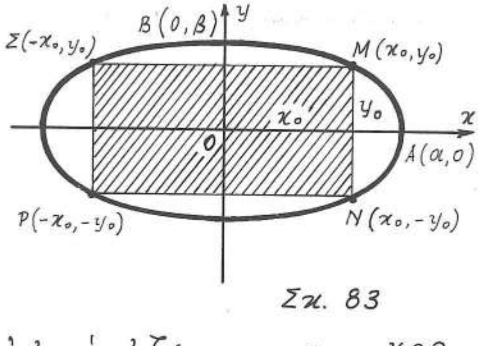
ὁπότε τώρα ὑπολογίζουμε κατά τά γνωστά τίς ἄκρες τιμές τῆς συνάρτησης AB. Ἐδῶ πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι, ὅταν ἔχουμε νά ὑπολογίσουμε τό ἐλάχιστο μιᾶς συνάρτησης (ὅπως ἐδῶ τῆς AB) ἐπειδή ξέρουμε ἐκ τῶν προτέρων ὅτι ἡ συνάρτηση AB ἔχει ἐλάχιστο, δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά ὑπολογίσουμε τήν δεύτερη παράγωγο γιά νά δοῦμε ἄν εἶναι θετική ἤ ἀρνητική γιά τίς ρίζες τῆς πρώτης παραγώγου. Ἡ παράγωγος τῆς AB εἶναι $AB' = -\dfrac{\rho^3\cdot\left(x_0\sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)'}{x_0^2\cdot(\rho^2-x_0^2)} =$

$$= -\frac{\rho^3\left(\sqrt{\rho^2-x_0^2} + x_0\cdot\dfrac{-2x_0}{2\sqrt{\rho^2-x_0^2}}\right)}{x_0^2(\rho^2-x_0^2)}$$

. Μηδενίζομε τήν AB' καί βρίσκομε τίς ρίζες της πού θά εἶναι καί οἱ τιμές τῶν ἐλαχίστων τῆς AB. Εἶναι $AB'=0$ ἤ ἐπειδή $\rho^3 \neq 0$ θά πρέπει $\sqrt{\rho^2-x_0^2} - \dfrac{x_0^2}{\sqrt{\rho^2-x_0^2}} = 0$ ἤ $\rho^2 - x_0^2 = x_0^2$ ἤ $2x_0^2 = \rho^2$ καί $x_0^2 = \dfrac{\rho^2}{2}$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $x_0 = \pm\dfrac{\rho}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\rho\sqrt{2}}{2}$ καί ἀπ' τήν ἐξίσωση κύκλου $x_0^2+y_0^2=\rho^2$ θέτοντας τήν τιμή $x_0^2 = \dfrac{\rho^2}{2}$ ὑπολογίζομε τίς τιμές τοῦ y_0· εἶναι $y_0 = \pm\dfrac{\rho\sqrt{2}}{2}$.

8.22. Νά εὑρεθεῖ τό μέγιστο ὀρθογώνιο τό ἐγγεγραμμένο σέ δοθεῖσα ἔλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Λύση. Ἄν καλέσομε $M(x_0, y_0)$ τό σημεῖο γιά τό ὁποῖο θά ἔχομε τό μέγιστο ὀρθογώνιο τότε τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ὡς γνωστό $E = \beta\cdot\upsilon$ ὅπου $\beta = $ βάσις $= 2x_0$, $\upsilon = $ ὕψος $= 2y_0$ δηλ. $E = 2x_0\cdot 2y_0 = 4x_0y_0$ (1). Τό y_0 τό ἀντικαθιστοῦμε στήν (1)



Σχ. 83

ἀπ' τήν ἐξίσωση τῆς ἔλλειψης $\dfrac{x_0^2}{\alpha^2} + \dfrac{y_0^2}{\beta^2} = 1$ ἀπ' τήν ὁποία προκύπτει $y_0 = \pm\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x_0^2}$. Δεχόμαστε μόνο τό πρόσημο $+$ ἐπειδή τό ἐμβαδό ἐκφράζει θετική ποσότητα καί τό x_0 τό πήραμε θετικό. Ἄρα ἡ συνάρτηση τοῦ ἐμβαδοῦ E εἶναι:
$E = 4\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot x_0\sqrt{\alpha^2-x_0^2}$. Ἐφ' ὅσον ζητοῦμε τό μέγιστο τῆς συνάρτησης E θά πρέπει ἡ E'' νά εἶναι ἀρνητική γιά τίς ρίζες

της πρώτης παραγώγου. Είναι $E' = \left(\frac{4\beta}{\alpha} x_0 \sqrt{\alpha^2 - x_0^2}\right)' =$

$= \frac{4\beta}{\alpha}\left(1 \cdot \sqrt{\alpha^2 - x_0^2} + x_0 \cdot \frac{-2x_0}{2\sqrt{\alpha^2 - x_0^2}}\right)$. Μηδενίζουμε τήν E' καί

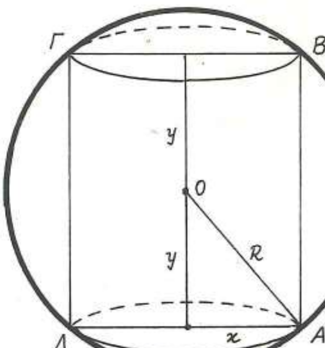
έχουμε $E' = 0$ ή $\sqrt{\alpha^2 - x_0^2} - \frac{x_0^2}{\sqrt{\alpha^2 - x_0^2}} = 0$ ή $\alpha^2 - x_0^2 = x_0^2$ ή

$2x_0^2 = \alpha^2$ καί $x_0^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ καί $x_0 = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (τό x_0 μέ άρνητικό πρόσημο άντιστοιχεῖ στά σημεῖα Ρ, Σ)(σχ 83).

Θέτοντας τήν τιμή $x_0^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ στήν ἐξίσωση της ἔλλειψης $\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$ ἔχουμε $\frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1$ ή $y = \pm \frac{\beta\sqrt{2}}{2}$ (τό y_0 μέ άρνητικό πρόσημο άντιστοιχεῖ στά σημεῖα Ρ, Ν).

8.23. Νά εὑρεθεῖ ὁ ὄγκος μεγίστου ὀρθοῦ κυλίνδρου ὁ ὁποῖος ἐγγράφεται σέ δοθεῖσα σφαῖρα ἀκτίνας R.

Λύση. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ΑΒΓΔ δίδεται ὡς γνωστό ἀπό τή σχέση $V = \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$, ὅπου ρ εἶναι ἡ ἀκτίνα της κυκλικης βάσεως $= x$ καί υ τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου $= 2y$ (σχ. 84) ἄρα $V = \pi \cdot x^2 \cdot 2y = 2\pi x^2 y$ (1). Τό x^2 τό ἀντικαθιστοῦμε στήν (1) ἀπ' τή σχέση $y^2 + x^2 = R^2$ ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. ἄρα $x^2 = R^2 - y^2$. (Θά μπορούσαμε βέβαια νά ἀντικαταστήσουμε τό y· δέν τό κάνουμε ὅμως γιά νά ἀποφύγουμε τά ριζικά).



Σχ. 84

Ὁ ὄγκος γίνεται ἑπομένως $V = 2\pi(R^2 - y^2)y = 2\pi(R^2 y - y^3)$.

Ἔχουμε $V'_y = 2\pi(R^2 - 3y^2)$ καί $V''_y = 2\pi(-6y) = -12\pi y$. Οἱ ρίζες τῆς $V_y' = 0$ ἢ τῆς $2\pi(R^2 - 3y^2) = 0$ εἶναι $y = \pm \frac{R}{\sqrt{3}} = \pm \frac{R\sqrt{3}}{3}$ ἡ $y = -\frac{R\sqrt{3}}{3}$ ἀπορρίπτεται. Γιά $y = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ ἡ V'' γίνεται ἀρνητική (πού εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωστό, ἐφ' ὅσον θέλουμε νά ἔχουμε τόν μέγιστο κύλινδρο).

8.24. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀσύμπτωτοι τῆς συναρτήσεως: $y = x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x}$.

Λύση. Ἔχουμε $\underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y = +\infty$. Βρίσκουμε τήν y'. Εἶναι

$$y' = 1 + \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = 1 + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} \quad \text{καί} \quad \underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y' = 1 + \underset{x\to\infty}{\text{op}} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} =$$

$$= 1 + \underset{x\to\infty}{\text{op}} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = 1 + 1 = 2$$ δηλ $\underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y' = 2$. Ἑπομένως (ἰδιότητα 12 σελ. 252) ἡ εὐθεῖα $y = \alpha x + \beta$ ὅπου $\alpha = \underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y' = 2$ καί $\beta = \underset{x\to\infty}{\text{op}}(y - 2x)$ θά εἶναι πλάγια ἀσύμπτωτος τῆς y.

Εἶναι $\underset{x\to\infty}{\text{op}}(y - 2x) = \underset{x\to\infty}{\text{op}}\left(1 - x + \sqrt{x^2-4x}\right) = 1 + \underset{x\to\infty}{\text{op}}\left(\sqrt{x^2-4x} - x\right) =$

(ἴδε ἀσκ. 5.17, 5.38) $1 + \underset{x\to\infty}{\text{op}} \frac{(\sqrt{x^2-4x} - x)\cdot(\sqrt{x^2-4x} + x)}{\sqrt{x^2-4x} + x} =$

$$= 1 + \underset{x\to\infty}{\text{op}} \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x} + x} = 1 + \underset{x\to\infty}{\text{op}} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}} + 1} = 1 + \frac{-4}{2} = -1.$$

δηλ $\beta = -1$. Ἄρα ἡ πλάγια ἀσύμπτωτος τῆς y εἶναι ἡ εὐθεῖα $y = 2x - 1$.

Ἐπίσης ἔχουμε $\underset{x\to-\infty}{\text{op}}\, y = -\infty + \infty$ δηλ ἀπροσδιόριστη μορφή. Γράφουμε τήν y ὡς ἑξῆς: $y = \frac{(x+1+\sqrt{x^2-4x})(x+1-\sqrt{x^2-4x})}{x+1-\sqrt{x^2-4x}} =$

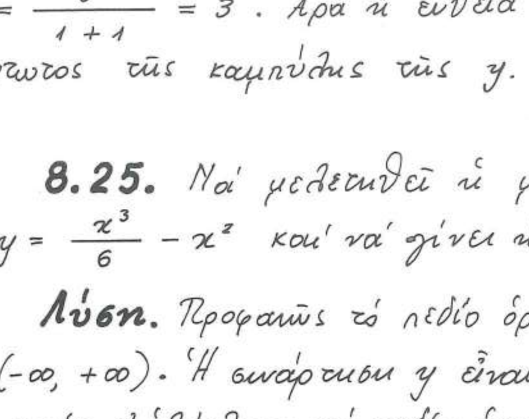
$$\frac{(x+1)^2 - (x^2-4x)}{x+1-\sqrt{x^2-4x}} = \frac{6x+1}{x+1-\sqrt{x^2-4x}}$$. Ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{op}}\, y = \underset{x\to-\infty}{\text{op}} \frac{6+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{-x}} \; (-x>0) = \underset{x\to-\infty}{\text{op}} \frac{6+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} =$$

$= \dfrac{6}{1+1} = 3$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα $y=3$ εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης τῆς y.

8.25. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῆς συνάρτησης $y = \dfrac{x^3}{6} - x^2$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. Προφανῶς τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συνάρτησης εἶναι τό $(-\infty, +\infty)$. Ἡ συνάρτηση y εἶναι πολυώνυμο καί ἑπομένως συνεχής σ' ὁλόκληρο τό πεδίο ὁρισμοῦ της. Ἀσύμπτωτοι δέν ὑπάρχουν. Βρίσκουμε τήν πρώτη καί δεύτερη παράγωγό της. Εἶναι $y' = \dfrac{x^2}{2} - 2x$, $y'' = x-2$. Οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης $y'=0$ εἶναι $x=0$ καί $x=4$. Γιά $x=0$ εἶναι $y''=-2<0$ δηλ. ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο τό $y_{μεγ}=0$. Γιά $x=4$ εἶναι $y''=2>0$ δηλ. ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο τό $y_{ελ} = -\dfrac{16}{3}$. Οἱ ρίζες τῆς δεύτερης παραγώγου $x-2=0$ εἶναι: $x=2$, ἐνῶ ἡ $y'''=1$ γιά $x=2$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός δηλ. $f'''(2)\neq 0$. Ἄρα τό σημεῖο $x=2$ εἶναι σημεῖο καμπῆς. Ὅταν $x \to -\infty$ τό $y \to -\infty$, ὅταν $x \to +\infty$ τό $y \to +\infty$.



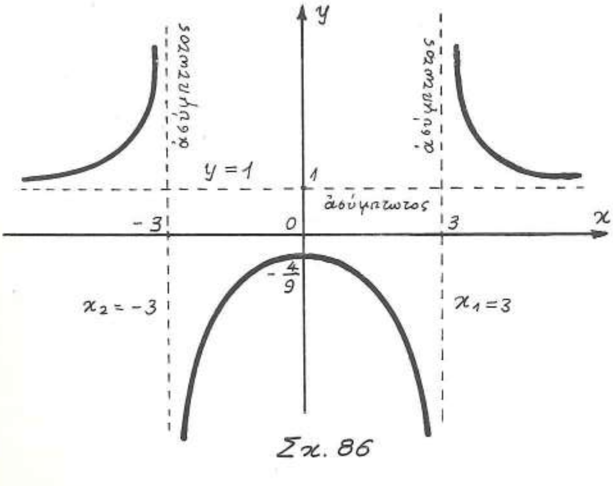
Σχ. 85

x	$-\infty$	0	2	4	6	$+\infty$
y	$-\infty$	$0_{μέγ.}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{16}{3}$ ἐλ	0	$+\infty$
y'	$+ \nearrow$	0	$- \searrow$	0	$+ \nearrow$	
y''	$-$ κοῖλα κάτω		0	$+$ κοῖλα ἄνω		

Στό διάστημα $(-\infty, 0)$ εἶναι $y'>0$ δηλ. ἡ y αὔξουσα· στό $(0,4)$ εἶναι $y'<0$ δηλ. ἡ y φθίνουσα καί στό $(4,+\infty)$ εἶναι $y'>0$ δηλ. ἡ y αὔξουσα. Στό διάστημα $(-\infty, 2)$ εἶναι $y''<0$ δηλ. ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω ἐνῶ στό $(2,+\infty)$ εἶναι $y''>0$ δηλ. ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω. Κατόπιν ὅλων αὐτῶν τῶν συλλογισμῶν εἶναι εὔκολη ἡ κατασκευή τοῦ πίνακα μ' ὅλες τίς χαρακτηριστικές τιμές τῶν x, y, y', y'' ὅπως φαίνεται καί στή συνέχεια μέ βάση τόν πίνακα τιμῶν ἡ γραφική παράσταση τῆς συνάρτησης y. Τό σημεῖο $A(0,0)$ εἶναι σημεῖο μεγίστου, τό $B\left(2,-\frac{8}{3}\right)$ εἶναι σημεῖο καμπῆς, ἐνῶ τό σημεῖο $\Gamma\left(4,-\frac{16}{3}\right)$ εἶναι σημεῖο ἐλαχίστου.

8.26. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῆς συνάρτησης $y=\frac{x^2+4}{x^2-9}$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συνάρτησης εἶναι τό σύνολο: $A=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$ δηλ. ὁλόκληρο τό σύνολο R τῶν πραγματ. ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τίς ρίζες τοῦ παρονομαστοῦ τῆς y πού εἶναι $x_1=3$ καί $x_2=-3$ καί εἶναι οἱ κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι διότι $\underset{x\to\pm3}{\text{ορ}}\, y=\infty$. Ἔχουμε $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\, y=\dfrac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1$ δηλ. ἡ εὐθεῖα ἡ εὐθεῖα $y=1$ εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος. Βρίσκουμε τήν πρώτη καί δεύτερη παράγωγο. Εἶναι $y'=\dfrac{-26x}{(x^2-9)^2}$, $y''=\dfrac{78(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$



Σχ. 86

Οἱ ρίζες τῆς $y'=0$ εἶναι $x=0$ καί $y''(0)<0$ ἑπομένως στό $x=0$ ἡ y παρουσιάζει μέγιστο τό $y_{\mu\varepsilon\gamma}=-\frac{4}{9}$ Γιά κάθε $x\in A$ εἶναι $y''\neq0$ ἑπομένως δέν ὑπάρχουν σημεῖα καμπῆς. Στά διαστήματα $(-\infty,-3)$ καί $(-3,0)$

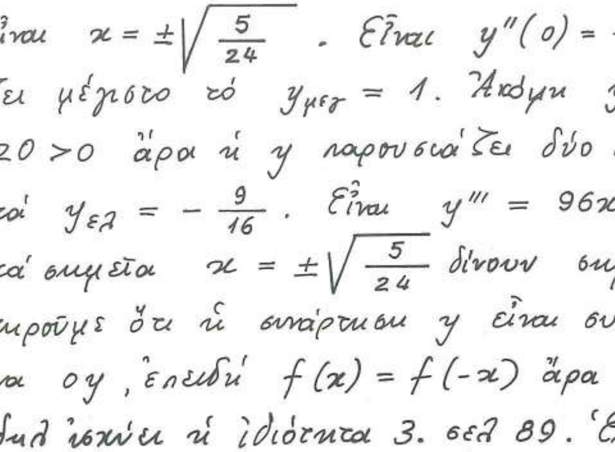
x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y	1	$\overset{+}{\infty}\ \vert\ \overset{-}{\infty}$	$-\frac{4}{9}$ μέγ.	$\overset{-}{\infty}\ \vert\ \overset{+}{\infty}$	1
y'	$+$ ↗		0	$-$ ↘	
y''	$+$ κοῖλα ἄνω		$-$ κοῖλα κάτω		$+$ κοῖλα ἄνω

εἶναι $y'>0$ δηλ. ἡ y εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐνῶ στά διαστήματα $(0,3)$, $(3,+\infty)$ εἶναι $y'<0$ δηλ. ἡ y εἶναι γνησίως φθίνουσα. Ἐξ ἄλλου στά διαστήματα $(-\infty,-3)$, $(3,+\infty)$ εἶναι $y''>0$ ἑπομένως ἡ καμπύλη τῆς y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω, ἐνῶ στό διάστημα $(-3,3)$ εἶναι $y''<0$ καί ἡ καμπύλη τῆς y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω. Κατόπιν αὐτῶν κατασκευάζεται εὔκολα ὁ πίνακας χαρακτηριστικῶν τιμῶν τῶν x, y, y', y'' καί ἀπ' αὐτόν ἡ γραφική παράσταση τῆς y (σχ 86).

8.27. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῶν συναρτήσεων: **α)** $y = 4x^4-5x^2+1$, **β)** $y = 5x^4-3x^2+1$ καί νά γίνει ἡ γραφική τους παράσταση.

Λύση. α'). Ἡ $y=4x^4-5x^2+1$ εἶναι μία διτετράγωνη ἐξίσωση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὁλόκληρο τό R. Ἀσύμπτωτοι τῆς y προφανῶς δέν ὑπάρχουν. Ὑπολογίζουμε κατ' ἀρχάς τίς ρίζες τῆς $y=0$ (σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης τῆς y μέ τόν ἄξονα ox). Θέτουμε ὡς γνωστό $\omega = x^2$ καί ἡ y μετασχηματίζεται στή δευτεροβάθμια ἐξίσωση $4\omega^2-5\omega+1=0$ τῆς ὁποίας οἱ ρίζες εἶναι $\omega_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{5^2-4.4.1}}{2.4} \begin{cases} 1 \\ 1/4 \end{cases}$ δηλ. $x^2=1$ ἄρα $x_{1,2}=\pm1$ καί $x^2=\frac{1}{4}$, δηλ. $x_{3,4}=\pm 1/2$. Ὑπολογίζουμε τήν πρώτη καί δεύτερη παράγωγο τῆς y. Εἶναι $y' = 16x^3-10x$ καί $y''=48x^2-10$. Ρίζες τῆς $y'=0$ δηλ. τῆς $x(16x^2-10)=0$ εἶναι $x=0$ καί $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$. Ρίζες τῆς $y''=0$ δηλ. τῆς $48x^2-10=0$

εἶναι $x = \pm\sqrt{\frac{5}{24}}$. Εἶναι $y''(0) = -10 < 0$ ἄρα ἡ y παρουσιάζει μέγιστο τό $y_{μεγ} = 1$. Ἀκόμη $y''\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\right) = 48\cdot\frac{10}{16} - 10 = 20 > 0$ ἄρα ἡ y παρουσιάζει δύο ἐλάχιστα γιά $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}$ τά $y_{ελ} = -\frac{9}{16}$. Εἶναι $y''' = 96x$ καί $y'''\left(\pm\sqrt{\frac{5}{24}}\right) \neq 0$ δηλ. τά σημεῖα $x = \pm\sqrt{\frac{5}{24}}$ δίνουν σημεῖα καμπῆς. Τέλος παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση y εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα oy, ἐπειδή $f(x) = f(-x)$ ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι ἄρτια δηλ. ἰσχύει ἡ ἰδιότητα 3. σελ 89. Ἑπομένως ἀρκεῖ νά ἐξετασθῆ ἡ συμπεριφορά τῆς y στό διάστημα $(-\infty, 0)$. Στό διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$ εἶναι $y' < 0$ ἄρα ἡ y φθίνουσα ἐνῶ στό $\left(-\frac{\sqrt{10}}{4}, 0\right)$ εἶναι $y' > 0$ ἄρα ἡ y αὔξουσα. Ἐπίσης στό $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{24}}\right)$ εἶναι $y'' > 0$ ἄρα ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω, ἐνῶ στό διάστημα $\left(-\sqrt{\frac{5}{24}}, 0\right)$ εἶναι $y'' < 0$ ἄρα ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω. Κατόπιν αὐτῶν κατασκευάζομε τόν πίνακα μεταβολῶν τῶν x, y, y', y'' καί μέ βάση αὐτόν κατασκευάζομε τή γραφική παράσταση τῆς y στό $(-\infty, 0)$ καί τή συμμετρική της ὡς πρός τόν

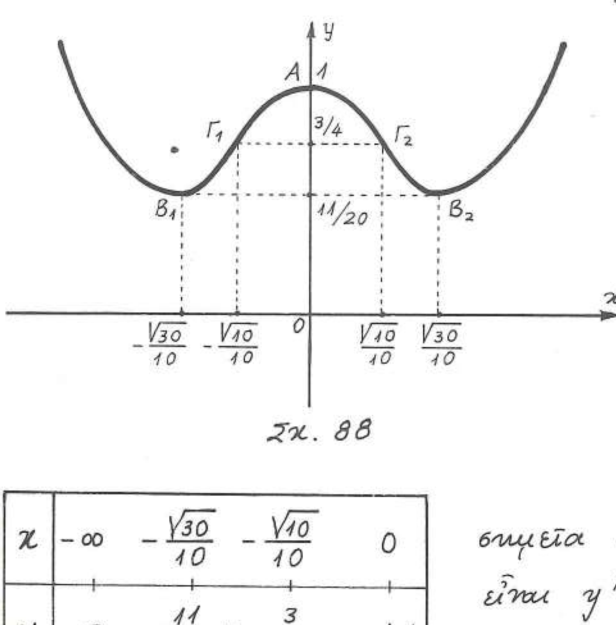


Σχ. 87

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{10}}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$-\sqrt{\frac{5}{24}}$		0
y	$+\infty$		0		$-\frac{9}{16}$ ἐλ		0		$\frac{19}{144}$		1 μέγ.
y'			− ↘		0		+ ↗				0
y''			+	κοῖλα ἄνω					0	− κοῖλα κάτω	

άξονα oy στό διάστημα $(0, +\infty)$.

Β'). Ἐργαζόμαστε ὅπως μέ τήν προηγούμενη συνάρτηση. Κι ἐδῶ παρατηροῦμε ὅτι ἡ $y = 5x^4-3x^2+1$ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα oy ἐπειδή $f(x)=f(-x)$ δηλ. ἄρτια. Λύνοντας τήν $y=0$ παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀντίστοιχη δευτεροβάθμιά της $5\omega^2-3\omega+1$ ἔχει μιγαδικές ρίζες ἄρα ἡ $y=0$ δέν ἔχει πραγματικές ρίζες, δηλ. δέν τέμνει τόν ἄξονα ox σέ κανένα σημεῖο. Εἶναι $y' = 20x^3-6x =$
$= x(20x^2-6)$ μέ ρίζες τίς $x=0$ καί $x = \pm\sqrt{\frac{3}{10}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{10}$
καί $y'' = 60x^2-6$ μέ ρίζες $x = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. Ἐπίσης



Σχ. 88

εἶναι $f''(0) = -6 < 0$ ἄρα ἡ y ἔχει μέγιστο γιά $x=0$ τό $y_{μεγ} = 1$. Ἀκόμη εἶναι $f''\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{10}\right) = 12 > 0$ ἄρα ἡ y ἔχει ἐλάχιστο γιά $x = \pm\frac{\sqrt{30}}{10}$ τό $y_{ελ} = \frac{11}{20}$. Ἐπί πλέον $y''' = 120x$ καί $y'''\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \neq 0$ ἄρα τά σημεῖα $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$ δίνουν

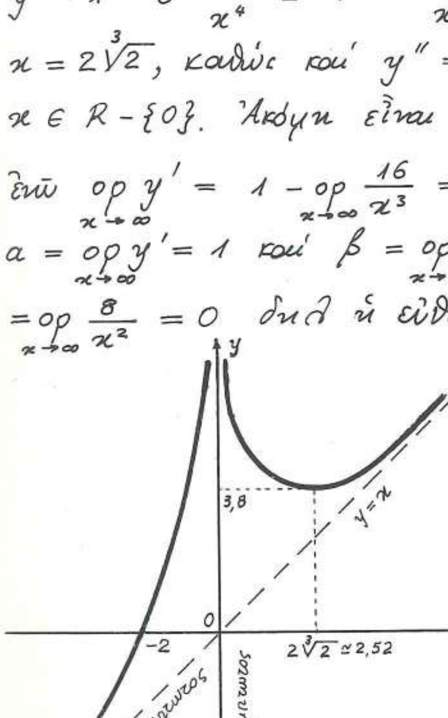
x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{30}}{10}$		$-\frac{\sqrt{10}}{10}$		0
y	$-\infty$		$\frac{11}{20}$ ἐλ		$\frac{3}{4}$		1 μέγ.
y'		$-$ ↘	0	$+$ ↗			0
y''		$+$	κοῖλα ἄνω		0	$-$ κοῖλα κάτω	

σημεῖα καμπῆς. Στό διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{30}}{10}\right)$ εἶναι $y'<0$ ἄρα ἡ y εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἐνῶ στό διάστημα $\left(-\frac{\sqrt{30}}{10}, 0\right)$ εἶναι $y'>0$ ἄρα ἡ y εἶναι αὔξουσα. Ἀκόμη στό $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ εἶναι $y''>0$ ἄρα ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω, ἐνῶ στό $\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, 0\right)$ $y''<0$ δηλ. ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω. Κατόπιν αὐτῶν κατασκευάζουμε τόν πί-

νακα μεταβολῶν τῶν x, y, y', y'' καί στή συνέχεια τή γραφική παράσταση τῆς συνάρτησης y ἀπ' τό $-\infty$ ὡς τό 0 καί τή συμμετρική της ὡς πρός τόν ἄξονα oy ἀπ' τό 0 ὡς τό $+\infty$.
Γιά τίς συναρτήσεις α) καί β) εἶναι: τό σημεῖο A σημεῖο μεγίστου, τά B_1, B_2 σημεῖα ἐλαχίστου καί τά Γ_1, Γ_2 σημεῖα καμπῆς.

8.28. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῆς συνάρτησης $y = x + \frac{8}{x^2}$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς y εἶναι ὁλόκληρο τό R ἐκτός τῶν ριζῶν τοῦ παρονομαστοῦ δηλ. τῆς τιμῆς $x=0$. Ἡ συνάρτηση $y = x + \frac{8}{x^2} = \frac{x^3+8}{x^2}$ ἔχει ρίζα (πραγμ.) $x = -2$. Εἶναι $y' = 1 - 8\,\frac{2x}{x^4} = 1 - \frac{16}{x^3} = \frac{x^3-16}{x^3}$ καί ἔχει ρίζα (πραγμ.) $x = 2\sqrt[3]{2}$, καθώς καί $y'' = \frac{48}{x^4}$ καί εἶναι θετική γιά κάθε $x \in R - \{0\}$. Ἀκόμη εἶναι $\underset{x\to\infty}{op}\, y = \underset{x\to\infty}{op}\, x + \underset{x\to\infty}{op}\, \frac{8}{x^2} = \infty + 0 = \infty$ ἐνῶ $\underset{x\to\infty}{op}\, y' = 1 - \underset{x\to\infty}{op}\, \frac{16}{x^3} = 1$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα $y = ax+\beta$ ὅπου $a = \underset{x\to\infty}{op}\, y' = 1$ καί $\beta = \underset{x\to\infty}{op}(y - ax) = \underset{x\to\infty}{op}\left(x + \frac{8}{x^2} - 1\cdot x\right) = $
$= \underset{x\to\infty}{op}\, \frac{8}{x^2} = 0$ δηλ. ἡ εὐθεῖα $y = 1\cdot x + 0$ ἤ ἡ $y = x$ εἶναι πλάγια ἀσύμπτωτος· ὁμοίως καί $\underset{x\to-\infty}{op}\, y = -\infty$ καί $\underset{x\to-\infty}{op}\, y' = 1$. Ἐπίσης ἡ εὐθεῖα $x=0$ δηλ. ὁ ἄξονας oy εἶναι κατακόρυφη ἀσύμπτωτος. Ἔχουμε $y''(2\sqrt[3]{2}) > 0$ ἄρα ἡ y ἔχει ἐλάχιστο γιά $x = 2\sqrt[3]{2}$ τό $y_{\acute{\epsilon}\lambda} = 2\sqrt[3]{2} + \frac{8}{(2\sqrt[3]{2})^2} = \frac{24}{(2\sqrt[3]{2})^2} \simeq 3{,}8$. Σημεῖα καμπῆς δέν ὑπάρχουν. Στό διάστημα $(-\infty, 0)$



Σχ. 89

x	$-\infty$	-2	0	$2\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	$3{,}8_{\text{ἐλ.}}$	$+\infty$
y'	$+ \nearrow$		$- \searrow$	0	$+ \nearrow$
y''	$+$ κοῖλα πρός τά ἄνω				

ἡ y' εἶναι θετική δηλ. ἡ y εἶναι αὔξουσα ἐνῶ στό $(0, 2\sqrt[3]{2})$ ἡ y' εἶναι ἀρνητική δηλ. ἡ y εἶναι φθίνουσα καί στό $(2\sqrt[3]{2}, +\infty)$ ἡ y' εἶναι θετική δηλ. ἡ y εἶναι αὔξουσα. Κατόπιν αὐτῶν κατασκευάζουμε τόν πίνακα μεταβολῶν καί στή συνέχεια τή γραφική παράσταση τῆς συνάρτησης y.

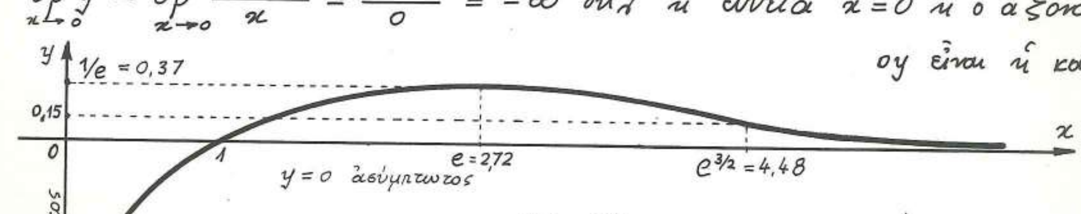
8.29. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῆς συνάρτησης $y = \dfrac{\log x}{x}$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς y εἶναι τό διάστημα $(0, +\infty)$ διότι γιά ἀρνητικούς ἀριθμούς δέν ὑπάρχει λογάριθμος. Ρίζες τῆς $y=0$ εἶναι $\log x = 0$ ἤ $x = e^0 = 1$. Βρίσκουμε τίς y' καί y''.
Εἶναι $y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

καί $y'' = \dfrac{(-1/x)\cdot x^2 - (1-\log x)2x}{x^4} = \dfrac{-3 + 2\log x}{x^3}$.

Εἶναι $\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\, y = \text{ορ} \dfrac{\log x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα τοῦ L'Hospital: $\underset{x\to\infty}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to\infty}{\text{ορ}} \dfrac{(\log x)'}{(x)'} = \underset{x\to\infty}{\text{ορ}} \dfrac{1/x}{1} = 0$ δηλ. ἡ εὐθεία $y=0$ ἤ ὁ ἄξονας ox εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος. Ἐπίσης

$\underset{x\to 0}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to 0}{\text{ορ}} \dfrac{\log x}{x} = \dfrac{-\infty}{0} = -\infty$ δηλ. ἡ εὐθεία $x=0$ ἤ ὁ ἄξονας oy εἶναι ἡ κάθετη ἀσύμπτωτος.



Σχ. 90

Εἶναι $y'=0$ ἤ $1-\log x = 0$ καί $x=e$ ἐνῶ $y''(e) = \dfrac{-3+2\log e}{e^3} = \dfrac{-3+2}{e^3} < 0$ δηλ. ἡ y

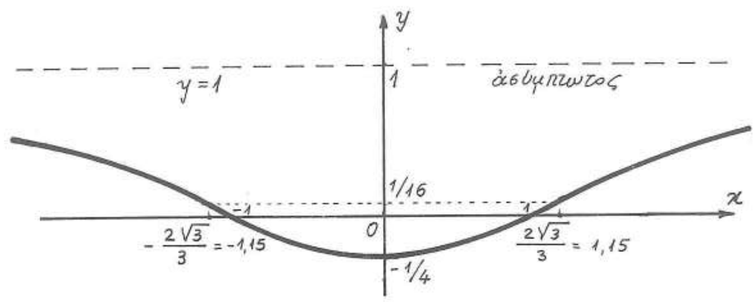
ἔχει μέγιστο στό σημεῖο $x = e$ τό $y_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{\log e}{e} = \dfrac{1}{e} = 0,37$.
Ἐπίσης $y'' = 0$ ἤ $-3 + 2\log x = 0$ καί $\log x = \frac{3}{2}$ ἄρα $x = e^{3/2}$, ἐνῶ ἡ $y''' = \dfrac{2\cdot(1/x)\cdot x^3 - (-3+2\log x)3x^2}{x^6} = \dfrac{11 - 6\log x}{x^4}$ γιά $x = e^{3/2}$ εἶναι $y'''(e^{3/2}) \neq 0\cdot$ ἄρα γιά $x = e^{3/2} = 4,48$ ἔχουμε σημεῖο καμπῆς. τό $y(e^{3/2}) = \dfrac{\log e^{3/2}}{e^{3/2}} = 0,15$. Ἡ y' γίνεται θετική στό διάστημα $(0, e)$ δηλ ἡ y εἶναι αὔξουσα ἐνῶ γίνεται ἀρνητική στό $(e, +\infty)$ δηλ ἡ y εἶναι φθίνουσα. Ἐπίσης ἡ y'' γίνεται ἀρνητική στό διάστημα $(0, e^{3/2})$ δηλ ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω, ἐνῶ γίνεται θετική στό διάστημα $(e^{3/2}, +\infty)$ δηλ ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω. Ἀπ' τά συμπεράσματα αὐτά κατασκευάζουμε τόν πίνακα τιμῶν καί τή γραφική παράσταση (σχ. 90).

x	0	1	e	$e^{3/2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$ μεγ.	$0,15$	0
y'		$+ \nearrow$	0	$-$	$\searrow$
y''	$-$	κοῖλα κάτω		0	$+$ κοῖλα ἄνω

8.30. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῆς συνάρτησης $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

Λύση. Ὁ παρονομαστής x^2+4 δέν μηδενίζεται γιά καμμία πραγματική τιμή τοῦ x, ἑπομένως ἡ συνάρτηση ὁρίζεται σ' ὁλόκληρο τό R καί ἀκόμη δέν ὑπάρχουν κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι. Ἐπίσης $\mathop{\text{ορ}}\limits_{x\to\pm\infty} y = \mathop{\text{ορ}}\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+4} = \mathop{\text{ορ}}\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1 - 1/x^2}{1 + 4/x^2} = 1$ δηλ ἡ εὐθεῖα $y = 1$ εἶναι ἡ ὁριζόντια ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης. Οἱ ρίζες τῆς $y = 0$ εἶναι $x = \pm 1$ δηλ ἡ καμπύλη τέμνει τόν ἄξονα ox στά σημεῖα $1, -1$.
Εἶναι $y' = \dfrac{2x(x^2+4) - 2x(x^2-1)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{10x}{(x^2+4)^2}$ μέ ρίζα $x = 0$

$$y'' = \frac{10(x^2+4)^2 - 10x\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \frac{10(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$$ μέ ρίζες $x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



Σχ. 91

Έχουμε $f''(0)=\frac{40}{4^3}>0$ άρα ή y έχει γιά $x=0$ ελάχιστο τό $y_{ελ}=-\frac{1}{4}$. Ακόμη $y'''=\frac{-6x(7x^2+44)}{(x^2+4)^4}$ καί $y'''\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\neq 0$ άρα γιά $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ έχουμε σημεία καμπής. Επίσης παρατηρούμε ότι ή συνάρτηση $y=\frac{x^2-1}{x^2+4}$ είναι άρτια επειδή $f(x)=f(-x)$ άρα θά είναι συμμετρική ώς πρός τόν άξονα oy· δηλ. εξετάζουμε τή μεταβολή της στό διάστημα $(-\infty,0)$.

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		-1		0
y	1		$1/16$		0		$-1/4$ ελ.
y'		—	↘				0 $+$↗
y''	$-$	κοίλα κάτω	0	$+$		κοίλα άνω	

Στό $(-\infty,0)$ είναι $y'<0$ άρα ή y είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης στό $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ είναι $y''<0$ δηλ ή y στρέφει τά κοίλα πρός τά κάτω ενώ στό $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$ είναι $y''>0$ δηλ ή y στρέφει τά κοίλα πρός τά άνω. Κατόπιν αυτών κατασκευάζουμε τόν πίνακα τιμών στό $(-\infty,0)$ καί στή συνέχεια τή γραφική της παράσταση στό διάστημα $(-\infty,0)$. Στό διάστημα $(0,+\infty)$ ή κατασκευή της καμπύλης είναι συμμετρική ώς πρός τόν άξονα oy της πρώτης.

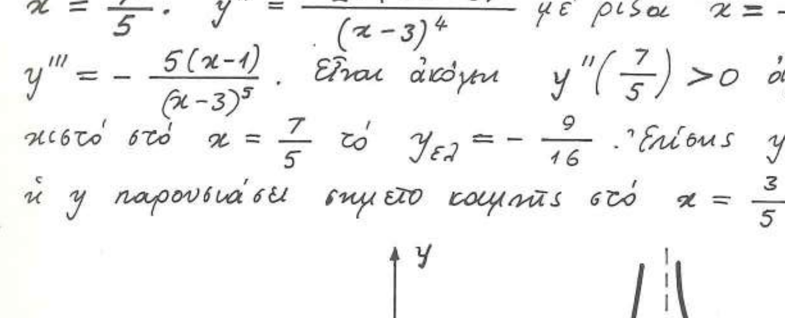
8.31. Νά μελετηθούν οί μεταβολές των συναρτήσεων: **α)** $y=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$, **β)** $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$ καί νά γίνει ή γραφική τους παράσταση.

Λύση. α'). Έχουμε ρίζες του αριθμητού $x^2-x-2=0$ $x_1=-1$, $x_2=2$ δηλ ή καμπύλη τέμνει τόν άξονα ox στά σημεία $-1, 2$.

Ρίζες τοῦ παρονομαστοῦ $x^2-6x+9=0$ $\quad x_{3,4}=3$ (διπλῆ ρίζα) δηλ. ἡ εὐθεῖα $x=3$ εἶναι κατακόρυφη ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης. Ἡ συνάρτηση y ὁρίζεται σ' ὁλόκληρο τό R ἐκτός τῆς τιμῆς $x=3$ δηλ. στό $R-\{3\}$. Ἐπίσης εἶναι $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\dfrac{1-1/x-2/x^2}{1-6/x+9/x^2}=1$ δηλ. ἡ εὐθεῖα $y=1$ εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος. Βρίσκομε τήν y', y'' καί y'''.

$$y'=\frac{-5x^2+22x-21}{(x^2-6x+9)^2}=\frac{-(x-3)(5x-7)}{(x-3)^4}=\frac{-(5x-7)}{(x-3)^3}$$ μέ ρίζα $x=\dfrac{7}{5}$. $\quad y''=\dfrac{2\cdot(5x-3)}{(x-3)^4}$ μέ ρίζα $x=\dfrac{3}{5}$ καί

$y'''=-\dfrac{5(x-1)}{(x-3)^5}$. Εἶναι ἀκόμη $y''\left(\frac{7}{5}\right)>0$ ἄρα ἡ y ἔχει ἐλάχιστο στό $x=\frac{7}{5}$ τό $y_{ελ}=-\frac{9}{16}$. Ἐπίσης $y'''\left(\frac{3}{5}\right)\neq 0$ ἄρα ἡ y παρουσιάσει σημεῖο καμπῆς στό $x=\frac{3}{5}$ μέ $y\left(\frac{3}{5}\right)=-0{,}4$



Σχ 92

Στό διάστημα $(-\infty,\frac{7}{5})$ εἶναι $y'<0$ ἄρα ἡ y φθίνουσα ἐνῶ στό $(\frac{7}{5},3)$ εἶναι $y'>0$ δηλ. ἡ y αὔξουσα καί στό $(3,+\infty)$ εἶναι $y'<0$ δηλ. ἡ y φθίνουσα. Ἐπίσης στό $(-\infty,\frac{3}{5})$ εἶναι $y''<0$ ἄρα ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω, ἐνῶ στό $(\frac{3}{5},+\infty)$ εἶναι $y''>0$ δηλ. ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω. (Πίνακας καί γραφική παράσταση σχ. 92).

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	2	3	$+\infty$
y	1	0	$-\frac{2}{9}$	$-0{,}4$	$-\frac{9}{16}$	0	$+\infty \mid +\infty$	1
y'		$-$	$\searrow$		0	$+$ $\nearrow$	0 $-$	$\searrow$
y''	$-$ κοῖλα κάτω			0	$+$ κοῖλα ἄνω			

β'). Ἡ $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$ ἔχει ρίζες: τοῦ ἀριθμητοῦ $x^2-5x+6=0$ τίς $x_1=2$ καί $x_2=3$ δηλ. ἡ καμπύλη τέμνει τόν ἄξονα οx στά σημεῖα 2, 3. καί τοῦ παρονομαστοῦ $x^2-2x+1=0$ τήν $x=1$ (διπλή) δηλ. ἡ εὐθεῖα $x=1$ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης. Ἡ συνάρτηση ὁρίζεται σ' ὁλόκληρο τό R ἐκτός τοῦ $x=1$ δηλ. στό $R-\{1\}$. Ἔχουμε $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\, y=\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\dfrac{1-5/x+6/x^2}{1-2/x+1/x^2}=1$ δηλ. ἡ εὐθεῖα $y=1$ εἶναι ὁριζόντια ἀσύμπτωτος. Βρίσκουμε τίς y', y'' καί y'''.

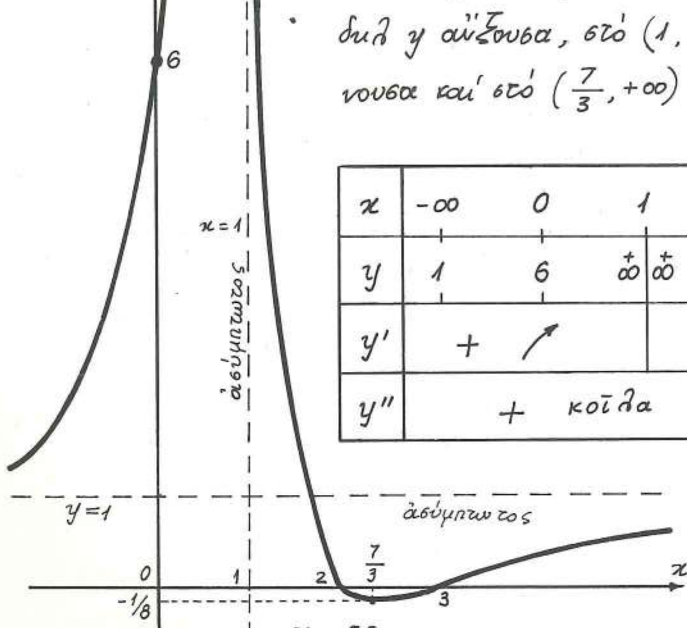
Ἡ $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$ γράφεται $y=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)^2}$ ὁπότε ἔχουμε:

$$y'=\frac{(2x-5)(x-1)^2-(x^2-5x+6)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x-7}{(x-1)^3}$$ μέ ρίζα $x=\dfrac{7}{3}$

$$y''=\frac{3\cdot(x-1)^3-(3x-7)3\cdot(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{-6\cdot(x-3)}{(x-1)^4}$$ μέ ρίζα $x=3$ καί

$y'''=\dfrac{6\cdot(3x-11)}{(x-1)^5}$. Εἶναι $y''\left(\dfrac{7}{3}\right)>0$ ἄρα ἡ y ἔχει γιά $x=\dfrac{7}{3}$ ἐλάχιστο τό $y_{ελ}=-\dfrac{1}{8}$. Ὁμοίως $y'''(3)\neq 0$ ἄρα γιά $x=3$ ἡ y ἔχει σημεῖο καμπῆς τό $y=0$. Στό $(-\infty,1)$ εἶναι $y'>0$ δηλ. y αὔξουσα, στό $\left(1,\dfrac{7}{3}\right)$ εἶναι $y'<0$ δηλ. y φθίνουσα καί στό $\left(\dfrac{7}{3},+\infty\right)$ εἶναι $y'>0$ δηλ. y αὔξουσα.

x	$-\infty$	0	1	2	$\frac{7}{3}$	3	$+\infty$
y	1	6	$+\infty$ | $+\infty$	0	$-1/8$ ελ	0	1
y'	+ ↗			− ↘	0	+ ↗	
y''		+ κοῖλα ἄνω				0	− κοῖλα κάτω



Σχ 93

Ἀκόμη στό $(-\infty,3)$ $y''>0$ ἐνῶ στό $(3,+\infty)$ $y''<0$. Ἔτσι ἔχουμε τή γρ. παρ. (σχ. 93).

8.32. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῆς συναρτήσεως $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

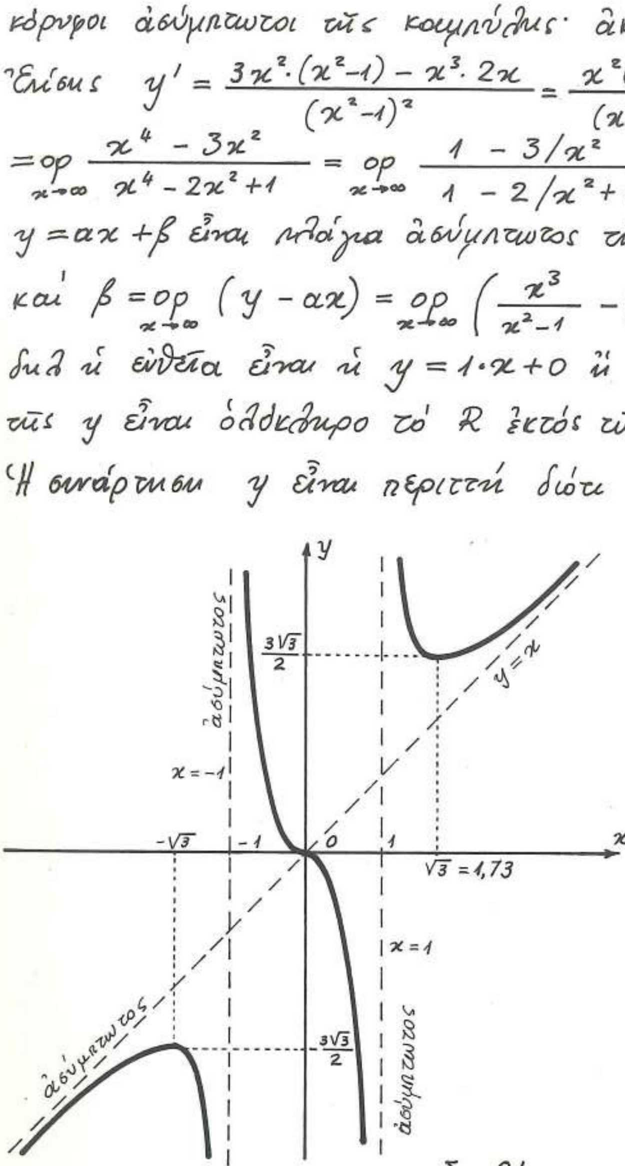
Λύση. Ρίζες τοῦ ἀριθμητοῦ: $x=0$ δηλ. ἡ καμπύλη διέρχεται ἀπ' τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Ρίζες τοῦ παρονομαστοῦ: $x^2-1=0$ οἱ $x=\pm 1$ δηλ. οἱ εὐθεῖες $x=1$ καί $x=-1$ εἶναι κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης· ἀκόμη $\underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y = \infty$ καί $\underset{x\to-\infty}{\text{op}}\, y = -\infty$

Ἐπίσης $y' = \dfrac{3x^2\cdot(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ καί $\underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y' =$

$= \underset{x\to\infty}{\text{op}} \dfrac{x^4-3x^2}{x^4-2x^2+1} = \underset{x\to\infty}{\text{op}} \dfrac{1-3/x^2}{1-2/x^2+1/x^4} = 1$, ἄρα ἡ εὐθεῖα $y = \alpha x + \beta$ εἶναι πλάγια ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης μέ $\alpha = \underset{x\to\infty}{\text{op}}\, y' = 1$ καί $\beta = \underset{x\to\infty}{\text{op}}\,(y-\alpha x) = \underset{x\to\infty}{\text{op}}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \underset{x\to\infty}{\text{op}} \dfrac{x}{x^2-1} = \underset{x\to\infty}{\text{op}} \dfrac{1/x}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$

δηλ. ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ $y = 1\cdot x + 0$ ἤ ἡ $y = x$. Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς y εἶναι ὁλόκληρο τό R ἐκτός τῶν σημείων -1, 1. δηλ. τό $R-\{1,-1\}$.

Ἡ συνάρτηση y εἶναι περιττή διότι $f(-x) = -f(x)$· πράγματι:



Σχ. 94

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $-f(x)$ ἄρα (ἰδιότ. 4. σελ. 89) ἡ y θά εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν ἀρχή O τῶν συντεταγμένων. Εἶναι ἀκόμη $y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ καί

$y''' = -6\cdot\dfrac{x^4+6x^2+1}{(x^2-1)^4}$

Ρίζες τῆς y': $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$

Ρίζες τῆς y'' (πραγμ): $x=0$

Ἔχουμε $y''(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0$ δηλ. ἡ y ἔχει μέγιστο στό σημείο $x=-\sqrt{3}$ τό $y_{μεγ} = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} = -2,6 \cdot$ $y''(0)=0$ δηλ. δέν υπάρχει άκρα τιμή στό σημείο $x=0$. Ακόμη $y''(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}\left((\sqrt{3})^2+3\right)}{\left((\sqrt{3})^2-1\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$ δηλ. ή y έχει ελάχιστο γιά $x=\sqrt{3}$

$y_{ελ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,6$ Ακόμη έχουμε $y'''(0) = -6 \neq 0$ άρα τό σημείο $x=0$, ρίζα τής $y''=0$, παρουσιάζει σημείο καμπής. Ή y' είναι θετική στά διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{3})$ καί $(\sqrt{3},+\infty)$ δηλ. ή y είναι αύξουσα σ' αυτά, ενώ στό $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ή y' είναι αρνητική δηλ. ή y είναι φθίνουσα.

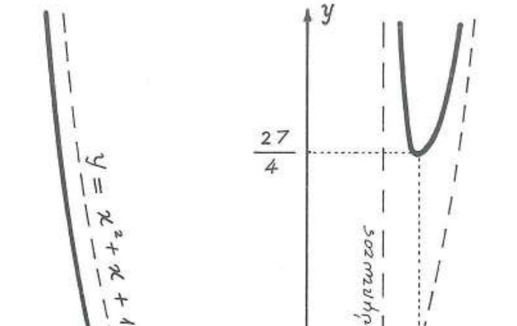
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ μ.		$-\infty$ ‖ $+\infty$		0		$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ελ.		$+\infty$
y'		+ ↗	0				− ↘				0	+ ↗	
y''		− κοίλα κάτω			‖	+ κοίλα άνω	0	− κοίλα κάτω	‖		+ κοίλα άνω		

Επίσης στά διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ ή y'' είναι αρνητική δηλ. ή y στρέφει τά κοίλα πρός τά κάτω, ενώ στά διαστήματα $(-1,0)$, $(1,+\infty)$ είναι y'' θετική δηλ. ή y στρέφει τά κοίλα πρός τά άνω. Έτσι κατασκευάζεται ό πίνακας μεταβολών καί ή γρ. παράστ. (σχ. 94).

8.33. Νά μελετηθεί ή μεταβολή τής συνάρτησης $y = \frac{x^3}{x-1}$ καί νά γίνει ή γραφική της παράσταση.

Λύση. Ρίζες τοῦ αριθμητοῦ $x^3=0$ είναι $x=0$ · δηλ. ή καμπύλη y διέρχεται από τήν αρχή τών συντεταγμένων. Ρίζες τοῦ παρονομαστοῦ $x-1=0$ είναι $x=1$ δηλ. ή ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος τής καμπύλης. Άρα πεδίο ορισμοῦ τής y τό $R-\{1\}$. Είναι $y' = \frac{3x^2(x-1)-x^3\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$ μέ ρίζες τίς $x=0$, $x=\frac{3}{2}$.

$y'' = \frac{(6x^2-6x)(x-1)^2-(2x^3-3x^2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$ μέ ρίζα (απλή) $x=0$ (τό x^2-3x+3 είναι πάντα >0, μιγαδ. ρίζες),



Σχ. 95

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$		0		$\overline{\infty}$ ‖ $\overset{+}{\infty}$		$\frac{27}{4}$ ἐλ		$+\infty$
y'		$-$ ↘	0		$-$	↘	0	$+$ ↗	
y''		$+$ κοῖλα ἄνω	0	$-$ κοῖλα κάτω	0		$+$ κοῖλα ἄνω		

καί $y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}$. Εἶναι ἀκόμη $y''(0) = 0$ δηλ. γιά τήν τιμή $x=0$ δέν ὑπάρχει ἄκρα τιμή, ἐνῶ $y''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} > 0$ ἄρα ἡ y παρουσιάζει γιά $x = \frac{3}{2}$ ἐλάχιστο τό $y_{ελ} = \frac{(3/2)^3}{3/2 - 1} = \frac{27}{4}$. Ἐπίσης $y'''(0) = -6 \neq 0$ ἄρα ἡ y παρουσιάζει στό $x=0$ σημεῖο καμπῆς. Ἡ y' εἶναι ἀρνητική στά διαστήματα $(-\infty, 1)$ καί $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ δηλ. ἡ y εἶναι φθίνουσα στά διαστήματα αὐτά, ἐνῶ ἡ y' εἶναι θετική στό $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ δηλ. ἡ y εἶναι αὔξουσα σ' αὐτό. Ἀκόμη στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί $(1, +\infty)$ εἶναι $y'' > 0$ δηλ. ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω, ἐνῶ στό $(0,1)$ εἶναι $y'' < 0$ δηλ. ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω. Ἐπίσης $\underset{x \to \pm\infty}{ὅρ}\, y = \frac{\infty}{\infty}$ ἄρα (κανόνας L' Hospital): $\underset{x \to \pm\infty}{ὅρ}\, y = \frac{3x^2}{1} = \infty$. Μέ βάση τά παραπάνω συμπεράσματα κατασκευάζουμε τόν πίνακα μεταβολῶν τῶν x, y, y', y'' καί στή συνέχεια τή γραφική παράσταση τῆς y. (σχ. 95).

Γιά νά κάνουμε τή γραφική παράσταση τῆς καμπύλης y μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια, γιά μεγάλες τιμές τοῦ x, παρατηροῦμε ὅτι:

Ἐπειδή βαθμ (x^3) $(=3)$ > βαθμ $(x-1)$ $(=1)$, προκύπτει (περίπτ. δ. σελ 252) ὅτι θά ἔχουμε καμπύλη ἀσύμπτωτο. Γιά νά βροῦμε τήν καμπύλη αὐτή διαιροῦμε τό x^3 μέ τό $x-1$. Ἔχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 & x-1 \\ \hline
-x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \hline
x^2 & \\
-x^2+x & \\ \hline
x & \\
-x+1 & \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

ἄρα $\dfrac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

καί $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\, y = \underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}(x^2+x+1) + \underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\dfrac{1}{x-1}$.

ἀλλά $\underset{x\to\pm\infty}{\text{ορ}}\dfrac{1}{x-1} = 0$ ἄρα γιά μεγάλες τιμές τοῦ x πού πλησιάζουν στό $\pm\infty$ οἱ τιμές τοῦ y πλησιάζουν τίς τιμές τῆς παραβολῆς $y_1 = x^2+x+1$. Ἀκόμη ὅταν τό $x \to +\infty$, ὁ παράγοντας $\dfrac{1}{x-1}$ τείνει στό 0^+ δηλ ἡ καμπύλη $y = \dfrac{x^3}{x-1}$ ἐφάπτεται ἀσυμπτωτικά τῆς $y_1 = x^2+x+1$ ἀπό τό ἐπάνω μέρος της. Ὅταν $x \to -\infty$, ὁ παράγοντας $\dfrac{1}{x-1}$ τείνει στό 0^- δηλ ἡ συνάρτηση $y = \dfrac{x^3}{x-1}$ ἐφάπτεται ἀσυμπτωτικά τῆς $y_1 = x^2+x+1$ ἀπό τό κάτω μέρος της. Κατασκευάζουμε τώρα τή γραφική παράσταση τῆς $y_1 = x^2+x+1$. Ἔχουμε:

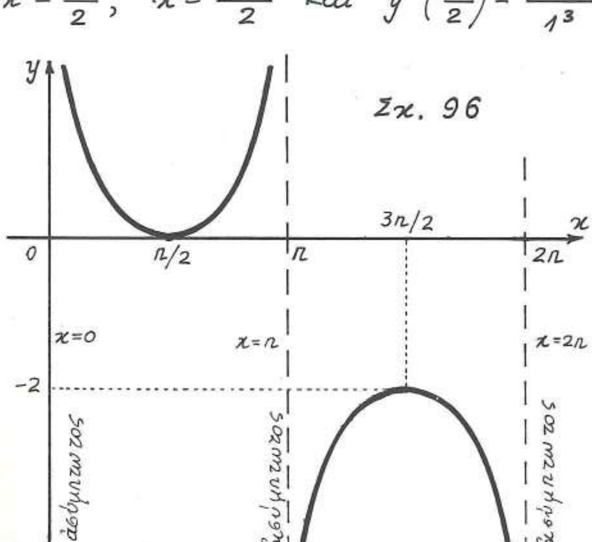
$y_1' = 2x+1$ μέ ρίζα $x = -\frac{1}{2}$, $y_1'' = 2$. Ἐπίσης $y_1''(-\frac{1}{2}) = 2$ θετική τιμή τῆς y_1''. Ἄρα γιά $x = -\frac{1}{2}$ ἡ y_1 παρουσιάζει ἐλάχιστο τό $y_{1\,ελ} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$. Ἡ y_1'' δέν ἔχει ρίζες καί εἶναι πάντα >0. Ἡ y_1' γίνεται ἀρνητική στό $(-\infty, -\frac{1}{2})$ δηλ ἡ y_1 φθίνει, ἐνῶ ἡ y_1' γίνεται θετική στό $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ δηλ ἡ y_1 αὐξάνει. Ἐπειδή $y_1'' > 0$ ἡ y_1 στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y_1	$+\infty$		$\frac{3}{4}$ ελ.		1		$+\infty$
y_1'		$-$ ↘	0	$+$ ↗			
y_1''			$+$ κοῖλα ἄνω				

Ἡ y_1 σάν πολυώνυμο ὁρίζεται σ' ὁλόκληρο τό R. Τέλος τό τριώνυμο x^2+x+1 εἶναι πάντα θετικό (μιγαδ. ρίζες). Γρ. παρ σχ.95.

8.34. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις: **α)** $y = \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}$, **β)** $y = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ καί νά γίνει ἡ γραφική τους παράσταση.

Λύση. α'). Βλέπουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y = \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π διότι $f(x+2\pi) = \frac{1-\eta\mu(x+2\pi)}{\eta\mu(x+2\pi)} = \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x} = f(x)$ ἑπομένως (ἰδ. 5. σελ 90) ἀρκεῖ νά ἐξετασθεῖ ἡ μεταβολή τῆς y στό διάστημα $(0, 2\pi)$ καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση στό διάστημα αὐτό, ὁπότε μέ παράλληλη μετατόπιση τῆς καμπύλης πρός τόν ἄξονα yy' κατά μῆκη 2π δεξιά καί ἀριστερά τοῦ yy' προκύπτει ἡ πλήρης γραφική παράσταση τῆς y. Ἔχουμε (ἄσκ. 8.20 δ.) $y' = \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ καί $y'' = \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x}$. Ρίζες τῆς $y=0$ στό διάστημα $(0, 2\pi)$: τοῦ ἀριθμητοῦ $1-\eta\mu x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$ δηλ. ἡ καμπύλη διέρχεται ἀπ' τό σημεῖο $x = \frac{\pi}{2}$. τοῦ παρονομαστοῦ $\eta\mu x = 0$: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$. δηλ οἱ εὐθεῖες $x=0$, $x=\pi$ καί $x = 2\pi$ εἶναι κατακόρυφοι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης. Ρίζες τῆς $y' = 0$: $\sigma\upsilon\nu x = 0$ εἶναι $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ καί $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+0^2}{1^3} = 1 > 0$ ἄρα ἡ y γιά $x = \frac{\pi}{2}$ ἔχει ἐλάχιστο τό $y_{\epsilon\lambda} = 0$. Ἐπίσης εἶναι $y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1+0^2}{(-1)^3} = -1 < 0$ ἄρα ἡ y ἔχει γιά $x = \frac{3\pi}{2}$ μέγιστο τό $y_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{1-(-1)}{-1} = -2$. Ἡ y'' δέν ἔχει πραγματικές ρίζες ἄρα δέν ἔχει σημεῖα καμπῆς. Στά $(0, \pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$ εἶναι $y' < 0$ ἄρα ἡ y φθίνουσα, ἐνῶ στό $(\pi/2, 3\pi/2)$ εἶναι



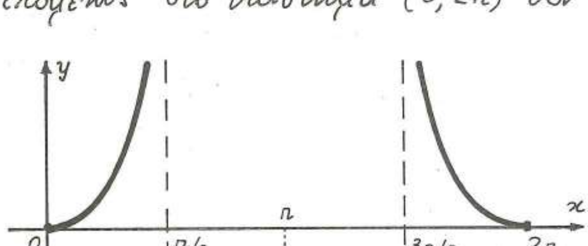
Σχ. 96

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	$\overset{+}{\infty}$	0 ελ.	$\overset{+}{\infty}\ \vert\ \overset{-}{\infty}$	-2 μέγ.	$\overset{-}{\infty}$
y'	$-\ \searrow$	0	$+\ \nearrow$	0	$-\ \searrow$
y''	$+$ κοίλα άνω			$-$ κοίλα κάτω	

$y'>0$ άρα η y αύξουσα. Ακόμα η y'' είναι θετική στό $(0,\pi)$ δηλ. η y στρέφει τά κοίλα πρός τά άνω, ενώ η y'' είναι αρνητική στό $(\pi, 2\pi)$ δηλ. η y στρέφει τά κοίλα πρός τά κάτω. Έτσι κάνουμε τόν πίνακα μεταβολών των x, y, y', y'' καί τή γραφική παράσταση (σχ. 96).

β'). Ομοίως η συνάρτηση $y = \dfrac{1-\text{συν}x}{\text{συν}x}$ είναι περιοδική μέ περίοδο 2π διότι $f(x+2\pi) = \dfrac{1-\text{συν}(x+2\pi)}{\text{συν}(x+2\pi)} = \dfrac{1-\text{συν}x}{\text{συν}x} = f(x)$ άρα μελετούμε τήν y στό διάστημα $(0, 2\pi)$.

Ρίζες της $y=0$ στό διάστημα $(0,2\pi)$: του αριθμητού $1-\text{συν}x=0$: $x=0$, $x=2\pi$ · του παρονομαστού $\text{συν}x=0$: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$. δηλ. η καμπύλη διέρχεται από τά σημεία $x=0$, $x=2\pi$ καί έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους τίς ευθείες $x=\frac{\pi}{2}$ καί $x=\frac{3\pi}{2}$. Η y επομένως στό διάστημα $(0,2\pi)$ δέν ορίζεται γιά τά σημεία $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$. Είναι $y' = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$ μέ ρίζες $x = 0, \pi, 2\pi$ καί $y'' = \dfrac{1+\text{ημ}^2 x}{\text{συν}^3 x}$ μέ ρίζες μιγαδικές. Ακόμη έχουμε $y''(0) = \dfrac{1+0^2}{1^3} = 1 > 0$ άρα η y έχει ελάχιστο γιά $x=0$ τό $y_{ελ} = 0$ · επίσης $y''(\pi) = \dfrac{1+0^2}{(-1)^3} = -1 < 0$ άρα η y έχει μέγιστο γιά $x=\pi$, τό $y_{μεγ} = -2$ καί $y''(2\pi) = 1 > 0$



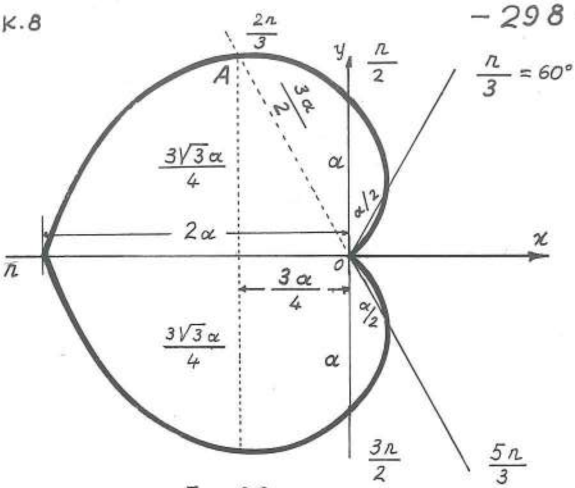
Σχ. 97

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	$0_{\varepsilon\lambda}$	$\overset{+}{\infty} \mid \overset{-}{\infty}$	$-2_{\mu\varepsilon\gamma}$	$\overset{-}{\infty} \mid \overset{+}{\infty}$	$0_{\varepsilon\lambda}$
y'	0	$+ \nearrow$	0	$- \searrow$	0
y''	$+$ κοῖλα ἄνω		$-$ κοῖλα κάτω		$+$ κοῖλα ἄνω

ἄρα ἡ y ἔχει ἐλάχιστο γιά $x = 2\pi$ τό $y_{\varepsilon\lambda} = 0$ Ἡ y''' δέν ἔχει πραγματικές ρίζες ἄρα δέν ὑπάρχουν σημεῖα καμπῆς. Στό διάστημα $(0, \pi)$ ἡ y' εἶναι θετική δηλ ἡ y εἶναι αὔξουσα, ἐπῦ στό $(\pi, 2\pi)$ ἡ y' εἶναι ἀρνητική δηλ ἡ y εἶναι φθίνουσα. Ἀκόμη στά $(0, \pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$ ἡ y'' εἶναι θετική δηλ ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἄνω, ἐπῦ στό $(\pi/2, 3\pi/2)$ εἶναι y'' ἀρνητικό ἄρα ἡ y στρέφει τά κοῖλα πρός τά κάτω. Ἔτσι κατασκευάζουμε τόν πίνακα μεταβολῶν καί τή γραφ. παράστ. (σχ. 97).

8.35. Νά μελετηθεῖ ἡ μεταβολή τῶν συναρτήσεων πού δίδονται σέ πολικές συντεταγμένες: **α)** $\rho = \alpha(1 - \text{συν}\vartheta)$, **β)** $\rho = \alpha(1 + \text{συν}\vartheta)$, **γ)** $\rho = \alpha(1 - \text{ημ}\vartheta)$, **δ)** $\rho = \alpha(1 + \text{ημ}\vartheta)$ καί νά γίνει ἡ γραφική τους παράσταση $(\alpha > 0)$.

Λύση. α'). Ἐπειδή $\text{συν}(-\vartheta) = \text{συν}\vartheta$, δηλ $\rho(-\vartheta) = \rho(\vartheta)$ ὅπου $\rho(\vartheta) = \alpha(1 - \text{συν}\vartheta)$ καί $\rho(-\vartheta) = \alpha(1 - \text{συν}(-\vartheta))$ προκύπτει (σελ. 254 3ον) ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα ox. Ἐξ ἄλλου ἐπειδή $-1 \le \text{συν}\vartheta \le 1$, τό ρ θά εἶναι $0 \le \rho \le 2\alpha$ καί μάλιστα γιά $\vartheta = 0$ εἶναι $\rho = 0$, γιά $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ εἶναι $\rho = \alpha$ καί γιά $\vartheta = \pi$ εἶναι $\rho = 2\alpha$. Ἐπειδή ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα ox ἡ μεταβολή της ἐξετάζεται γιά τιμές τοῦ ϑ ἀπό 0 ὥς π. Ἔχουμε $\frac{d\rho}{d\vartheta} = \alpha\,\text{ημ}\vartheta$ καί εἶναι $\frac{d\rho}{d\vartheta} > 0$ δηλ $\alpha\,\text{ημ}\vartheta > 0$

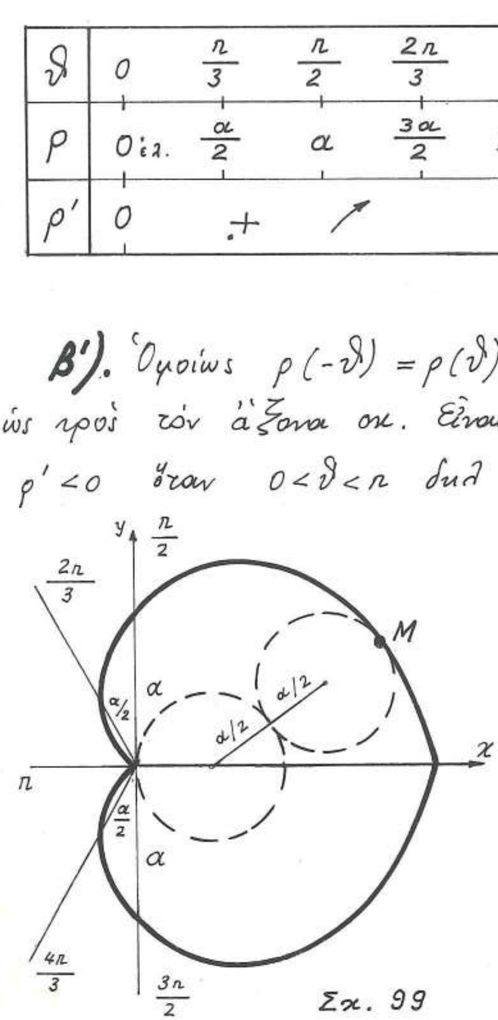


Σχ. 98

ϑ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ	$0_{\varepsilon\lambda.}$	$\frac{\alpha}{2}$	α	$\frac{3\alpha}{2}$	$2\alpha_{\mu.}$
ρ'	0	$+$	$\nearrow$		0

ὅταν $0<\vartheta<\pi$ ὁπότε ἡ συνάρτηση $\rho=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ αὐξάνει, ἐνῶ $\frac{d\rho}{d\vartheta}<0$ ὅταν $\pi<\vartheta<2\pi$ διότι ἡ ρ ἐλαττοῦται. Γιά $\vartheta=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\vartheta=-\frac{1}{2}$ καί $\rho=\alpha\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3\alpha}{2}$. Κατόπιν αὐτῶν σχηματίζουμε τόν πίνακα τιμῶν. Μέ βάση αὐτόν κατασκευάζουμε τό τμῆμα τῆς καμπύλης πού περιέχεται μεταξύ 0 καί π τόξου καί στή συνέχεια τό συμμετρικό του ὡς πρός τόν ἄξονα ox.

Β'). Ὁμοίως $\rho(-\vartheta)=\rho(\vartheta)$, διότι ἡ $\rho(\vartheta)$ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα ox. Εἶναι $\frac{d\rho}{d\vartheta}=\rho'=-\alpha\eta\mu\vartheta$ ὁπότε εἶναι $\rho'<0$ ὅταν $0<\vartheta<\pi$ διότι ἡ ρ ἐλαττοῦται, ἐνῶ $\rho'>0$ ὅταν $\pi<\vartheta<2\pi$ διότι ἡ ρ αὐξάνει στό διάστημα αὐτό. Ἔχουμε $\rho(0)=2\alpha_{\mu.}$, $\rho\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\alpha}{2}$, $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=\alpha$ καί $\rho(\pi)=0_{\varepsilon\lambda}$. Κατόπιν αὐτῶν κατα-



Σχ. 99

ϑ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ	$2\alpha_{\mu\varepsilon\gamma.}$	$\frac{3\alpha}{2}$	α	$\frac{\alpha}{2}$	$0_{\varepsilon\lambda.}$
ρ'	0	$-$	$\searrow$		0

σκευάζουμε τόν πίνακα μεταβολῶν τῆς ρ καί στή συνέχεια τήν καμπύλη ἀπό 0 ὡς π (σχ. 99). Τό ὑπόλοιπο μέρος κατασκευάζεται σάν συμμετρικό τοῦ πρώτου ὡς πρός τόν ἄξονα ox.

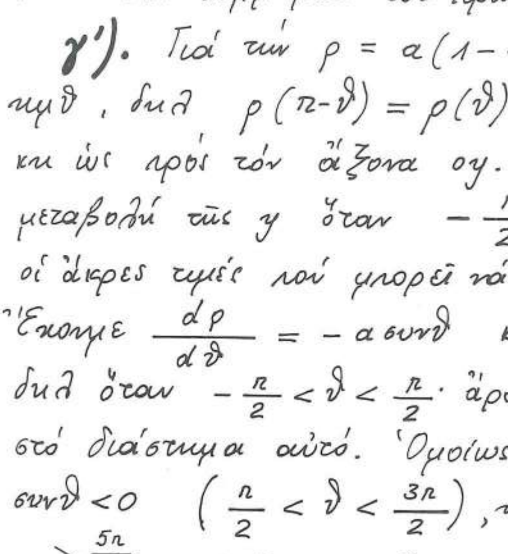
γ'). Γιά τήν $\rho = \alpha(1-\eta\mu\vartheta)$ παρατηροῦμε ὅτι $\eta\mu(\pi-\vartheta) = \eta\mu\vartheta$, δηλ. $\rho(\pi-\vartheta) = \rho(\vartheta)$ ἄρα ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα oy. Ἑπομένως ἀρκεῖ νά ἐξετάσουμε τή μεταβολή τῆς y ὅταν $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Ἐπειδή $-1 \leq \eta\mu\vartheta \leq 1$ οἱ ἄκρες τιμές πού μπορεῖ νά πάρει τό ρ εἶναι $0 \leq \rho \leq 2\alpha$. Ἔχουμε $\frac{d\rho}{d\vartheta} = -\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καί εἶναι $-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta < 0$ ὅταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta > 0$ δηλ. ὅταν $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$· ἄρα ἡ πολική ἀκτίνα ρ ἐλαττοῦται στό διάστημα αὐτό. Ὁμοίως ὅταν $-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta > 0$ δηλ. ὅταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta < 0$ $\left(\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}\right)$, ἡ πολική ἀκτίνα ρ αὐξάνει στό $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Ἐπειδή $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ἔχουμε $\rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha\left(1-\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\alpha}{2}$, $\rho\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\alpha}{2}$

$\rho\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \alpha\left(1-(-1)\right) = 2\alpha$

$\rho\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \alpha\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3\alpha}{2}$

καί $\rho(0) = \alpha(1-0) = \alpha = \rho(\pi)$.

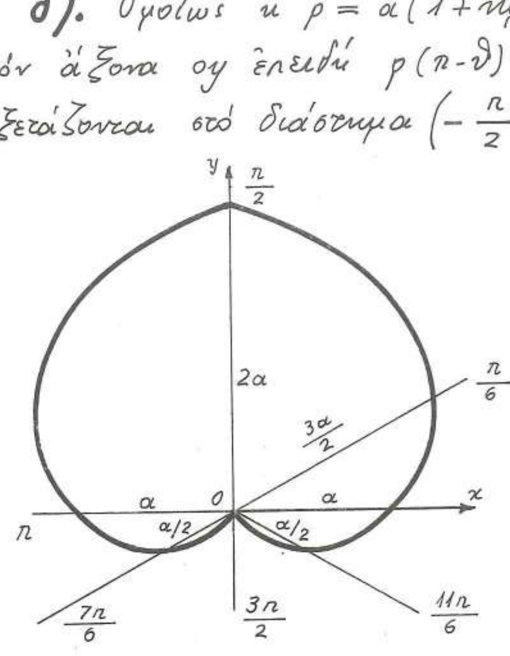
Μετά ἀπό τά συμπεράσματα αὐτά κατασκευάζουμε τόν πίνακα τιμῶν γιά τίς μεταβολές τῶν ϑ, ρ, ρ' καί ὕστερα τή γραφική παράσταση ἀπό τό $-\frac{\pi}{2}$ ὡς τό $\frac{\pi}{2}$. Τό ὑπόλοιπο τμῆμα εἶναι συμμετρικό τοῦ πρώτου ὡς πρός τόν oy (σχ. 100).



Σχ. 100

ϑ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	2α μέγ.	$\frac{3\alpha}{2}$	α	$\frac{\alpha}{2}$	0 ἐλ.
ρ'	0	—	↘		0

δ'). Όμοίως ή $\rho = \alpha(1+\eta\mu\vartheta)$ είναι συμμετρική ώς πρός τόν άξονα oy έπειδή $\rho(\pi-\vartheta)=\rho(\vartheta)$, όπότε οί μεταβολές της έξετάζονται στό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε $\frac{d\rho}{d\vartheta}=\rho'=\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$. καί είναι $\rho'>0$ όταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta>0$ δηλ. $-\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$ άρα ή ρ αύξάνει στό διάστημα αύτό. Άντίθετα ή ρ έλαττοῦται στό $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Κατασκευάζουμε ανάλογα τόν πίνακα τιμῶν μέ τίς μεταβολές τῶν



Σχ. 101

ϑ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0 ελ.	$\frac{\alpha}{2}$	α	$\frac{3\alpha}{2}$	2α μ.
ρ'	0	+	↗		0

ϑ, ρ, ρ' καί τή γραφική παράσταση τῆς καμπύλης (σχ. 101).

Όλες οί καμπύλες α), β), γ), δ) πού έξετάσαμε προηγουμένως λέγονται **καρδιοειδεῖς**. Άνήκουν στή κατηγορία τῶν έπικυκλοειδῶν καί είναι ή γραμμή πού γράφει ένα σταθερό σημείο Μ περιφέρειας ένός κύκλου διαμέτρου α, ό όποῖος κυλιέται στό έξωτερικό ένός άλλου κύκλου ίσης διαμέτρου. (Όταν ό κύκλος κυλιέται έσωτερικά ένός άλλου μεγαλυτέρου του, ή καμπύλη λέγεται ύποκυκλοειδής, κι όταν κυλιέται πάνω σέ εύθεία, κυκλοειδής) (σχ. 99). Ή έξίσωσή της σέ καρτεσιανές συντεταγμένες είναι: $(x^2+y^2)^2-2\alpha x(x^2+y^2)=\alpha^2y^2$. (πεπλεγμένη μορφή). Στήν καμπύλη α) (σχ. 98) άποδεικνύεται ότι τό Α είναι σημείο μεγίστου. Τό μῆκος τῆς καμπύλης άποδεικνύεται ότι είναι 8α, ένῶ τό έμβαδόν της $\frac{3}{2}\pi\cdot\alpha^2$.

ΤΕΛΟΣ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

1. Ἀναστασιάδου "Πραγματικές Συναρτήσεις"
2. Ἀναστασιάδου - Γεωργακόπουλου "Γενικά Μαθηματικά"
3. Ayres "Differential and Integral Calculus"
4. Ayres "Modern Algebra"
5. Bronstein - Semendjajew "Taschenbuch der Mathematik"
6. Δασκαλόπουλου "Ἀνώτερα Μαθηματικά"
7. Καζαντζῆ "Ἄλγεβρα"
8. Κανέλλου "Ἀσκήσεις Ἀλγέβρας"
9. Μπαρμπαστάθη "Μεγάλη Ἄλγεβρα"
10. Πάλλα "Μεγάλη Ἄλγεβρα"
11. Spiegel "Complex Variables"
12. Τζιβανίδη "Σημειώσεις Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν"